ENG 1403 – Circuitos Elétricos e Eletrônicos

Resposta Transitória de Circuitos com Elementos Armazenadores de Energia

Guilherme P. Temporão

1. Introdução

Nas últimas duas aulas, vimos como circuitos com capacitores e indutores se comportam em duas situações particulares. A primeira delas pode ser chamada de *instante inicial*, geralmente associado a alguma alteração em um circuito em estado previamente conhecido, como por exemplo uma chave que estava fechada por muito tempo e é subitamente aberta. A segunda nós chamamos de *regime permanente* (ou *regime estacionário*), uma situação na qual todas as tensões e correntes do circuito são constantes, isto é, não variam com o tempo.

Vamos tomar como exemplo o circuito da Figura 1, que possui apenas um capacitor, dois resistores idênticos, uma fonte de tensão constante (DC) de 12V e uma chave SPST. A chave ficou muito tempo aberta e é fechada no instante $t = 0$.

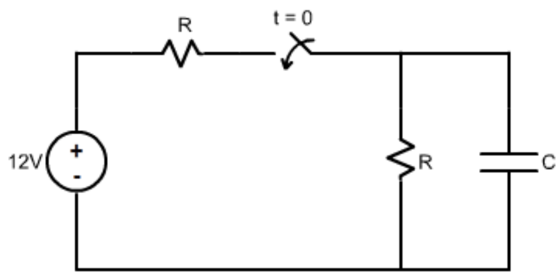

Fig. 1. Exemplo de circuito contendo elemento um armazenador de energia.

Percebam que, imediatamente antes da chave fechar ($t = 0^-$), o capacitor está descarregado, ou seja, a tensão em seus terminais é zero (**convença-se disso antes de continuar!**). Além disso, muito tempo após a chave ser fechada ($t \rightarrow \infty$), isto é, no regime permanente, o capacitor se transforma em um circuito aberto e a tensão em seus terminais é igual a 6V (**idem!**).

No entanto, nada sabemos sobre o que acontece com a tensão no capacitor em todos os instantes de tempo intermediários entre $t = 0$ e $t \rightarrow \infty$. A figura 2 ilustra algumas possibilidades de curvas que satisfazem as condições inicial ($v_C = 0$) e final ($v_C = 6V$).

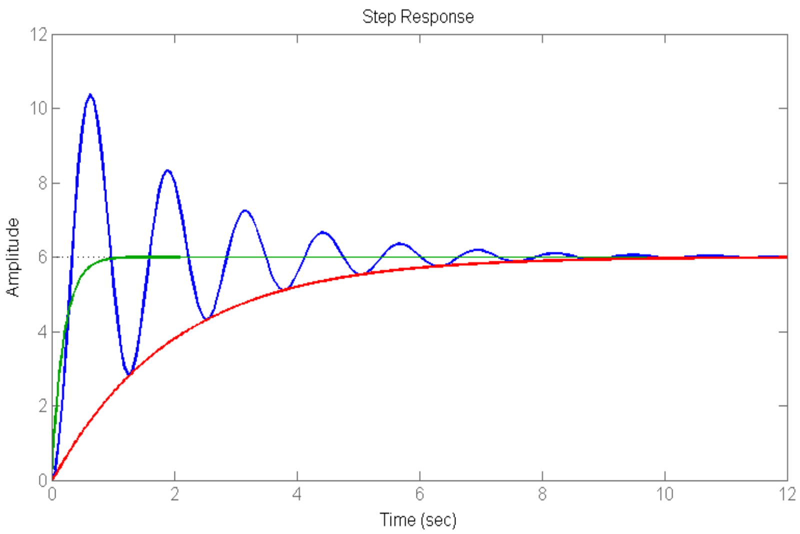

Fig. 2. Exemplos de respostas transitórias. Todas as curvas possuem o mesmo valor inicial e final (0 e 6V), mas no entanto se comportam de formas muito distintas entre esses instantes.

Qual das curvas da figura 2 corresponderia à variação de tensão no capacitor no circuito da figura 1? Nesse capítulo, queremos responder a perguntas desse tipo. Chamando a resposta do circuito nesse intervalo de tempo como *resposta transitória*, queremos em especial nos focar em duas questões fundamentais:

(a) Qual é o aspecto da resposta transitória? Ela oscila como a curva azul da Figura 2, ou é monótona crescente como na curva vermelha?

(b) Quanto tempo dura a resposta transitória? Isto é, em quanto tempo o regime permanente é estabelecido? (veja na Figura 2 – esse tempo corresponde ao tempo indicado por t_S).

Essas perguntas podem ser respondidas aplicando-se as Leis de Kirchhoff (KCL e/ou KVL) no circuito e resolvendo o sistema de equações resultantes. No entanto, lembrem que as relações tensão-corrente no capacitor e indutor envolvem *derivadas*, conforme as equações abaixo:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} \qquad \text{(capacitor)}$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \qquad \text{(indutor)}$$

É de se esperar, portanto, que a aplicação de KCL / KVL resulta em um sistema de *equações diferenciais*. Isso é muito diferente do que acontece com circuitos contendo apenas resistores e fontes, nos quais KVL / KCL resultam em um sistema de equações *algébricas*.

Vamos agora considerar um caso geral de equação diferencial que pode surgir em um circuito. Para isso, vamos usar as seguintes definições:

$y(t) \rightarrow$ variável *dependente* (ex.: tensão ou corrente em um elemento do circuito – isto é, uma saída do circuito)

$u(t) \rightarrow$ variável *independente* (ex.: uma tensão ou corrente de uma fonte independente – isto é, uma entrada do circuito)

Aplicando KCL/KVL no circuito, o sistema de equações diferenciais pode ser transformado em uma única equação diferencial ordinária (EDO) linear e a coeficientes constantes[1], que pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}&\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}} + \ldots + a_n y(t) = \\ &= b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m u(t)\end{aligned} \tag{1}$$

Lembrem-se agora do que vocês aprenderam em Cálculo IV: a equação diferencial (1) possui um conjunto infinito de soluções (que normalmente chamamos de uma *família* de soluções). Para que a resposta seja única, é preciso conhecer as *condições iniciais* da EDO, que correspondem por exemplo ao valor de $y(t)$ e de suas derivadas em $t = 0$:

$$y(0), \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0}, \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0}, \ldots, \left.\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} \tag{2}$$

Com o conhecimento das condições iniciais (2), podemos agora encontrar a solução de (1). Infelizmente (para vocês, alunos) a equação (1) não possui solução genérica em forma fechada. É preciso resolvê-la individualmente para cada caso particular, o que eu concordo com vocês que é algo muito desagradável!

Felizmente, apesar da solução de (1) costumar ser bem complicada, é possível simplificar o processo. Isso pode ser feito dividindo (1) em dois sub-problemas:

> *i*. Desliga-se as fontes de entrada e considera-se apenas a resposta do circuito devida às condições iniciais. Chamamos essa resposta de *solução homogênea* (y_H).
>
> *ii*. Faz-se as condições iniciais do circuito iguais a zero e considera-se a resposta devida apenas à entrada. Chamamos essa resposta de *solução particular* (y_P).

Usando o *princípio da superposição*, a resposta completa do circuito é simplesmente dada pela soma da solução particular com a solução homogênea:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) \tag{3}$$

Nas próximas seções, veremos como calcular essas soluções.

---

[1] Os coeficientes constantes são conseqüência do fato que o circuito é invariante no tempo – ou seja, os componentes do circuito são constantes.

2. Solução Homogênea

A solução homogênea é obtida quando a entrada é nula, ou seja, $u(t) = 0$. A partir da equação (1), obtemos:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + ... + a_n y(t) = 0 \quad (4)$$

A solução da EDO homogênea (4) é conhecida[2] e dada por uma combinação linear de exponenciais, que podemos escrever como:

$$y_H(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{\lambda_i t}; t \geq 0 \quad (5)$$

Onde $\{\lambda_i\}$ são as raízes do *polinômio característico* associado à EDO, dado por

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + ... + a_n = 0 \quad (6)$$

Dado que os coeficientes a_i são reais, as raízes do polinômio característico são compostas de números reais e de pares de números complexos conjugados[3]. Além disso, se o circuito possuir apenas elementos passivos, a parte real de todas as raízes deve ser negativa, de forma que (5) represente uma função *evanescente* (isto é, que tende a zero conforme *t* tende a infinito).

Os coeficientes k_i são obtidos através das condições iniciais (2). As condições iniciais, por sua vez, são obtidas pelas tensões iniciais nos capacitores e pelas correntes iniciais nos indutores do circuito.

2.1 Ordem de um circuito

É possível mostrar que o valor de *n* (chamado de "ordem" da EDO) é dado pelo número de elementos armazenadores de energia *independentes* do circuito. No caso de circuitos elétricos, dizemos que o circuito possui "ordem *n*".

Sempre que for possível associar capacitores ou indutores (em série ou em paralelo) de modo a obter um capacitor ou indutor equivalente, dizemos que os elementos são *dependentes*. Ou seja, dois elementos armazenadores de energia são independentes quando (*i*) são de naturezas diferentes ou (*ii*) não podem ser associados nem em série, nem em paralelo.

A figura 3 abaixo ilustra dois circuitos. O circuito da esquerda é de segunda ordem, pois apesar do capacitor e indutor estarem em paralelo, eles são de naturezas diferentes e portanto não podem ser associados e substituídos por um elemento equivalente. O circuito da direita é de primeira ordem, pois os dois indutores em paralelo podem ser substituídos por um indutor equivalente (**pergunta**: qual seria o valor da indutância equivalente nesse caso?)

---

[2] Em caso de dúvidas, consultem suas notas de aula e/ou o livro de Cálculo IV.
[3] Na verdade, a equação (5) não é genérica, pois quando há raízes reais e iguais, a solução é um pouco diferente. Veremos isso quando formos estudar circuitos de 2ª ordem.

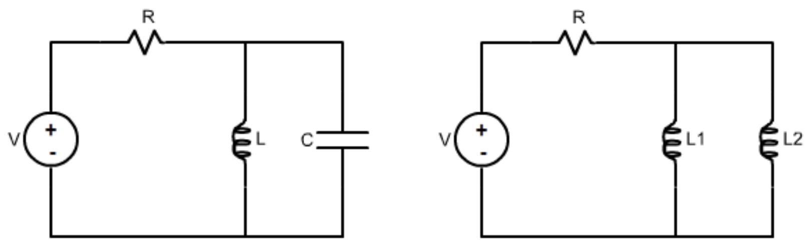

Fig. 3. Ilustração da diferença entre um circuito de 1ª ordem e um de 2ª ordem. No circuito da esquerda, L e C são independentes, enquanto no da direita L1 e L2 são dependentes pois podem ser associados em paralelo.

2.2 Tempo de assentamento

Nesse momento já podemos responder a uma das perguntas que fizemos no início do capítulo: em quanto tempo o regime permanente é estabelecido na solução homogênea?

A resposta é: quando $y_H(t)$ for aproximadamente igual a zero. Observe através da equação (5) que esse conceito só faz sentido se as raízes possuírem parte real negativa, caso contrário $y_H(t)$ tenderia a infinito, o que certamente é um absurdo se o circuito for passivo! Mas ao mesmo tempo, observe que, mesmo que as raízes sejam negativas, $y_H(t)$ nunca chega a valer exatamente zero.

Portanto, existem vários "critérios práticos" para se definir o tempo que a solução homogênea demora para chegar a um valor próximo de zero. Chamamos esse tempo de *tempo de assentamento* e o simbolizamos por t_S. Apenas para citar alguns exemplos:

- $y(t_S) < 0.01y(0)$ (ou seja, a saída é considerada zero quando ela vale menos de 1% do valor inicial)

- $t_S = \dfrac{5}{|\lambda_{\max}|}$ (onde $\lambda_{\max}$ é a raiz "dominante" – a de menor parte real em módulo)

Nos gráficos da figura 2, por exemplo, o tempo de assentamento da curva verde se encontra em torno de 1s, enquanto as curvas vermelha e azul possuem tempos de assentamento bem maiores, de 10s ou mais (dependendo do critério usado).

As duas definições acima são amplamente utilizadas na prática e serão discutidas em detalhes mais adiante.

3. Solução Particular

A solução particular é obtida fazendo-se todas as condições iniciais iguais a zero. A vantagem de se trabalhar com condições iniciais nulas é que, a partir de (1), podemos aplicar a Transformada de Laplace em ambos os lados da EDO para obtermos (usando algumas propriedades da Transformada de Laplace – veja se você consegue identificá-las)[4]:

$$
\begin{aligned}
&s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + a_2 s^{n-2} Y(s) + \ldots + a_n Y(s) = \\
&= b_0 s^m U(s) + b_1 s^{m-1} U(s) + \ldots + b_m U(s)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Rearrumando os termos de (7), obtemos

$$
\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n} \equiv H(s) \tag{8}
$$

Vocês podem (e devem!) reconhecer que a equação (8) é a *função de transferência* do circuito. De posse da função de transferência, podemos calcular a solução particular de pelo menos duas formas distintas:

1 - $y_P(t) = L^{-1}\{H(s) \cdot U(s)\}$

2 - $y_P(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) u(t-\tau) d\tau$

Usando o método (1), primeiramente calculamos $U(s)$, que é a transformada de Laplace de $u(t)$, e multiplicamos o resultado pela função de transferência H(s). Em seguida, usando uma tabela de transformadas de Laplace, calculamos a transformada inversa.

Já pelo método (2), calculamos diretamente a solução particular fazendo a integral de convolução entre a entrada e a resposta impulsional do circuito $h(t)$, que por sua vez corresponde à transformada inversa de $H(s)$.

No curso de Circuitos Elétricos e Eletrônicos, optaremos pelo método (1).

3.1 Relação com a solução homogênea

Comparem as equações (8) e (6). Vocês conseguem perceber que o denominador da função de transferência é exatamente o mesmo polinômio característico da solução homogênea? Esse resultado não é coincidência: de fato, o denominador de *qualquer* função de transferência de um circuito é sempre igual ao polinômio característico. Note que isso implica que todas as funções de transferência de um mesmo circuito possuem o mesmo denominador – apenas o numerador é distinto.

Isso significa que a *dinâmica* da solução particular é semelhante à da solução homogênea. Ou seja, podemos usar muitos resultados obtidos na solução homogênea – como por exemplo o conceito de tempo de assentamento – também na solução particular.

[4] Toda essa seção usa muitos resultados que vocês aprenderam em Sinais e Sistemas. Não vou entrar em nenhum detalhe aqui com relação a isso – em caso de dúvidas, recorram aos seus cadernos de ENG1400 e/ou ao livro “Signals and Systems” de Oppenheim & Willsky.

4. Conclusão

A resposta no tempo de um circuito contendo capacitores e indutores envolve a solução de uma equação diferencial ordinária, cuja ordem equivale ao numero de elementos armazenadores de energia independentes do circuito. Dado que essa equação não pode ser facilmente resolvida, sua solução é normalmente dividida em duas etapas.

A primeira destas etapas consiste em "desligar" as fontes independentes do circuito (i.e., fazer a função de entrada do circuito igual a zero) de forma a obter uma solução que leve em conta apenas as condições iniciais do circuito. Ela é chamada de *solução homogênea* do circuito.

A segunda etapa consiste em "desligar" as condições iniciais, ou seja, considerar que todos os capacitores e indutores estão inicialmente descarregados, e a partir daí obter a função de transferência do circuito, $H(s)$. Com o conhecimento da função de transferência e do sinal de entrada, podemos calcular a resposta usando uma tabela de transformadas de Laplace. Essa resposta é chamada de *solução particular*.

A solução completa é dada simplesmente pela soma das soluções particular e homogênea, de acordo com o princípio da superposição. A solução completa pode ser dividida em duas partes: uma resposta transitória (que possui uma duração finita) e uma resposta em regime permanente (que possui duração infinita). O tempo que o circuito leva para atingir o regime permanente, chamado de tempo de assentamento, depende apenas das raízes do polinômio característico. Nos próximos capítulos, veremos como esses conceitos se aplicam aos circuitos de primeira e segunda ordens.