



**Romulo Brito da Silva**

## **Filtros de derivação invariantes**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Thomas Lewiner

Rio de Janeiro  
Abril de 2013



**Romulo Brito da Silva**

## **Filtros de derivação invariantes**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

**Prof. Thomas Lewiner**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC–Rio

**Prof. Juliana Vianna**

Instituto de Matemática — UFRJ

**Prof. Ralph Teixeira**

Instituto de Matemática — UFF

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 12 de Abril de 2013

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Romulo Brito da Silva**

Graduado em Matemática bacharelado pela Universidade Federal Fluminense em 2009. Bolsista de Iniciação Científica CNPq no tema Tópicos em Computação Algébrica. Atualmente aluno de mestrado em Matemática com bolsa CAPES pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro na área de Matemática Aplicada.

#### Ficha Catalográfica

Silva, Romulo B.

Filtros de derivação invariantes / Romulo Brito da Silva; orientador: Thomas Lewiner. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2013.

v., 69 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Filtros de derivação. 3. Estimativa de derivada. 4. Aproximação geométrica. 5. Modelagem Geométrica. 6. Matemática Discreta. I. Lewiner, Thomas. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

Agradeço à Deus, por todas as experiências proporcionadas. As boas em que saboreei com muita felicidade e às não tão boas, mas que aproveitei ao máximo para tirar algum aprendizado.

À minha noiva Ananda por estar ao meu lado em todos esses momentos e por todas as palavras de incentivo e carinho.

A minha família pelo total apoio em todos os sentidos, por terem confiado em minha capacidade e me incentivado nos momentos em que mais precisei.

Agradeço ao meu orientador Thomas Lewiner por todos os seus conselhos, que vão além do âmbito profissional, por sua paciência, sinceridade, confiança e principalmente amizade. À sua esposa Debora e sua filha Rivka, por terem cedido tantas vezes a atenção que se destinaria a elas.

Aos meus amigos na PUC-Rio, Renata Nascimento, João Paixão e Allyson Cabral pelos conselhos e apoio, sem os quais tudo se tornaria bem mais pesado.

A todos os funcionários e professores do Departamento de Matemática da PUC.

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

## Resumo

Silva, Romulo B.; Lewiner, Thomas. **Filtros de derivação invariantes**. Rio de Janeiro, 2013. 69p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Os dados adquiridos nos experimentos físicos e nas imagens geométricas ou médicas são tipicamente discretas.

Esses dados são interpretados como amostras de uma função desconhecida, porém cujas derivadas servem para caracterizar o dado. Por exemplo, o movimento de um fluido é descrito por um campo de velocidades, uma curva é caracterizada pela evolução da sua curvatura, as imagens médicas são geralmente segmentadas por estimativas de gradiente, entre outros. É possível obter derivadas coerentes a partir de filtragem dos dados. Porém, em dados multi-dimensionais, os filtros usuais privilegiam direções alinhadas com os eixos, o que pode gerar problemas quando essas derivadas são interpretadas geometricamente. Por exemplo, a curvatura estimada dependeria da orientação da curva, perdendo o sentido geométrico da curvatura. O objetivo do presente trabalho é melhorar a invariância geométrica dos filtros de derivadas.

## Palavras-chave

Filtros de derivação; Estimação de derivada; Aproximação geométrica; Modelagem Geométrica; Matemática Discreta.

## Abstract

Silva, Romulo B.; Lewiner, Thomas (advisor). **Invariant derivative filters**. Rio de Janeiro, 2013. 69p. M.Sc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Typical data acquired in physical experiments or in geometrical or medical imaging are discrete. This data is generally interpreted as samples of an unknown function, whose derivatives still serve for the data characterisation. For example, the movement of a fluid is described as a velocity field, a curve is characterised by the evolution of its curvature, images used in medical sciences are usually segmented by estimates of their gradients, among others. It is possible to obtain coherent derivatives by filtering the data. However, with multidimensional data, the usual filters present a bias towards to favor directions aligned with the axis, which may induce problems when the derivatives are interpreted geometrically. For example, the estimated curvature would depend on the orientation of the curve, loosing the geometric meaning of the curvature. The goal of the present work is to improve the geometric invariance of derivative filters.

## Keywords

Derivative filter; Derivative estimation; Geometric approximation; Geométric Modeling; Discret Mathematics.

# Sumário

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1   | Introdução  | 13 |
| 2   | Caso unidimensional   | 16 |
| 2.1 | Definição do filtro   | 17 |
| 2.2 | Filtragem dos monômios  | 18 |
| 2.3 | Análise do filtro usando expansão de Taylor                   | 18 |
| 2.4 | Filtro polinomial por parte e suavidade                       | 20 |
| 2.5 | Graus de liberdade  | 21 |
| 2.6 | Método de resolução   | 22 |
| 2.7 | Análise polinomial dos filtros                                | 24 |
| 2.8 | Análise clássica dos filtros                                  | 30 |
| 3   | Caso bidimensional separável                                  | 35 |
| 3.1 | Notação multi-índice  | 35 |
| 3.2 | Filtro multi-dimensional e análise de Taylor                  | 35 |
| 3.3 | Filtro bidimensional separável                                | 36 |
| 3.4 | Construção dos filtros  | 37 |
| 3.5 | Resultados  | 38 |
| 4   | Caso bidimensional não separável                              | 42 |
| 4.1 | Filtro bidimensional polinomial por parte                     | 42 |
| 4.2 | Construção do filtro  | 42 |
| 4.3 | Resultados com filtro não separável                           | 43 |
| 5   | Filtros invariantes por rotações                              | 50 |
| 5.1 | Invariância por rotação                                       | 50 |
| 5.2 | Análise de Taylor com rotação                                 | 51 |
| 5.3 | Rotação da derivada no caso suave                             | 52 |
| 5.4 | Resultado do filtro não separável com invariância por rotação | 52 |
| 6   | Conclusão   | 61 |
|     | Referências Bibliográficas                                    | 62 |
|     | Sumário das notações  | 64 |
| .1  | Script Maple  | 65 |

## Lista de figuras

- 2.1 Em vermelho o filtros de interpolação *sinc* em verde o de derivada *cosc* com suporte compacto. As imagens foram geradas a partir do código Maple que se encontra no apêndice 16
- 2.2 A reconstrução ocorre no interior dos intervalos  $[kT, (k + 1)T]$ , onde a função é discretizada. 18
- 2.3 Filtros polinomiais por parte de interpolação  $w^0$  e derivada  $w^1$  com suporte  $[-M, M[ = [-2, 2[$ . 20
- 2.4 À esquerda, o filtro spline de interpolação  $w^0$  gerado com parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 3$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . À direita, o resultado da convolução das amostras de  $f(t) = t^2$  com  $w$ . 24
- 2.5 À esquerda, o resultado da convolução das amostras de  $f(t) = t^3$  com o filtro spline de interpolação  $w^0$  gerado com parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 3$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . À direita temos o gráfico dos  $a_n(\tau)$  para essa configuração de parâmetros. Como desejado, o coeficiente  $a_2$  é identicamente nulo no intervalo  $[0, 1[$  e, portanto interpola a função  $f(t) = t^2$  de forma satisfatória. Porém, o coeficiente  $a_3$  apresenta variações que explicam o erro da figura à esquerda. 25
- 2.6 À esquerda, o filtro spline de interpolação gerado com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 1$ . No meio temos a análise dos coeficientes para essa configuração de parâmetros. O coeficiente  $a_2$  não é nulo e indica um deslocamento vertical na interpolação da função. À direita, o erro de interpolação da função  $f(t) = t^2$  evidencia esse deslocamento. 26
- 2.7 À esquerda, o filtro spline de interpolação gerado com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 3$ ,  $c = 2$ , e  $N = 2$ . No meio temos a análise dos coeficientes para essa configuração de parâmetros. O coeficiente  $a_3$  é nulo apesar disso não ter sido uma das restrições do sistema. À direita, verificamos a boa interpolação da função  $f(t) = t^3$ . 26
- 2.8 À esquerda, o filtro spline de primeira derivada  $w^1$  gerado com parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 3$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . No meio, temos a análise dos coeficientes  $a_n$  para esse filtro. O coeficiente responsável por recuperar a primeira derivada não apresenta variações no intervalo  $[0, 1[$  e, portanto reconstrói a derivada da função  $f(t) = t^2$  de forma satisfatória. À direita, o resultado da convolução das amostras de  $f(t) = t^2$  com  $w$ . 27
- 2.9 À esquerda, o filtro spline de segunda derivada gerado com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 3$ ,  $c = 2$ , e  $N = 2$ . No meio temos a análise dos coeficientes para essa configuração de parâmetros. O coeficiente  $a_3$  é nulo apesar disso não ter sido uma das restrições do sistema. À direita, verificamos a boa interpolação da segunda derivada da função  $f(t) = t^3$ . 27



- 2.10 À esquerda, o filtro de primeira derivada com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 4$ ,  $c = 2$ , e  $N = 2$ , escolhendo os  $A_{i,j}$  livres iguais a  $-1$ . No meio temos a análise dos coeficientes  $a_n$  para essa configuração de parâmetros: os coeficientes  $a_0(\tau) = a_2(\tau) = 0$  e  $a_1(\tau) = 1$  como desejado. Entretanto, o coeficiente  $a_3$  é grande, indicando um erro significativo ao filtrar funções de grau maior do que 2. À direita, observamos que esse erro é de fato grande ao filtrar a função  $f(t) = t^3$ . 28
- 2.11 À esquerda, o filtro de primeira derivada com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 4$ ,  $c = 2$ , e  $N = 2$ , escolhendo os  $A_{i,j}$  livres iguais a  $+1$ . No meio temos a análise dos coeficientes  $a_n$  para essa configuração de parâmetros: os coeficientes  $a_0(\tau) = a_2(\tau) = 0$  e  $a_1(\tau) = 1$  como desejado. Entretanto, o coeficiente  $a_3$  é grande, indicando um erro significativo ao filtrar funções de grau maior do que 2. À direita, observamos que esse erro é de fato grande ao filtrar a função  $f(t) = t^3$ . 29
- 2.12 Reconstrução da derivada da função  $f(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t) + \sin(4t) \in L^2(\mathbb{R})$  pela convolução com o filtro de derivada ideal  $\text{cosc}$ . A taxa de amostragem está dentro do limite de Nyquist. 30
- 2.13 À esquerda, a interpolação utiliza a convolução das amostras da função  $f(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t) + \sin(4t) \in L^2(\mathbb{R})$  com filtro derivada  $\text{cosc}(\tau)$ . A distancia entre as amostras  $T = 0.7$  a extensão do filtro leva em consideração a média de 6 pontos, dentro do limite de Nyquist. À direita, a aproximação da derivada da função é realizada utilizando o filtro de derivação spline. Os parâmetros utilizados foram  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . Nesse caso, por se tratar de uma função trigonométrica, esperamos uma melhor aproximação da função via o filtro derivada ideal 31
- 2.14 Interpolação utiliza a convolução das amostras da função  $f(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t) + \sin(4t) \in L^2(\mathbb{R})$  com filtro derivada  $\text{cosc}(\tau)$ : à esquerda, a distância entre as amostras  $T = 0.4$  é dentro do limite de Nyquist  $\frac{\pi}{4} \approx 0,78$ ; à direita, a distância entre as amostras  $T = 2.0$  sai desse limite, gerando um erro considerável. 32
- 2.15 Aproximação da derivada função realizada utilizando o filtro de derivação spline. À esquerda, os parâmetros utilizados foram  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . À direita, os parâmetros utilizados foram  $T = 1$ ,  $M = 4$ ,  $d = 4$ ,  $c = 1$ , e  $N = 3$ . No caso de funções trigonométricas, o aumento de grau de aproximação  $N$  não gera melhorias significativas. 32
- 2.16 À esquerda, a interpolação utiliza a convolução das amostras da função  $f(t) = t \notin L^2(\mathbb{R})$  com núcleo  $\text{cosc}$ . A extensão do filtro realiza a aproximação com a média de 6 amostras. À direita, a aproximação da função é realizada utilizando o filtro de derivação spline. Os parâmetros utilizados foram  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ , e ordem de derivação  $k = 1$ . 33

- 2.17 À esquerda, a análise dos coeficientes  $a_n$  do filtro *cosc* e à direita os coeficientes do filtro spline, para  $n = 0, 1, 2$ . Os parâmetros utilizados foram  $T = 1$ ,  $M = 4$ ,  $d = 4$ ,  $c = 1$ , e  $N = 3$ , e ordem de derivação  $k = 1$ . 34
- 2.18 À esquerda, a interpolação utiliza a convolução com as amostras da função  $f(t) = t^2 \sin(t) \notin L^2$  com núcleo  $\text{cosc}(\tau)$  obtendo assim, a aproximação da derivada de  $f(t)$ . A extensão do filtro leva em consideração a média de 40 pontos. À direita, a aproximação da função é realizada utilizando o filtro de derivação spline. Os parâmetros utilizados foram  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ , e ordem de derivação  $k = 1$ . 34
- 3.1 À esquerda, o filtro separável  $w = u \star v$ :  $u$  foi gerado para interpolar, com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 3$ ,  $c = 2$ , e  $N = 2$ , e  $v$  foi gerado para interpolar, com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 1$ . À direita,  $u$  e  $v$  foram gerados com os mesmo parâmetros, exceto que  $v$  foi gerado para aproximar a primeira derivada. 38
- 3.2 Coeficientes  $A_{i,j}$  dos filtros da Figura 3.1. À esquerda, apenas o plano correspondendo a  $a_{00}$  é não nulo, e é constante na altura 1. À direita, apenas o plano correspondendo a  $a_{01}$  é não nulo, e é constante na altura 1. 39
- 3.3 À esquerda, a função  $f(s, t) = s^2 + t^2 s$  é representada com estilo *wireframe*. A superfície sólida representa a aproximação gerada pelo filtro de interpolação da Figura 3.1. À direita é representada com estilo *wireframe* a derivada em  $t$ , da mesma função e a superfície sólida é a aproximação gerada pelo filtro de derivação da Figura 3.1. 39
- 3.4 À esquerda, a função  $f(s, t) = s^2 + t^2 + \sin(st)$  é representada com estilo *wireframe*. A superfície sólida representa a aproximação gerada pelo filtro de interpolação da Figura 3.1. À direita é representada com estilo *wireframe* a derivada em  $t$ , da mesma função e a superfície sólida é a aproximação gerada pelo filtro de derivação da Figura 3.1. 40
- 3.5 À esquerda, o filtro separável  $w = u \star v$ :  $u$  foi gerado para interpolar, com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ , e  $v$  foi gerado para aproximar a primeira derivada, com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 1$ . À direita, o filtro separável  $w = u \star v$ :  $u$  foi gerado com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 3$ ,  $c = 2$ , e  $N = 3$  e  $v$  com  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 3$ ,  $c = 2$ , e  $N = 2$ , com  $u$  interpolador e  $v$  aproximando a primeira derivada. 40
- 3.6 A função  $f(s, t) = s^2 + t^2 + \sin(st)$  é representada com estilo *wireframe*. A superfície sólida representa a aproximação gerada pelos filtros de derivação  $\partial_t$  da Figura 3.5. 41
- 4.1 Continuidade entre domínios. 43

- 4.2 À esquerda, o filtro separável  $w^{(1,1)} = u \star u$ :  $u$  foi gerado para aproximar a primeira derivada, com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 3$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . À direita, o filtro não separável  $w^{(1,1)}$  foi gerado para aproximar a derivada  $\partial_s \partial_t$ , com os parâmetros  $T_s = T_t = 1$ ,  $L = M = 3$ ,  $d_s + d_t = 7$ ,  $c = 1$ , e  $N = 3$ . As duas primeiras linhas mostram o núcleo  $w^{(1,1)}$ . A última linha mostra os coeficientes  $a_{(\alpha_1, \alpha_2)}(\sigma, \tau)$  para cada filtro para  $\alpha_1, \alpha_2 \leq 3$ . 45
- 4.3 Os filtros da Figura 4.2 aplicados nas funções  $f(s, t) = t^2 s^2$  (primeira linha) e  $f(s, t) = t^4 s^2$  (segunda linha). O primeiro caso é dentro das garantias de ambos os filtros. Avaliando o erro cometido em relação à solução exata (em estilo *wireframe*) das filtrações, apenas visualmente, é difícil notar diferenças entre as duas aproximações. Mas ao avaliar o erro numérico das aproximações, vemos que o erro associado ao filtro não separável  $e_{w^{(1,1)}} = \int_{-0.9}^{0.9} \int_{-0.9}^{0.9} |(\partial_s \partial_t f(s, t) - f_w(s, t))|^2 ds dt = 68.51643347$  e maior do que o encontrado no filtro separável  $e_{w^{(1,1)}} = \int_{-0.9}^{0.9} \int_{-0.9}^{0.9} |(\partial_s \partial_t f(s, t) - f_w(s, t))|^2 ds dt = 4.238301024$  46
- 4.4 À esquerda, o filtro separável  $w^{(0,1)} = u \star v$ :  $u$  foi gerado para interpolar, com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 3$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ , e  $v$  foi gerado para aproximar a primeira derivada com os mesmos parâmetros. À direita, o filtro não separável  $w^{(0,1)}$  foi gerado para aproximar a derivada  $\partial_t$ , com os parâmetros  $T_s = T_t = 1$ ,  $L = M = 3$ ,  $d_s + d_t = 4$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . As duas primeiras linhas mostram o núcleo  $w^{(0,1)}$ . A última linha mostra os coeficientes  $a_{(\alpha_1, \alpha_2)}(\sigma, \tau)$  para cada filtro para  $\alpha_1, \alpha_2 \leq 3$ . 48
- 4.5 Os filtros da Figura 4.4 aplicados nas funções  $f(s, t) = t^2 s$  (primeira linha) e  $f(s, t) = t^4 s$  (segunda e terceira linhas). O primeiro caso está dentro das garantias de ambos os filtros. Podemos observar o erro cometido em relação à solução exata (em estilo *wireframe*). Na filtração da função  $f(s, t) = t^4 s$  o erro cometido é maior para o filtro não separável, onde encontramos  $e_{w^{(0,1)}} = \int_{-0.9}^{0.9} \int_{-0.9}^{0.9} |(\partial_t f(s, t) - f_w(s, t))|^2 ds dt = 34.94589617$ . Já no filtro separável o erro  $e_{w^{(0,1)}} = \int_{-0.9}^{0.9} \int_{-0.9}^{0.9} |(\partial_t f(s, t) - f_w(s, t))|^2 ds dt = 3.997138160$ . Na última linha é usada numa escala mais ampla. 49
- 5.1 Curvas de nível zero da função  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{9} - \frac{y}{4} - 1$  e da sua rotação  $g = f^\theta$ . O ângulo da rotação é  $-\frac{\pi}{3}$ : se a função é rodada por  $R_\theta$ , as suas curvas implícitas são rodadas por  $R_{-\theta}$ . Isso pode ser verificado usando o ponto marcado na curva azul  $(x, y) = (\frac{-3\sqrt{5}}{2}, 1)$  satisfazendo  $f(x, y) = 0$ . O ponto  $(x', y')$  marcado na curva vermelha satisfaz  $g(x', y') = 0$ , ou seja  $f(R_\theta(x', y')) = 0$ , isto é  $(x', y') = R_\theta^{-1}(x, y) = (\frac{-3\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-3\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{2})$ . 51

- 5.2 Filtros de derivação  $\partial_\sigma$ , gerados com os parâmetros  $T_s = T_t = 1$ ,  $L = M = 3$ ,  $d_s + d_t = 4$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . À esquerda, o filtro foi gerado sem condição de invariância. À direita, o filtro foi gerado com a condição de invariância para  $\theta = \frac{\pi}{6}$  e  $\theta = -\frac{\pi}{6}$ . Acreditamos que a perda de simetria no filtro se deve a escolha dos coeficientes  $A_{ij;kl}$  na resolução do sistema. A ultima linha mostra os coeficientes  $a_\alpha$  para  $|\alpha| \leq 3$ . Ambos os filtros respeitam as restrições de derivação! 53
- 5.3 Filtros de derivação  $\partial_\tau$ , gerados com os parâmetros  $T_s = T_t = 1$ ,  $L = M = 3$ ,  $d_s + d_t = 4$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . À esquerda, o filtro foi gerado sem condição de invariância. À direita, o filtro foi gerado com a condição de invariância para  $\theta = \frac{\pi}{6}$  e  $\theta = -\frac{\pi}{6}$ . Acreditamos que a perda de simetria no filtro se deve a escolha dos coeficientes  $A_{ij;kl}$  na resolução do sistema. A ultima linha mostra os coeficientes  $a_\alpha$  para  $|\alpha| \leq 3$ . Ambos os filtros respeitam as restrições de derivação! 54
- 5.4 Aproximação de  $\partial_s f^{-\frac{\pi}{6}}$  (cima) e  $\partial_t f^{-\frac{\pi}{6}}$  (baixo) com  $f(s, t) = st + t^2$  e  $f(s, t) = st^2 + t^2$  respectivamente, usando os filtros das Figuras 5.2 e 5.3. Como esses filtros foram gerados com ordem de aproximação de Taylor  $N = 2$ , as estimativas são exatas (primeira linha). No caso do filtro com a condição de invariância rotacional, observamos um resultado visualmente melhor (segunda linha) que se confirma numericamente pelo cálculo do erro ( $L_2(I \subset \mathbb{R}^2)$ )  $e_{w(0,1)} = \int_{-0.9}^{0.9} \int_{-0.9}^{0.9} |(\partial_t f(s, t) - f_w(s, t))|^2 ds dt = 0.004673869605$  se comparado com o filtro sem essa condição  $e_{w(0,1)} = \int_{-0.9}^{0.9} \int_{-0.9}^{0.9} |(\partial_t f(s, t) - f_w(s, t))|^2 ds dt = 0.4816143118$ . 56
- 5.5 Aproximação de  $\partial_s f^{-\frac{\pi}{6}}$  com  $f(s, t) = s + t^2 \cdot \sin(st)$  usando os filtros da Figura 5.2. O filtro com condição de invariância (à direita) aproxima melhor  $\partial_s f^{-\frac{\pi}{6}}$ , desenhada com estilo *wireframe*. 57
- 5.6 Filtros de derivação  $\partial_\tau$ , gerados com os parâmetros  $T_s = T_t = 1$ ,  $L = M = 2$ ,  $d_s + d_t = 2$ ,  $c = 0$ , e  $N = 2$ . À esquerda, o filtro foi gerado sem condição de invariância. À direita, o filtro foi gerado com a condição de invariância para  $\theta = \frac{\pi}{6}$  e  $\theta = -\frac{\pi}{6}$ . Observe que pedimos apenas continuidade portanto os filtros apresentam vértices. A segunda linha mostra os coeficientes  $a_\alpha$  para  $|\alpha| \leq 3$ . A última linha mostra o resultado da aproximação de  $\partial_t f^{-\frac{\pi}{6}}$ , onde  $f(s, t) = \sin(t)$ . Onde notamos que o filtro com a condição de invariância rotacional, obtem um resultado melhor tanto numérico, quanto qualitativo. 59
- 5.7 Filtros de derivação  $\partial_\tau$ , gerados com os parâmetros  $T_s = T_t = 1$ ,  $L = M = 2$ ,  $d_s + d_t = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . À esquerda, o filtro foi gerado sem condição de invariância. À direita, o filtro foi gerado com a condição de invariância para  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ . A segunda linha mostra os coeficientes  $a_\alpha$  para  $|\alpha| \leq 2$ . A última linha mostra o resultado da aproximação de  $\partial_t f^{\frac{\pi}{4}}$ , onde  $f(s, t) = \sin(t)$ . 60

# 1

## Introdução

Filtros lineares foram desenvolvidos inicialmente no contexto de processamento de sinais (13). Para sinais bidimensionais como imagens, filtros são frequentemente usados para destacar características que sejam pertinentes. Em particular, os filtros derivadas são utilizados com frequência para obter informações geométricas, por exemplo, detecção de arestas (3). Em certas aplicações de filtros, é desejável que o resultado seja invariante por certas transformações, isto é, dada uma imagem, a filtragem da mesma, antes e após as transformações, não gerem resultados diferentes.

No contexto da simulação de fenômenos físicos (7, 4), calcular o resultado de operadores diferenciais no caso discreto acarreta erros na precisão e visualização dos fenômenos físicos. Geralmente, a aproximação das derivadas é obtidas por meio de uma média ponderada da função nos vértices da grade. Novamente, as simetrias do fenômeno físico impõem certas invariâncias que deveriam ser respeitadas pelas aproximação das derivadas.

Em computação gráfica, estamos interessados em visualizar objetos ou aproximar funções que foram discretizados por algum equipamento ou método (2). Um problema particular em computação gráfica é a estimativa das normais de objetos (6, 10), essenciais para calcular a interação com a luz e assim produzir uma imagem do objeto. No caso de dados volumétricos, desejamos visualizar uma superfície que foi discretizada como nível de uma função amostrada numa grade regular. A normal pode ser obtida construindo um filtro derivada que pretende reconstruir o gradiente da função implícita. Ao rodar a superfície, essa normal tem que acompanhar a rotação. Um filtro de derivada não invariante vai gerar variações da normal e assim artefatos no desenho da superfície (14).

## Contribuições da dissertação

O presente trabalho obteve motivações nos artigos desenvolvidos por Möller *et al.* (9, 11, 10, 12) na construção de filtros splines de interpolação

e derivada. Os autores abordam um método para a construção de filtros de aproximação da derivada, exatos no caso de sinais polinomiais. O presente trabalho se baseia nessa abordagem e explicita vários detalhes além dos trabalhos originais, e apresenta uma extensão para gerar filtros que sejam invariantes por rotação.

A construção dos filtros fica a cargo da solução de um sistema linear, onde os coeficientes do filtro polinomial por partes são determinados a partir de algumas exigências. Entretanto, os autores não abordam a complexidade do sistema envolvido e tão pouco as condições para que o sistema tenha soluções. Nesta dissertação discutimos a complexidade do sistema linear para o caso unidimensional e bidimensional separável e obtemos uma fórmula que serve de parâmetro para a solução do sistema linear, levando em conta as possíveis configurações de parâmetros na construção dos filtros. O presente trabalho ainda estende a construção de Möller *et al.* para gerar filtros bi-dimensionais não separáveis. Além disso, esta dissertação trata o problema da construção de operadores diferenciais discretos com a propriedade de invariância por rotações em imagens que possuem uma representação implícita.

## Trabalhos Relacionados

Möller *et al.* (11) desenvolvem uma técnica para a construção de filtros polinomiais por partes para a reconstrução da função regularmente amostrada ou a aproximação das suas derivadas. O filtro é definido para coincidir com as estimativas dos primeiros termos do polinômio de Taylor, como sugerido no seu trabalho anterior (9). Entretanto, não são consideradas na construção do filtro exigências com respeito à continuidade e suavidade do mesmo. Essa deficiência é superada num trabalho posterior (12).

No contexto das funções harmônicas, a filtragem usual é baseada em análise de Fourier (13). Em particular, foram propostas extensões dos filtros usuais para obter invariância por rotações (14). Posteriormente, Condat *et al.* (5) desenvolvem um método genérico para indicar o erro médio quadrático cometido na aproximação das funções e suas derivadas. Com esse método é possível construir esquemas de reconstrução que possuem maior precisão olhando para o erro cometido no domínio da frequência.

No contexto de visualização volumétrica é interessante estimar o gradiente não apenas nos pontos em que a função é discretizada, mas em qualquer ponto do objeto. O objetivo é obter uma melhor estimativa das normas para o *shading*. Como o impacto na qualidade das imagens tem forte relação com a

estimativas das normais, Möller (10) desenvolve um esquema para a estimativa do gradiente de uma função implícita. Ele mostra as vantagens dessa abordagem em relação aos métodos usuais, combinando diferenças finitas com interpolação trilinear, levando em consideração a precisão numérica e a qualidade visual das imagens recuperadas. Seguindo essa linha, os artigos de Hossain *et al.*(8) e de Alin *et al.*(1) desenvolvem métodos para a estimativa do gradiente, estendendo os trabalhos anteriores (10, 11) para funções multidimensionais amostradas em reticulados.

## 2

## Caso unidimensional

A maneira mais direta de aproximar a derivada de um sinal amostrado é de reconstruir o sinal, e depois calcular a derivada da reconstrução. Para reconstruir um sinal de forma compatível com a derivação, i.e. de forma linear invariante por translação, pode-se usar uma filtragem linear do sinal amostrado, e usar a transformada de Fourier para caracterizar o resultado (14). No caso de amostragem regular e sinais de banda limitada, uma reconstrução é obtida pela convolução das amostras com o filtro de interpolação ideal  $\text{sinc}(x)$ , e a derivação pode ser obtida por convolução por  $\text{sinc}'(x) = \text{cosc}(x)$  (Figura 2.1). A primeira vista, esse resultado provado por Shannon-Whittaker (13, 15) parece simplificar a tarefa de reconstrução de um sinal. Entretanto, a prática não é tão simples.

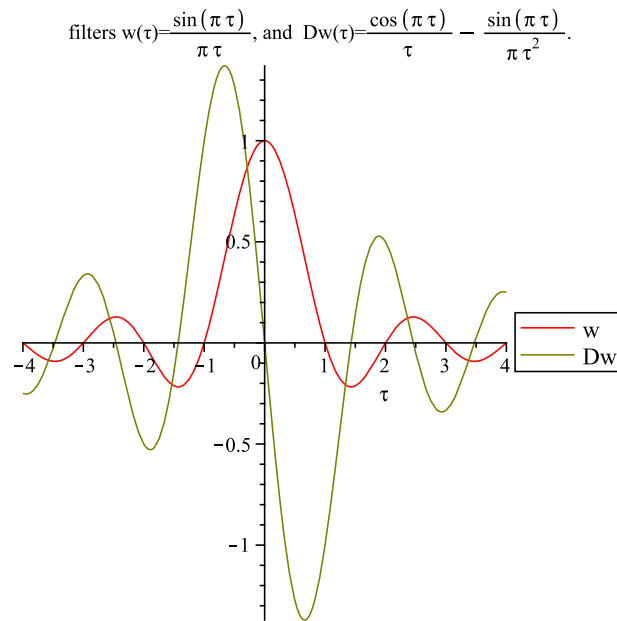


Figura 2.1: Em vermelho o filtros de interpolação  $\text{sinc}$  em verde o de derivada  $\text{cosc}$  com suporte compacto. As imagens foram geradas a partir do código Maple que se encontra no apêndice

A primeira restrição é que o núcleo de convolução  $\text{sinc}(x)$  tem tamanho infinito, o que inviabiliza a implementação exata do mesmo. Ao truncar



o núcleo, acarretamos erros na reconstrução conhecidos como fenômeno de Gibbs (16) ou *ringing artifacts*. O erro é ainda amplificado ao aproximar a derivada.

A segunda restrição é que o teorema de reconstrução vale apenas para funções de quadrado integráveis ( $L^2$ ), e ainda com banda limitada. Isso exclui os polinômios, amplamente usados no contexto da computação gráfica. Esses casos motivam a procura por filtros de reconstrução e derivação em casos de banda ilimitada, e com filtros de domínio finito.

Para maiores detalhes sobre filtragem e estimação de derivada de banda limitada, referimos ao livro de Teixeira (14). No presente trabalho, estudaremos mais o caso polinomial, na linha dos trabalhos de Möller *et al.*(11).

## 2.1

### Definição do filtro

Consideramos um sinal discreto  $(f_k, k \in \mathbb{Z})$ , amostrado de uma função a priori desconhecida  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . A amostragem é regular de período  $T > 0$ :  $f_k = f(kT)$ . Um filtro de convolução com domínio dentro de  $[-M, M]$ , com núcleo  $w$  gera uma função filtrada  $f_w(t)$  definida por:

$$f_w(t) = f_k * w(t) = \sum_{k=-M}^M f_k \cdot w\left(\frac{t}{T} - k\right) \quad . \quad (2-1)$$

Note que estamos interessados em avaliar a função filtrada tanto nos pontos de amostragem  $kT$  como no interior, diferente de outros métodos nos quais a reconstrução é realizada apenas nos pontos de amostragem, como por exemplo diferença finita ou máscaras de derivação (14).

Para construir um núcleo  $w$  de forma (quase-)independente do período de amostragem  $T$ , introduzimos a variável  $\tau$  variando de 0 a 1 dentro do intervalo de amostragem  $[iT, (i+1)T]$ :

$$\tau = \frac{t}{T} - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor, \quad i = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor, \quad t = iT + \tau \quad ,$$

onde  $\lfloor x \rfloor$  é a função parte inteira de  $x$  (Figura 2.2). Geralmente consideramos  $i = 0$ , e assim  $t = \tau \in [0, 1[$  quando  $T = 1$ . Assim o filtro pode ser escrito como:

$$f_w(\tau) = f_k * w(\tau) = \sum_{k=-M}^M f_k \cdot w(\tau - k) \quad \text{com } \tau \in [0, 1[ \quad . \quad (2-2)$$

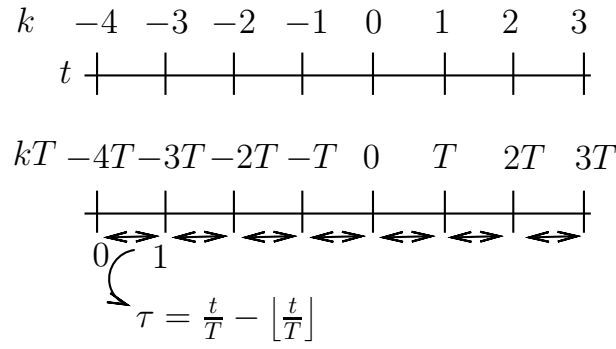


Figura 2.2: A reconstrução ocorre no interior dos intervalos  $[kT, (k+1)T]$ , onde a função é discretizada.

## 2.2

### Filtragem dos monômios

No caso de aproximação da derivada no contexto de funções polinomiais, esperamos que a filtragem por  $w$  retorne exatamente as derivadas das funções monômios  $x^n$  em todos os pontos  $\tau T, \tau \in [0, 1[$ , ou de forma equivalente retorne as derivadas exatas em 0 de todas funções monômios transladadas normalizadas  $X^{n,\tau}(x) = \frac{1}{n!} (x - \tau T)^n$ .

Dado o filtro  $w$ , denotamos por  $a_n^w(\tau) = X_k^{n,\tau} * w(0)$  o resultado em 0 da filtragem do sinal discreto amostrado da função  $X^{n,\tau}(x) = \frac{1}{n!} (x - \tau T)^n$ :

$$a_n^w(\tau) = X_k^{n,\tau} * w(0) = \sum_{k=-M}^M \frac{1}{n!} (kT - \tau T)^n \cdot w(\tau - k) \quad .$$

Fatorando:

$$a_n^w(\tau) = \sum_{k=-M}^M \frac{T^n}{n!} (k - \tau)^n \cdot w(\tau - k) \quad . \quad (2-3)$$

Em particular, se o filtro por  $w$  aproxima a  $N$ -ésima derivada  $\partial^N$ , queremos que:

$$a_n^w(\tau) = X_k^{n,\tau} * w(0) \approx \partial^N (X^{n,\tau})(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < N \\ 1 & \text{se } n = N \end{cases} \quad . \quad (2-4)$$

## 2.3

### Análise do filtro usando expansão de Taylor

Seguindo Möller *et al.*(11), podemos analisar o filtro por  $w$  no contexto polinomial, usando a expansão de Taylor. Escrevemos a expansão em série de Taylor da função a ser reconstruída  $f$  (considerada suficientemente regular) em torno do ponto  $t$  para cada amostra  $kT$ :

$$f(kT) = \sum_{n=0}^N \frac{(kT-t)^n}{n!} \partial^n f(t) + O\left((kT-t)^{N+1}\right) \quad . \quad (2-5)$$

Substituindo na definição do filtro (2-1), obtemos

$$\begin{aligned} f_w(t) &= \sum_{k=-M}^M f(kT) \cdot w\left(\frac{t}{T} - k\right) \\ &= \sum_{k=-M}^M \left( \sum_{n=0}^N \frac{(kT-t)^n}{n!} \partial^n f(t) + O\left((kT-t)^{N+1}\right) \right) \cdot w\left(\frac{t}{T} - k\right) \\ &= \sum_{n=0}^N \left( \sum_{k=-M}^M \frac{(kT-t)^n}{n!} w\left(\frac{t}{T} - k\right) \right) \cdot \partial^n f(t) + O\left((MT-t)^{N+1}\right) \quad . \end{aligned}$$

Para  $t \in [0, T[$ , termo entre parênteses é idêntico ao resultado da filtragem das funções monômios (2-3):

$$f_w(t) = \sum_{n=0}^N a_n^w\left(\frac{t}{T}\right) \partial^n f(t) + O\left((MT-t)^{N+1}\right) \quad , \quad (2-6)$$

ou caso  $T=1$  e  $t = \tau \in [0, 1[$ , temos:

$$f_w(\tau) = \sum_{n=0}^N a_n^w(\tau) \partial^n f(\tau) + O\left((M-\tau)^{N+1}\right) \quad . \quad (2-7)$$

A fórmula acima descreve a filtragem de uma função qualquer como combinação linear das suas derivadas. Ela coloca em evidência os coeficientes  $a_n^w(\tau)$ , que permitem determinar a natureza (interpolação ou derivada) do filtro, bem como sua precisão.

A partir desses coeficientes podemos impor condições na hora de construir o filtro, estendendo a filtragem das funções monômios (2-4). Se considerarmos funções polinomiais de grau até  $N$ , a fórmula (2-6) é exata (o termo  $O()$  é nulo). Nesse contexto, para aproximar exatamente o operador  $\partial^n$ , com  $0 \leq n \leq N$ , os coeficientes  $a_n^w(\tau)$  do filtro  $w$  têm que satisfazer:

$$a_n^w(\tau) = 1, \quad \text{e} \quad \forall 0 \leq n' \leq N, \quad n' \neq n : \quad a_{n'}^w(\tau) = 0 \quad . \quad (2-8)$$

A ordem de aproximação  $N$  escolhida é o equivalente da frequência de Nyquist (15) no caso da análise de Fourier: se a função amostrada é um polinômio de grau menor ou igual a  $N$ , a reconstrução é exata, caso contrário não há garantia de reconstrução. O resultado vale em termos de aproximação: se a função é bem aproximada pelos seus  $N$  primeiros coeficientes de Taylor, a reconstrução será de boa qualidade.

## 2.4

## Filtro polinomial por parte e suavidade

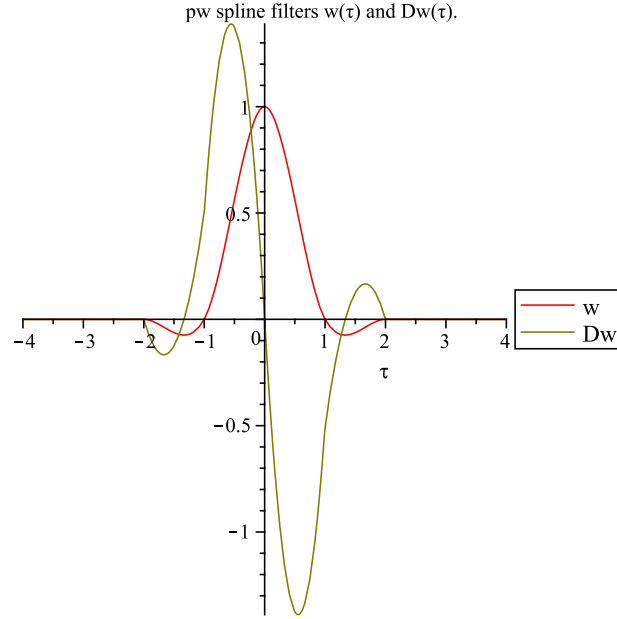


Figura 2.3: Filtros polinomiais por parte de interpolação  $w^0$  e derivada  $w^1$  com suporte  $[-M, M[ = [-2, 2[$ .

Uma forma de calcular os filtros  $w$  a partir dos coeficientes  $a_n^w$  é escrevê-los como funções polinomiais por partes no domínio  $[-M, M[$  (Figura 2.3):

$$w(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau < -M \\ \omega_{-M}(\tau) & \text{se } -M \leq \tau < -M+1 \\ \omega_{-M+1}(\tau) & \text{se } -M+1 \leq \tau < -M+2 \\ \vdots & \\ \omega_{M-2}(\tau) & \text{se } M-2 \leq \tau < M-1 \\ \omega_{M-1}(\tau) & \text{se } M-1 \leq \tau < M \\ 0 & \text{se } M \leq \tau \end{cases} . \quad (2-9)$$

Assim, em cada intervalo  $[i, i+1[$  do domínio do filtro, temos um polinômio  $\omega_i(\tau)$  de grau  $d$ , cujos coeficientes denotamos por  $A_{i;j}$

$$\omega_i(\tau) = \sum_{j=0}^d A_{i;j} \tau^j, \quad \tau \in [i, i+1[, \quad i \in \{-M, \dots, M-1\} . \quad (2-10)$$

Além das restrições (2-8) para o filtro ser uma derivação exata para polinômios até a ordem  $N$ , para o filtro ser continuamente diferenciável até a ordem  $c$ , os coeficientes  $A_{i;j}$  têm que satisfazer as equações polinomiais para  $1 \leq l \leq c$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial^l \omega_{-M}(-M) = 0, \\ \forall i \in \{-M+1, \dots, M-2\}, & \partial^l \omega_i(i+1) = \partial^l \omega_{i+1}(i+1), \\ \partial^l \omega_{M-1}(M) = 0 \end{array} \right. \quad (2-11)$$

## 2.5

### Graus de liberdade

As restrições (2-8) e (2-11) fornecem um sistema de equações lineares nos coeficientes  $A_{i,j}$ . Podemos determinar o grau de liberdade desse sistema, para minimizar o custo computacional (proporcional ao custo de avaliar a convolução por  $w$ ) e maximizar a ordem de aproximação  $N$  com um filtro ainda suficientemente suave.

De um lado, o nosso filtro é definido pelos coeficientes  $A_{i,j}$  para os domínios  $i \in \{-M, \dots, M-1\}$  e graus  $j \in \{0, \dots, d\}$ , ou seja temos  $2M(d+1)$  coeficientes a determinar. Do outro lado, os coeficientes de cada polinômio definindo o filtro  $w$  devem satisfazer às restrições de diferenciabilidade (2-11), e a aproximação da derivação (2-8).

O sistema (2-11) é composto de  $2M+1$  equações lineares nos coeficientes  $A_{i,j}$  (uma a cada ponto  $-M, -M+1, \dots, M-1, M$ ), totalizando para diferenciabilidade até ordem  $C^c$ :  $(2M+1) \cdot (c+1)$  equações lineares.

As equações de aproximação da derivação (2-8) são equações polinomiais. Podemos determinar o grau delas a partir da fórmula no caso de  $w$  polinomial por parte:

$$a_n^w(\tau) = \sum_{k=-M}^M \frac{T^n}{n!} (k-\tau)^n \cdot \omega_{-k}(\tau-k) = \sum_{k=-M}^M \left( \frac{T^n}{n!} (k-\tau)^n \cdot \sum_{j=0}^d A_{(-k)j} (\tau-k)^j \right).$$

Ou seja, a equação do  $a_n^w$  é polinomial de grau  $d+n$  em  $\tau$ , gerando  $d+n+1$  equações igualando os coeficientes dos polinômios. Cada uma dessas equações é linear nos coeficientes  $A_{i,j}$ . Para os coeficientes  $a_n^w$  com  $n \in \{0, \dots, N\}$ , teremos um número de equações lineares igual a:

$$\sum_{n=0}^N (n+d+1) = \frac{N(N+1)}{2} + d(N+1) + N+1 = (N+1) \cdot \left( \frac{N}{2} + d+1 \right).$$

Em suma, temos  $(2M+1) \cdot (c+1) + (N+1) \cdot \left( \frac{N}{2} + d+1 \right)$  equações determinando  $2M(d+1)$  incógnitas. Note que as equações geradas podem não ser linearmente independentes. O grau de liberdades do sistema é então no

mínimo

$$g \geq 2M(d+1) - \left[ (2M+1) \cdot (c+1) + (N+1) \cdot \left( \frac{N}{2} + d+1 \right) \right] .$$

Observamos em particular que se  $c = d$ , ou seja se pedimos que o filtro seja tão contínuo quanto o grau dos seus polinômios, teremos apenas um polinômio e não estritamente uma função polinomial por parte. De fato, nesse caso, o parâmetro  $M$  some da equação. Caso  $c$  for maior que  $d$ , nada podemos ressaltar sem antes analisar a independência das equações no sistema linear.

## 2.6

### Método de resolução

Caso o grau de liberdades seja exatamente  $g = 0$ , podemos resolver exatamente o sistema e determinar os coeficientes  $A_{i,j}$ . É o caso por exemplo para o filtro de primeira derivada quando  $M = 2$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$  e  $N = 2$ . Nesse caso, apesar de ter 22 equações e apenas 12 incógnitas, tem apenas 12 equações linearmente independentes. Assim, com  $T = 1$ , obtemos o seguinte filtro de primeira derivação (Figuras ?? e 2.14):

$$w^1(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < -2 \\ 2 + 2\tau + \frac{1}{2}\tau^2 & -2 \leq \tau < -1 \\ -2\tau - \frac{3}{2}\tau^2 & -1 \leq \tau < 0 \\ -2\tau + \frac{3}{2}\tau^2 & 0 \leq \tau < 1 \\ -2 + 2\tau - \frac{1}{2}\tau^2 & 1 \leq \tau < 2 \\ 0 & 2 \leq \tau \end{cases} .$$

Porém, não é possível calcular as outras derivadas, pois algumas equações deixam de ser dependentes.

Outro exemplo é com  $M = 2$ ,  $d = 3$ ,  $c = 1$  e  $N = 2$ . Nesse caso, apesar de ter 25 equações e apenas 16 incógnitas, não têm nenhum grau livre. Assim, com  $T = 1$ , obtemos o seguinte filtro reconstrução (Figura 2.4), e de primeira

(Figura 2.8) e segunda derivação:

$$w^0(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < -2 \\ 2 + 4\tau + \frac{5}{2}\tau^2 + \frac{1}{2}\tau^3 & -2 \leq \tau < -1 \\ 1 - \frac{5}{2}\tau^2 - \frac{3}{2}\tau^3 & -1 \leq \tau < 0 \\ 1 - \frac{5}{2}\tau^2 + \frac{3}{2}\tau^3 & 0 \leq \tau < 1 \\ 2 - 4\tau + \frac{5}{2}\tau^2 - \frac{1}{2}\tau^3 & 1 \leq \tau < 2 \\ 0 & 2 \leq \tau \end{cases},$$

$$w^1(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < -2 \\ 2 + 2\tau + \frac{1}{2}\tau^2 & -2 \leq \tau < -1 \\ -2\tau - \frac{3}{2}\tau^2 & -1 \leq \tau < 0 \\ -2\tau + \frac{3}{2}\tau^2 & 0 \leq \tau < 1 \\ -2 + 2\tau - \frac{1}{2}\tau^2 & 1 \leq \tau < 2 \\ 0 & 2 \leq \tau \end{cases},$$

$$w^2(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < -2 \\ -4 - 12\tau - 9\tau^2 - 2\tau^3 & -2 \leq \tau < -1 \\ -2 + 9\tau^2 + 6\tau^3 & -1 \leq \tau < 0 \\ -2 + 9\tau^2 - 6\tau^3 & 0 \leq \tau < 1 \\ -4 + 12\tau - 9\tau^2 + 2\tau^3 & 1 \leq \tau < 2 \\ 0 & 2 \leq \tau \end{cases}.$$

Em outros casos, pode existir algum grau livre, como usando  $M = 1$ ,  $d = 3$ ,  $c = 0$  e  $N = 0$  para o filtro de interpolação. Nesse caso, podemos expressar todas as soluções em função de dois coeficientes, por exemplo  $A_{23}$  e  $A_{24}$ :

$$w^2(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < -1 \\ 1 + (1 - A_{2,3} - 2A_{2,4})\tau + (-A_{2,3} - 3A_{2,4})\tau^2 - A_{2,4}\tau^3 & -1 \leq \tau < 0 \\ 1 + (-1 - A_{2,3} - A_{2,4})\tau + A_{2,3}\tau^2 + A_{2,4}\tau^3 & 0 \leq \tau < 1 \\ 0 & 1 \leq \tau \end{cases}.$$

Não propomos aqui uma maneira particular de escolher os valores de  $A_{23}$  e  $A_{24}$ . Nos experimentos, apenas zeramos todos esses coeficientes livres. Nesse

caso, obtemos:

$$w^0(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < -1 \\ 1 - 2\tau - 4\tau^2 - \tau^3 & -1 \leq \tau < 0 \\ 1 - 3\tau + \tau^2 + \tau^3 & 0 \leq \tau < 1 \\ 0 & 1 \leq \tau \end{cases}.$$

Em todos os casos, usamos o Maple para resolver o sistema de equações. O script Maple é anexado no apêndice.

## 2.7

### Análise polinomial dos filtros

Nessa seção avaliamos os filtros construídos com o método de Möller *et al.*(11) descrito acima.

#### 2.7.1

##### Filtros de interpolação

Um caso ideal é de interpolação da função  $f(t) = t^2$  no caso  $N = 2$ . Essa filtragem corresponde ao coeficiente  $a_0$ , que de fato é identicamente nulo (Figura 2.4).

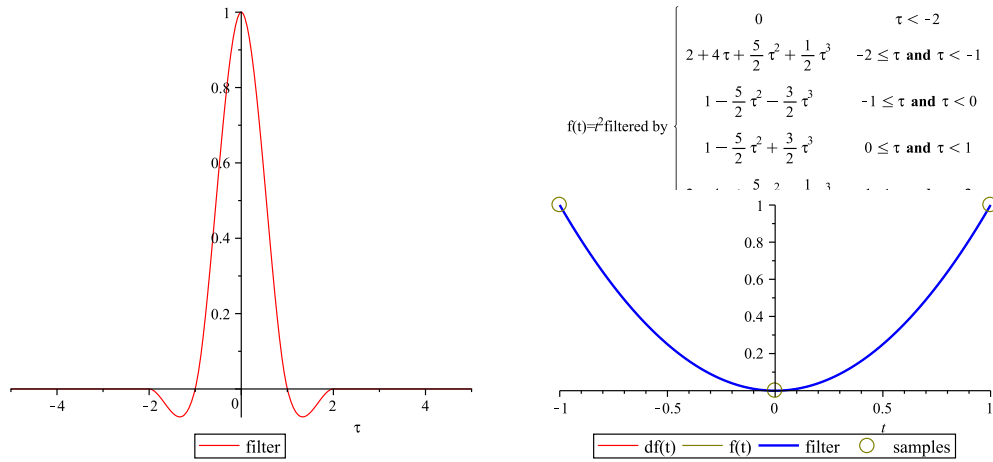


Figura 2.4: À esquerda, o filtro spline de interpolação  $w^0$  gerado com parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 3$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . À direita, o resultado da convolução das amostras de  $f(t) = t^2$  com  $w$ .

Se usarmos o mesmo filtro para interpolar a função  $f(t) = t^3$ , saímos das garantias do filtro, pois  $f$  tem um grau maior que a ordem de aproximação de Taylor  $N = 2$  escolhida para gerar o filtro. A interpolação apresenta um



erro, que de fato é similar às variações do coeficiente  $a_3$  do filtro, pois apenas a terceira derivada captura as variações de  $t^3$  (Figura 2.5).

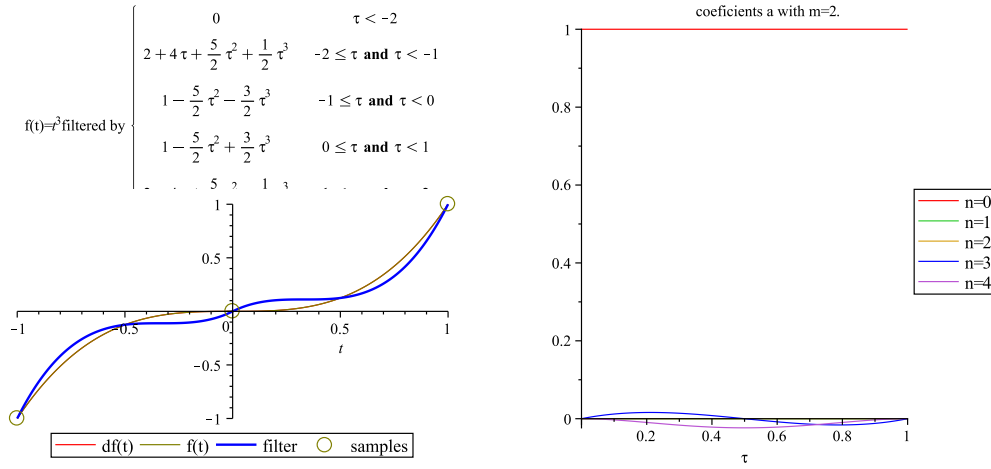


Figura 2.5: À esquerda, o resultado da convolução das amostras de  $f(t) = t^3$  com o filtro spline de interpolação  $w^0$  gerado com parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 3$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . À direita temos o gráfico dos  $a_n(\tau)$  para essa configuração de parâmetros. Como desejado, o coeficiente  $a_2$  é identicamente nulo no intervalo  $[0, 1[$  e, portanto interpola a função  $f(t) = t^2$  de forma satisfatória. Porém, o coeficiente  $a_3$  apresenta variações que explicam o erro da figura à esquerda.

Observamos um fenômeno similar usando uma ordem de aproximação  $N = 1$  para aproximar a função  $f(t) = t^2$ , porém nesse caso o coeficiente  $a_2$  é constante, mas não nulo (Figura 2.6).

Pode ocorrer do filtro ter sido gerado para uma ordem de aproximação de Taylor e a solução alcançar uma ordem maior, por exemplo no filtro de interpolação com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 3$ ,  $c = 2$ , e  $N = 2$  (Figura 2.7).

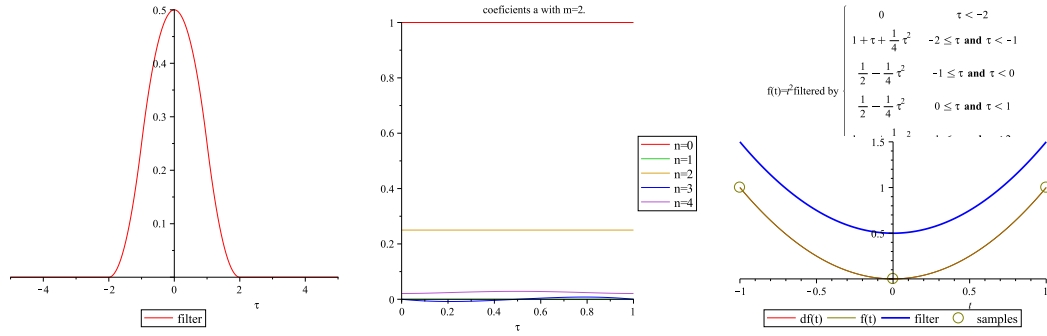


Figura 2.6: À esquerda, o filtro spline de interpolação gerado com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 1$ . No meio temos a análise dos coeficientes para essa configuração de parâmetros. O coeficiente  $a_2$  não é nulo e indica um deslocamento vertical na interpolação da função. À direita, o erro de interpolação da função  $f(t) = t^2$  evidencia esse deslocamento.

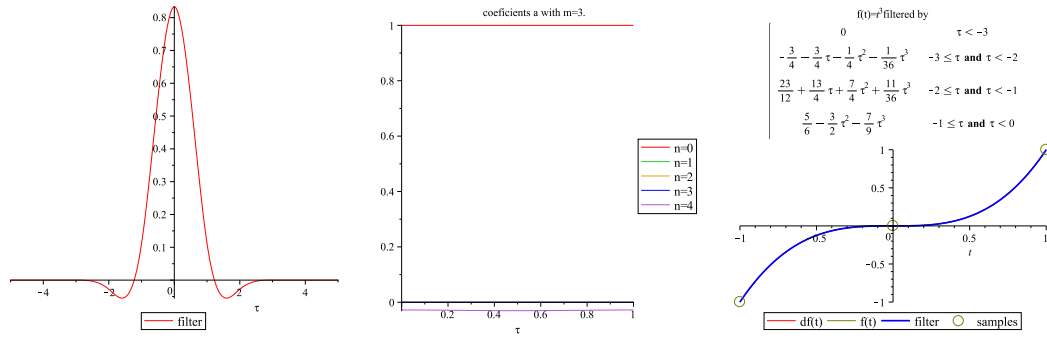


Figura 2.7: À esquerda, o filtro spline de interpolação gerado com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 3$ ,  $c = 2$ , e  $N = 2$ . No meio temos a análise dos coeficientes para essa configuração de parâmetros. O coeficiente  $a_3$  é nulo apesar disso não ter sido uma das restrições do sistema. À direita, verificamos a boa interpolação da função  $f(t) = t^3$ .

## 2.7.2

## Filtros de derivação

Os resultados para os filtros de derivação são muito similares aos de interpolação.

Um caso ideal é de derivação da função  $f(t) = t^2$  no caso  $N = 2$ . Essa filtragem corresponde ao coeficiente  $a_1$ , que de fato é identicamente nulo (Figura 2.8).

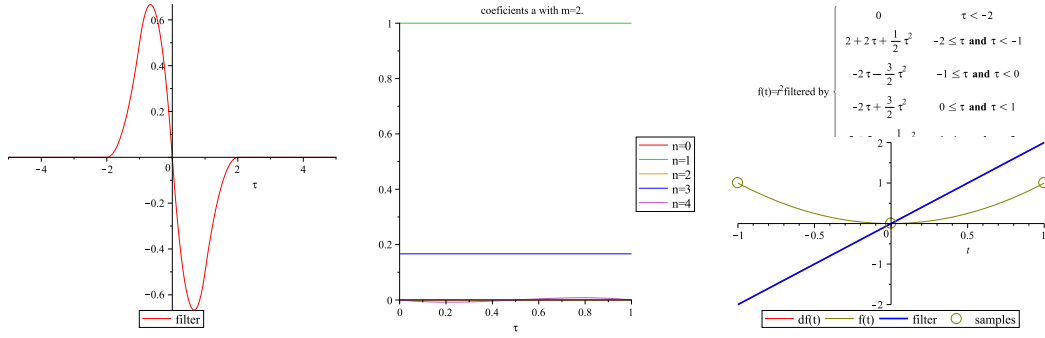


Figura 2.8: À esquerda, o filtro spline de primeira derivada  $w^1$  gerado com parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 3$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . No meio, temos a análise dos coeficientes  $a_n$  para esse filtro. O coeficiente responsável por recuperar a primeira derivada não apresenta variações no intervalo  $[0, 1[$  e, portanto reconstrói a derivada da função  $f(t) = t^2$  de forma satisfatória. À direita, o resultado da convolução das amostras de  $f(t) = t^2$  com  $w$ .

Pode ocorrer do filtro ter sido gerado para uma ordem de aproximação de Taylor e a solução alcançar uma ordem maior, por exemplo no filtro de segunda derivada com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 3$ ,  $c = 2$ , e  $N = 2$  (Figura 2.9).

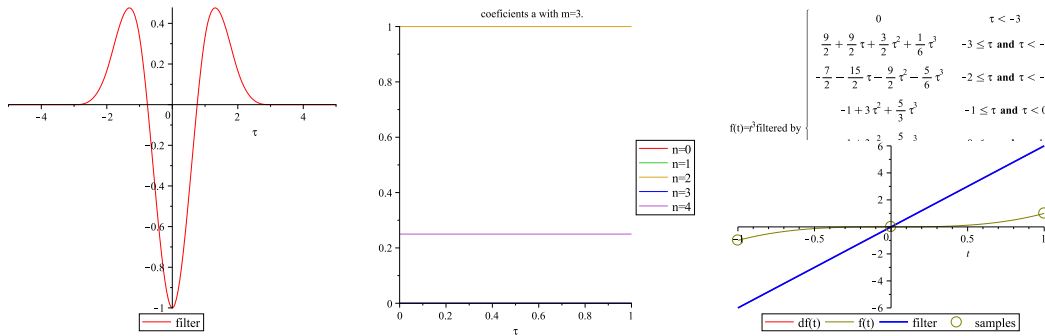


Figura 2.9: À esquerda, o filtro spline de segunda derivada gerado com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 3$ ,  $c = 2$ , e  $N = 2$ . No meio temos a análise dos coeficientes para essa configuração de parâmetros. O coeficiente  $a_3$  é nulo apesar disso não ter sido uma das restrições do sistema. À direita, verificamos a boa interpolação da segunda derivada da função  $f(t) = t^3$ .

## 2.7.3

## Soluções com graus livres

Na solução do sistema linear quando o grau de liberdade é diferente de zero, podemos impor o valor de alguns coeficientes  $A_{i;j}$ . Não propomos uma escolha fundamentada desses coeficientes, mas nessa seção iremos observar o efeito dessas escolhas. Dentro das condições ideais, em particular se filtramos uma função polinomial de grau menor que  $N$ , o resultado é exato independentemente da escolha dos coeficientes livres. Apresentaremos então resultados com funções polinomiais de grau maior do que  $N$ .

No caso do filtro de primeira derivada com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 4$ ,  $c = 2$ , e  $N = 2$ , ao escolher os  $A_{i;j}$  livres iguais a  $-1$  perdemos a propriedade de simetria desejada para um filtro de primeira derivação (Figura 2.10).

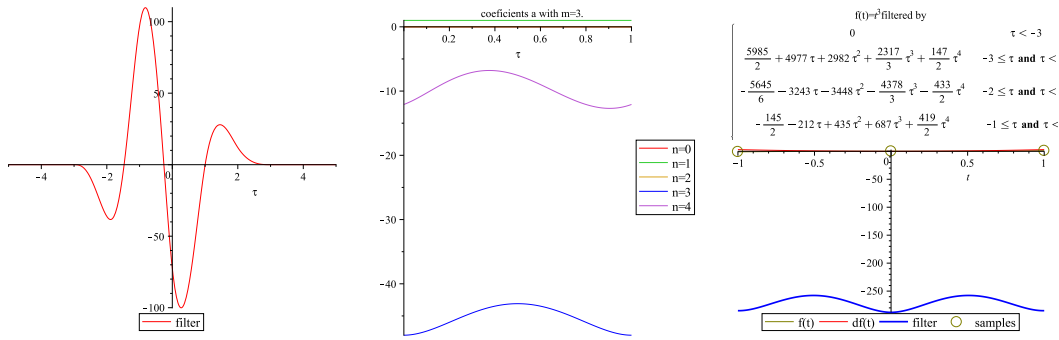


Figura 2.10: À esquerda, o filtro de primeira derivada com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 4$ ,  $c = 2$ , e  $N = 2$ , escolhendo os  $A_{i;j}$  livres iguais a  $-1$ . No meio temos a análise dos coeficientes  $a_n$  para essa configuração de parâmetros: os coeficientes  $a_0(\tau) = a_2(\tau) = 0$  e  $a_1(\tau) = 1$  como desejado. Entretanto, o coeficiente  $a_3$  é grande, indicando um erro significativo ao filtrar funções de grau maior do que 2. À direita, observamos que esse erro é de fato grande ao filtrar a função  $f(t) = t^3$ .

O resultado é similar, mas com sinal oposto, ao fixar os coeficientes livres para 0 (Figura 2.11).

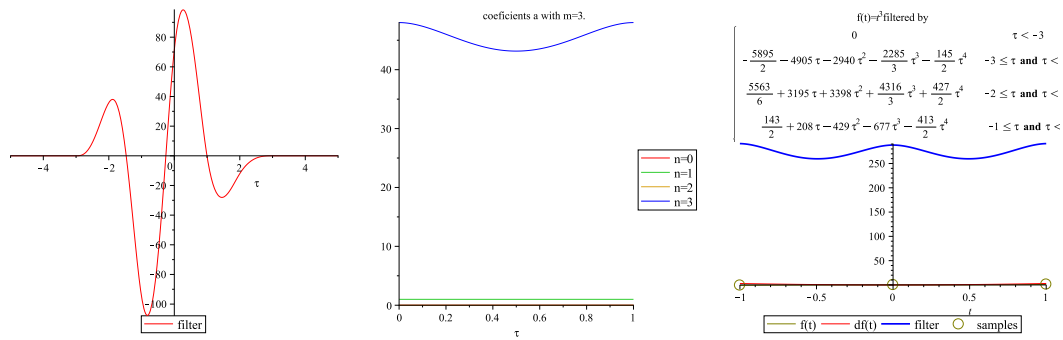


Figura 2.11: À esquerda, o filtro de primeira derivada com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 4$ ,  $c = 2$ , e  $N = 2$ , escolhendo os  $A_{i;j}$  livres iguais a  $+1$ . No meio temos a análise dos coeficientes  $a_n$  para essa configuração de parâmetros: os coeficientes  $a_0(\tau) = a_2(\tau) = 0$  e  $a_1(\tau) = 1$  como desejado. Entretanto, o coeficiente  $a_3$  é grande, indicando um erro significativo ao filtrar funções de grau maior do que 2. À direita, observamos que esse erro é de fato grande ao filtrar a função  $f(t) = t^3$ .

## 2.8

### Análise clássica dos filtros

Nesta seção, efetuamos a análise dos filtros do ponto de vista da análise de Fourier, comparando com o filtro ideal do seno cardinal *sinc* nos casos ideais (banda limitada, frequência de amostragem acima da frequência de Nyquist) e saindo desses casos. Esperamos que, nas condições ideais, os filtros construídos no contexto polinomial tenham resultados piores que o *sinc* visto que eles não foram desenhados para esse contexto.

#### 2.8.1

##### Exemplo banda limitada e amostragem na frequência de Nyquist

O filtro *sinc* reconstrói quase um sinal no caso ideal, e nesse caso *cosc* aproxima muito bem a derivada (Figura 2.12). Porém, a avaliação numérica

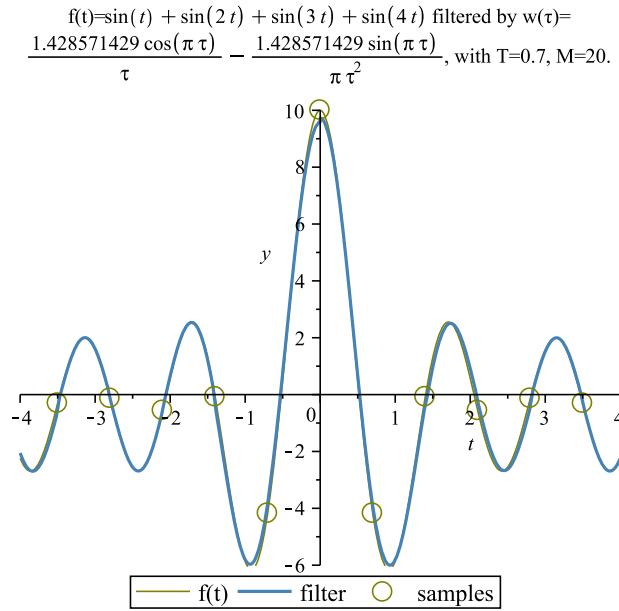


Figura 2.12: Reconstrução da derivada da função  $f(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t) + \sin(4t) \in L^2(\mathbb{R})$  pela convolução com o filtro de derivação ideal *cosc*. A taxa de amostragem está dentro do limite de Nyquist.

da convolução requer um filtro com domínio compacto, precisando truncar o domínio do filtro. Quando descartamos coeficientes pequenos do *sinc*, o resultado ainda é muito preciso (Figura 2.12), mas diminuindo a máscara  $M$ , o resultado piora evidenciando o fenômeno de Gibbs ou *ringing artifacts* (Figura 2.13). O filtro de derivação polinomial tem um domínio fixo, mas tem resultado pior sobre funções senoidais (Figura 2.13).

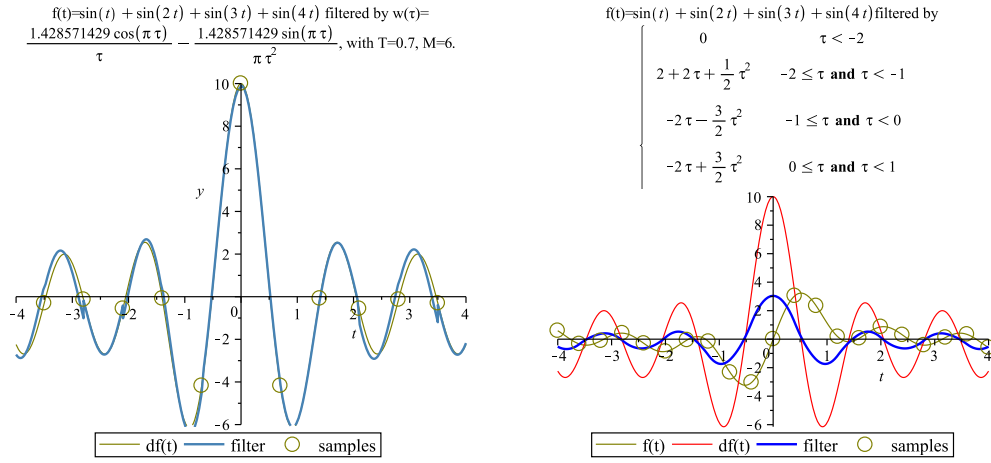


Figura 2.13: À esquerda, a interpolação utiliza a convolução das amostras da função  $f(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t) + \sin(4t) \in L^2(\mathbb{R})$  com filtro derivada  $\text{sinc}(\tau)$ . A distancia entre as amostras  $T = 0.7$  a extensão do filtro leva em consideração a média de 6 pontos, dentro do limite de Nyquist. À direita, a aproximação da derivada da função é realizada utilizando o filtro de derivação spline. Os parâmetros utilizados foram  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . Nesse caso, por se tratar de uma função trigonométrica, esperamos uma melhor aproximação da função via o filtro derivada ideal

### 2.8.2

#### Exemplo banda limitada e amostragem fora da frequência de Nyquist

Ao diminuir a taxa de amostragem, o filtro  $\text{sinc}$  deixa de reconstruir a função, gerando um fenômeno de *aliasing* (Figura 2.14).

No caso do filtro polinomial, aumentar o grau de aproximação de Taylor  $N$  não gera melhorias significativas no caso de funções trigonométricas (Figura 2.15).

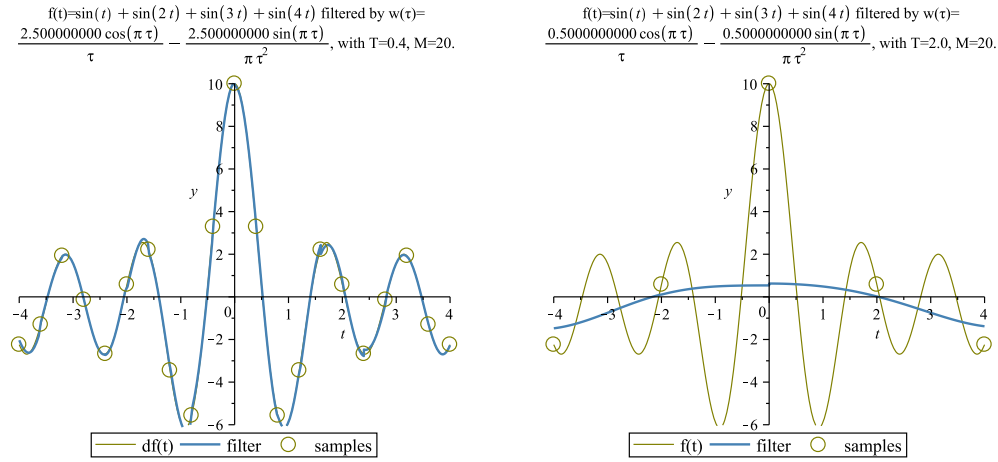


Figura 2.14: Interpolação utiliza a convolução das amostras da função  $f(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t) + \sin(4t) \in L^2(\mathbb{R})$  com filtro derivada  $\text{csc}(\tau)$ : à esquerda, a distância entre as amostras  $T = 0.4$  é dentro do limite de Nyquist  $\frac{\pi}{4} \approx 0,78$ ; à direita, a distância entre as amostras  $T = 2.0$  sai desse limite, gerando um erro considerável.

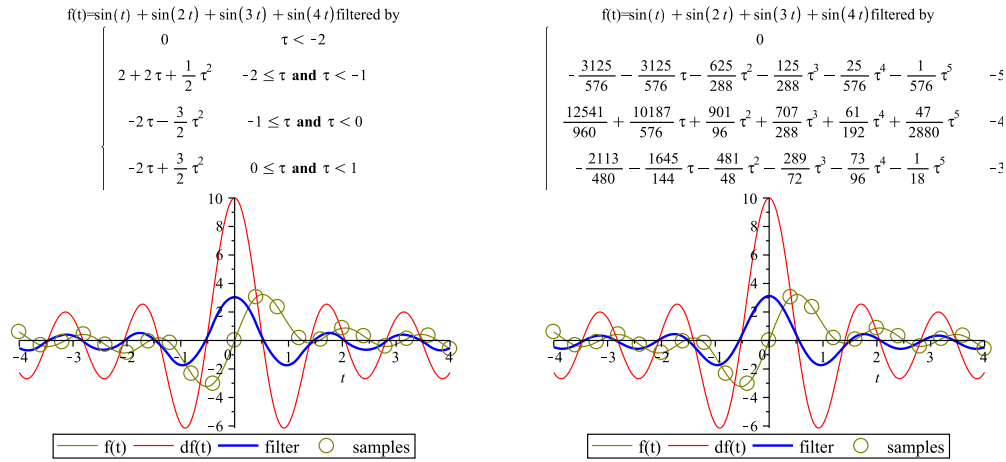


Figura 2.15: Aproximação da derivada função realizada utilizando o filtro de derivação spline. À esquerda, os parâmetros utilizados foram  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . À direita, os parâmetros utilizados foram  $T = 1$ ,  $M = 4$ ,  $d = 4$ ,  $c = 1$ , e  $N = 3$ . No caso de funções trigonométricas, o aumento de grau de aproximação  $N$  não gera melhorias significativas.



## 2.8.3

## Exemplo banda ilimitada

Ao usar o filtro *cosc* para reconstruir uma função de banda ilimitada, por exemplo  $f(t) = t$ , esperamos um resultado muito pior que usando os filtros polinomiais, no caso desenhados especificamente para esse tipo de funções (Figura 2.16).

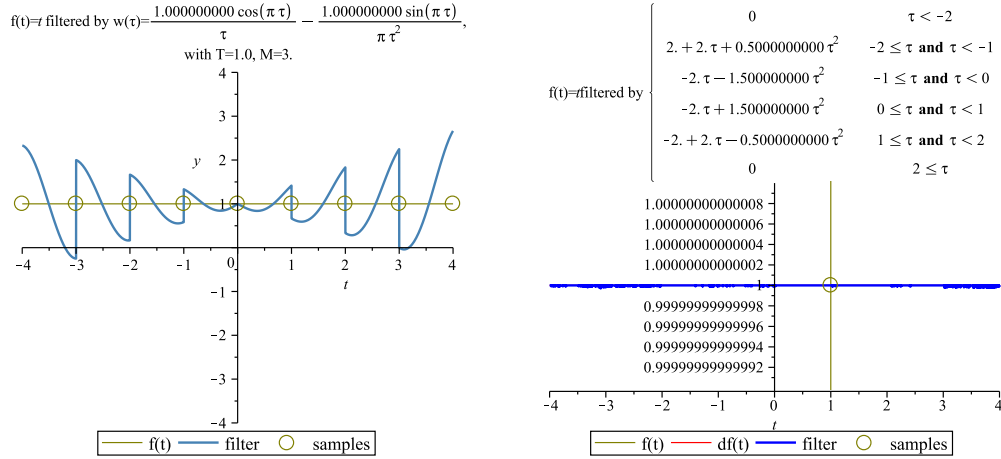


Figura 2.16: À esquerda, a interpolação utiliza a convolução das amostras da função  $f(t) = t \notin L^2(\mathbb{R})$  com núcleo *cosc*. A extensão do filtro realiza a aproximação com a média de 6 amostras. À direita, a aproximação da função é realizada utilizando o filtro de derivação spline. Os parâmetros utilizados foram  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ , e ordem de derivação  $k = 1$ .

Esse fenômeno é diretamente visível ao analisar os coeficientes  $a_n$  dos filtros *cosc* e dos filtros polinomiais (Figura 2.17).

Existem funções que saem do contexto de ambos métodos, como a função  $t^2 \cdot \sin(t)$ . Nesse caso particular, o filtro polinomial acabou gerando estimativas de derivadas globalmente mais precisas, apesar de não coincidir nas amostras como o filtro *cosc* (Figura 2.18).

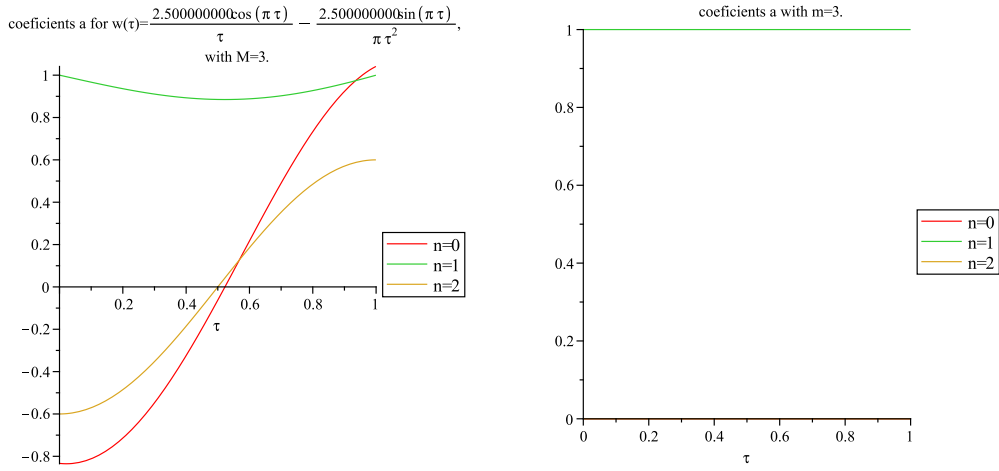


Figura 2.17: À esquerda, a análise dos coeficientes  $a_n$  do filtro *cosc* e à direita os coeficientes do filtro spline, para  $n = 0, 1, 2$ . Os parâmetros utilizados foram  $T = 1$ ,  $M = 4$ ,  $d = 4$ ,  $c = 1$ , e  $N = 3$ , e ordem de derivação  $k = 1$ .

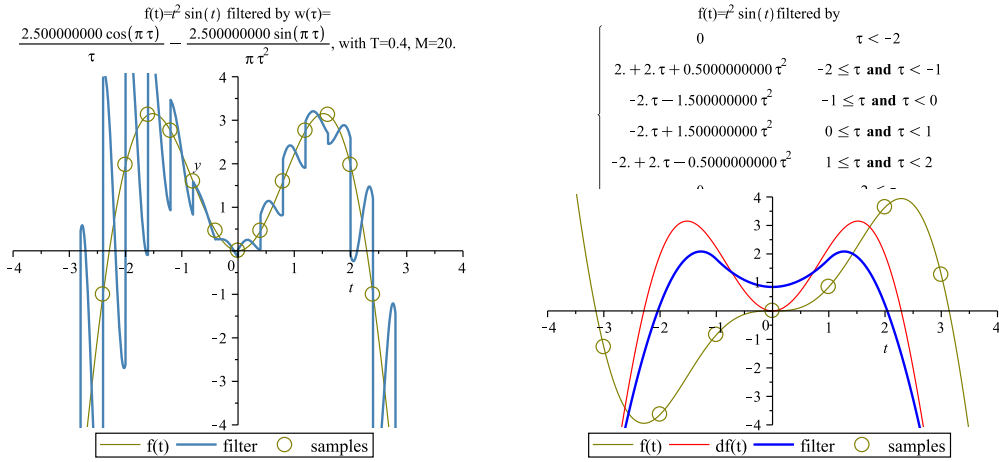


Figura 2.18: À esquerda, a interpolação utiliza a convolução com as amostras da função  $f(t) = t^2 \sin(t) \notin L^2$  com núcleo *cosc*( $\tau$ ) obtendo assim, a aproximação da derivada de  $f(t)$ . A extensão do filtro leva em consideração a média de 40 pontos. À direita, a aproximação da função é realizada utilizando o filtro de derivação spline. Os parâmetros utilizados foram  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ , e ordem de derivação  $k = 1$ .

### 3

## Caso bidimensional separável

No caso de gerar filtros para sinais bidimensionais, o mais simples é usar o caso unidimensional ao longo de cada eixo, como proposto por Möller *et al.* (11). Qualificaremos essa construção de separável. Introduzimos já nesse capítulo a análise de Taylor para o caso bidimensional, com a redução para o caso separável, e a usaremos no caso não separável.

### 3.1

#### Notação multi-índice

Um multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  é uma p-upla de inteiros não negativos. O tamanho de um multi-índice  $\alpha$  é definido por  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_p$ . Definimos o fatorial de um multi-índice  $\alpha$  por  $\alpha! = \prod_{i=1}^p \alpha_i!$ . Por exemplo se  $p = 3$  e  $\alpha = (0, 1, 1)$ , temos  $|\alpha| = 0 + 1 + 1 = 2$  e  $\alpha! = 0! \cdot 1! \cdot 1! = 1$ .

Para um vetor  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p$  de tamanho  $p$ , definimos  $\mathbf{t}^\alpha \in \mathbb{R}$  por  $\mathbf{t}^\alpha = \prod_{i=1}^p t_i^{\alpha_i}$ . Dada uma função suave  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de  $p$  variáveis  $(t_1, \dots, t_p)$ , a derivada parcial  $\partial^\alpha f$  é dada por:  $\partial^\alpha f = (\partial_{t_1})^{\alpha_1} \circ (\partial_{t_2})^{\alpha_2} \circ \dots \circ (\partial_{t_p})^{\alpha_p} f$ . Por exemplo se  $\alpha = (0, 1, 1)$  e  $\mathbf{t} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{t}^\alpha = y \cdot z$  e  $\partial^\alpha f = \partial_y \partial_z f$ .

Podemos assim definir a série de Taylor para funções reais de  $p$  variáveis  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $N$ -vezes diferenciáveis em um ponto  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$  por:

$$f(\mathbf{t}) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{(\mathbf{t} - \mathbf{a})^\alpha}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(\mathbf{a}) + O((\mathbf{t} - \mathbf{a})^\alpha) \quad .$$

### 3.2

#### Filtro multi-dimensional e análise de Taylor

Consideramos uma função  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de  $p$  variáveis amostrada numa grade regular de passo  $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_p)$ . Os pontos de amostragem serão denotados  $\mathbf{kT} = (k_1 T_1, \dots, k_p T_p)$  para  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p$ , e o sinal amostrado é dado por  $\{f_{\mathbf{k}} = f(\mathbf{kT}), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p\}$ .

Com essa notação, o filtro do sinal amostrado por um núcleo  $w : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  é dado de forma similar ao caso unidimensional (2-1) por:

$$f_w(\mathbf{t}) = \sum_{-\mathbf{M} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{M}} f_{\mathbf{k}} \cdot w\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}} - \mathbf{k}\right) \quad , \quad (3-1)$$

onde  $-\mathbf{M} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{M}$  significa  $-M_1 \leq k_1 \leq M_1$  e  $\dots$  e  $-M_p \leq k_p \leq M_p$ .

Similarmente ao caso unidimensional, definimos os coeficientes  $a_{\alpha}^w$  associados a um filtro de núcleo  $w$  como o resultado da filtragem das funções  $X^{\alpha, \tau}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha!} (\mathbf{x} - \tau \mathbf{T})^{\alpha}$  na origem  $\mathbf{0}$ :

$$a_{\alpha}^w(\tau) = X_k^{\alpha, \tau} * w(\mathbf{0}) = \sum_{-\mathbf{M} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{M}} \frac{\mathbf{T}^{\alpha}}{\alpha!} (\mathbf{k} - \tau)^{\alpha} \cdot w(\tau - \mathbf{k}) \quad .$$

Ainda similarmente ao caso unidimensional (seção 2.3), escrevemos a expansão em série de Taylor para cada ponto de amostragem em torno do ponto  $\mathbf{t}$ :

$$f_{\mathbf{k}} = f(\mathbf{kT}) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{(\mathbf{kT} - \mathbf{t})^{\alpha}}{\alpha!} \partial^{\alpha} f(\mathbf{t}) + O(\|\mathbf{kT} - \mathbf{t}\|^{\alpha}) \quad .$$

Substituindo na definição do filtro:

$$\begin{aligned} f_w(\mathbf{t}) &= \sum_{-\mathbf{M} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{M}} f_{\mathbf{k}} \cdot w\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}} - \mathbf{k}\right) \\ &= \sum_{-\mathbf{M} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{M}} \left( \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{(\mathbf{kT} - \mathbf{t})^{\alpha}}{\alpha!} \partial^{\alpha} f(\mathbf{t}) + O(\|\mathbf{kT} - \mathbf{t}\|^{N+1}) \right) \cdot w\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}} - \mathbf{k}\right) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} \left( \sum_{-\mathbf{M} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{M}} \frac{(\mathbf{kT} - \mathbf{t})^{\alpha}}{\alpha!} w\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}} - \mathbf{k}\right) \right) \cdot \partial^{\alpha} f(\mathbf{t}) + O(\|\mathbf{MT} - \mathbf{t}\|^{N+1}) \quad . \end{aligned}$$

Evidenciando os  $a_{\alpha}^w$  na expressão acima, temos para  $0^p \leq \mathbf{t} < T^p$ :

$$f_w(\mathbf{t}) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_{\alpha}^w\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}}\right) \partial^{\alpha} f(\mathbf{t}) + O\left((\mathbf{MT} - \mathbf{t})^{N+1}\right) \quad . \quad (3-2)$$

### 3.3

#### Filtro bidimensional separável

No caso bidimensional  $p = 2$ , usaremos a notação  $\mathbf{t} = (s, t)$ ,  $\mathbf{M} = (L, M)$ ,  $\mathbf{k} = (i, j)$  e  $\mathbf{T} = (T_s, T_t)$ . Podemos construir um filtro bidimensional  $w(s, t)$  a partir de dois filtros unidimensionais  $u(s)$  e  $v(t)$ , cada um atuando ao longo de um eixo. Essa operação será denotada por  $\star$ :

$$w(s, t) = (u \star v)(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} u(s) \cdot v(t) \quad . \quad (3-3)$$

Assim,

$$\begin{aligned} f_w(s, t) &= \sum_{(i,j)=(-L,-M)}^{L,M} f_{i,j} \cdot w\left(\frac{s}{T_s} - i, \frac{t}{T_t} - j\right) \\ &= \sum_{i=-L}^L \sum_{j=-M}^M f(iT_s, jT_t) \cdot u\left(\frac{s}{T_s} - i\right) \cdot v\left(\frac{t}{T_t} - j\right), \end{aligned}$$

onde  $f_{i,j} = f(iT_s, jT_t)$  é a discretização de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Em particular, se a função  $f$  é separável  $f = g \star h$ , ou seja  $f(s, t) = g(s) \cdot h(t)$ , então a filtragem de  $f$  por  $w$  é o produto da filtragem de  $g$  por  $u$  pela filtragem de  $h$  por  $v$ :

$$\begin{aligned} (g \star h)_w(s, t) &= \sum_{i=-L}^L \sum_{j=-M}^M (g(iT_s) \cdot h(jT_t)) \cdot u\left(\frac{s}{T_s} - i\right) \cdot v\left(\frac{t}{T_t} - j\right) \\ &= \sum_{i=-L}^L g(iT_s) u\left(\frac{s}{T_s} - i\right) \cdot \sum_{j=-M}^M h(jT_t) v\left(\frac{t}{T_t} - j\right) \\ &= g_u(s) \cdot h_v(t). \end{aligned}$$

Como as funções monômios bidimensionais  $X^{(\alpha_1, \alpha_2), (\sigma, \tau)}(s, t) = X^{\alpha_1, \sigma}(s) \star X^{\alpha_2, \tau}(t)$  são separáveis, os coeficientes de reconstrução são simplesmente produtos dos coeficientes unidimensionais:

$$a_{\alpha_1, \alpha_2}^w(\sigma, \tau) = a_{\alpha_1}^u(\sigma) \cdot a_{\alpha_2}^v(\tau) \quad . \quad (3-4)$$

### 3.4

#### Construção dos filtros

No caso unidimensional, especificamos que os filtros sejam suaves até a ordem  $c$ , e fixassem os coeficientes  $a_n = 1$  para uma certa ordem  $0 \leq n \leq N$  e  $a_{n'} = 0$  para as outras ordens  $0 \leq n' \leq N, n' \neq n$ .

No caso bidimensional separável, a suavidade de  $w = u \star v$  é garantida pela suavidade de  $u$  e  $v$  até a mesma ordem (é uma condição suficiente apenas). Os coeficientes  $a_\alpha$  satisfazem:

$$\forall \quad |\alpha'| \leq N, \quad a_{\alpha'}^w = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha' = \alpha \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

se (é uma condição suficiente apenas):

$$\forall 0 \leq \alpha'_1 \leq N, a_{\alpha'_1}^u = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha'_1 = \alpha_1 \\ 0 & \text{senão} \end{cases} \quad \text{e } \forall 0 \leq \alpha'_2 \leq N, a_{\alpha'_2}^v = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha'_2 = \alpha_2 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

Ou seja, para definir um filtro  $w$  aproximando a derivada parcial  $\partial_s^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2}$ , basta criar dois filtros unidimensionais  $u$  e  $v$  aproximando respectivamente a  $\alpha_1$ -ésima e a  $\alpha_2$ -ésima derivação, e definir  $w = u \star v$ .

### 3.5

#### Resultados

Os resultados são muito similares ao caso unidimensional. Os filtros bidimensionais são gerados a partir dos filtros unidimensionais como descrito no capítulo anterior (Figura 3.1), e a análise dos coeficientes  $A_{i,j}$  dá resultados similares (Figura 3.2).

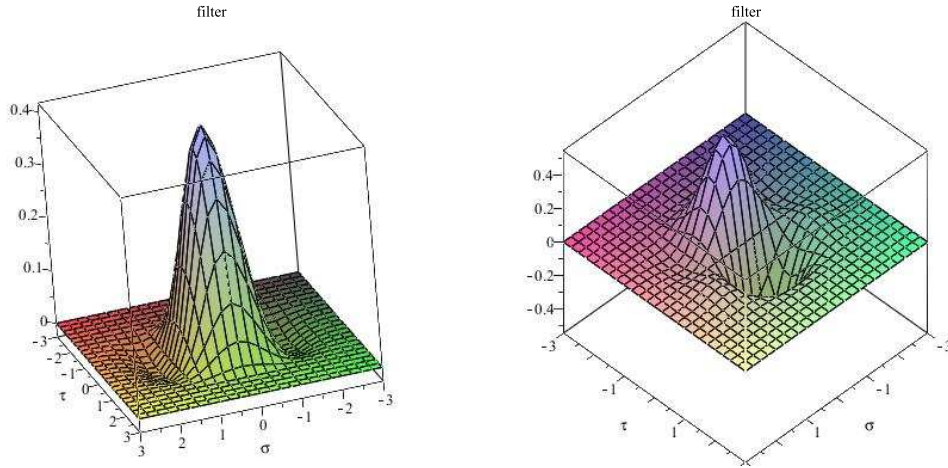


Figura 3.1: À esquerda, o filtro separável  $w = u \star v$ :  $u$  foi gerado para interpolar, com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 3$ ,  $d = 3$ ,  $c = 2$ , e  $N = 2$ , e  $v$  foi gerado para interpolar, com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 1$ . À direita,  $u$  e  $v$  foram gerados com os mesmo parâmetros, exceto que  $v$  foi gerado para aproximar a primeira derivada.

No caso ideal onde  $f(s, t)$  é polinomial com graus em  $s$  e  $t$  respectivamente inferiores aos usados para definir os filtros  $u$  e  $v$ , a reconstrução e a aproximação da derivada é exata (Figura 3.3).

No caso que a função não é polinomial, os erros dependem dos parâmetros usados, por exemplo na derivação da função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (s, t) \mapsto s^2 + t^2 + \sin(st)$  (Figura 3.6). Nesse caso, aumentando o grau de aproximação de Taylor (Figura 3.5) melhora o resultado (Figura 3.6).

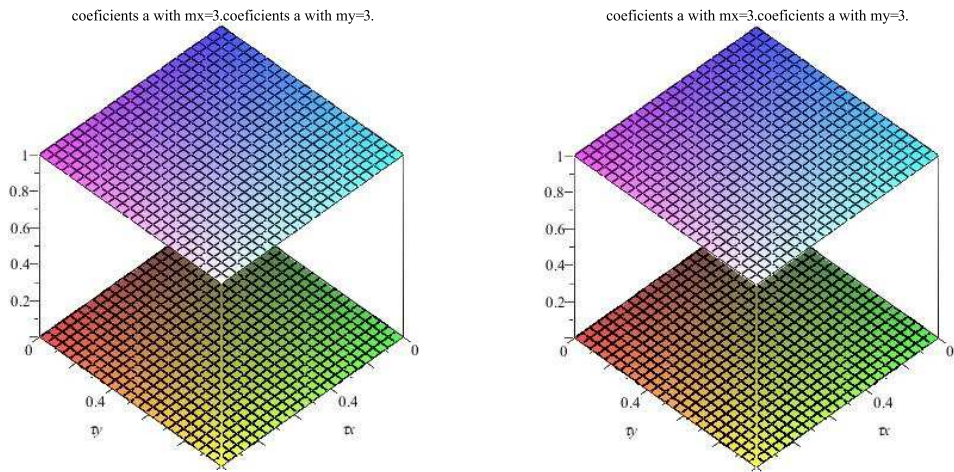


Figura 3.2: Coeficientes  $A_{i;j}$  dos filtros da Figura 3.1. À esquerda, apenas o plano correspondendo a  $a_{00}$  é não nulo, e é constante na altura 1. À direita, apenas o plano correspondendo a  $a_{01}$  é não nulo, e é constante na altura 1.

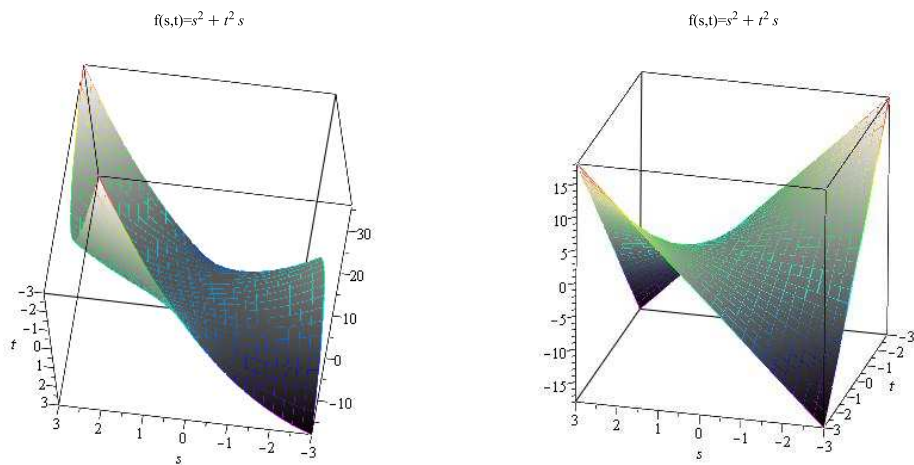


Figura 3.3: À esquerda, a função  $f(s,t) = s^2 + t^2 s$  é representada com estilo *wireframe*. A superfície sólida representa a aproximação gerada pelo filtro de interpolação da Figura 3.1. À direita é representada com estilo *wireframe* a derivada em  $t$ , da mesma função e a superfície sólida é a aproximação gerada pelo filtro de derivação da Figura 3.1.

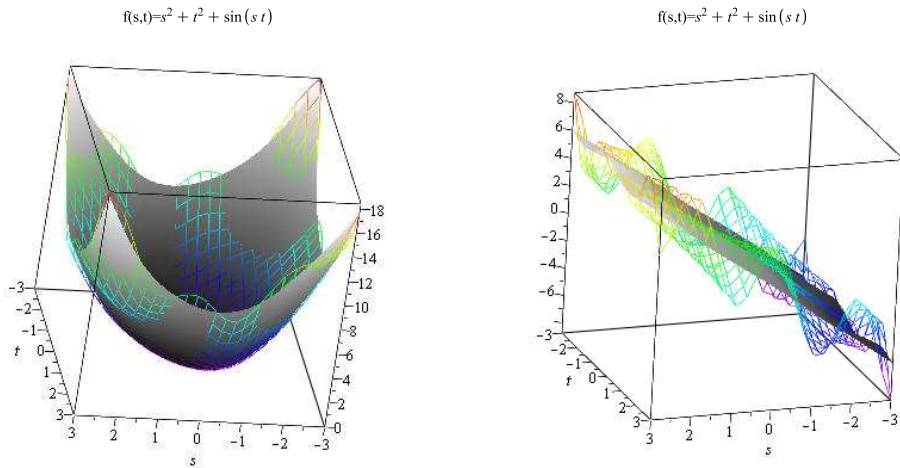


Figura 3.4: À esquerda, a função  $f(s, t) = s^2 + t^2 + \sin(st)$  é representada com estilo *wireframe*. A superfície sólida representa a aproximação gerada pelo filtro de interpolação da Figura 3.1. À direita é representada com estilo *wireframe* a derivada em  $t$ , da mesma função e a superfície sólida é a aproximação gerada pelo filtro de derivação da Figura 3.1.

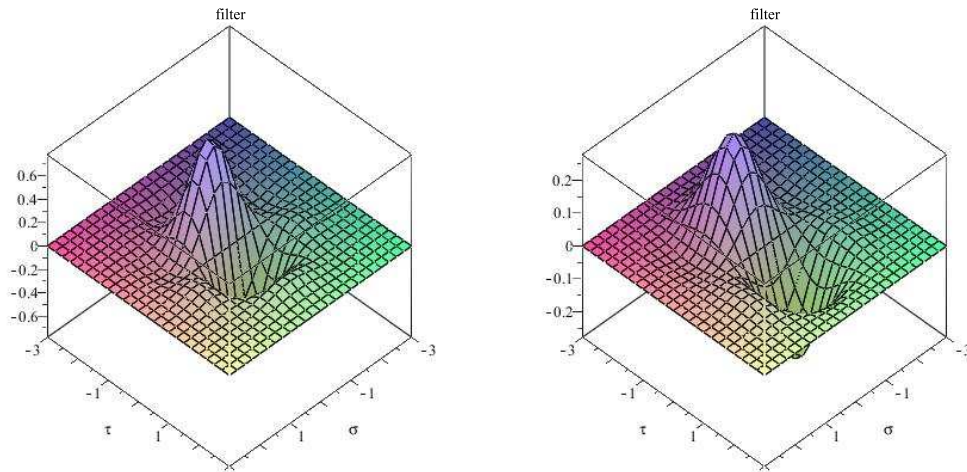


Figura 3.5: À esquerda, o filtro separável  $w = u * v$ :  $u$  foi gerado para interpolar, com os parâmetros  $T = 1, M = 3, d = 2, c = 1, N = 2$ , e  $v$  foi gerado para aproximar a primeira derivada, com os parâmetros  $T = 1, M = 2, d = 2, c = 1, N = 1$ . À direita, o filtro separável  $w = u * v$ :  $u$  foi gerado com os parâmetros  $T = 1, M = 3, d = 3, c = 2, N = 3$  e  $v$  com  $T = 1, M = 3, d = 3, c = 2, N = 2$ , com  $u$  interpolador e  $v$  aproximando a primeira derivada.



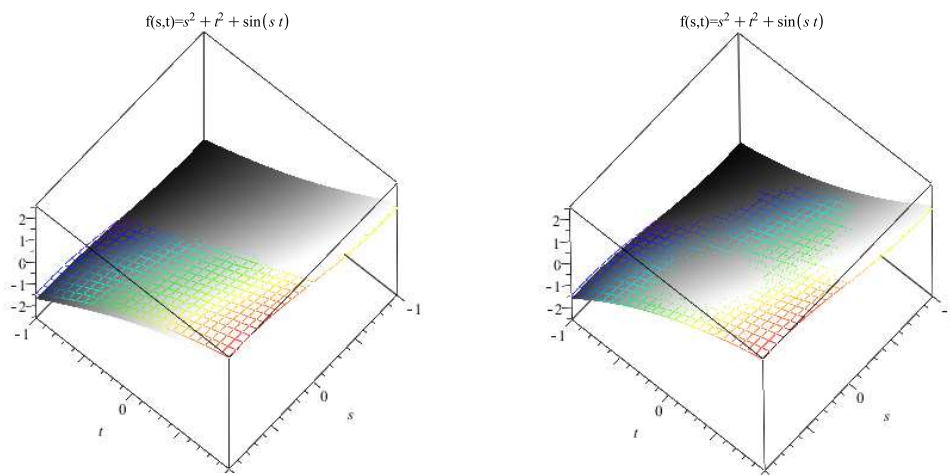


Figura 3.6: A função  $f(s,t) = s^2 + t^2 + \sin(st)$  é representada com estilo *wireframe*. A superfície sólida representa a aproximação gerada pelos filtros de derivação  $\partial_t$  da Figura 3.5.

## 4

### Caso bidimensional não separável

Nesse capítulo, mostramos como construir um filtro bidimensional não necessariamente separável, porém satisfazendo todos os requisitos de suavidade e aproximação de derivadas no caso polinomial.

#### 4.1

##### Filtro bidimensional polinomial por parte

Novamente construímos filtros como funções polinomiais por parte:

$$w(\sigma, \tau) := \begin{cases} 0 & \text{se } |\sigma| > L \text{ ou } |\tau| > M \\ \omega_{i,j}(\sigma, \tau) & \text{se } i \leq \sigma < i+1 \text{ e } j \leq \tau < j+1 \end{cases},$$

onde cada  $\omega_{i,j}$  é um polinômio de grau  $d_s$  em  $\sigma$  e  $d_t$  em  $\tau$ :

$$\omega_{i,j}(\sigma, \tau) = \sum_{k=0}^{d_s} \sum_{l=0}^{d_t} A_{ij;kl} \sigma^k \tau^l.$$

O filtro é assim inteiramente determinado pelos coeficientes  $A_{ij;kl}$  associados a cada parte  $(i, j)$  do domínio de  $w$ :  $\mathbb{Z}^2 \cap [-L, L[ \times [-M, M[$  e a cada monômio  $\sigma^k \tau^l$  de grau  $(k, l) \leq (d_s, d_t)$ . São fornecidas então  $(2L \cdot 2M) \cdot (d_s + 1) \cdot (d_t + 1)$  incógnitas.

#### 4.2

##### Construção do filtro

Podemos exigir que o filtro seja de classe  $C^c$ , e para isso os polinômios  $\omega_{i,j}(\sigma, \tau)$  e suas derivadas até ordem  $c$  devem coincidir nos segmentos de retas horizontais e verticais entre cada parte do domínio de  $w$  (Figura 4.1). As restrições nos segmentos horizontais geram as equações polinomiais:

$$\begin{aligned} \forall \alpha \leq c, \forall j \in \{-M, \dots, M-1\}, \forall \tau \in [j, j+1[ \\ \partial^\alpha \omega_{(-L,j)}(-L, \tau) = \partial^\alpha \omega_{(L-1,j)}(L, \tau) = 0 \quad \text{e} \\ \forall i \in \{-L, \dots, L-2\} \quad \partial^\alpha \omega_{(i,j)}(i+1, \tau) = \partial^\alpha \omega_{(i+1,j)}(i+1, \tau) \quad , \end{aligned}$$

e as restrições nos segmentos verticais geram as equações polinomiais:

$$\begin{aligned} \forall \quad |\alpha| \leq c, \forall i \in \{-L, \dots, L-1\}, \forall \sigma \in [i, i+1[ \\ \partial^\alpha \omega_{(i, -M)}(\sigma, -M) = \partial^\alpha \omega_{(j, M-1)}(\sigma, M) = 0 \quad \text{e} \\ \forall j \in \{-M, \dots, M-2\} \quad \partial^\alpha \omega_{(i, j)}(\sigma, j+1) = \partial^\alpha \omega_{(i, j+1)}(\sigma, j+1) \quad . \end{aligned}$$

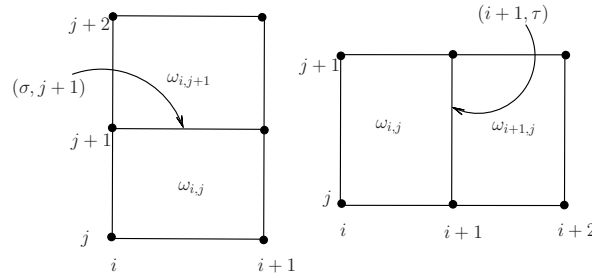


Figura 4.1: Continuidade entre domínios.

Para que o filtro aproxime a derivação  $\partial^\alpha$ , impomos ainda as equações polinomiais:

$$\forall \quad |\alpha'| \leq N, \quad a_{\alpha'}^w = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha' = \alpha \\ 0 & \text{senão} \end{cases} .$$

Cada equação polinomial de suavidade ou de aproximação de  $\partial^\alpha$  acima gera um sistema de equações lineares nas incógnitas  $A_{ij;kl}$ , igualando os coeficientes dos monômios de cada lado. Similarmente ao caso unidimensional, temos que escolher os parâmetros  $L$ ,  $M$ ,  $d_s$ ,  $d_t$ ,  $c$  e  $N$  de forma a obter soluções no sistema. Caso tenha mais de uma solução (ou seja menos equações independentes do que o número de incógnitas), podemos fixar arbitrariamente os valores dos coeficientes livres. Nos experimentos, escolhemos o valor zero para esses.

### 4.3

#### Resultados com filtro não separável

Comparamos filtros  $w^{(1,1)}(\sigma, \tau) \approx \partial_s \partial_t$  gerado na formulação separável e não separável (Figura 4.2). Observamos que, embora os filtros gerados com configurações de parâmetros semelhantes, resultam em filtros diferentes, até com quebra de simetria no caso não separável por causa da escolha arbitrária (zero) dos coeficientes livres, gerando erros maiores nos coeficientes  $a_{(\alpha_1, \alpha_2)}(\sigma, \tau)$  para  $\{\alpha_1, \alpha_2\} \in \{(2, 0), (2, 1), (1, 2)\}$ . O resultado em funções polinomiais de fato corrobora essa análise (Figura 4.3). Em alguns casos,

utilizamos o erro em norma  $L_2(\mathbb{R}^2)$  para medir a precisão das aproximações obtidas pelos filtros em um intervalo do domínio(Figura 4.4).

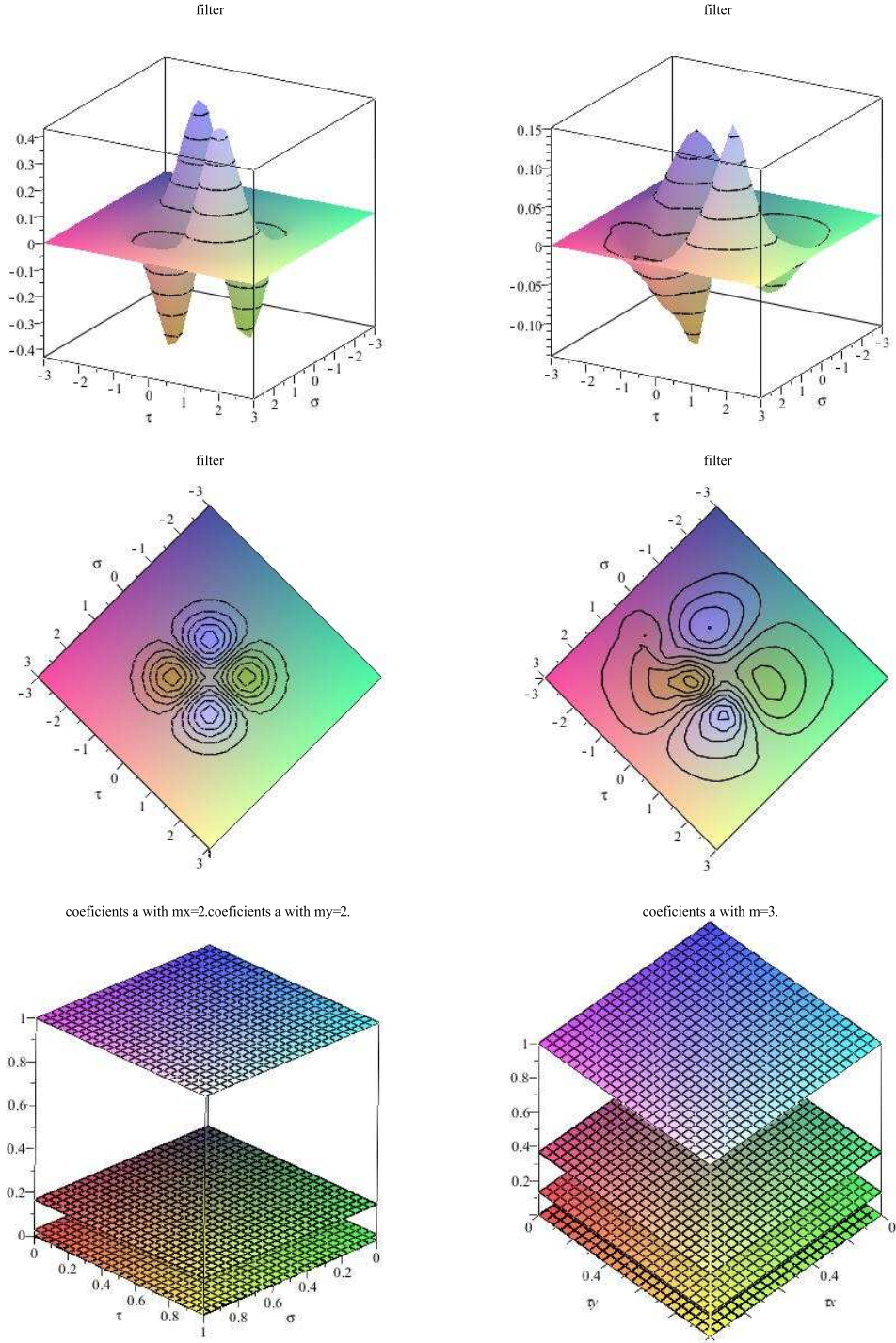


Figura 4.2: À esquerda, o filtro separável  $w^{(1,1)} = u \star u$ :  $u$  foi gerado para aproximar a primeira derivada, com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 3$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . À direita, o filtro não separável  $w^{(1,1)}$  foi gerado para aproximar a derivada  $\partial_s \partial_t$ , com os parâmetros  $T_s = T_t = 1$ ,  $L = M = 3$ ,  $d_s + d_t = 7$ ,  $c = 1$ , e  $N = 3$ . As duas primeiras linhas mostram o núcleo  $w^{(1,1)}$ . A última linha mostra os coeficientes  $a_{(\alpha_1, \alpha_2)}(\sigma, \tau)$  para cada filtro para  $\alpha_1, \alpha_2 \leq 3$ .

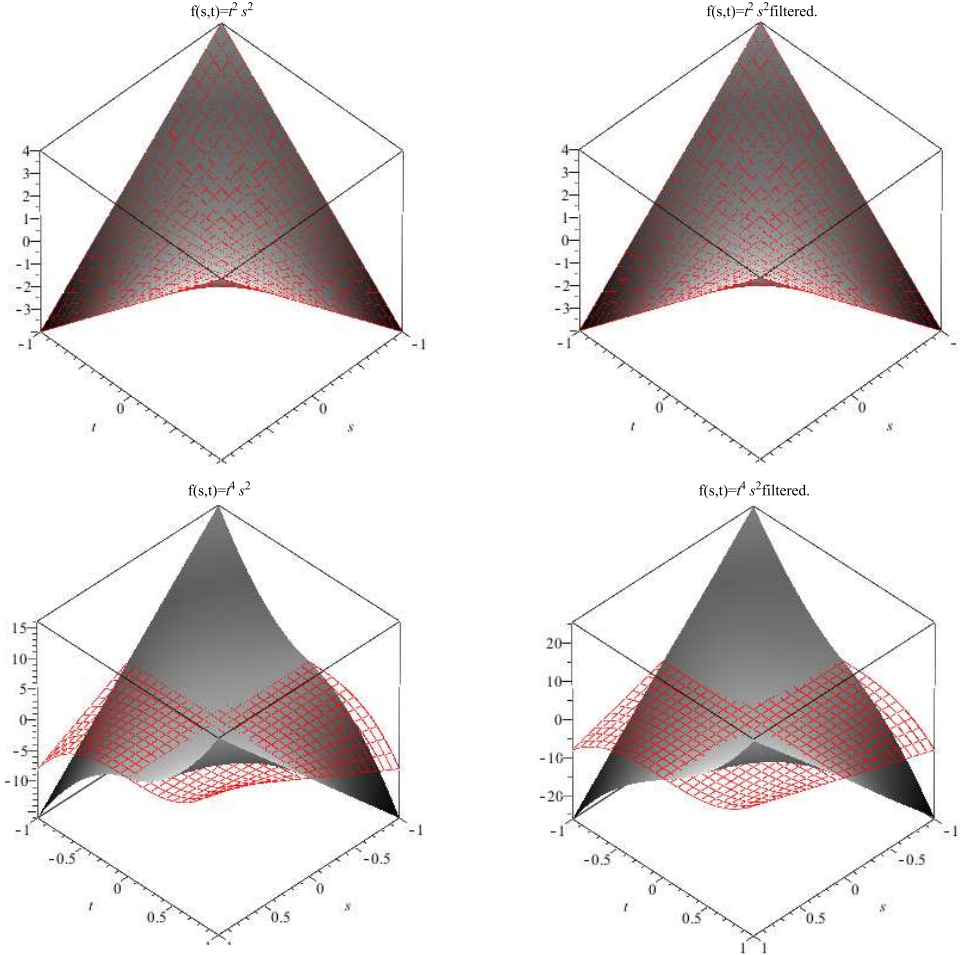


Figura 4.3: Os filtros da Figura 4.2 aplicados nas funções  $f(s,t) = t^2 s^2$  (primeira linha) e  $f(s,t) = t^4 s^2$  (segunda linha). O primeiro caso é dentro das garantias de ambos os filtros. Avaliando o erro cometido em relação à solução exata (em estilo *wireframe*) das filtragens, apenas visualmente, é difícil notar diferenças entre as duas aproximações. Mas ao avaliar o erro numérico das aproximações, vemos que o erro associado ao filtro não separável  $e_{w(1,1)} = \int_{-0.9}^{0.9} \int_{-0.9}^{0.9} |(\partial_s \partial_t f(s,t) - f_w(s,t))|^2 ds dt = 68.51643347$  e maior do que o encontrado no filtro separável  $e_{w(1,1)} = \int_{-0.9}^{0.9} \int_{-0.9}^{0.9} |(\partial_s \partial_t f(s,t) - f_w(s,t))|^2 ds dt = 4.238301024$

Repetimos o experimento com filtros aproximando a derivada parcial  $\partial_t$  (Figura 4.4) e medimos o erro em norma  $L_2(I \subset \mathbb{R}^2)$  relativo aos dois filtros (Figura 4.2) e (Figura 4.4). Com a complexidade do sistema, é difícil achar parâmetros que evitem coeficientes livres e mantenham a não separabilidade. Assim, o caso não separável, pode apresentar resultados piores (Figura 4.3) e (Figura 4.5) por falta de uma solução coerente para derivar os coeficientes livres.



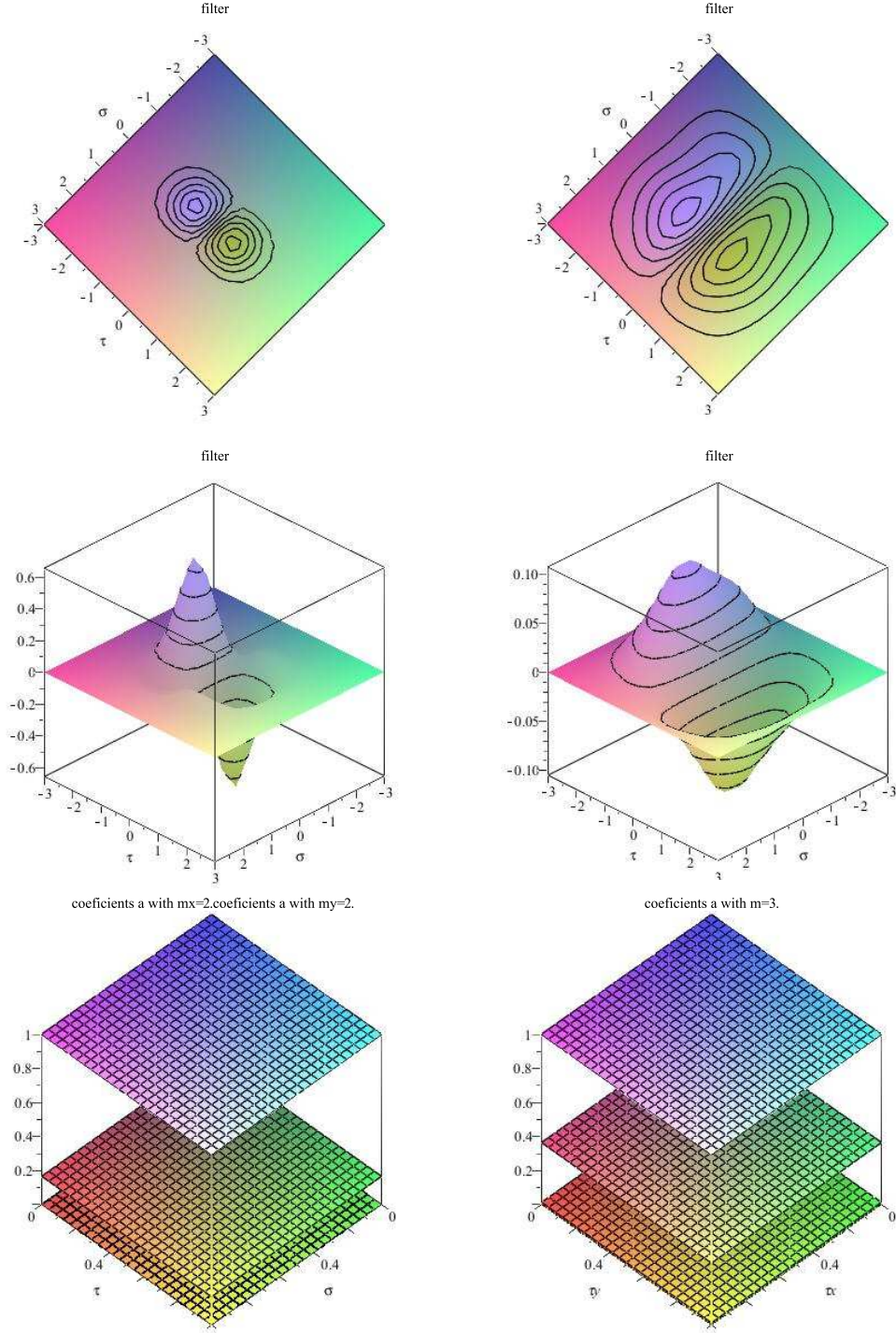


Figura 4.4: À esquerda, o filtro separável  $w^{(0,1)} = u \star v$ :  $u$  foi gerado para interpolar, com os parâmetros  $T = 1$ ,  $M = 2$ ,  $d = 3$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ , e  $v$  foi gerado para aproximar a primeira derivada com os mesmos parâmetros. À direita, o filtro não separável  $w^{(0,1)}$  foi gerado para aproximar a derivada  $\partial_t$ , com os parâmetros  $T_s = T_t = 1$ ,  $L = M = 3$ ,  $d_s + d_t = 4$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . As duas primeiras linhas mostram o núcleo  $w^{(0,1)}$ . A última linha mostra os coeficientes  $a_{(\alpha_1, \alpha_2)}(\sigma, \tau)$  para cada filtro para  $\alpha_1, \alpha_2 \leq 3$ .



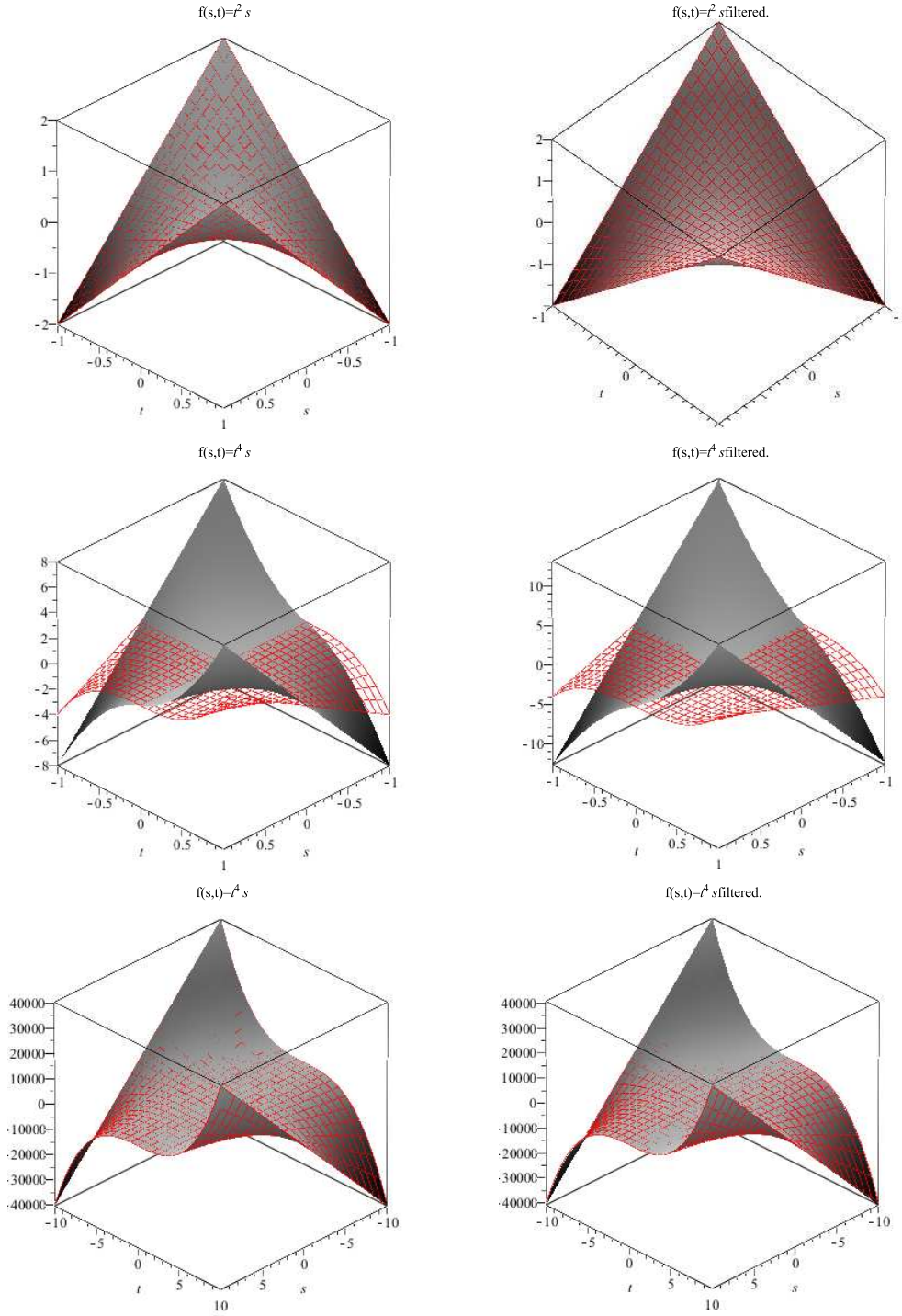


Figura 4.5: Os filtros da Figura 4.4 aplicados nas funções  $f(s, t) = t^2 s$  (primeira linha) e  $f(s, t) = t^4 s$  (segunda e terceira linhas). O primeiro caso está dentro das garantias de ambos os filtros. Podemos observar o erro cometido em relação à solução exata (em estilo *wireframe*). Na filtragem da função  $f(s, t) = t^4 s$  o erro cometido é maior para o filtro não separável, onde encontramos  $e_{w(0,1)} = \int_{-0.9}^{0.9} \int_{-0.9}^{0.9} |(\partial_t f(s, t) - f_w(s, t))|^2 ds dt = 34.94589617$ . Já no filtro separável o erro  $e_{w(0,1)} = \int_{-0.9}^{0.9} \int_{-0.9}^{0.9} |(\partial_t f(s, t) - f_w(s, t))|^2 ds dt = 3.997138160$ . Na última linha é usada numa escala mais ampla.

## 5

### Filtros invariantes por rotações

Neste capítulo, tentaremos estender a construção de filtros de derivação bidimensionais para que sejam filtros invariantes por rotação. A idéia é similar ao trabalho de Teixeira (14), mas no contexto polinomial.

#### 5.1

##### Invariância por rotação

Idealmente, o filtro é invariante por uma rotação se ao filtrar a função rodada gera o mesmo resultado que rodar a função filtrada. Mais formalmente, seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de duas variáveis. Seja  $R_\theta$  a rotação de ângulo  $\theta$  ao redor da origem:

$$R_\theta(x, y) = (x^\theta(x, y), y^\theta(x, y)) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta)) \quad .$$

A função rodada  $f^\theta$  é assim definida por  $f^\theta(x, y) = f(x^\theta(x, y), y^\theta(x, y))$  (Figura 5.1).

O filtro  $w$  é invariante pela rotação  $R_\theta$  se a rotação comuta com a filtragem:

$$(f^\theta * w)(x, y) = (f * w)(x^\theta, y^\theta) \quad . \quad (5-1)$$

Na prática, não usamos a função  $f$  mas trabalhamos apenas com as amostras  $f_{ij} = f(iT_s, jT_t)$ , portanto não temos acesso às amostras rodadas  $f_{ij}^\theta = f(iT_s \cos(\theta) - jT_t \sin(\theta), iT_s \sin(\theta) + jT_t \cos(\theta))$ . Portanto, usamos a expressão equivalente para a convolução contínua:  $(f^\theta * w)(x, y) = (f * w^{-\theta})(x, y)$ . Em outras palavras, podemos rodar a função de  $\theta$  e calcular a convolução com a máscara  $w(\sigma, \tau)$  ou calcular a convolução da função original com a máscara  $w^{-\theta}(\sigma, \tau)$  rodada de  $-\theta$ . Obtemos assim a seguinte condição de invariância por rotação:

$$(f * w^{-\theta})(x, y) = (f * w)(x^\theta, y^\theta) \quad . \quad (5-2)$$

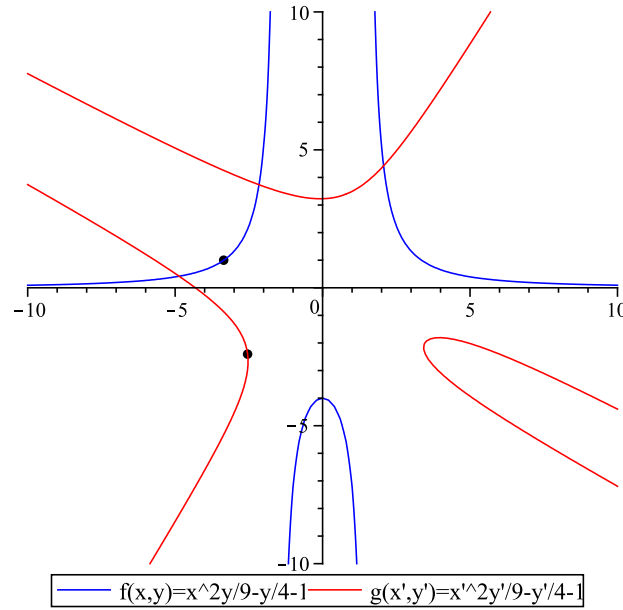


Figura 5.1: Curvas de nível zero da função  $f(x, y) = \frac{x^2y}{9} - \frac{y}{4} - 1$  e da sua rotação  $g = f^\theta$ . O ângulo da rotação é  $-\frac{\pi}{3}$ : se a função é rodada por  $R_\theta$ , as suas curvas implícitas são rodadas por  $R_{-\theta}$ . Isso pode ser verificado usando o ponto marcado na curva azul  $(x, y) = (\frac{-3\sqrt{5}}{2}, 1)$  satisfazendo  $f(x, y) = 0$ . O ponto  $(x', y')$  marcado na curva vermelha satisfaz  $g(x', y') = 0$ , ou seja  $f(R_\theta(x', y')) = 0$ , isto é  $(x', y') = R_\theta^{-1}(x, y) = (\frac{-3\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-3\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{2})$ .

## 5.2

### Análise de Taylor com rotação

Nos casos anteriores, usamos a filtragem das funções monômios  $X^{\alpha,(\sigma,\tau)}(s, t)$  para gerar as restrições do filtro. Em particular, para que  $w$  aproxime a derivação  $\partial^\alpha$  no caso polinomial, impomos:

$$a_{\alpha'}^w(\sigma, \tau) = X^{\alpha',(\sigma,\tau)} * w(0, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha' = \alpha \\ 0 & \text{senão} \end{cases} = \partial^\alpha X^{\alpha',(\sigma,\tau)}(0, 0) \quad .$$

Para impor que  $w$  seja invariante por rotação ao estimar a derivada, podemos impor a condição de invariância (5-2) para os monômios  $X^{\alpha,(\sigma,\tau)}(s, t)$ :

$$X^{\alpha',(\sigma,\tau)} * w^\theta(0, 0) = \partial^\alpha \left( X^{\alpha',(\sigma,\tau)} \right)^\theta(0, 0) \quad . \quad (5-3)$$

O lado esquerdo dessa restrição pode ser explicitado:

$$X^{\alpha,(\sigma,\tau)} * w^\theta(\sigma, \tau) = \sum_{i=-L}^L \sum_{j=-M}^M \frac{T_s^{\alpha_1} \cdot T_t^{\alpha_2}}{\alpha!} (i - \sigma)^{\alpha_1} \cdot (j - \tau)^{\alpha_2} \cdot w^\theta(\sigma - i, \tau - j) \quad .$$

### 5.3

#### Rotação da derivada no caso suave

Para calcular o termo a direita da condição de invariância (5-3), podemos aplicar a regra da cadeia para obter as derivadas de  $f^\theta$ :

$$\begin{aligned} f^\theta(x, y) &= f(x^\theta, y^\theta) \\ &= f(x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta)) \\ \partial_x f^\theta(x, y) &= \cos(\theta) \cdot (\partial_x f)(x^\theta, y^\theta) + \sin(\theta) \cdot (\partial_y f)(x^\theta, y^\theta) \\ \partial_y f^\theta(x, y) &= -\sin(\theta) \cdot (\partial_x f)(x^\theta, y^\theta) + \cos(\theta) \cdot (\partial_y f)(x^\theta, y^\theta) \end{aligned}$$

Usando a notação matricial  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$  e  $\nabla f = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{bmatrix}$ , obtemos  $\mathbf{x}^\theta = \mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{x}$  e :

$$\nabla f^\theta(\mathbf{x}) = (\mathbf{R}_\theta^{-1} \cdot \nabla f)(\mathbf{x}^\theta) \quad .$$

De forma similar, podemos calcular a segunda derivada usando a matriz Hessiana  $\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{bmatrix}$ , obtendo:

$$\mathbf{H}_{f^\theta}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_\theta^{-1} \cdot \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^\theta) \cdot \mathbf{R}_\theta^{-1} \quad .$$

No caso de derivação de ordem  $n$ , temos um tensor de derivadas  $\mathcal{H} = [\partial_{ijkl\dots} f]_{i,j,k,l,\dots \in \{x,y\}^n}$ , e a rotação das derivadas é obtido pelo produto tensorial de  $\mathcal{H}$  por  $n$  cópias da matriz  $\mathbf{R}_\theta^{-1}$ . Usando a convenção  $\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} R_{x,x}^{-1} & R_{x,y}^{-1} \\ R_{y,x}^{-1} & R_{y,y}^{-1} \end{bmatrix}$ , isso pode ser escrito como:

$$\partial_{ijkl\dots} f^\theta(\mathbf{x}) = \sum_{(a,b,c,d,\dots) \in \{x,y\}^n} (\partial_{abcd\dots} f)(\mathbf{x}^\theta) \cdot R_{a,i}^{-1} \cdot R_{b,j}^{-1} \cdot R_{c,k}^{-1} \cdot R_{d,l}^{-1} \dots \quad (5-4)$$

Assim podemos explicitamente calcular a condição de invariância (5-3), e incorporá-la no cálculo do filtro  $w$ .

### 5.4

#### Resultado do filtro não separável com invariância por rotação

Nesta seção realizamos experimentos que objetivam comparar os filtros não separáveis e os não separáveis invariantes. Utilizamos a condição de invariância (5-3) com alguns, geralmente um ou dois, valores de  $\theta$  para construir o filtro. Em quase todos os casos, o sistema fica sub-determinado, deixando alguns coeficientes  $A_{ij;kl}$  livres, cujo valor fixamos arbitrariamente para 0. Essa

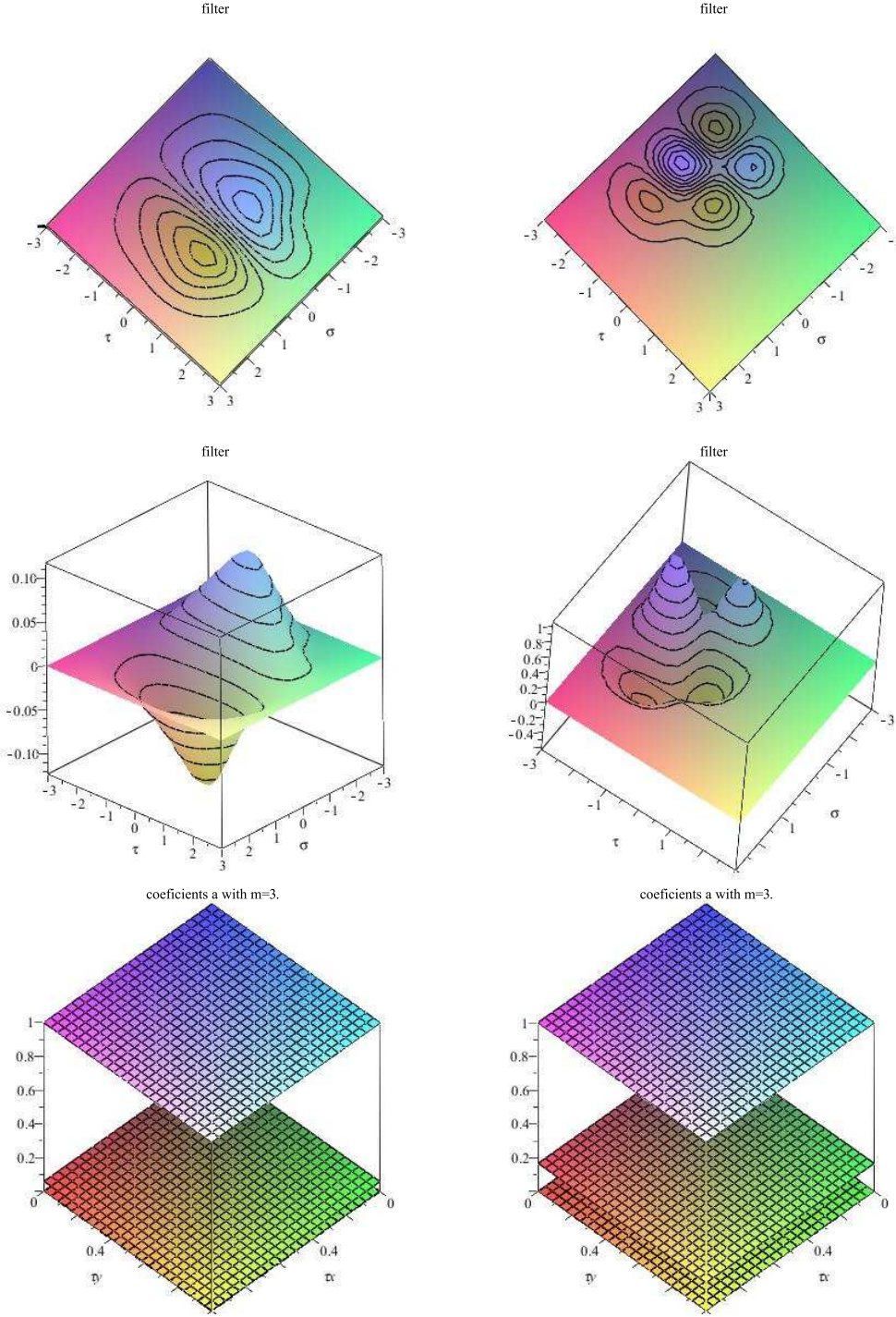


Figura 5.2: Filtros de derivação  $\partial_\sigma$ , gerados com os parâmetros  $T_s = T_t = 1$ ,  $L = M = 3$ ,  $d_s + d_t = 4$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . À esquerda, o filtro foi gerado sem condição de invariância. À direita, o filtro foi gerado com a condição de invariância para  $\theta = \frac{\pi}{6}$  e  $\theta = -\frac{\pi}{6}$ . Acreditamos que a perda de simetria no filtro se deve a escolha dos coeficientes  $A_{ij;kl}$  na resolução do sistema. A ultima linha mostra os coeficientes  $a_\alpha$  para  $|\alpha| \leq 3$ . Ambos os filtros respeitam as restrições de derivação!



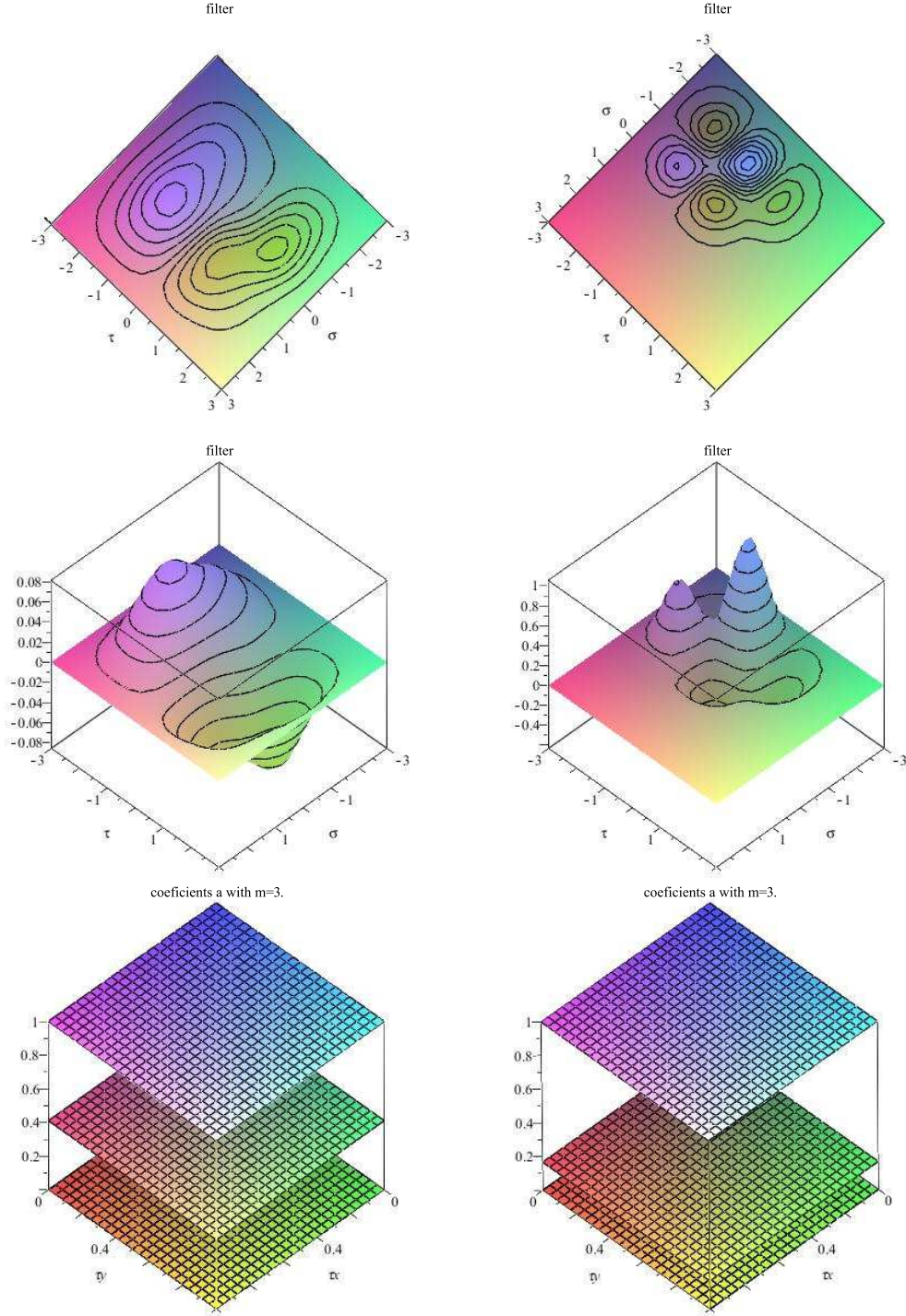


Figura 5.3: Filtros de derivação  $\partial_\tau$ , gerados com os parâmetros  $T_s = T_t = 1$ ,  $L = M = 3$ ,  $d_s + d_t = 4$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . À esquerda, o filtro foi gerado sem condição de invariância. À direita, o filtro foi gerado com a condição de invariância para  $\theta = \frac{\pi}{6}$  e  $\theta = -\frac{\pi}{6}$ . Acreditamos que a perda de simetria no filtro se deve a escolha dos coeficientes  $A_{ij;kl}$  na resolução do sistema. A ultima linha mostra os coeficientes  $a_\alpha$  para  $|\alpha| \leq 3$ . Ambos os filtros respeitam as restrições de derivação!

escolha gera quebras de simetria indesejáveis. Isso fica evidente ao comparar filtros gerados sem e com condição de invariância (Figuras 5.2 e 5.3).

Podemos verificar que, mesmo com essas quebras de simetria, os filtros mantêm a filtragem dos monômios como esperado (Figuras 5.2 e 5.3), e até usando monômios rodados pois continuam sendo polinômios de mesmo grau (Figuras 5.4 e 5.5).

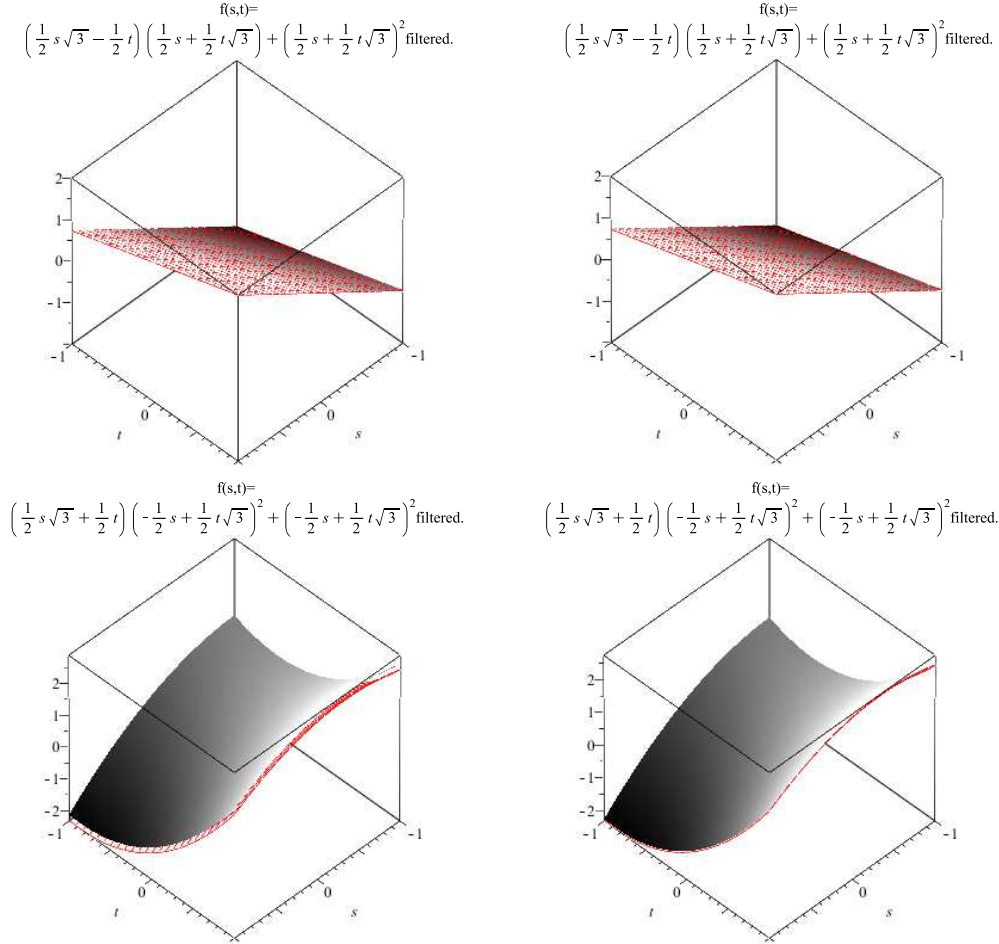


Figura 5.4: Aproximação de  $\partial_s f^{-\frac{\pi}{6}}$  (cima) e  $\partial_t f^{-\frac{\pi}{6}}$  (baixo) com  $f(s, t) = st + t^2$  e  $f(s, t) = st^2 + t^2$  respectivamente, usando os filtros das Figuras 5.2 e 5.3. Como esses filtros foram gerados com ordem de aproximação de Taylor  $N = 2$ , as estimativas são exatas (primeira linha). No caso do filtro com a condição de invariância rotacional, observamos um resultado visualmente melhor (segunda linha) que se confirma numericamente pelo cálculo do erro ( $L_2(I \subset \mathbb{R}^2)$ )  $e_{w(0,1)} = \int_{-0.9}^{0.9} \int_{-0.9}^{0.9} |(\partial_t f(s, t) - f_w(s, t))|^2 ds dt = 0.004673869605$  se comparado com o filtro sem essa condição  $e_{\tilde{w}(0,1)} = \int_{-0.9}^{0.9} \int_{-0.9}^{0.9} |(\partial_t f(s, t) - \tilde{f}_w(s, t))|^2 ds dt = 0.4816143118$ .



Porém, quando a função filtrada não é polinomial, os filtros com e sem invariância por rotação, geralmente não oferecem uma boa aproximação (Figura 5.5).

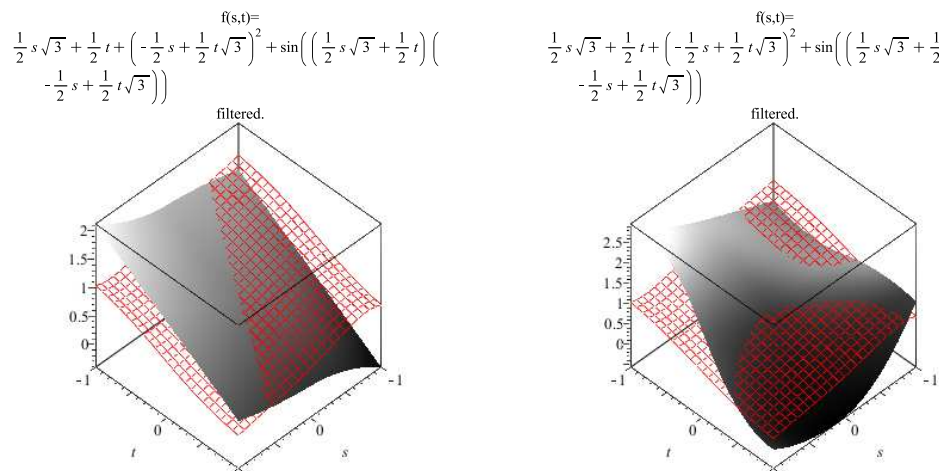
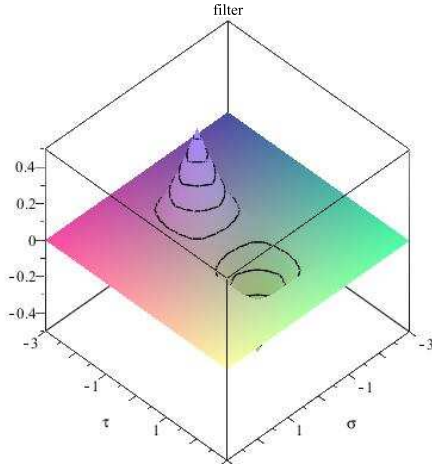
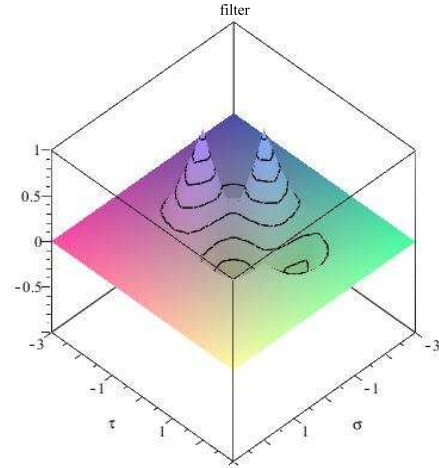


Figura 5.5: Aproximação de  $\partial_s f^{-\frac{\pi}{6}}$  com  $f(s, t) = s + t^2 \cdot \sin(st)$  usando os filtros da Figura 5.2. O filtro com condição de invariância (à direita) aproxima melhor  $\partial_s f^{-\frac{\pi}{6}}$ , desenhada com estilo *wireframe*.

A condição de invariância parece em alguns filtros forçar um *overfitting* nas direções  $\theta$  escolhidas (Figura 5.6), embora algumas escolhas de ângulo parecem gerar filtros mais regulares (Figura 5.7). Em geral, os filtros com a condição de invariância geram resultados melhores para funções não polinômiais (Figura 5.6). Podemos observar que o filtro com a condição de invariância apresenta resultado melhor ( $e_{w(0,1)} = \int_{-0.9}^{0.9} \int_{-0.9}^{0.9} |(\partial_t f(s, t) - f_w(s, t))|^2 ds dt = 0.3285558822e - 2$ ) se comparado com os filtros sem essa condição ( $e_{w(0,1)} = \int_{-0.9}^{0.9} \int_{-0.9}^{0.9} |(\partial_t f(s, t) - f_w(s, t))|^2 ds dt = 0.07432891341$ ).



coefficients a with m=2.



coefficients a with m=3.

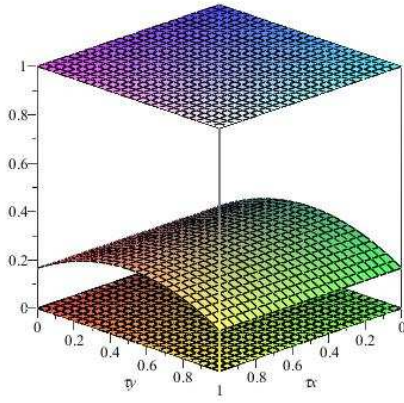
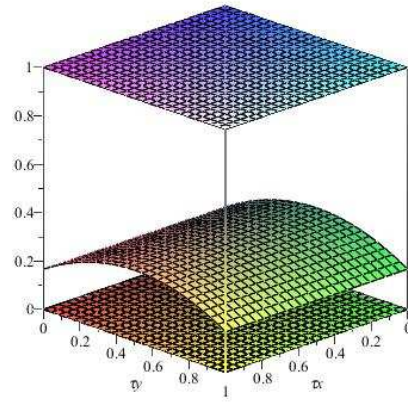
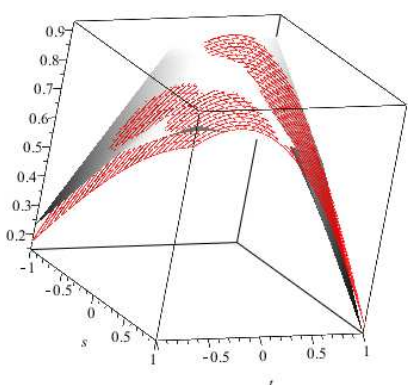
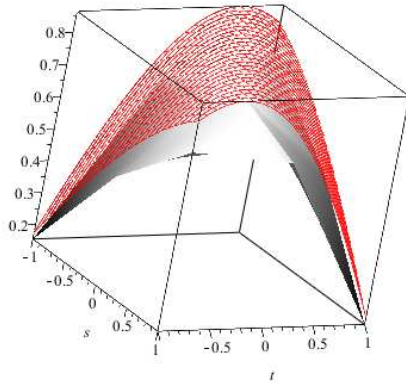
 $f(s,t)=\sin\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t\sqrt{3}\right)$  filtered. $f(s,t)=\sin\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t\sqrt{3}\right)$  filtered.

Figura 5.6: Filtros de derivação  $\partial_\tau$ , gerados com os parâmetros  $T_s = T_t = 1$ ,  $L = M = 2$ ,  $d_s + d_t = 2$ ,  $c = 0$ , e  $N = 2$ . À esquerda, o filtro foi gerado sem condição de invariância. À direita, o filtro foi gerado com a condição de invariância para  $\theta = \frac{\pi}{6}$  e  $\theta = -\frac{\pi}{6}$ . Observe que pedimos apenas continuidade portanto os filtros apresentam vértices. A segunda linha mostra os coeficientes  $a_\alpha$  para  $|\alpha| \leq 3$ . A última linha mostra o resultado da aproximação de  $\partial_t f^{\frac{\pi}{6}}$ , onde  $f(s,t) = \sin(t)$ . Onde notamos que o filtro com a condição de invariância rotacional, obtem um resultado melhor tanto numérico, quanto qualitativo.

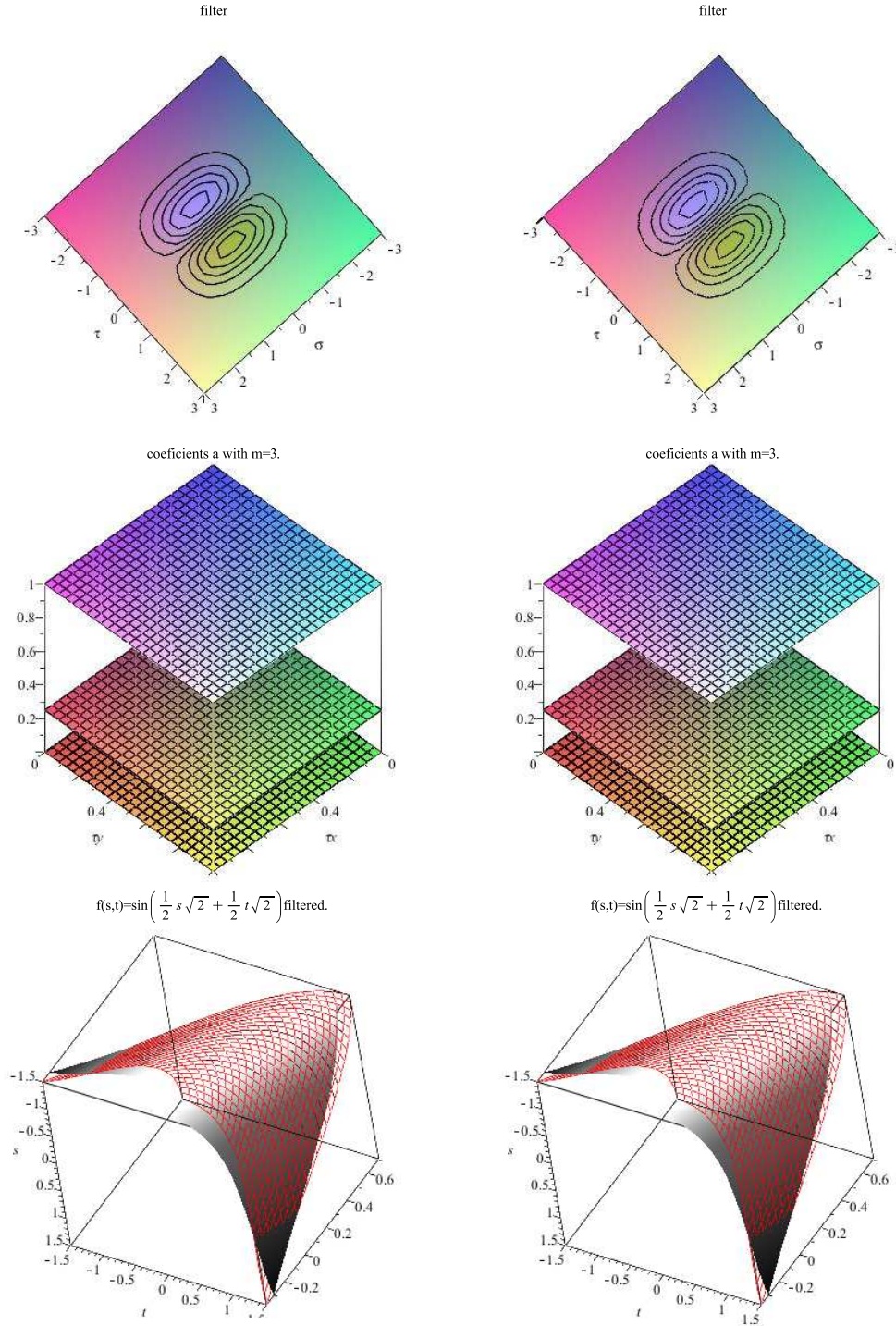


Figura 5.7: Filtros de derivação  $\partial_\tau$ , gerados com os parâmetros  $T_s = T_t = 1$ ,  $L = M = 2$ ,  $d_s + d_t = 2$ ,  $c = 1$ , e  $N = 2$ . À esquerda, o filtro foi gerado sem condição de invariância. À direita, o filtro foi gerado com a condição de invariância para  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ . A segunda linha mostra os coeficientes  $a_\alpha$  para  $|\alpha| \leq 2$ . A última linha mostra o resultado da aproximação de  $\partial_t f^{\frac{\pi}{4}}$ , onde  $f(s, t) = \sin(t)$ .

## 6

### Conclusão

O objetivo principal desse trabalho era melhorar as estimativas de derivadas para funções implícitas, em particular para o cálculo de curvaturas de funções implícitas amostradas (6).

Usualmente, esse tipo de estimativa é feito acoplando ao algoritmo de extração de curvas implícitas (e.g. *Marching Squares*) uma derivação por diferença finita ou por convolução por *box splines*, obtendo assim as derivadas de primeira e segunda ordem necessárias para calcular a curvatura Euclidiana.

Com os filtros apresentados, esperamos melhorar a estimativa tanto pela maior precisão dos filtros quanto pela qualidade de invariância geométrica, necessária para obter cálculos geométricos coerentes. Observamos nos experimentos preliminares que a precisão numérica diminui ao incorporar a condição de invariância por rotação. Isso é de se esperar, pois o filtro é desenhado para balancear entre precisão e invariância. No caso não ideal onde o filtro deixa um erro de aproximação, a invariância deveria forçar esse erro a ser idêntico após (certa) rotação.

Além de completar esses resultados, pretendemos investigar melhor como escolher os valores dos coeficientes livres quando houver.

## Referências Bibliográficas

- [1] ALIM, U. R.; MÖLLER, T. ; CONDAT, L. Gradient estimation revitalized. **Transactions on Visualization and Computer Graphics**, v.16, n.6, p. 1495–1504, 2010.
- [2] BRIDSON, R. **Fluid Simulation For Computer Graphics**. A K Peters, 2008.
- [3] CANNY, J. A computational approach to edge detection. **Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v.8, n.6, p. 679–698, 1986.
- [4] CARVALHO, M. S.; VALERIO, J. V. **Métodos Numéricos para Engenharia Mecânica**. (em preparação), 2013.
- [5] CONDAT, L.; MÖLLER, T. Quantitative error analysis for the reconstruction of derivatives. **Transactions on Signal Processing**, v.59, n.6, p. 2965–2969, 2011.
- [6] DE ANDRADE COSTA E SILVA, M. **Cálculo de Estruturas Afins e Aplicações às Isossuperfícies**. 2011. Tese de Doutorado - PUC-Rio.
- [7] GUYON, E. **Physical Hydrodynamics**. OUP Oxford, 2001.
- [8] HOSSAIN, Z.; ALIM, U. R. ; MÖLLER, T. Toward high-quality gradient estimation on regular lattices. **Transactions on Visualization and Computer Graphics**, v.17, n.4, p. 426–439, 2011.
- [9] MÖLLER, T.; MACHIRAJU, R.; MUELLER, K. ; YAGEL, R. **Classification and local error estimation of interpolation and derivative filters for volume rendering**. In: **VOLUME VISUALIZATION**, p. 71–78, 1996.
- [10] MÖLLER, T.; MACHIRAJU, R.; MUELLER, K. ; YAGEL, R. **A comparison of normal estimation schemes**. In: **VISUALIZATION**, p. 19–26, 1997.

- [11] MÖLLER, T.; MACHIRAJU, R.; MUELLER, K. ; YAGEL, R. Evaluation and design of filters using a taylor series expansion. **Transactions on Visualization and Computer Graphics**, v.3, n.2, p. 184–199, 1997.
- [12] MÖLLER, T.; MUELLER, K.; KURZION, Y.; MACHIRAJU, R. ; YAGEL, R. **Design of accurate and smooth filters for function and derivative reconstruction**. In: VOLUME VISUALIZATION, p. 143–151, 1998.
- [13] SHANNON, C. Communication in the presence of noise. **Proceedings of the IEEE**, v.86, n.2, p. 447–457, 1949.
- [14] TEIXEIRA, R. C. **Introdução aos Espaços de Escala**. IMPA, 2001.
- [15] UNSER, M. Sampling 50 years after shannon. **Proceedings of the IEEE**, v.88, n.4, p. 569–587, 2000.
- [16] WILBRAHAM, H. On a certain periodic function. **The Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, v.3, p. 198–201, 1848.

## Sumário das notações

| Notação       | Descrição  |
|---------------|--|
| $T$           | distância entre amostras   |
| $M$           | tamanho da máscara do filtro   |
| $d$           | grau do filtro spline unidimensional   |
| $n$           | grau de aproximação da ordem de Taylor   |
| $c$           | suavidade do filtro  |
| $\tau$        | deslocamento desde a amostra anterior, $\tau = \frac{t}{T} - \lfloor \frac{t}{T} \rfloor$                  |
| $f_k = f(kT)$ | $k$ -ésima amostra de $f$ , com $k \in \mathbb{Z}$   |
| $w(t)$        | filtro de reconstrução   |
| $f_w(t)$      | função recuperada pela convolução das amostras com o filtro de reconstrução $w(t)$                         |
| $a_n^w(t)$    | coeficiente de reconstrução com aproximação de Taylor de ordem $n$ referente ao filtro $w$ de reconstrução |
| $\tilde{f}$   | função rotacionada de um ângulo $\theta$   |



## .1

## Script Maple

```

> restart :
  printlevel := 0 :
> with(LinearAlgebra) :
  with(PolynomialTools) :
  with(plots) :
>
> filterW := proc( T, m, d, c, n, k)
  # T   # sampling step
  # m   # mask size
  # d   # degree of polynomial
  # c   # continuity order of the spline
  # n   # order of Taylor approximation
  # k   # order of derivation obtained by the filter

  local M, i, w, pwlist, W, conteq, o, tayleq, sols, V;

  # unknowns
  M := Matrix(2·m, d + 1, symbol = A);
  print( 2·m·(d + 1), "unknown coefficients" );

  # splines
  for i from -m to m - 1 do
     $w_{i+m+1} := \text{unapply}(\text{FromCoefficientVector}(M[i+m+1], \tau), \tau) :$ 
  end do ;

  # final filter
  pwlist :=  $\tau < -m, 0 :$ 
  for i from -m to m - 1 do
     $\text{pwlist} := \text{pwlist}, \tau \geq i \text{ and } \tau < i + 1, w_{i+m+1}(\tau) :$ 
  end do ;
  pwlist :=  $\text{pwlist}, \tau \geq m, 0 :$ 
  W :=  $\tau \rightarrow \text{piecewise}(\text{pwlist}) :$ 

  # continuity equations
  conteq := { } :
  conteq :=  $\text{conteq} \cup \{ w_1(-m) = 0, w_{2 \cdot m}(m) = 0 \} ;$ 
  for i from -m + 1 to m - 1 do
     $\text{conteq} := \text{conteq} \cup \{ w_{i+m}(i) = w_{i+m+1}(i) \} ;$ 
  end do ;
  for o from 1 to c do
     $\text{conteq} := \text{conteq} \cup \{ D^{(o)}(w_1)(-m) = 0, D^{(o)}(w_{2 \cdot m})(m) = 0 \} ;$ 
    for i from -m + 1 to m - 1 do
       $\text{conteq} := \text{conteq} \cup \{ D^{(o)}(w_{i+m})(i) = D^{(o)}(w_{i+m+1})(i) \} ;$ 
    end do ;
  end do ;
end do ;

```

```

plotff := plot( ff(t), t = tm ..tM, thickness = 2, color = blue, title = typeset( "f(t)=", f(t),
    "filtered by ", w(τ) ), legend = "filter" ) :

print(display( {plotff, plotf, plotdf, plots} ));

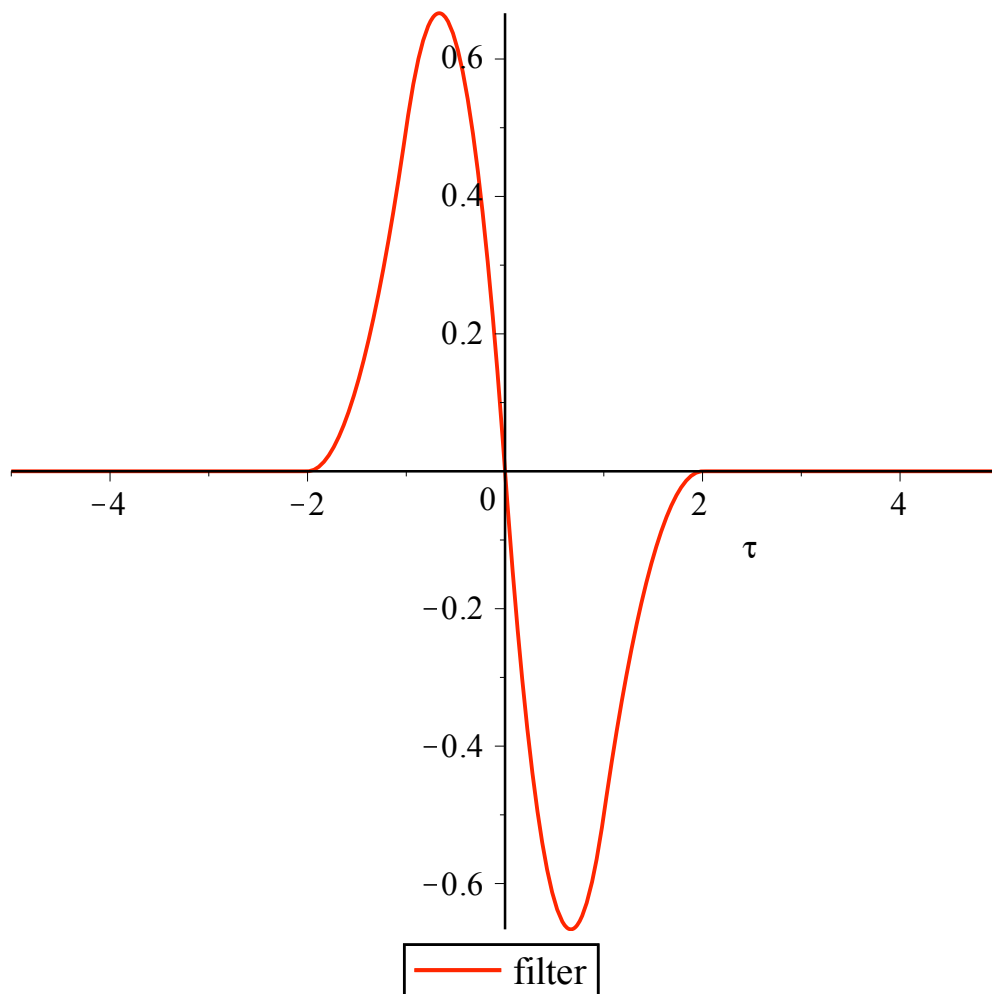
end proc :
>
>
> filterA := proc( T, m, w )
    local p :
    return ( n, τ ) →  $\frac{T^n}{n!} \cdot \text{sum} \left( (p - \tau)^n \cdot w(\tau - p), p = -m + 1 .. m \right)$ ;
end proc :
>
> drawA := proc( nm, nM, T, m, w )
    local a ;
    a := filterA( T, m, w ) ;
    print(plot( [ seq( a(n, τ), n = nm .. nM ) ], τ = 0 .. 1, legend = [ seq( typeset( "n=", n ), n = nm
        .. nM ) ], legendstyle = [ location = right ], title = typeset( "coefficients a with m=", m, "." ) ) ) :
end proc :
>
>
>
> T := 1 : # sampling step
m := 2 : # mask size - 2
d := 3 : # degree of polynomial - 2
c := 1 : # continuity order of the spline - 1
n := 2 : # order of Taylor approximation - 2
k := 1 : # order of derivation obtained by the filter - 1
>  $2 \cdot m \cdot (d + 1) \geq (2 \cdot m + 1) \cdot (c + 1) + (n + 1) \cdot \left( \frac{n}{2} + d + 1 \right)$ ;
    25 ≤ 16
> w := filterW( T, m, d, c, n, k ); # T,m,d,c,n,k
    16, "unknown coefficients"
    10, "continuity equations"
    15, " Taylor equations"
    1, "solutions"
w := τ → piecewise  $\left( \tau < -2, 0, -2 \leq \tau \text{ and } \tau < -1, 2 + 2\tau + \frac{1}{2}\tau^2, -1 \leq \tau \text{ and } \tau < 0, -2\tau - \frac{3}{2}\tau^2, 0 \leq \tau \text{ and } \tau < 1, -2\tau + \frac{3}{2}\tau^2, 1 \leq \tau \text{ and } \tau < 2, -2 + 2\tau - \frac{1}{2}\tau^2, 2 \leq \tau, 0 \right)$ 
> ws := τ → applyrule( A(a :: integer, b :: integer) = 1, w(τ) ) :

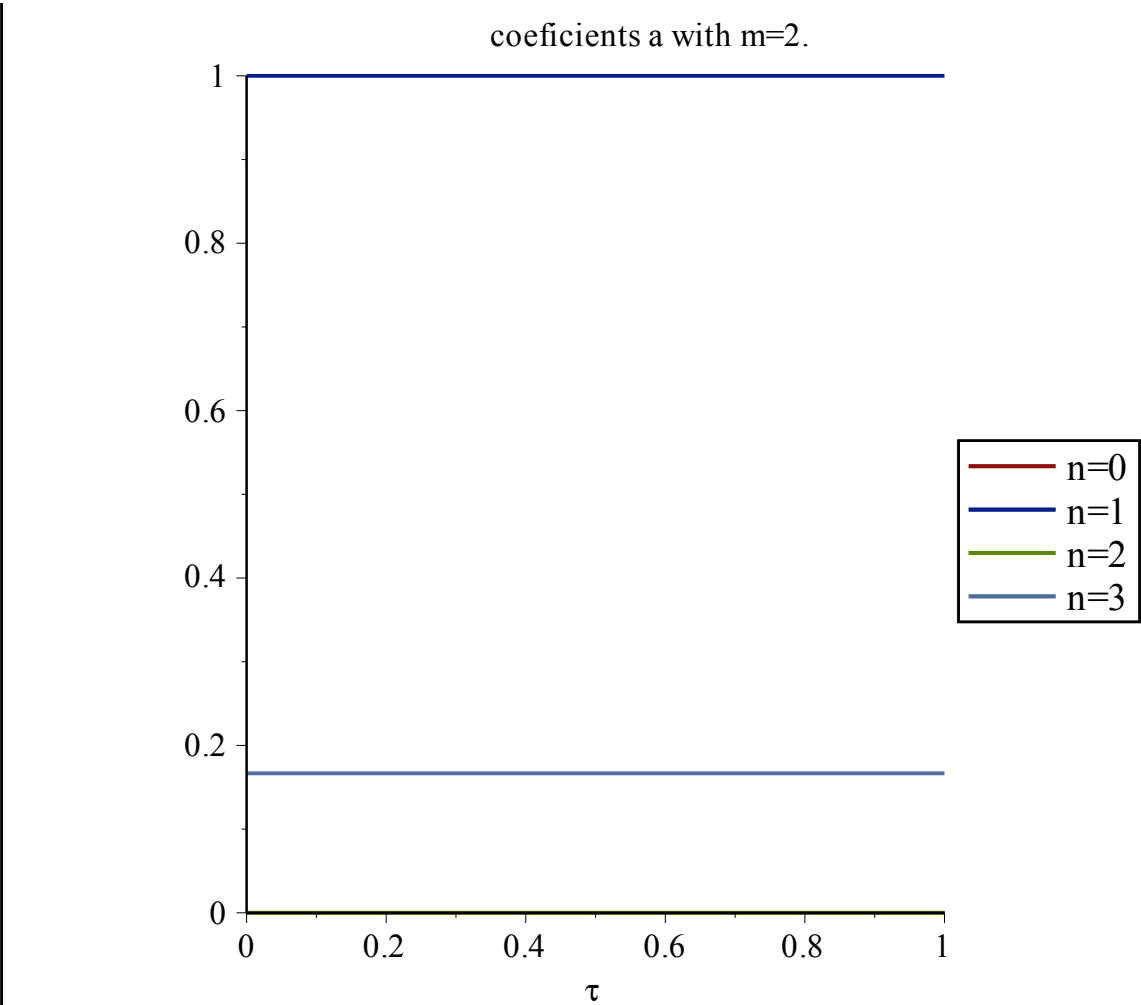
```

$ws(\tau)$ 

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \tau < -2 \\ 2 + 2\tau + \frac{1}{2}\tau^2 & -2 \leq \tau \text{ and } \tau < -1 \\ -2\tau - \frac{3}{2}\tau^2 & -1 \leq \tau \text{ and } \tau < 0 \\ -2\tau + \frac{3}{2}\tau^2 & 0 \leq \tau \text{ and } \tau < 1 \\ -2 + 2\tau - \frac{1}{2}\tau^2 & 1 \leq \tau \text{ and } \tau < 2 \\ 0 & 2 \leq \tau \end{array} \right.$$

&gt;

> `plot(ws(τ), τ=-5..5, color = red, legend = "filter");`> `drawA(0, 3, T, m, ws);`



```
>
> f := t -> t^2 + 3*t:
drawF(f,-1, 1, T, m, k, ws); # f, tm,tM,T,m,k,w
```

