

Felipe de Albuquerque Mello Pereira

Superfícies Mínimas em \mathbb{R}^3

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Ricardo Sá Earp

Rio de Janeiro
Agosto 2013

Felipe de Albuquerque Mello Pereira

Superfícies Mínimas em \mathbb{R}^3

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ricardo Sá Earp

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Rafael Ruggiero

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Maria Fernanda Elbert

Instituto de Matemática — UFRJ

Prof. Graham Andrew Craig Smith

Instituto de Matemática — UFRJ

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 29 de agosto de 2013

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Felipe de Albuquerque Mello Pereira

Bacharel em Matemática Pura e Engenharia Elétrica.

Ficha Catalográfica

de Albuquerque Mello Pereira, Felipe

Superfícies Mínimas em \mathbb{R}^3 /
Felipe de Albuquerque Mello Pereira; orientador: Ricardo
Sá Earp. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de
Matemática, 2013.

v., 199 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade
Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Dissertação. 2. Superfícies mínimas
em \mathbb{R}^3 . 3. curvatura total finita. 4. fins mergulhados. 5.
imersão completa. 6. representação de Enneper-Weierstrass.
7. princípios do máximo. I. Sá Earp, Ricardo. II. Pontifícia
Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de
Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Ao CNPq, Faperj e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao Ricardo Sá Earp, pelos inúmeros incentivos, ensinamentos e apoio. Um exemplo de professor a todos que já foram seus alunos.

Aos colegas e professores do departamento, com quem aprendi muito em diversas conversas pelo corredor e em sala de aula.

Aos membros da secretaria, sempre eficientes e simpáticos.

Por fim, à minha família, por me apoiar em todos os momentos.

Resumo

de Albuquerque Mello Pereira, Felipe; Sá Earp, Ricardo. **Superfícies Mínimas em \mathbb{R}^3** . Rio de Janeiro, 2013. 199p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho estudamos a teoria clássica das superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 , focando na representação de Enneper-Weierstrass e suas consequências. São exibidos vários exemplos, incluindo as superfícies de Jorge-Meeks e de Jorge-Xavier. Também mostramos princípios do máximo para superfícies mínimas e várias aplicações como, por exemplo, o teorema do semi-espaço. Em seguida, nos concentramos na teoria das superfícies mínimas completas de curvatura total finita e, com esta, podemos analisar o desenvolvimento assintótico de fins mínimos completos mergulhados de curvatura total finita. Por fim, a dissertação culmina com o teorema de Schoen, que afirma que as únicas superfícies mínimas completas, conexas, de curvatura total finita e apenas dois fins — ambos mergulhados — são um par de planos e o catenoide.

Palavras-chave

Superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 ; curvatura total finita; fins mergulhados; imersão completa; representação de Enneper-Weierstrass; princípios do máximo;

Abstract

de Albuquerque Mello Pereira, Felipe; Sá Earp, Ricardo (advisor)
. **Minimal Surfaces in \mathbf{R}^3** . Rio de Janeiro, 2013. 199p.
M.Sc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia
Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work we study the classical theory of minimal surfaces in \mathbf{R}^3 , with special focus on the Enneper-Weierstrass representation and its consequences. We exhibit many examples, including the Jorge-Meeks and Jorge-Xavier surfaces. We also show maximum principles for minimal surfaces and many applications as, for instance, the half-space theorem. Afterwards, we focus on the theory of complete minimal surfaces with finite total curvature, with which we can analyse the asymptotic development of complete minimal embedded ends with finite total curvature. This dissertation culminates with the Schoen's theorem, which states that the only complete, connected minimal surfaces with finite total curvature and exactly two ends—both embedded—are a pair of planes or a catenoid.

Keywords

Minimal surfaces in \mathbf{R}^3 ; finite total curvature; embedded ends; complete immersion; Enneper-Weierstrass representation; maximum principles;

Sumário

1	Noções Prévias Necessárias	10
1.1	Geometria Diferencial e Análise Real	10
1.2	Análise Complexa, Harmônica e Superfícies de Riemann	23
2	Definições Equivalentes de Superfícies Mínimas	30
2.1	$H = 0$	30
2.2	Superfícies que Minimizam Área (Cálculo Variacional)	32
2.3	Exemplos Básicos	37
3	Parâmetros Conformes	56
3.1	Coordenadas Harmônicas e Parâmetrizações Conformes	57
3.2	Exemplo: Catenoide	63
3.3	Aplicações	64
4	Representação de Enneper-Weierstrass	66
4.1	Definição	66
4.2	Plano Tangente, Primeira Forma Fundamental e Vetor Normal	69
4.3	A função g e a Aplicação Normal de Gauss	71
4.4	Normais de Superfícies Mínimas Completas	72
4.5	Aplicação: Teorema de Bernstein	75
4.6	Exemplos	75
5	Curvatura Gaussiana e Curvatura Total	97
5.1	Curvatura Gaussiana e a Representação de Enneper-Weierstrass	97
5.2	Estimativa para o módulo de K	100
5.3	Aplicação: Teorema de Bernstein	103
5.4	Curvatura Total e a Representação de Enneper-Weierstrass	104
5.5	Exemplos	105
6	Superfícies Mínimas Conjugadas e Associadas	109
6.1	Definição de Superfície Mínima Conjugada	109
6.2	Relações entre Superfícies Conjugadas	111
6.3	Definição de Superfícies Mínimas Associadas	113
6.4	Relações entre Superfícies Mínimas Associadas	114
6.5	Exemplos	117
7	Princípios de Reflexão	122
7.1	Eixos e Planos de Simetria em Superfícies Mínimas	122
7.2	Geodésicas, Linhas Assintóticas e de Curvatura	125
7.3	Exemplo	128
8	Princípios do Máximo	132
8.1	Princípio do Máximo Geométrico Interior	132
8.2	Princípio do Máximo Geométrico no Bordo	135
8.3	Aplicações	136

8.4	Teorema do Semi-espço	138
9	Superfícies Mínimas Completas de Curvatura Total Finita	143
9.1	Teoremas de Huber	143
9.2	Extensões Meromorfas de $f(z)dz$ e $g(z)$ a \hat{M}	145
9.3	Relação entre a Curvatura Total e a Topologia de S	150
9.4	Aplicações	154
10	Desenvolvimento Assintótico de Fins Mínimos Mergulhados de Curvatura Total Finita	159
10.1	Classificação de Fins Mergulhados de Curvatura Total Finita	159
10.2	Aplicação	167
11	Teorema de Schoen	169
11.1	Resultados de Simetria	169
11.2	Um Teorema de Unicidade para Superfícies Mínimas Completas	179
	Referências Bibliográficas	197

Lista de Figuras

2.1	Varição normal de Σ_0	33
2.2	Catenoide - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal	38
2.3	Curva Catenária	40
2.4	Helicoide - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal	44
2.5	Vista lateral da superfície de Scherk duplamente periódica - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal	47
2.6	Vista superior da superfície de Scherk duplamente periódica - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal	48
2.7	Imagem de f sobre o quadrado $\Omega_{0,0}$	49
2.8	Superfície de Enneper - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal	53
4.1	Superfície de Jorge-Meeks com $n = 2$ (também chamada de trioide)	85
6.1	Segunda Superfície de Scherk - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal	121
6.2	Pedaço da Segunda Superfície de Scherk	121
7.1	Catenoide - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal	128
7.2	Helicoide - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal	129
7.3	Vista superior da superfície de Scherk duplamente periódica - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal	130
8.1	Vista lateral	135
8.2	Vista lateral de S	136
8.3	Vista lateral de S e Π	138
8.4	Vista lateral de S , Σ e Π	139
8.5	Catenoide com raio central c_1	140
8.6	Catenoide com raio central $c_2 < c_1$	140
8.7	Catenoide de raio central \tilde{c}	141
9.1	Superfície de Chen-Gackstatter - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal	156

1

Noções Prévias Necessárias

Neste capítulo serão enunciados resultados que assumiremos como conhecimento prévio necessário para a total compreensão do restante do material. As fontes usadas para este material são:

- Para definições de variedades e subvariedades, vide Ref. 1 ;
- Para conceitos de geometria diferencial de curvas e superfícies, vide Ref. 2 , Ref. 3 ou Ref. 4, Chapter 1 ;
- Para conceitos de geometria riemanniana, vide Ref. 5 ;
- Para conceitos de análise complexa, vide Ref. 6 ou Ref. 7 ;
- Para conceitos de superfícies de Riemann, vide Ref. 8 ou Ref. 9 ;
- Para conceitos de 1-formas, vide Ref. 10 ;
- Para teoremas de análise real, vide Ref. 11 .

1.1

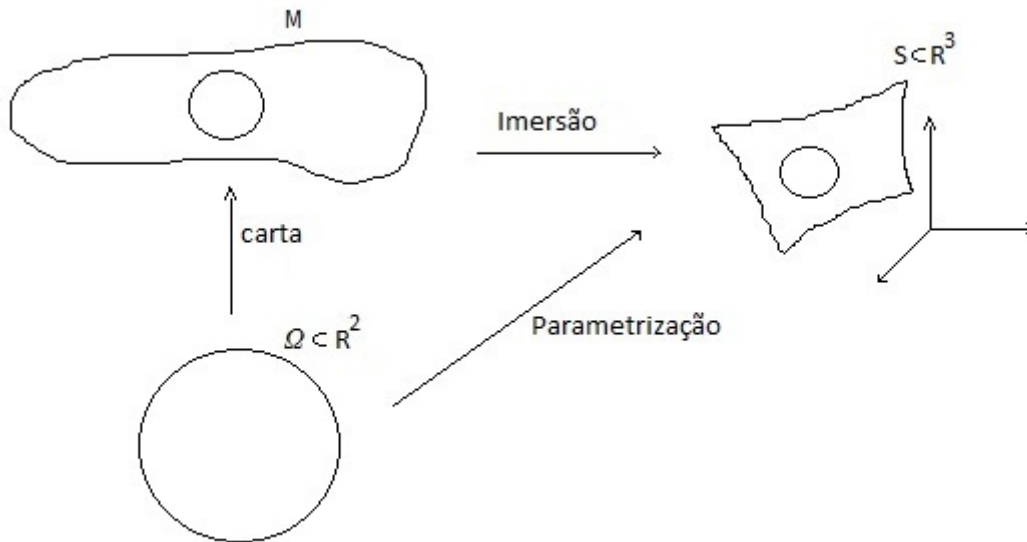
Geometria Diferencial e Análise Real

As variedades que trabalharemos são superfícies (ou curvas dentro dela) orientáveis regulares de classe C^2 . Não voltaremos a mencionar estas hipóteses ao longo do texto.

Definição 1.1.1 (Imersão) *Sejam M e N variedades, $\dim(M) \leq \dim(N)$. Uma imersão é uma aplicação $X : M \rightarrow N$ de classe C^2 cuja derivada $D_p X : T_p M \rightarrow T_{X(p)} N$ é injetiva em todo ponto $p \in M$. Neste caso dizemos que $S := X(M)$ é superfície imersa em N .*

Ao longo do texto as superfícies estarão imersas em $N = \mathbb{R}^3$.

Definição 1.1.2 (Parametrização) *Seja S superfície imersa em \mathbb{R}^3 e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto. Uma parametrização é uma aplicação $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^2 com $X(\Omega) \subset S$ e cuja derivada é injetiva em todo ponto.*



Observação 1.1.3 Uma parametrização de uma superfície é algo local, enquanto uma imersão é uma aplicação definida na superfície toda. Em particular, quando a parametrização é global, i.e., $\Omega = M$, os dois conceitos são iguais. Além disto, dada uma imersão sempre podemos conseguir uma parametrização ao compor a imersão com uma carta de M . Por fim, se $M \subset \mathbb{R}^2$ é aberto, os dois conceitos são iguais.

Usaremos a mesma letra X para denotar uma imersão e uma parametrização, pois fica claro de qual caso estamos tratando ao olharmos o domínio.

Observação 1.1.4 Como trabalharemos com superfícies S imersas em \mathbb{R}^3 , S se torna uma superfície riemanniana cuja métrica é a induzida pela restrição da métrica canônica de \mathbb{R}^3 a S .

Se $S = X(M)$, M também ganha estrutura de superfície riemanniana ao fazermos o pullback da métrica de S por X . Desta forma M e S são isométricas entre si.

Por fim, se $p : \tilde{M} \rightarrow M$ é recobrimento de classe C^2 de M , também podemos fazer o pullback da métrica de M a \tilde{M} e, desta forma, \tilde{M} será superfície riemanniana. Além disto M e \tilde{M} serão isométricas entre si. Portanto, se M é completa (vide 1.1.12), \tilde{M} também será.

Ao longo do texto todas as superfícies terão as métrica descrita acima, exceto quando dito o contrário.

Definição 1.1.5 (Mergulho) Seja M superfície. A aplicação $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita mergulho quando ela é uma imersão injetora e própria.

Observação 1.1.6 Se $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um mergulho, então X é difeomorfismo entre M e $X(M)$.

De fato, restringindo o contradomínio de X à sua imagem, X se torna bijeção. Além disto, como X é própria, ela é aplicação fechada. Portanto X é homeomorfismo entre M e $X(M)$. Já que X é imersão diferenciável, a sua derivada é injetiva, donde o determinante da sua restrição a $X(M)$ é não-nulo. Então, pelo teorema da função inversa, X^{-1} é diferenciável e a sua derivada tem determinante não nulo. Logo X é difeomorfismo entre M e $X(M)$.

Definição 1.1.7 (Superfícies Paramétricas e Não-paramétricas) Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ dada localmente por parametrizações é dita superfície paramétrica.

Se S é gráfico sobre um aberto, S é dita não-paramétrica.

Observação 1.1.8 Note que toda superfície não-paramétrica é também paramétrica (cujo domínio de parametrização é o domínio do gráfico). Além disto, pelo teorema da função implícita, toda superfície paramétrica é localmente não-paramétrica.

Definição 1.1.9 (Superfície Fechada e Aberta) Seja S superfície imersa em \mathbb{R}^3 . S é dita superfície fechada se ela for compacta e sem bordo. S é dita superfície aberta se ela for não compacta e sem bordo.

Definição 1.1.10 (Superfície Finitamente e Infinitamente Conexa)

Seja M superfície. M é dita finitamente conexa se ela é homeomorfa a uma superfície compacta menos um número finito de pontos. M é dita infinitamente conexa se ela é homeomorfa a uma superfície compacta menos um número infinito de pontos.

Definição 1.1.11 (Curva Divergente) Seja M superfície e $C : [0, 1) \rightarrow M$ uma curva. Então C é dita curva divergente se $C(t)$ escapa de qualquer compacto de M quando $t \rightarrow 1$.

A definição de completude que usaremos é a seguinte¹:

Definição 1.1.12 (Superfície Completa) Seja M superfície riemanniana. M é dita completa quando toda curva divergente $C \subset M$ tem comprimento infinito.

Como M e S são isométricas entre si, S é completa se e somente se M é completa.

¹Ela é equivalente à condição de completude do ponto de vista topológico, de que toda sequência de Cauchy converge.

Proposição 1.1.13 *Se $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é imersão própria, então $S = X(M)$ é completa.*

Prova: Suponha por absurdo que X seja própria e S não seja completa. Logo existe caminho divergente $C \subset S$ com comprimento finito R . Portanto $C([0, 1))$ está em $\overline{B_R(C(0))}$ (pois a métrica de S é a induzida por \mathbb{R}^3).

Pegue sequência $t_n \rightarrow 1$, $t_n \in [0, 1)$. Como $C(t_n)$ está em um compacto, existe subsequência $C(t_{n_k})$ convergente a $p \in \overline{B_R(C(0))}$. Já que C tem comprimento finito, ele não tem outro ponto de acumulação quando $t \rightarrow 1$.

Como C é divergente, $p \notin S$. Mas então existe sequência de pontos em S que convergem a um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ que não está em S , donde S não é propriamente imersa. Absurdo. ■

Definição 1.1.14 (Gráfico Inteiro) *Uma superfície não-paramétrica S em \mathbb{R}^3 é dita gráfico inteiro se ela é gráfico sobre todo um plano.*

Proposição 1.1.15 *Se S é gráfico inteiro contido em \mathbb{R}^3 , então S é própria, donde é completa.*

Prova: A menos de uma rotação de \mathbb{R}^3 , podemos supor que S é dada por $(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$, onde $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é função de classe C^2 .

Seja $(x_{1_n}, x_{2_n}) \in \mathbb{R}^2$ uma sequência divergente qualquer no domínio de u . Então $r_n = \sqrt{x_{1_n}^2 + x_{2_n}^2} \rightarrow +\infty$. Portanto

$$\begin{aligned} \|(x_{1_n}, x_{2_n}, u(x_{1_n}, x_{2_n}))\| &= \sqrt{x_{1_n}^2 + x_{2_n}^2 + u(x_{1_n}, x_{2_n})^2} \leq \\ &\leq \sqrt{x_{1_n}^2 + x_{2_n}^2} = r_n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Logo a imagem desta sequência também é divergente, donde a superfície é propriamente imersa. Em particular, pela proposição 1.1.13, S é completa. ■

Definição 1.1.16 (Pedaco Fundamental) *Seja S uma superfície periódica imersa em \mathbb{R}^3 e seja Γ o grupo de translações de \mathbb{R}^3 pelo qual S é invariante. O pedaco fundamental de S é o seu menor subconjunto tal que, ao aplicar as translações de Γ , conseguimos obter qualquer outro pedaco da superfície S . Em outras palavras, o pedaco fundamental de S é S/Γ .*

Definição 1.1.17 (Aplicação Normal de Gauss) *Seja S superfície imersa em \mathbb{R}^3 . Então a aplicação normal de Gauss é dada por:*

$$N(p) = \pm \frac{X_{u_1} \times X_{u_2}}{\|X_{u_1} \times X_{u_2}\|}$$

onde X_{u_1} e X_{u_2} são vetores distintos em $T_p S$ (em geral são as derivadas parciais da parametrização X em direções perpendiculares u_1 e u_2 no ponto p). O sinal de N será escolhido dependendo da orientação que queremos dar à normal unitária de S .

Definição 1.1.18 (Primeira e Segunda Formas Fundamentais) *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização da superfície imersa S perto do ponto p . Sejam u_1 e u_2 base ortonormal de Ω em $X^{-1}(p)$ e denote por $X_{u_i} \in T_p S$ a derivada parcial de X na direção u_i . Seja N a aplicação normal de Gauss dada por 1.1.17.*

Então a primeira forma fundamental de S em p é a matrix $(g_{ij})_{2 \times 2}$ onde

$$g_{ij} = \langle X_{u_i} ; X_{u_j} \rangle$$

A segunda forma fundamental de S em p é a matrix $(b_{ij})_{2 \times 2}$ onde

$$b_{ij} = \langle N ; X_{u_i u_j} \rangle$$

Definição 1.1.19 (Imersão e Parametrização Conformes (ou Isotérmicas))

Seja M superfície. Uma imersão $X : M \rightarrow N$ é dita conforme (ou isotérmica) quando $D_p X : T_p M \rightarrow T_{X(p)} N$ é aplicação conforme em todo ponto $p \in M$. Em outras palavras, se $\{u_1, u_2\}$ é base ortonormal de $T_p M$, então temos:

$$\|X_{u_1}\|^2 = \|X_{u_2}\|^2 = \lambda^2(p)$$

$$\langle X_{u_1} ; X_{u_2} \rangle = 0$$

onde X_{u_i} é a derivada de X na direção u_i e $\lambda(p)$ é função que varia diferencavelmente com o ponto base p .

Para a definição de parametrização conforme (ou isotérmica), basta trocar M por Ω na definição acima.

Assim como podemos dizer que uma imersão é conforme, um mergulho é conforme se ele é imersão conforme.

Definição 1.1.20 (Recobrimento Conforme) *Seja $p : \tilde{M} \rightarrow M$ recobrimento de classe C^2 , M e \tilde{M} superfícies riemannianas. Então p é dito recobrimento conforme quando ele é localmente uma aplicação conforme.*

Observação 1.1.21 *Quando X é uma parametrização conforme, temos que $(g_{ij})(p) = \lambda^2(p) I$, onde I é a matriz identidade. Neste caso, a métrica de M*

(obtida fazendo o pullback da métrica induzida em S por \mathbb{R}^3) é dada por:

$$ds^2 = \sqrt{\det(g_{ij})} |dz|^2 = \lambda^2 |dz|^2$$

onde $|dz|^2$ é a métrica usual de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Seja $L : [0, 1] \rightarrow \Omega$ uma curva e seja $C := X(L)$. Então o comprimento de C é dado por

$$\text{Comp}(C) = \int_{L(0)}^{L(1)} \lambda |dL| = \int_0^1 \lambda |L'(t)| dt$$

Da mesma forma, dado um pedaço $\overline{\Delta} \subset \Omega$ compacto, a área de $X(\overline{\Delta})$ é dada por

$$\text{Area}(X(\overline{\Delta})) = \int_{\overline{\Delta}} \lambda^2 dA$$

onde dA é o elemento de área canônico de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Proposição 1.1.22 *Sejam $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\tilde{X} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizações de uma mesma superfície S , onde X é parametrização conforme. Então \tilde{X} também é parametrização conforme se e somente se a aplicação $(X^{-1} \circ \tilde{X})$ é conforme².*

Prova: Como X é parametrização conforme, temos $(g_{ij}) = \lambda^2 I$. Mas

$$(\tilde{g}_{ij}) = U^T (g_{ij}) U = \lambda^2 U^T U, \quad \text{onde } U = D(X^{-1} \circ \tilde{X}) = (DX)^{-1} D\tilde{X}$$

Logo \tilde{X} também é parametrização conforme $\iff (\tilde{g}_{ij}) = \tilde{\lambda}^2 I \iff (\lambda \tilde{\lambda}^{-1}) U$ é matriz ortogonal $\iff (X^{-1} \circ \tilde{X})$ é aplicação conforme ou anti-conforme. ■

Observação 1.1.23 *Pela proposição acima, se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície imersa que admite parametrização conforme em uma vizinhança de todo ponto, então S é superfície de Riemann. Neste caso, fazendo o pullback da estrutura conforme pela imersão, tanto M quanto qualquer recobrimento de S também são superfícies de Riemann e a aplicação de recobrimento é conforme.*

Definição 1.1.24 (Curvatura Gaussiana) *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização da superfície imersa S em uma vizinhança do ponto p e sejam (g_{ij}) e (b_{ij})*

²Observe que, mesmo que X^{-1} não esteja bem definida globalmente, ela o está localmente. Como ser aplicação conforme é um conceito local, a afirmação da proposição faz sentido.

a primeira e segunda formas fundamentais de S em p (vide 1.1.18). Então a curvatura gaussiana K de S em p é dada por:

$$K = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

Observação 1.1.25 Outra forma equivalente de definir a curvatura gaussiana é $K = \det(DN)$, onde N é a aplicação normal de Gauss. DN é chamada de aplicação de Weingarten.

Observação 1.1.26 Pelo teorema egregium de Gauss, K é uma característica intrínseca da superfície, i.e., não depende do espaço ambiente ou da imersão X . Além disto, se X é parametrização conforme (vide 1.1.19) ao redor do ponto p , então K é dado por:

$$K(p) = \frac{-\Delta_C \log \lambda(p)}{\lambda^2(p)} \quad (1-1)$$

onde $\Delta_C = \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2^2}$ é o laplaciano plano e $\lambda(p)$ é como na definição 1.1.19.

Definição 1.1.27 (Curvatura Média) Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização da superfície imersa S em uma vizinhança do ponto p e sejam (g_{ij}) e (b_{ij}) a primeira e segunda formas fundamentais de S em p (vide 1.1.18). Então a curvatura média H de S em p é dada por:

$$H = \frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{2 \det(g_{ij})}$$

Observação 1.1.28 Outra forma equivalente de definir a curvatura média é por $H = \text{tr}(DN)$, onde DN é a aplicação de Weingarten.

Note que a escolha do sinal de N define o sinal de (b_{ij}) . Portanto o sinal de H depende do sinal escolhido para N .

Definição 1.1.29 (Vetor Curvatura Média) Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização da superfície S . O vetor curvatura média em um ponto $p \in S$ é:

$$\vec{H}(p) := H(p)\vec{N}(p)$$

onde \vec{N} é o vetor normal unitário dado pela aplicação normal de Gauss

Observação 1.1.30 Apesar de H depender do sinal escolhido para N , o vetor curvatura média \vec{H} não depende desta escolha.

De fato, se mudarmos o sinal de N , o sinal de todas as entradas de (b_{ij}) mudam (vide 1.1.18) e, portanto, o sinal de H muda (vide 1.1.27). Logo o produto $H\vec{N}$ não muda de sinal.

Definição 1.1.31 (Curvaturas Principais) *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização da superfície imersa S em uma vizinhança do ponto p , e sejam K e H as curvaturas gaussiana e média de S em p . Então as curvaturas principais κ_1 e κ_2 de S em p são determinadas pelo sistema:*

$$\begin{cases} K = \kappa_1 \kappa_2 \\ H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \end{cases}$$

Ou seja

$$\kappa_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

Teorema 1.1.32 *As curvaturas gaussiana, média e as curvaturas principais são independentes da parametrização (e as três últimas só dependem da escolha do sinal de N).*

Prova: Basta usar as definições de K e H através da aplicação de Weingarten e ver que ela independe da parametrização. Por fim, como pelo teorema egregium de Gauss (vide 1.1.26) K é intrínseco a superfície, a curvatura gaussiana não depende do sinal de N . ■

Definição 1.1.33 (Superfícies Totalmente Umbílicas) *Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é dita totalmente umbílica se as suas curvaturas principais são iguais entre si em todo ponto, i.e.,*

$$\kappa_1(p) = \kappa_2(p), \quad \forall p \in S$$

Teorema 1.1.34 (Classificação das Superfícies Totalmente Umbílicas) *Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é superfície totalmente umbílica, então S está contida em um plano ou em uma esfera.*

Prova: Vide Ref. 2, Capítulo 3.2, Proposição 4. ■

Definição 1.1.35 (Superfícies Regradas) *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão, $S := X(M)$. S é dita superfície regradada se ela pode ser parametrizada por*

$$X(u_1, u_2) = \beta(u_2) + u_1 \delta(u_2)$$

onde β e δ são curvas em \mathbb{R}^3 .

Definição 1.1.36 (Superfícies de Revolução) *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão, $S := X(M)$. S é dita superfície de revolução se ela pode ser parametrizada por:*

$$X(u_1, u_2) = (f(u_1) \cos(u_2), f(u_1) \sin(u_2), u_2)$$

Definição 1.1.37 (Linhas de Curvatura e Linhas Assintóticas) *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização, $S := X(\Omega)$. Seja $C : (a, b) \rightarrow \Omega$ curva, onde $C(t) = (C_1(t), C_2(t))$ e $C(t_0) = p \in S$, $t_0 \in (a, b)$.*

As linhas assintóticas de S em p são descritas por

$$b_{11}\dot{C}_1^2(t_0) + 2b_{12}\dot{C}_1(t_0)\dot{C}_2(t_0) + b_{22}\dot{C}_2^2(t_0) = 0 \quad (1-2)$$

onde $\dot{C}(t) = (\dot{C}_1(t), \dot{C}_2(t))$ denota a derivada de C em t e a segunda forma fundamental é calculada no ponto p .

As linhas de curvatura de S em p são dadas por

$$(g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11})\dot{C}_1^2(t_0) + (g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11})\dot{C}_1(t_0)\dot{C}_2(t_0) + \\ + (g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12})\dot{C}_2^2(t_0) = 0 \quad (1-3)$$

onde $\dot{C}(t) = (\dot{C}_1(t), \dot{C}_2(t))$ denota a derivada de C em t e a primeira e segunda formas fundamentais são calculadas no ponto p .

Teorema 1.1.38 *Seja M superfície de classe C^3 . Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão de classe C^3 , $S := X(M)$. Seja c curva de classe C^3 em S . Então:*

- c é geodésica e linha assintótica $\iff c$ é linha reta*
- Seja c geodésica. Então c é linha de curvatura $\iff c$ é curva plana*
- Seja c curva plana ($c \subset E$). Então c é linha de curvatura $\iff S$ intersecta o plano E ao longo de c num ângulo constante θ (se $\theta = \frac{\pi}{2}$, então c é geodésica).*

Prova: Vide Ref. 4, Chapter 3.3, Lemma 2 . ■

Definição 1.1.39 (Curvatura Total e Curvatura Total Absoluta)

Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão, $S := X(M)$. Seja K a curvatura gaussiana de S como em 1.1.24. A curvatura total da superfície S (e portanto de M , pois K é intrínseca pelo teorema egregium 1.1.26) é dada por

$$C(M) = \iint_M K \, dA$$

Analogamente, a curvatura total absoluta de M é

$$\iint_M |K| \, dA$$

Observação 1.1.40 Se a aplicação normal de gauss N é injetiva então, por 1.1.25, a curvatura total absoluta é igual a

$$\iint_{N(M)} dA$$

que é a área da imagem da normal.

Observação 1.1.41 Vamos estabelecer uma notação que será usada mais adiante. Denotemos por

$$K^+ = \max \{0, K\}$$

$$K^- = \max \{0, -K\}$$

Logo $K = K^+ - K^-$. Além disto, podemos definir

$$C^-(M) = \int_M K^- dA$$

$$C^+(M) = \int_M K^+ dA$$

Definição 1.1.42 (Equações de Codazzi) Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização conforme, $z = u_1 + iu_2 \in \Omega$. Seja $(g_{ij}) = \lambda^2 I$ a sua primeira forma fundamental (vide a observação 1.1.21). Então as equações de Codazzi podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \left(\frac{b_{11} - b_{22}}{2} \right)_{u_1} + (b_{12})_{u_2} = \lambda^2 H_{u_1} \\ \left(\frac{b_{11} - b_{22}}{2} \right)_{u_2} - (b_{12})_{u_1} = -\lambda^2 H_{u_2} \end{cases}$$

onde (b_{ij}) é a segunda forma fundamental, H é a curvatura média e usamos a notação de sub-índice para denotar derivadas parciais.

Para uma demonstração, vide Ref. 12, Chapter VI.1 .

Definição 1.1.43 (Fecho Convexo) Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ um compacto. Então o fecho convexo de Σ , denotado por $\text{Conv}(\Sigma)$, é o menor conjunto convexo que contém Σ .

Observação 1.1.44 É fácil ver que $\text{Conv}(\Sigma)$ é a interseção de todos os semi-espaços que contém Σ . Além disto, se Σ é compacto, $\text{Conv}(\Sigma)$ também o é.

Definição 1.1.45 (Domínio) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ω é dito um domínio se for aberto e conexo.*

Definição 1.1.46 (Característica de Euler) *Seja M superfície compacta de gênero g cujo bordo ∂M tem um número finito k de componentes conexas. A característica de Euler de M é dada por*

$$\chi(M) = 2 - 2g - k$$

Em particular, se M não tem bordo, $\chi(M) = 2 - 2g$.

Teorema 1.1.47 (Teorema do Valor Médio em Várias Variáveis)

Seja $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Sejam $a, b \in \Omega$ tais que o intervalo $[a, b] := \{(1-t)a + tb : t \in [0, 1]\}$ está em Ω . Então $\exists \tau \in [0, 1]$ tal que

$$F(b) - F(a) = \langle \nabla F((1-\tau)a + \tau b) ; b - a \rangle$$

Prova: Defina $g(t) = F((1-t)a + tb)$. Observe que $g(0) = F(a)$ e $g(1) = F(b)$. Usando o teorema do valor médio unidimensional em g e a regra da cadeia, o teorema segue. ■

Teorema 1.1.48 (Teorema da Divergência) *Seja S superfície compacta em \mathbb{R}^3 . Seja \vec{F} um campo vetorial tangente em S e denote por \vec{n} o campo de vetores unitários em ∂M normais a ∂M e contidos em TM . Portanto*

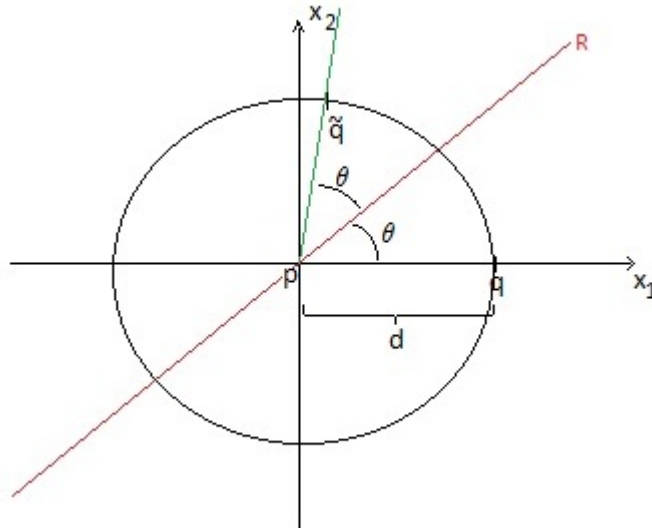
$$\iint_S \operatorname{div}(\vec{F}) \, dA = \int_{\partial M} \langle \vec{F} ; \vec{n} \rangle \, ds$$

Teorema 1.1.49 (Lema de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto contrátil. Então qualquer p -forma suave fechada α definida em Ω é exata, onde $p \in \mathbb{N}^*$.*

Teorema 1.1.50 *Seja $p \in \mathbb{R}^2$ um ponto e $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva fechada (cuja imagem denotaremos por C). Suponha que C é invariante por reflexão através de qualquer reta R que passe por p .*

Então C é um círculo.

Prova: Seja $q \in C$ um ponto qualquer com $q \neq p$. Seja $d > 0$ a distância entre p e q . Tome um sistema de coordenadas (x_1, x_2) centrado em p de forma que o ponto q esteja no eixo x_1 . Podemos então parametrizar as retas R que passam por p através do ângulo $\theta \in [0, \pi)$ que elas fazem com o eixo x_1 . Denotaremos as retas por R_θ .



Note que a reflexão de q por R_θ nos dá um ponto \tilde{q} que também está a uma distância d do ponto p . De fato, a reflexão é uma isometria de \mathbb{R}^2 e o ponto p fica parado, logo

$$\text{dist}(p, \tilde{q}) = \text{dist}(p, q) = d$$

Além disto, o ângulo que o segmento de reta \overline{qp} faz com o eixo x_1 é igual a 2θ (pois R_θ é bissetriz deste ângulo). Portanto, ao variarmos θ de 0 a π obtemos todos os pontos contidos no círculo de raio d centrado em p . Então este círculo está contido em C .

Por fim, suponha por absurdo que existisse um ponto s fora deste círculo, com $\text{dist}(p, s) = \tilde{d} \neq d$. Como C é variedade conexa, existe caminho γ ligando s a um ponto do círculo. Mas então, pelo mesmo raciocínio usado acima, todos os círculos centrados em p com raio r satisfazendo $d \leq r \leq \tilde{d}$ estariam em C , donde C não seria uma curva. Absurdo.

Logo X é o círculo centrado em p de raio d . ■

Teorema 1.1.51 *Seja S superfície conexa imersa em \mathbb{R}^3 e seja ℓ uma reta qualquer. Suponha que S seja invariante por reflexão através de todos os planos que contenham a reta ℓ .*

Então S é invariante por rotação através de ℓ .

Prova: Seja Π um plano perpendicular a ℓ que contenha algum ponto de S . Então, pelo teorema 1.1.50, $(S \cap \Pi)$ é invariante por rotação ao redor de $(\ell \cap \Pi)$. Como isto vale para qualquer tal plano $\Pi \perp \ell$, segue que S é invariante por rotação através de ℓ . ■

Definição 1.1.52 (Operador Linear Elíptico de Segunda Ordem)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio. L é um operador linear elíptico de segunda ordem em Ω se, para qualquer função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 , tivermos

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j} a_{ij}(x)u_{ij}(x) + \sum_k b_k(x)u_k(x) + c(x)u(x)$$

onde $x \in \Omega$, u_i denota a derivada parcial de u na direção x_i , u_{ij} denota a segunda derivada de u nas direções x_i e x_j , e a matriz (a_{ij}) é simétrica positiva definida. Em outras palavras, se Λ e λ são o maior e menor autovalores de (a_{ij}) , então

$$\Lambda(x)|\xi|^2 \geq \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda(x)|\xi| > 0, \quad \forall x \in \Omega$$

onde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.53 (Princípio do Máximo Interior de Hopf) *Seja $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio. Seja L operador linear elíptico de segunda ordem em Ω satisfazendo*

$$Lu \geq 0 \quad \text{em } \Omega$$

Suponha que os coeficientes de L (vide 1.1.52) satisfazem $c = 0$ e $\frac{|b_i|}{\lambda}, \frac{\Lambda}{\lambda}$ são localmente limitadas em Ω , $i = 1, \dots, n$.

Se u atinge máximo em um ponto interior, então u é função constante.

Para uma demonstração, vide Ref. 13, Theorem 3.5 .

Teorema 1.1.54 (Princípio do Máximo do Bordo de Hopf) *Seja $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado. Seja L operador linear elíptico de segunda ordem em Ω satisfazendo*

$$Lu = 0 \quad \text{em } \Omega$$

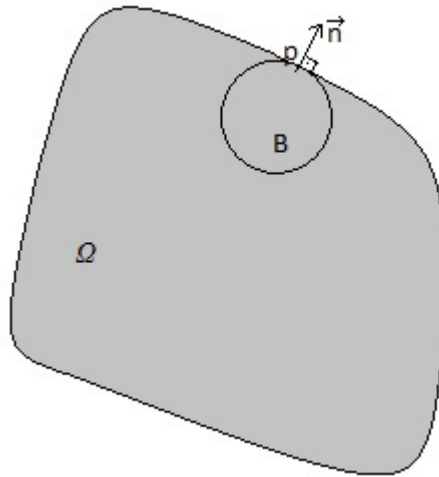
Suponha que os coeficientes de L (vide 1.1.52) satisfazem $c = 0$ e $\frac{|b_i|}{\lambda}, \frac{\Lambda}{\lambda}$ são localmente limitadas em Ω , $i = 1, \dots, n$.

Seja $p \in \partial\Omega$ um ponto que também está no bordo de uma bola aberta $B \subset \Omega$.

Suponha que $u(p)$ é valor de máximo e que a derivada $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ exista em p , onde \vec{n} é o vetor unitário normal a B em p . Então

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} > 0$$

a menos que u seja função constante.



Para a demonstração do teorema acima, vide Ref. 13, Lemma 3.4 e Theorem 3.6 .

1.2

Análise Complexa, Harmônica e Superfícies de Riemann

Teorema 1.2.1 *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ função meromorfa não constante, Ω domínio. Então os pólos e zeros de f são isolados.*

Teorema 1.2.2 *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ função holomorfa, Ω domínio. Então $\operatorname{Re}(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$ são funções harmônicas.*

Definição 1.2.3 (Conjugada Harmônica) *Duas funções harmônicas $u(x, y)$ e $v(x, y)$ definidas num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ são ditas conjugadas harmônicas se e somente se elas são a parte real e imaginária de uma função holomorfa. Isto é, identificando \mathbb{R}^2 com \mathbb{C} , existe função holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ com*

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Observação 1.2.4 *Se Ω é simplesmente conexo, dada uma função harmônica $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sempre podemos encontrar sua conjugada harmônica $v(x, y)$.*

De fato, tome

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

e defina

$$h = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Como Ω é simplesmente conexo, podemos integrar h e definir

$$f(z) := \int_{z_0}^z h(w) dw = u(x, y) + iv(x, y) + c$$

onde $z = x + iy$, $z_0 \in \Omega$ e c é uma constante. Portanto $v = \text{Im}(f)$ é conjugada harmônica de u .

Observe também que, se Ω não fosse simplesmente conexo, a função h estaria bem definida, mas a função f poderia ser multi-valorada (donde v também o seria). No entanto, podemos sempre definir v localmente: dado um ponto $p \in \Omega$, basta pegar uma vizinhança simplesmente conexa de p em Ω , integrar h nesta vizinhança para obter f nela, donde $v = \text{Im}(f)$ é conjugada harmônica de u nesta vizinhança.

Teorema 1.2.5 *Seja u função harmônica definida em $0 < r_1 < |z| < +\infty$. Então a sua expansão de Laurent em uma vizinhança do infinito é*

$$u(z) = \alpha \log |z| + h(z) + H(z)$$

onde $h(z)$ é função harmônica e limitada perto de $z = +\infty$ e $H(z)$ é função harmônica em \mathbb{C} .

Prova: Seja $w = \frac{1}{z}$, $w = x + iy$. Vamos trabalhar com $u(w)$, onde $0 < w < \frac{1}{r_1}$.

Então existe função holomorfa $f(w) = u(x, y) + iv(x, y)$ com

$$f'(w) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

A princípio f pode ser multi-valorada, mas não f' . Portanto

$$f'(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n w^n$$

donde

$$f(z) = \tilde{C} + a_{-1} \text{Log}(w) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 1}}^{+\infty} \frac{a_n w^{n+1}}{n+1}$$

Como $u(r, \theta) = \text{Re}(f(w))$, onde $r = |w|$ e $\theta = \arg(w)$, temos

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \text{Re}(\tilde{C}) + \text{Re}(a_{-1}) \log(r) - \text{Im}(a_{-1})\theta + \\ &+ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 1}}^{+\infty} \left\{ \frac{\text{Re}(a_n) \cos[(n+1)\theta]}{n+1} - \frac{\text{Im}(a_n) \sin[(n+1)\theta]}{n+1} \right\} r^{n+1} \end{aligned}$$

Já que $u(r, \theta)$ está bem definido numa vizinhança de w , então $\text{Im}(a_{-1}) = 0$. Logo

$$u(r, \theta) = c \log(r) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] r^n$$

onde $\alpha_0 = \text{Re}(\tilde{C})$, $\beta_0 = 0$, $c = a_{-1} \in \mathbb{R}$ e, para $n \in \mathbb{Z}^*$, $\alpha_n = \frac{\text{Re}(a_{n-1})}{n}$ e $\beta_n = \frac{-\text{Im}(a_{n-1})}{n}$. Mas

$$\begin{cases} r = |w| = \frac{1}{|z|} \\ \theta = \arg(w) = -\arg(z) \end{cases}$$

Portanto

$$u(z) = -c \log|z| + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\alpha_{-n} \cos(n\theta) - \beta_{-n} \sin(n\theta)] |z|^n$$

Então (tomando $\alpha = -c$):

$$u(z) = \alpha \log|z| + h(z) + H(z)$$

onde

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^0 [\alpha_{-n} \cos(n\theta) - \beta_{-n} \sin(n\theta)] |z|^n$$

é harmônica³ e limitada perto de $z = +\infty$ e

$$H(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} [\alpha_{-n} \cos(n\theta) - \beta_{-n} \sin(n\theta)] |z|^n$$

é harmônica⁴ em \mathbb{C} . ■

Teorema 1.2.6 (Princípio do Máximo para Funções Harmônicas)

Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ função harmônica não constante, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domínio limitado.

Então u não assume máximo nem mínimo em Ω .

³Pois é parte real da função holomorfa $\sum_{n=-\infty}^0 (\alpha_{-n} + i\beta_{-n})z^n$.

⁴É parte real da função holomorfa $\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_{-n} + i\beta_{-n})z^n$.

Teorema 1.2.7 (Princípio do Máximo para Funções Holomorfas) *Se $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ é função holomorfa e M é superfície de Riemann compacta, então f é constante.*

Teorema 1.2.8 *Qualquer função harmônica $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, é função analítica nas variáveis reais x e y em Ω . Em particular, toda função harmônica é C^∞ .*

Para a demonstração, vide Ref. 14, Chapter 3.4, Proposition 4.1 .

Definição 1.2.9 (Funções Subharmônica e Superharmônica) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domínio. Uma função contínua $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é subharmônica se e somente se, para qualquer bola $B_r(z_0) \subset \Omega$ vale*

$$v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Analogamente, v é dita superharmônica se e somente se, para qualquer bola $B_r(z_0) \subset \Omega$ vale

$$v(z_0) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Em particular, se u é superharmônica, $(-u)$ é subharmônica (e vice-versa).

Definição 1.2.10 (Família de Perron) *Seja M uma superfície de Riemann e seja \mathcal{F} uma família de funções contínuas subharmônicas em M . Dizemos que \mathcal{F} é família de Perron se e somente se:*

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$;
- $\forall u, v \in \mathcal{F}$ temos $\max\{u, v\} \in \mathcal{F}$;
- para qualquer disco conforme $D \subset M$ e $\forall u \in \mathcal{F}$, existe uma função $v \in \mathcal{F}$ tal que $v|_D$ é harmônica e que $v = u$ em $(M \setminus D)$.

Observação 1.2.11 *Para conseguir a terceira condição acima, basta integrar u com o núcleo de poisson no disco e, desta forma, definir v . Para mais detalhes, vide Ref. 9 .*

Teorema 1.2.12 (Método de Perron) *Seja M superfície de Riemann e seja \mathcal{F} uma família de Perron em M . Defina f como*

$$f(z) = \sup_{u \in \mathcal{F}} u(z), \quad \forall z \in M$$

Então temos $f \equiv +\infty$ ou f é função harmônica em M .

Definição 1.2.13 (Projeção estereográfica) A projeção estereográfica (através do pólo norte) é a aplicação bijetiva anti-conforme $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dada por

$$\begin{cases} \pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \\ \pi(0, 0, 1) = \infty \end{cases}$$

A sua inversa $\pi^{-1} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{S}^2$ é

$$\begin{cases} \pi^{-1}(z) = \left(\frac{2 \operatorname{Re}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \right) \\ \pi^{-1}(\infty) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Teorema 1.2.14 (Fórmula do Resíduo) Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ função meromorfa com pólo de ordem n em $p \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}^*$. Então o resíduo de f no ponto p é dado por:

$$\operatorname{Res}(f, p) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow p} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-p)^n f(z))$$

Teorema 1.2.15 (Teorema dos Resíduos) Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ função meromorfa cujos pólos são denotados por $p_j \in \Omega$. Seja γ uma curva fechada homologicamente trivial em Ω que não passe por nenhum dos pontos p_j . Então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_j I(\gamma, p_j) \operatorname{Res}(f, p_j)$$

onde $I(\gamma, a_j)$ é o número de voltas⁵ de γ ao redor do ponto p_j .

Teorema 1.2.16 (Teorema de Liouville) Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ função holomorfa limitada. Então f é constante.

Teorema 1.2.17 (Lema de Schwarz) Seja $f : B_{R_1}(0) \rightarrow B_{R_2}(0)$ função holomorfa com $f(0) = 0$.

Então

$$\begin{cases} \frac{|f(z)|}{R_2} \leq \frac{|z|}{R_1}, & \forall z \in B_{R_1}(0) \\ |f'(0)| \leq \frac{R_2}{R_1} \end{cases}$$

⁵Rodar ao redor de p_j no sentido anti-horário conta positivamente.

Além disto, se temos a igualdade em alguma das inequações acima (para algum $z \neq 0$), então

$$\frac{f(z)}{R_2} = \frac{a}{R_1} z$$

onde $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

Teorema 1.2.18 (Teorema de Schwarz-Pick) *Seja $f : B_{R_1}(0) \rightarrow B_{R_2}(0)$ função holomorfa. Então $\forall z_1, z_2 \in B_{R_1}(0)$ temos:*

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{R_2^2 - \overline{f(z_1)}f(z_2)} \right| \leq \frac{R_1}{R_2} \left| \frac{z_1 - z_2}{R_1^2 - \overline{z_1}z_2} \right|$$

Além disto, $\forall z \in B_{R_1}(0)$ temos

$$\frac{|f'(z)|}{R_2^2 - |f(z)|^2} \leq \frac{R_1}{R_2} \frac{R_1}{R_1^2 - |z|^2}$$

Teorema 1.2.19 (Pequeno Teorema de Picard) *Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é função holomorfa não constante, então $f(z)$ assume todos os valores do plano complexo com, no máximo, uma exceção.*

Teorema 1.2.20 (Grande Teorema de Picard) *Seja f uma função holomorfa com uma singularidade essencial no ponto w . Então numa vizinhança de w a função $f(z)$ assume todos os valores do plano complexo um número infinito de vezes com, no máximo, uma exceção.*

Corolário 1.2.21 *Seja f uma função inteira, i.e., holomorfa em \mathbb{C} . Se f não é polinômio, então ela assume todos os valores do plano complexo um número infinito de vezes com, no máximo, uma exceção.*

Teorema 1.2.22 (Teorema de Runge) *Seja $K \subset \mathbb{C}$ compacto e seja h uma função holomorfa em um aberto contendo K . Se A é um conjunto contendo ao menos um ponto de cada componente conexa limitada de $\mathbb{C} \setminus K$, então existe uma sequência de funções racionais (r_n) , $n \in \mathbb{N}$, que converge uniformemente a h em K de forma que todos os pólos das funções r_n estão em A .*

Em particular, se $\mathbb{C} \setminus K$ é conexo, $A = \emptyset$ e as funções (r_n) são polinômios.

Teorema 1.2.23 *O espaço das funções holomorfas $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ limitadas munido com a norma sup, denotado por $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$, é espaço de Banach (em particular, é completo).*

Proposição 1.2.24 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ função meromorfa. Suponha que o infinito não é singularidade essencial de f .*

Então f é uma função racional.

Prova: Seja $w = z^{-1}$. Como $z = \infty$ não é singularidade essencial de $f(z)$, então $w = 0$ é, no máximo, um pólo de $f(w)$. Portanto a série de Laurent de $f(z)$ é uma soma finita (pois nem $z = 0$ nem $z = \infty$ são singularidades essenciais de $f(z)$). Suponha que $z = 0$ é pólo de ordem N de $f(z)$. Então

$$P(z) := f(z)z^N$$

é um polinômio. Portanto

$$f(z) = \frac{P(z)}{z^N}$$

donde $f(z)$ é função racional. ■

Teorema 1.2.25 (Teorema de Uniformização de Riemann) *Se M é superfície de Riemann simplesmente conexa, então M é conformemente equivalente a \mathbb{S}^2 , \mathbb{C} ou \mathbb{D} .*

Pelo teorema acima sabemos que o recobrimento universal de uma superfície de Riemann só pode ser \mathbb{S}^2 , \mathbb{C} ou \mathbb{D} . O teorema abaixo nos dá uma caracterização do recobrimento universal de qualquer superfície de Riemann.

Teorema 1.2.26 (Recobrimentos Universais de Superfícies de Riemann)

Seja M superfície de Riemann e \tilde{M} o seu recobrimento universal. Então

- *Se $\tilde{M} = \mathbb{S}^2$, então $M = \mathbb{S}^2$;*
- *Se $\tilde{M} = \mathbb{C}$, então $M = \mathbb{C}$, $M = \mathbb{C}^*$ ou M é um toro.*

Portanto todas as outras superfícies de Riemann tem como recobrimento universal o disco \mathbb{D} .

Definição 1.2.27 (Superfícies de Riemann Elípticas, Parabólicas e Hiperbólicas)

Seja M uma superfície de Riemann. Então M é dita:

- elíptica $\iff M$ é compacta;
- hiperbólica \iff existe função subharmônica negativa não constante em M ;
- parabólica $\iff M$ não é elíptica nem hiperbólica.

Teorema 1.2.28 (Relação de Riemann) *Seja M superfície de Riemann compacta e seja ω uma 1-forma meromorfa não constante em M . Então*

$$\chi(M) = P(\omega) - Z(\omega)$$

onde $P(\omega)$ e $Z(\omega)$ denotam o número de pólos e número de zeros de ω em M , respectivamente.

2

Definições Equivalentes de Superfícies Mínimas

Existem várias definições equivalentes de superfície mínima. Na primeira seção daremos a mais simples (e também a mais comum), mas que nada justifica o nome de mínima. Na verdade o termo superfície mínima vem do fato que, dada uma curva C^2 fechada Γ , a superfície S que tem a curva Γ como bordo e com a menor área possível é uma superfície mínima. Veremos isto com mais detalhes na seção 2.2. Uma outra definição possível, usando coordenadas harmônicas de parametrizações conformes, é mencionada na seção 3.1. Esta última estudaremos com mais detalhes apenas no capítulo 3.

2.1

$H = 0$

Definição 2.1.1 (Imersão Mínima) *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de uma superfície, $S := X(M)$. Dizemos que a imersão X é mínima se e somente se*

$$H(p) = 0, \quad \forall p \in S. \quad (2-1)$$

Neste caso S é chamada de superfície mínima.

Definição 2.1.2 (Parametrização Mínima) *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de uma superfície, $S := X(M)$. Dizemos que a parametrização X é mínima se e somente se*

$$H(p) = 0, \quad \forall p \in S. \quad (2-2)$$

Neste caso S é chamada de superfície mínima.

Definição 2.1.3 (Gráfico Mínimo) *Um gráfico mínimo é uma superfície mínima não paramétrica.*

Definição 2.1.4 (Recobrimento Mínimo) *Seja $p : \tilde{M} \rightarrow M$ recobrimento da superfície M e $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. O recobrimento é dito mínimo se $X \circ p : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão mínima.*

Observação 2.1.5 *Como ser superfície mínima é algo local (ou seja, precisamos que $H \equiv 0$ em todo aberto) e uma aplicação de recobrimento é localmente*

um difeo, então uma imersão $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é mínima se e somente se o seu recobrimento $X \circ p : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é mínimo.

Dentre todas que daremos, a definição de mínima enunciada acima é a mais simples de ser usada. Portanto, quando surgirem outras definições de superfícies mínimas, veremos que elas são equivalentes a esta.

Sejam (x_1, x_2, x_3) as coordenadas de S em \mathbb{R}^3 . Caso S seja superfície mínima não-paramétrica (ou seja, $x_3 = f(x_1, x_2)$) podemos reescrever a condição $H = 0$ na seguinte forma:

Teorema 2.1.6 (EDP das Superfícies Mínimas Não-paramétricas)

Uma superfície não-paramétrica $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X : (u_1, u_2) \mapsto (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$ é mínima se e somente se

$$(1 + f_{u_2}^2)f_{u_1u_1} - 2f_{u_1}f_{u_2}f_{u_1u_2} + (1 + f_{u_1}^2)f_{u_2u_2} \equiv 0 \quad (2-3)$$

onde f_{u_i} é a derivada parcial de f em relação a u_i e $f_{u_iu_j}$ é a segunda derivada parcial em relação a u_i e u_j .¹

Prova: Sabemos que

$$H = \frac{g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12}}{2 \det(g_{ij})} = 0$$

onde (g_{ij}) e (b_{ij}) são a primeira e a segunda formas fundamentais da superfície S (vide 1.1.27). Como S é não-paramétrica, por um cálculo simples, temos que

$$\begin{cases} g_{11} = 1 + f_{u_1}^2 \\ g_{12} = f_{u_1}f_{u_2} \\ g_{22} = 1 + f_{u_2}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} b_{11} = f_{u_1u_1} \\ b_{12} = f_{u_1u_2} \\ b_{22} = f_{u_2u_2} \end{cases} \quad (2-4)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} H = 0 & \iff g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} = 0 \\ & \iff (1 + f_{u_2}^2)f_{u_1u_1} - 2f_{u_1}f_{u_2}f_{u_1u_2} + (1 + f_{u_1}^2)f_{u_2u_2} = 0 \end{aligned}$$

■

Observação 2.1.7 A equação diferencial parcial (2-3) é:

¹Sabemos que toda superfície paramétrica é localmente não-paramétrica (vide observação 1.1.8). Quando exibirmos a fórmula não-paramétrica destes casos, usaremos x_1 e x_2 ao invés de u_1 e u_2 .

- **quasilinear**, pois, fixadas as primeiras derivadas de f , ela é linear nas segundas;
- **elíptica**, pois a matriz de coeficientes das segundas derivadas de f é

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} (1 + f_{u_2}^2) & -f_{u_1}f_{u_2} \\ -f_{u_1}f_{u_2} & (1 + f_{u_1}^2) \end{pmatrix}$$

que possui autovalores $\lambda = 1$ e $\Lambda = 1 + f_{u_1}^2 + f_{u_2}^2$, ambos estritamente positivos;

- **de segunda ordem**, pois ela é função das segundas derivadas de f .

Teorema 2.1.8 *Forma Divergente da EDP das Superfícies Mínimas* Uma superfície não-paramétrica $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X : (u_1, u_2) \mapsto (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$ é mínima se e somente se

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) \equiv 0$$

Prova: Na verdade esta EDP é equivalente à mencionada anteriormente em (2-3). Para observar isto, basta pegar a equação (2-3), multiplicar por $(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}$ (que é sempre não nulo) e rearrumar os termos para obter a EDP acima. ■

Observação 2.1.9 *Como a EDP das superfícies mínimas não-paramétricas pode ser escrita na forma acima, ela é dita da forma divergente.*

2.2

Superfícies que Minimizam Área (Cálculo Variacional)

Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização, $S = X(\Omega)$, Ω domínio. Sejam (u_1, u_2) sistema de coordenadas de Ω e denote por u um ponto de Ω .

Definição 2.2.1 (Variação) *Seja S como acima (possivelmente com bordo). Uma variação $F : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S é uma função com suporte compacto que fixa o bordo e é a identidade no instante de tempo $t = 0$, isto é:*

$$\begin{cases} F(x, t) \equiv x & \text{fora de um compacto} \\ F(x, 0) = x, & \forall x \in S \\ F(x, t) = x, & \forall x \in \partial S \end{cases}$$

O campo vetorial F_t (i.e., a derivada F na direção t) restrito a S é chamado campo vetorial variacional. Denotamos por $S_t := F(S, t)$ a variação da superfície S no instante t .

Definição 2.2.2 (Variação Normal) Uma variação $F : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita variação normal quando o campo vetorial variacional F_t é normal a S em todo ponto.

Observação 2.2.3 Como numa variação normal de S temos $F_t \perp S$, a aproximação de primeira ordem da parametrização das superfícies obtidas por $F(S, t)$ é

$$\tilde{X}(u_1, u_2) = X(u_1, u_2) + t h(u_1, u_2) N(u_1, u_2)$$

onde N é a aplicação normal de Gauss, $(u_1, u_2) \in \Omega$ e $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função qualquer de classe C^2 que se anula nos pontos em que $F_t = 0$.

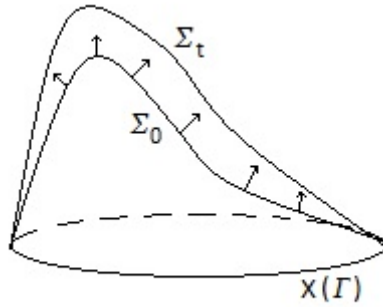


Figura 2.1: Variação normal de Σ_0

Sejam Γ curva simples fechada em Ω , $\Delta \subset \Omega$ o subdomínio limitado por Γ com $\overline{\Delta}$ compacto e $\Sigma_0 = X|_{\overline{\Delta}}$ o pedaço de S obtido pela restrição de Ω a $\overline{\Delta}$. Suponha que Σ_0 tenha a menor área dentre todas as superfícies definidas em $\overline{\Delta}$ que sejam iguais a $X(u_1, u_2)$ em Γ (ou seja, que tenham o mesmo bordo de $X|_{\overline{\Delta}}$).

Vamos analisar o que acontece com a área de uma superfície paramétrica quando fazemos variações normais a ela. Depois faremos algumas observações do que ocorre no caso de variações quaisquer.

Para isto, precisamos ver como varia o determinante da primeira forma fundamental (g_{ij}) . Por 2.2.3, sabemos que a aproximação de primeira ordem da parametrização das superfícies Σ_t da variação é

$$\tilde{X}(u_1, u_2) = X(u_1, u_2) + t h(u_1, u_2) N(u_1, u_2)$$

onde N é a aplicação normal de Gauss, $h(u_1, u_2)$ é uma função qualquer de classe C^2 em $\overline{\Delta}$ que se anula em $\Gamma = \partial\Delta$ e $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Derivando $\tilde{X}(u_1, u_2)$ em relação a u_i temos

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial u_i} = \frac{\partial X}{\partial u_i} + t \left[h \frac{\partial N}{\partial u_i} + \frac{\partial h}{\partial u_i} N \right]$$

Portanto a primeira forma fundamental de Σ_t é

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} &= \left\langle \frac{\partial \tilde{X}}{\partial u_i}, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial u_j} \right\rangle = \\ &= g_{ij} + t \left[h \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle + \frac{\partial h}{\partial u_i} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_j}, N \right\rangle + h \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_j}, \frac{\partial X}{\partial u_i} \right\rangle + \frac{\partial h}{\partial u_j} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}, N \right\rangle \right] \\ &+ t^2 \left[h^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle + \frac{\partial h}{\partial u_i} \frac{\partial h}{\partial u_j} \langle N, N \rangle + h \frac{\partial h}{\partial u_j} \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, N \right\rangle + h \frac{\partial h}{\partial u_i} \left\langle N, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle \right] \end{aligned}$$

Usando a definição da segunda forma fundamental em (1.1.18) e que a normal N é perpendicular a $\frac{\partial X}{\partial u_k}$, $k = 1, 2$, obtemos:

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} - 2 t h b_{ij} + t^2 c_{ij}$$

onde $c_{ij} : \bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, $i, j = 1, 2$.

Com isto temos também:

$$\det(\tilde{g}_{ij}) = \det(g_{ij}) + a_1 t + a_2 t^2 \quad (2-5)$$

onde

$$\begin{cases} a_1 = -2 h (g_{11} b_{22} + g_{22} b_{11} - 2 g_{12} b_{12}) = -4 h H \det(g_{ij}) \\ a_2 \text{ é função contínua de } u_1, u_2 \text{ e } t \end{cases}$$

É interessante comentar que a fórmula de a_2 em (2-5) não será importante pois este termo sumirá das contas².

Neste momento vamos estudar a regularidade de Σ_t . Como Σ_0 é regular, segue que $\det(g_{ij}) \neq 0$ em todo ponto. Já que $\bar{\Delta}$ é compacto, $\det(g_{ij})$ assume um mínimo positivo em $\bar{\Delta}$. Além disto, como a_1 e a_2 são contínuas em t sobre $\bar{\Delta}$, $\exists \epsilon > 0$ tal que

$$\det(\tilde{g}_{ij}) > 0 \text{ para } |t| < \epsilon, (u_1, u_2) \in \bar{\Delta}$$

²Por este mesmo motivo só precisamos da aproximação de primeira ordem da variação normal: os termos com potências mais altas de t , ao serem derivados, continuam multiplicados por t , logo se anulam quando tomamos $t = 0$.

Além disto, como o traço de (g_{ij}) é sempre positivo por definição (vide 1.1.18), novamente pela continuidade de \tilde{g}_{ij} em t e compacidade de $\overline{\Delta}$ temos que $\text{tr}(\tilde{g}_{ij})$ é positivo para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Portanto, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, todas as superfícies Σ_t são regulares (i.e., imersas).

Vamos agora calcular a área da superfície Σ_t em função de t . A área de Σ_0 é:

$$A(0) := A(\Sigma_0) = \iint_{\Delta} \sqrt{\det (g_{ij})} \, du_1 \, du_2$$

Já a área de Σ_t é:

$$A(t) := A(\Sigma_t) = \iint_{\Delta} \sqrt{\det (\tilde{g}_{ij})} \, du_1 \, du_2$$

Se derivarmos $A(t)$ em relação a t no ponto $t = 0$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial t}(0) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \iint_{\Delta} \sqrt{\det (\tilde{g}_{ij})} \, du_1 \, du_2 \\
&= \iint_{\Delta} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \sqrt{\det (\tilde{g}_{ij})} \, du_1 \, du_2 \\
&= \iint_{\Delta} \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\det (\tilde{g}_{ij}))}{\sqrt{\det (\tilde{g}_{ij})|_{t=0}}} \, du_1 \, du_2 \\
&= \iint_{\Delta} \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\det (g_{ij}) + a_1 t + a_2 t^2)}{\sqrt{\det (g_{ij})}} \, du_1 \, du_2 \\
&= \iint_{\Delta} \frac{1}{2} \frac{(a_1 + 2 a_2 t) \Big|_{t=0}}{\sqrt{\det (g_{ij})}} \, du_1 \, du_2 \\
&= \iint_{\Delta} \frac{1}{2} \frac{a_1}{\sqrt{\det (g_{ij})}} \, du_1 \, du_2 \\
&= -2 \iint_{\Delta} h(u_1, u_2) H(u_1, u_2) \sqrt{\det (g_{ij})} \, du_1 \, du_2
\end{aligned}$$

Mas $h : \overline{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função qualquer de classe C^2 que se anula em $\Gamma = \partial\Delta$. Seja $\psi : \overline{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}$ uma *bump function* positiva com $\text{supp}(\psi) \subset \Delta$. Tomando $h(u_1, u_2) = \psi(u_1, u_2)H(u_1, u_2)$ temos:

$$A'(0) = -2 \iint_{\text{supp}(\psi)} \psi(u_1, u_2) H^2(u_1, u_2) \sqrt{\det (g_{ij})} \, du_1 \, du_2$$

Observe que o integrando acima é não-negativo, onde o único termo que pode se anular é $H(u_1, u_2)$. Então, como podemos pegar o suporte de ψ quão grande quanto quisermos (dentro de Δ), temos

$$A'(0) = 0 \iff H \equiv 0 \text{ em } \Sigma_0$$

Ou seja, uma superfície é mínima (pela definição $H = 0$) se e somente se ela for um mínimo do funcional área para uma dada condição de contorno em $\Gamma \subset \Omega$. Portanto as duas definições são equivalentes.

Observação 2.2.4 *No caso de uma variação qualquer (não necessariamente normal), o campo vetorial variacional F_t pode ser escrito como uma soma de um campo vetorial normal F_t^N e outro tangencial F_t^T à superfície. Como a derivada e integral são lineares, $A'(0)$ se dividem em dois termos, sendo um igual ao que obtemos acima. É possível provar que o termo de $A'(0)$ proveniente da parte tangencial F_t^T é dado por:*

$$\iint_{\Delta} \operatorname{div}_{\Sigma_0} (F_t^T)$$

onde $\operatorname{div}_{\Sigma_0}$ denota o divergente em Σ_0 , i.e., apenas com derivadas nas direções tangentes a Σ_0 . No entanto, como $F_t^T|_{\partial\Delta} \equiv 0$, pelo teorema da divergência (vide 1.1.48) a integral acima se anula. Portanto, quando trabalhamos com uma variação qualquer, a fórmula de $A'(0)$ obtida é a mesma que obtemos trabalhando apenas com a parte normal da variação. Para mais detalhes, vide Ref. 15, Chapter 1.3 .

2.3

Exemplos Básicos

2.3.1

Plano

O primeiro exemplo de superfície mínima é o plano. Como ele é não-paramétrica e linear, as suas segundas derivadas são todas nulas, portanto a EDP das superfícies mínimas (2-3) é satisfeita. Outra forma de ver que é uma superfície mínima é observar que, como ela é linear, as curvaturas principais são nulas em todo ponto, logo $H \equiv 0$.

Uma pergunta natural a se fazer é se existe alguma outra superfície mínima que seja gráfico inteiro (vide definição 1.1.14). A resposta é não.

Teorema 2.3.1 (Bernstein) *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ um gráfico mínimo inteiro. Então S é um plano.*

Este teorema foi provado por Bernstein em 1914. Nós daremos duas demonstrações deste teorema mais adiante (vide 4.5.1 e 5.3.1).

2.3.2

Catenoide

O segundo exemplo de superfície mínima é o catenoide. A sua imersão é $X : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}^*$ e:

$$\begin{cases} x_1(u_1 + iu_2) = \frac{c}{2} \left(\frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2} + u_1 \right) \\ x_2(u_1 + iu_2) = \frac{c}{2} \left(\frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2} + u_2 \right) \\ x_3(u_1 + iu_2) = \frac{c}{2} \log(u_1^2 + u_2^2) \end{cases}$$

onde $c \in \mathbb{R}^*$ é uma constante. Note que $|c|$ é o menor raio do catenoide³.

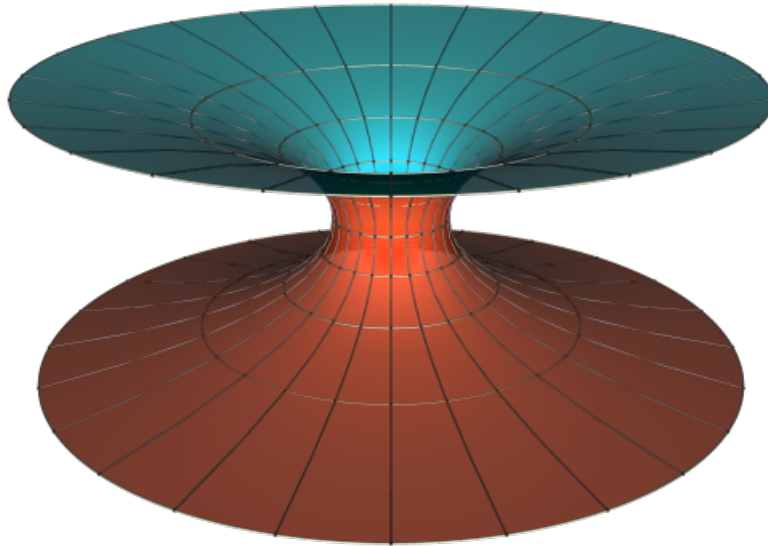


Figura 2.2: Catenoide - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal

³As interseções do catenoide com os planos paralelos $\{x_3 = t\}$, $t \in \mathbb{R}$, são círculos. O círculo de menor raio obtido desta forma está no plano $\{x_3 = 0\}$ e tem raio c .

O recobrimento universal de \mathbb{C}^* é \mathbb{C} (vide 1.2.26) e a aplicação de recobrimento é $p(w) = e^w = z$. Se onde $w = w_1 + iw_2$, temos

$$\begin{cases} w_1 = \frac{\log(u_1^2 + u_2^2)}{2} \\ w_2 = \arg(z) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} u_1 = e^{w_1} \cos(w_2) \\ u_2 = e^{w_1} \sin(w_2) \end{cases}$$

Portanto o recobrimento universal do catenoide é $X \circ p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por⁴:

$$\begin{cases} (X \circ p)_1(w_1 + iw_2) = c \cosh(w_1) \cos(w_2) \\ (X \circ p)_2(w_1 + iw_2) = c \cosh(w_1) \sin(w_2) \\ (X \circ p)_3(w_1 + iw_2) = c w_1 \end{cases}$$

onde $w = i_1 + iw_2 \in \mathbb{C}$.

Observação 2.3.2 Note que, se fizéssemos uma translação do catenoide, somando (d_1, d_2, d_3) à imersão $X = (x_1, x_2, x_3)$, o recobrimento $X \circ p$ também seria transladado em (d_1, d_2, d_3) .

Pela observação 2.1.5, sabemos que a imersão X do catenoide é mínima se e somente se o seu recobrimento universal $X \circ p$ é mínimo. Vamos provar o segundo, que é mais fácil.

O recobrimento universal do catenoide pode ser escrito como a união de duas superfícies não-paramétricas⁵:

$$f(x_1, x_2) = c \cosh^{-1} \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{|c|} \right) = \pm c \log \left(\frac{r + \sqrt{r^2 - |c|}}{|c|} \right), \text{ onde } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (2-6)$$

Além disto, o catenoide é a superfície de revolução obtida ao rodar uma curva catenária no plano (x_1, x_3) ao redor do eixo x_3 . No caso de uma catenária

⁴Usamos que $2w_1 = \log(u_1^2 + u_2^2)$ e $\left(\frac{e^{-w_1} + e^{w_1}}{2} \right) = \cosh(w_1)$.

⁵Lembre-se que $\cosh^{-1}(z) = \log(z + \sqrt{z^2 - 1})$.

cujo mínimo vale c , temos:

$$(x_1, x_3) = \left(c \cosh\left(\frac{x_3}{c}\right), x_3 \right) = \left(x_1, c \cosh^{-1}\left(\frac{x_1}{c}\right) \right)$$

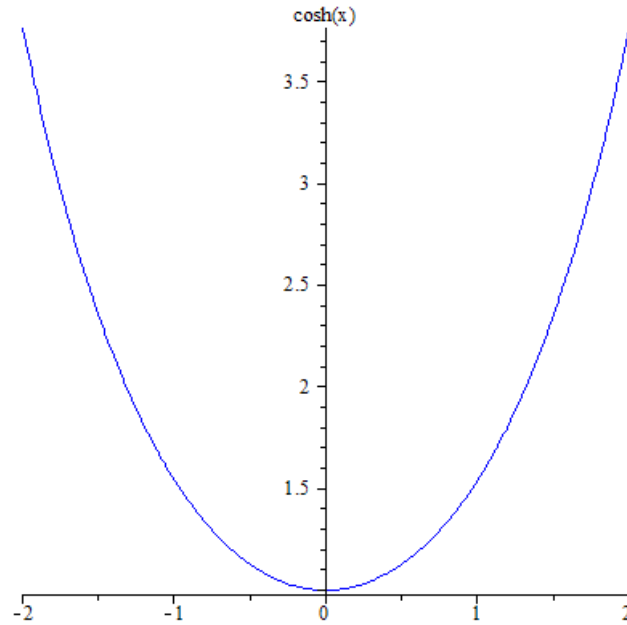


Figura 2.3: Curva Catenária

Na verdade temos o seguinte resultado de unicidade:

Teorema 2.3.3 *Se S é superfície mínima de revolução em \mathbb{R}^3 , então S é o catenoide ou um pedaço dele.*

Prova: Se a superfície é de revolução (vide 1.1.36), então $\exists f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função de classe C^2 tal que a superfície de revolução S obtida pela rotação de f ao redor do eixo t (seu domínio) é a superfície mínima. Logo a sua parametrização é $X(s, t) = (f(t) \cos(s), f(t) \sin(s), t)$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Segue que:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial s} = (-f(t) \sin(s), f(t) \cos(s), 0) \\ \frac{\partial X}{\partial t} = (f'(t) \cos(s), f'(t) \sin(s), 1) \end{cases}$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} f^2(t) & 0 \\ 0 & 1 + (f'(t))^2 \end{pmatrix}$$

$$N = \left(\frac{\cos(s)}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}}, \frac{\sin(s)}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}}, \frac{-f'(t)}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} = (-f(t) \cos(s), -f(t) \sin(s), 0) \\ \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = (f''(t) \cos(s), f''(t) \sin(s), 0) \\ \frac{\partial^2 X}{\partial s \partial t} = (-f'(t) \sin(s), f'(t) \cos(s), 0) \end{cases}$$

$$(b_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{1+(f'(t))^2}} \begin{pmatrix} -f(t) & 0 \\ 0 & f''(t) \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$H = \frac{\left(\frac{f^2(t)f''(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}} \right) - \frac{[1+(f'(t))^2]f(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}}}{2f^2(t)[1+(f'(t))^2]} = \frac{f(t)f''(t) - 1 - (f'(t))^2}{2f(t)[1+(f'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Logo $H = 0$ se e somente se:

$$f(t)f''(t) - 1 - (f'(t))^2 = 0 \iff f(t)f''(t) = 1 + (f'(t))^2 \quad (2-7)$$

Observe que $f(t)$ e $f''(t)$ não podem se anular. Vamos provar que as únicas soluções desta equação diferencial são da forma:

$$f(t) = c \cosh\left(\frac{t+d}{c}\right)$$

onde $c, d \in \mathbb{R}$ são constantes, $c \neq 0$.

Escreva a equação (2-7) da seguinte forma:

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{f''(t)}{1+(f'(t))^2}$$

Multiplicando ambos os lados por $f'(t)$ (que se anula no máximo uma vez⁶) obtemos:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{f'(t)f''(t)}{1+(f'(t))^2}$$

Integrando ambos os lados em t :

$$\log(f(t)) = \frac{\log(1+(f'(t))^2)}{2} + C_1$$

Aplicando a exponencial (e denotando $c := e^{C_1}$):

$$f^2(t) = c^2 [1+(f'(t))^2] \quad (2-8)$$

⁶Pois $f''(t) \neq 0$, donde $f'(t)$ é estritamente crescente ou decrescente.

Mas juntando as equações (2-7) e (2-8) e usando que $f(t) \neq 0$ temos:

$$f(t) = c^2 f''(t)$$

Cuja solução é:

$$f(t) = C_2 e^{\frac{t}{c}} + C_3 e^{-\frac{t}{c}}$$

Para definir a relação entre C_2 e C_3 basta substituir a fórmula de $f(t)$ na equação (2-8). Assim obtemos:

$$C_3 = \frac{c^2}{4 C_2}$$

Portanto

$$f(t) = \frac{c}{2} \left[\left(\frac{2 C_2}{c} \right) e^{\frac{t}{c}} + \left(\frac{c}{2 C_2} \right) e^{-\frac{t}{c}} \right]$$

Vamos reescrever a equação acima para chegar até o que afirmamos.

Tome:

$$d := c \log \left(\frac{2 C_2}{c} \right)$$

Logo

$$f(t) = \frac{c}{2} \left[e^{\frac{d}{c}} e^{\frac{t}{c}} + e^{-\frac{d}{c}} e^{-\frac{t}{c}} \right]$$

Usando que

$$e^{\pm \frac{d}{c}} = \cosh \left(\frac{d}{c} \right) \pm \sinh \left(\frac{d}{c} \right)$$

podemos reescrever $f(t)$ como:

$$\begin{aligned} f(t) &= \left[\frac{c \cosh \left(\frac{d}{c} \right) + c \sinh \left(\frac{d}{c} \right)}{2} \right] e^{\frac{t}{c}} + \left[\frac{c \cosh \left(\frac{d}{c} \right) - c \sinh \left(\frac{d}{c} \right)}{2} \right] e^{-\frac{t}{c}} = \\ &= c \sinh \left(\frac{d}{c} \right) \left[\frac{e^{\frac{t}{c}} - e^{-\frac{t}{c}}}{2} \right] + c \cosh \left(\frac{d}{c} \right) \left[\frac{e^{\frac{t}{c}} + e^{-\frac{t}{c}}}{2} \right] = \\ &= c \left[\sinh \left(\frac{d}{c} \right) \sinh \left(\frac{t}{c} \right) + \cosh \left(\frac{d}{c} \right) \cosh \left(\frac{t}{c} \right) \right] = \\ &= c \cosh \left(\frac{t+d}{c} \right) \end{aligned}$$

Por fim, fazendo a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} w_1 = \frac{t+d}{c} \\ w_2 = s \end{cases}$$

no plano \mathbb{R}^2 , encontramos a fórmula do recobrimento universal $X \circ p$ do catenoide, transladado em d na terceira coordenada.

Observe que, se o domínio de (s, t) fosse um subconjunto de \mathbb{R}^2 , S seria um pedaço do catenoide (pois antes da mudança de coordenadas $(s, t) \mapsto (w_1, w_2)$ acima, não havíamos usado que o domínio de (s, t) era o plano). ■

Corolário 2.3.4 *Se S é superfície mínima em \mathbb{R}^3 invariante por rotação ao redor de um eixo ℓ , então S é um plano ou um catenoide.*

Prova: Suponha que M não é plana. Logo existe um ponto $p \in M$ onde $T_p M \not\subset \ell$. Seja Π o plano que contém o ponto p e o eixo ℓ . Então podemos aplicar o teorema da função implícita em uma vizinhança de p em Π e escrevê-la como um gráfico no eixo ℓ . Então, pelo teorema anterior, uma vizinhança de p em M estará em um catenoide. Veremos no capítulo seguinte que, se duas superfícies mínimas coincidem em um aberto, então elas são iguais (vide 3.1.4). Aplicando este resultado, vemos que S é um plano ou um catenoide. ■

O teorema 2.3.3 nos mostra que o catenoide é de fato uma superfície mínima, pois satisfaz $H \equiv 0$. Outra forma de ver isto é verificar que f é solução da EDP das superfícies mínimas, ver que os dois pedaços não-paramétricos colam no plano (x_1, x_2) de forma C^∞ e, como temos $H \equiv 0$ em ambos, pela continuidade de H , segue que $H = 0$ na interseção.

Afirmção 2.3.5 *A imersão do catenoide $X : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ é própria e injetiva, donde é um mergulho (vide 1.1.5).*

Prova: Vamos provar primeiro que X é injetiva.

Seja (x_1, x_2, x_3) um ponto da superfície. Tomando a exponencial na fórmula

$$x_3 (u_1 + iu_2) = \frac{c}{2} \log (u_1^2 + u_2^2)$$

descobrimos quanto vale $u_1^2 + u_2^2$. Portanto, usando

$$\begin{cases} x_1 (u_1 + iu_2) = \frac{c}{2} \left(\frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2} + u_1 \right) \\ x_2 (u_1 + iu_2) = \frac{c}{2} \left(\frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2} + u_2 \right) \end{cases}$$

descobrimos u_1 usando x_1 e u_2 usando x_2 , ambos univocamente, donde X é injetiva.

Vamos ver que ela é própria. Seja z_n sequência divergente. Logo $|z_n| \rightarrow 0$ ou $|z_n| \rightarrow +\infty$. Em ambos os casos temos $|x_3(z_n)| \rightarrow +\infty$, donde a imagem de sequência divergente é divergente e X é própria. ■

Pela proposição 1.1.13 e pela observação 1.1.4 temos:

Corolário 2.3.6 *O catenoide e o seu recobrimento universal são superfícies completas.*

2.3.3 Helicoide

O terceiro exemplo de superfície mínima é o helicoide.

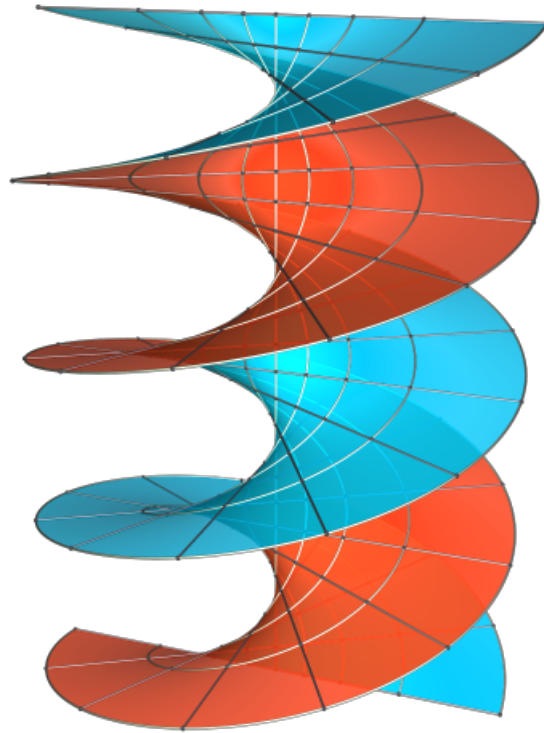


Figura 2.4: Helicoide - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal

Como pode ser visto na figura acima, o helicoide é periódico no eixo x_3 .

Ele é dado pela imersão $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$ e

$$\begin{cases} x_1(u_1 + iu_2) = c u_1 \cos(u_2) \\ x_2(u_1 + iu_2) = c u_1 \sin(u_2) \\ x_3(u_1 + iu_2) = c u_2 \end{cases}$$

onde c é uma constante que indica o quanto o helicóide sobe entre duas folhas. Logo o helicóide é invariante pelo grupo de translações Γ gerado pelo vetor $(0, 0, c 2\pi)$.

Logo o pedaço fundamental (vide 1.1.16) do helicóide é dado por $X|_{\mathbb{R} \times [0, 2\pi]}$. Ele pode ser escrito na forma não-paramétrica como:

$$f(x_1, x_2) = c \tan^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

Podemos ver que a função f acima é solução da EDP das superfícies mínimas (2-3):

$$\begin{cases} f_{x_1} = \frac{-c x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ f_{x_2} = \frac{c x_1}{x_1^2 + x_2^2} \end{cases} \quad \begin{cases} f_{x_1 x_1} = \frac{2c x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ f_{x_2 x_2} = \frac{-2c x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ f_{x_1 x_2} = \frac{c (x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{cases}$$

Como dois pedaços fundamentais do helicóide colam de forma C^∞ no bordo e H é contínuo, segue que o helicóide é superfície mínima.

Note também que o helicóide é uma superfície regrada (vide 1.1.35) pois ele pode ser escrito da forma:

$$X(u_1 + iu_2) = \beta(u_2) + u_1 \delta(u_2), \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \beta(u_2) = (0, 0, c u_2) \\ \delta(u_2) = (c \cos(u_2), c \sin(u_2), 0) \end{cases}$$

onde $(u_1 + iu_2) \in \mathbb{C}$.

Em 1842 Eugène Charles Catalan provou a unicidade:

Teorema 2.3.7 *As únicas superfícies mínimas regradas são o plano e o helicóide.*

Prova: Vide o livro Ref. 2 , pág. 242. ■

Afirmção 2.3.8 *A imersão do helicóide $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é própria e injetiva, donde é um mergulho (vide 1.1.5).*

Prova: Vamos provar primeiro que X é injetiva.

Seja (x_1, x_2, x_3) um ponto da superfície. Pela fórmula

$$x_3(u_1 + iu_2) = c u_2$$

descobrimos quanto vale u_2 , univocamente. Portanto, pelas fórmulas

$$\begin{cases} x_1(u_1 + iu_2) = c u_1 \cos(u_2) \\ x_2(u_1 + iu_2) = c u_1 \sin(u_2) \end{cases}$$

temos

$$|u_1| = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{c^2}}$$

e

$$\operatorname{sgn}(u_1) = \operatorname{sgn}(x_2)$$

donde temos u_2 univocamente definido, donde X é injetiva.

Vamos ver que ela é própria. Seja z_n sequência divergente. Logo $|z_n| \rightarrow +\infty$. Mas

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2 (u_1^2 + u_2^2) = c^2 |z_n|^2 \rightarrow +\infty$$

donde a imagem de sequência divergente é divergente e X é própria. ■

Pela proposição 1.1.13 temos:

Corolário 2.3.9 *O helicóide é superfície completa.*

2.3.4

Superfície de Scherk (duplamente periódica)

O quarto exemplo que daremos é uma superfície não-paramétrica chamada de superfície de Scherk (ou superfície de Scherk duplamente periódica).

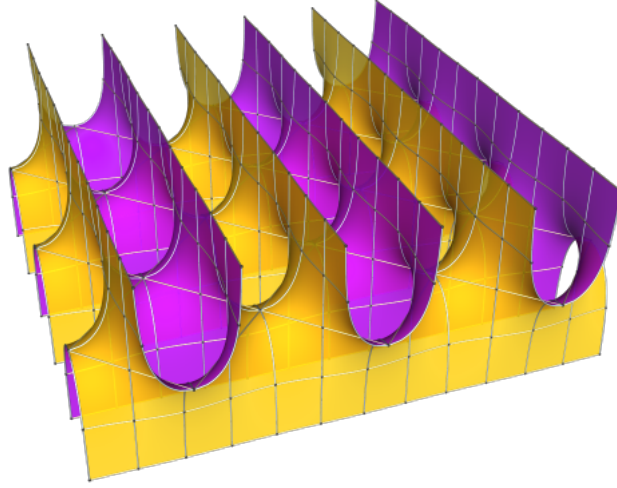


Figura 2.5: Vista lateral da superfície de Scherk duplamente periódica -
Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal

Para $k, l \in \mathbb{Z}$ com $k + l$ par, seja

$$\Omega_{k,l} := \left\{ (x_1, x_2) : |x_1 - k\pi| < \frac{\pi}{2}, |x_2 - l\pi| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

Então a superfície de Scherk é uma superfície não-paramétrica cujo domínio⁷ é

$$\bigcup_{\substack{k,l \in \mathbb{Z} \\ k+l \text{ par}}} \Omega_{k,l}$$

dada pela função

$$f(x_1, x_2) = \log \left[\frac{\cos(x_2)}{\cos(x_1)} \right] = \log(\cos(x_2)) - \log(\cos(x_1))$$

Se olharmos o plano como um tabuleiro de xadrez infinito cujos lados das casas tem comprimento π , a superfície de Scherk é um gráfico apenas sobre as casas de uma mesma cor. Como a superfície de Scherk é invariante pelo grupo de translações Γ gerado pelos vetores $(2\pi, 0, 0)$ e $(0, 2\pi, 0)$, ela é dita duplamente periódica.

⁷O domínio de f é escolhido desta forma para que ambos os cossenos tenham o mesmo sinal, e assim o log está bem definido.

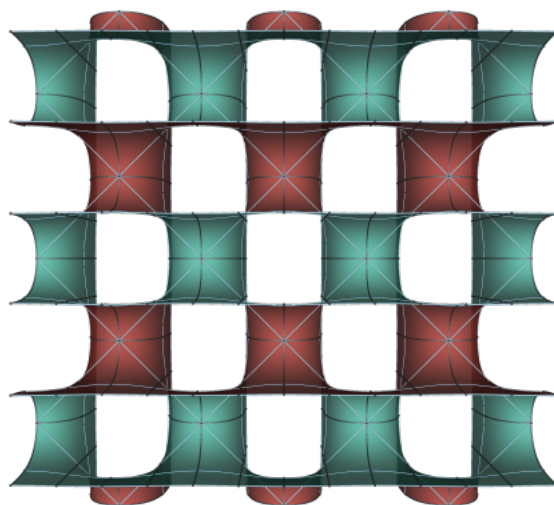


Figura 2.6: Vista superior da superfície de Scherk duplamente periódica -
Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal

Observe que a função f é solução da EDP das superfícies mínimas (2-3) pois:

$$\begin{cases} f_{x_1} = \tan(x_1) \\ f_{x_2} = -\tan(x_2) \end{cases} \quad \begin{cases} f_{x_1 x_1} = \sec^2(x_1) = 1 + \tan^2(x_1) \\ f_{x_2 x_2} = -\sec^2(x_2) = -1 - \tan^2(x_2) \\ f_{x_1 x_2} = 0 \end{cases}$$

Note também que a função f tende ao mesmo valor ($+\infty$ ou $-\infty$) em lados opostos de um quadrado $\Omega_{k,l}$.

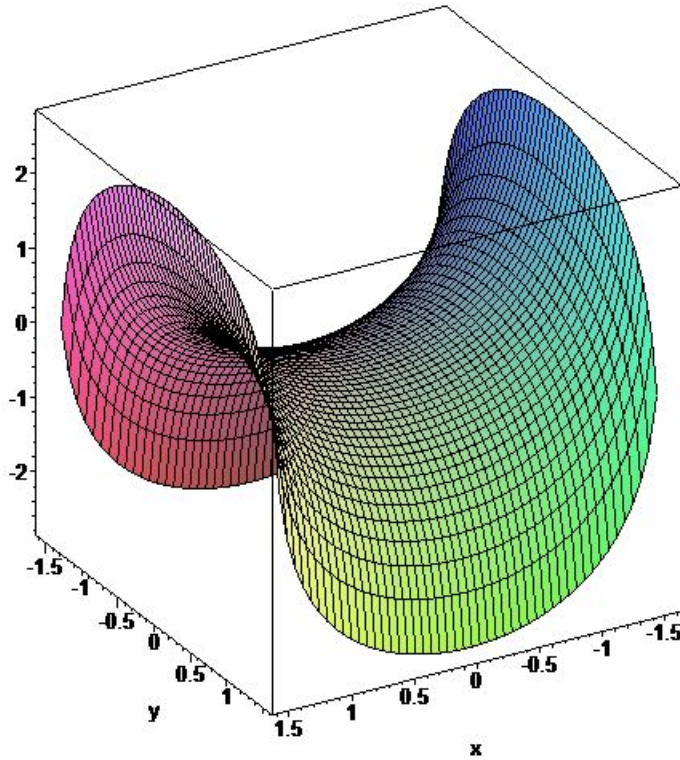


Figura 2.7: Imagem de f sobre o quadrado $\Omega_{0,0}$

Por motivos de completude, quando nos referirmos à superfície de Scherk daqui em diante, estaremos incluindo retas paralelas ao eixo x_3 sobre as quinas dos quadrados $\Omega_{k,l}$. Isto faz sentido pois, nas quinas, temos $\cos(x_1) = \cos(x_2) = 0$, donde a razão entre eles é indeterminada. No entanto, como ambos são positivos em $\Omega_{k,l}$, a razão é não-negativa, donde o log dela está bem-definido. Por isto, dados dois quadrados $\Omega_{k,l}$ que contém uma mesma quina, os pedaços da superfície de Scherk sobre eles colam de maneira C^2 ao longo da reta sobre a quina em comum. Desta forma, a superfície ainda é de classe C^2 . Pela continuidade de H , a superfície com estas retas continua mínima⁸.

Por fim, vale um resultado de unicidade para a superfície de Scherk:

Teorema 2.3.10 *A superfície de Scherk é a única superfície mínima não-paramétrica não-plana de translação, ou seja, da forma:*

$$f(x_1, x_2) = g(x_1) + h(x_2)$$

⁸Observe que estas retas estavam no fecho da superfície em $\Omega_{k,l}$.

Prova: Usando a EDP das superfícies mínimas (2-3) obtemos:

$$[1 + (g')^2] h'' + [1 + (h')^2] g'' = 0$$

Supondo $g'' \neq 0$ e $h'' \neq 0$ (ou seja, que a superfície não seja um plano ⁹) podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\frac{1 + (g')^2}{g''} = - \frac{1 + (h')^2}{h''}$$

Mas o lado esquerdo só depende de x_1 e o direito, apenas de x_2 . Portanto ambos são constantes.

$$\begin{cases} \frac{1 + (g')^2}{g''} = c \\ - \frac{1 + (h')^2}{h''} = \frac{1 + (-h')^2}{-h''} = c \end{cases}$$

onde $c \in \mathbb{R}^*$.

Como as EDO's de g e $-h$ acima são iguais, as soluções de h e g são iguais a menos de uma mudança de sinal, i.e., $g(t) = -h(t)$. Então basta resolver um dos sistemas, digamos

$$c g'' = (g')^2 + 1 \quad (2-9)$$

Seja $v = g'$. Logo

$$\frac{v'(x_1)}{1 + v^2(x_1)} = \frac{1}{c}$$

Integrando ambos os lados obtemos

$$\tan^{-1}(v(x_1)) = \frac{x_1}{c} + C_1 \quad \therefore \quad v(x_1) = \tan\left(\frac{x_1}{c} + C_1\right)$$

onde C_1 é uma constante arbitrária. Substituindo $v(x_1) = g'(x_1)$ e integrando temos:

$$\begin{cases} g(x_1) = -\log\left[\cos\left(\frac{x_1 + c C_1}{c}\right)\right] + C_2 \\ h(x_2) = \log\left[\cos\left(\frac{x_2 + c C_3}{c}\right)\right] + C_4 \end{cases}$$

onde C_i são constantes reais arbitrárias, $i = 1, \dots, 4$.

Portanto,

$$f(x_1, x_2) = g(x_1) + h(x_2) = \log\left[\frac{\cos\left(\frac{x_2 + c C_2}{c}\right)}{\cos\left(\frac{x_1 + c C_1}{c}\right)}\right] + C_3$$

⁹Observe que quando g'' ou h'' é nulo, o outro também deve ser.

onde renomeamos as constantes arbitrárias. Observe que a fórmula de f acima nos dá uma superfície de Scherk:

- a constante $c \neq 0$ nos diz a largura dos quadrados $\Omega_{k,l}$, que será $|c\pi|$;
- as constantes C_1 e C_2 nos dizem onde os quadrados $\Omega_{k,l}$ estão centrados. Por exemplo, o centro do quadrado $\Omega_{0,0}$ é $(-C_1 c, -C_2 c)$;
- observe que mudar o sinal de c causaria uma reflexão na superfície. No entanto, como o cosseno é uma função par, temos

$$f(x_1 - c C_1, x_2 - c C_2) = f(-x_1 - c C_1, -x_2 - c C_2)$$

donde a superfície é invariante por esta reflexão. Logo o sinal de c não tem nenhuma influência;

- a constante C_3 é a altura da superfície de Scherk no centro dos quadrados $\Omega_{k,l}$.

■

Afirmção 2.3.11 *Seja $X : \bigcup_{\substack{k,l \in \mathbb{Z} \\ k+l \text{ par}}} \Omega_{k,l} \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão da superfície de Scherk, onde $X(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$. Então a superfície de Scherk é própria (em particular, é completa).*

Prova: Denotaremos

$$\Omega := \bigcup_{\substack{k,l \in \mathbb{Z} \\ k+l \text{ par}}} \Omega_{k,l}$$

Seja (x_{1_n}, x_{2_n}) sequência divergente em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Queremos ver que a imagem dela por X é divergente. Se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{i_n}| = +\infty$$

para $i = 1$ ou 2 , então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |X(x_{1_n}, x_{2_n})| = +\infty$$

Suponha então que $(x_{1_n}^2 + x_{2_n}^2)$ é limitado. Tomando subsequência se necessário, podemos assumir que $(x_{1_n}, x_{2_n}) \rightarrow (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2$. Como a sequência é divergente em Ω , o ponto $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ está no bordo de algum $\Omega_{k,l}$ (e não está em uma das quinas, pois incluímos as retas sobre elas à superfície).

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \partial\Omega_{0,0}$. Suponha que $\tilde{x}_1 = \pm\frac{\pi}{2}$ e $\tilde{x}_2 \neq \pm\frac{\pi}{2}$. Então

$$\begin{cases} \cos(x_{1_n}) \rightarrow \cos(\tilde{x}_1) = 0 \\ \cos(x_{2_n}) \rightarrow \cos(\tilde{x}_2) > 0 \end{cases}$$

donde

$$\log\left(\frac{\cos(x_{2_n})}{\cos(x_{1_n})}\right) \rightarrow +\infty$$

e a imagem da sequência por X é divergente. Como o caso $\tilde{x}_1 \neq \pm\frac{\pi}{2}$ e $\tilde{x}_2 = \pm\frac{\pi}{2}$ é análogo, temos que X é própria. ■

2.3.5

Superfície de Enneper

A última superfície mínima que iremos mostrar neste capítulo é a superfície de Enneper.

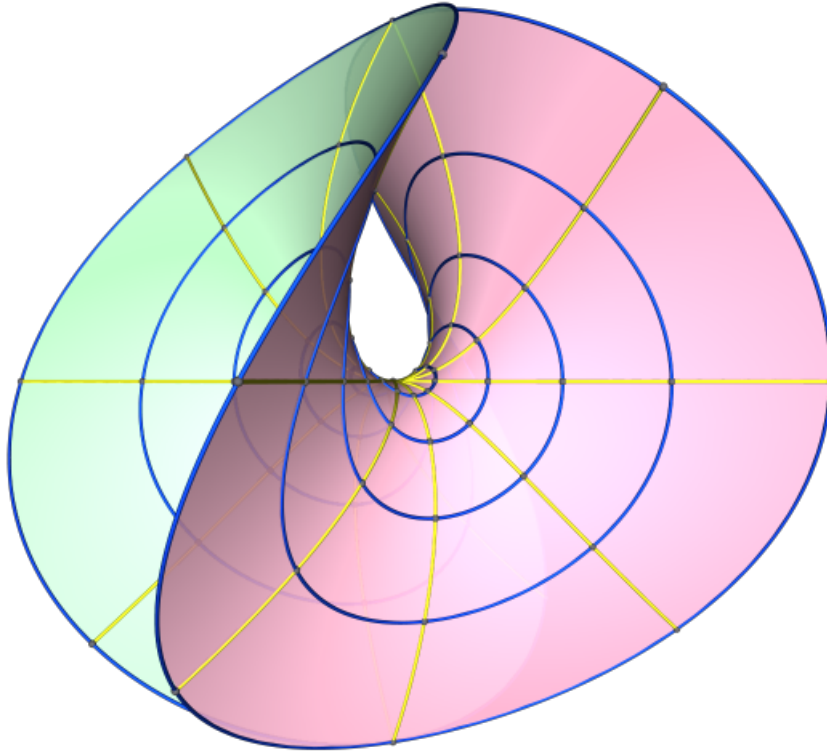


Figura 2.8: Superfície de Enneper - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal

Ela é dada pela imersão $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$ e

$$\begin{cases} x_1(u_1 + iu_2) = u_1 - \frac{u_1^3}{3} + u_1u_2^2 \\ x_2(u_1 + iu_2) = -u_2 - u_1^2u_2 + \frac{u_2^3}{3} \\ x_3(u_1 + iu_2) = u_1^2 - u_2^2 \end{cases} \quad (2-10)$$

Vamos verificar que a superfície de Enneper satisfaz $H \equiv 0$. Temos

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u_1} = (1 - u_1^2 + u_2^2, -2u_1u_2, 2u_1) \\ \frac{\partial X}{\partial u_2} = (2u_1u_2, -1 - u_1^2 + u_2^2, -2u_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{(u_1^2 + u_2^2 + 1)^2} \left(2u_1(u_1^2 + u_2^2 + 1), 2u_2(u_1^2 + u_2^2 + 1), (u_1^2 + u_2^2)^2 - 1 \right) = \\
&= \left(\frac{2u_1}{u_1^2 + u_2^2 + 1}, \frac{2u_2}{u_1^2 + u_2^2 + 1}, \frac{u_1^2 + u_2^2 - 1}{u_1^2 + u_2^2 + 1} \right) \\
&\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} = (-2u_1, -2u_2, 2) \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} = (2u_1, 2u_2, -2) \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} = (2u_2, -2u_1, 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{cases} (g_{ij}) = \begin{pmatrix} (u_1^2 + u_2^2 + 1)^2 & 0 \\ 0 & (u_1^2 + u_2^2 + 1)^2 \end{pmatrix} = (u_1^2 + u_2^2 + 1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (b_{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Observe que $g_{11} = g_{22}$, $g_{12} = 0$ e $b_{11} = -b_{22}$. Logo $H \equiv 0$ e a superfície de Enneper é mínima.

Afirmção 2.3.12 *A imersão X da superfície de Enneper é própria (donde a superfície é completa).*

Prova: Suponha por absurdo que X não seja própria. Logo existe sequência divergente $u_n = u_{1n} + iu_{2n} \in \mathbb{C}$ com $|u_n|^2 = u_{1n}^2 + u_{2n}^2 \rightarrow +\infty$ e com $X(u_n)$ convergente.

Pegando uma subsequência se necessário, temos $|u_{1n}| \rightarrow +\infty$ ou $|u_{2n}| \rightarrow +\infty$. Se uma das coordenadas de u_n fosse limitada, pela fórmula (2-10) de X teríamos que $|x_i(u_n)| \rightarrow +\infty$, $i = 1, 2, 3$, donde $X(u_n)$ seria divergente. Isto contradiz a hipótese de u_n divergente com $X(u_n)$ convergente, portanto $|u_{i_n}| \rightarrow +\infty$ para $i = 1, 2$.

Usando a norma do sup em \mathbb{R}^3 , $\exists R \in \mathbb{R}_+$ com

$$\begin{cases} x_1(u_n) = u_{1_n} \left[1 - \frac{u_{1_n}^2}{3} + u_{2_n}^2 \right] < R \\ x_2(u_n) = u_{2_n} \left[-1 - u_{1_n}^2 + \frac{u_{2_n}^2}{3} \right] < R \\ x_3(u_n) = u_{1_n}^2 - u_{2_n}^2 < R \end{cases}$$

Como $|u_{1_n}| \rightarrow +\infty$, obtemos da inequação de $x_1(u_n)$:

$$\left| 1 - \frac{u_{1_n}^2}{3} + u_{2_n}^2 \right| \rightarrow 0 \quad \therefore \quad u_{2_n} - \frac{u_{1_n}^2}{3} \rightarrow -1 \quad (2-11)$$

Analogamente, como $|u_{2_n}| \rightarrow +\infty$, a inequação de $x_2(u_n)$ nos dá:

$$\left| -1 - \frac{u_{2_n}^2}{3} + u_{1_n}^2 \right| \rightarrow 0 \quad \therefore \quad u_{2_n} - 3u_{1_n}^2 \rightarrow -3$$

Mas (usando (2-11))

$$-1 - \frac{8u_{1_n}^2}{3} \leftarrow u_{2_n} - \frac{u_{1_n}^2}{3} - \frac{8u_{1_n}^2}{3} = u_{2_n} - 3u_{1_n}^2 \rightarrow -3$$

donde

$$u_{1_n}^2 \rightarrow \frac{3}{4}$$

Absurdo pois $|u_{i_n}| \rightarrow +\infty$. ■

Afirmção 2.3.13 *A imersão X da superfície de Enneper é não-injetora, ou seja, a superfície de Enneper tem auto-interseções.*

A demonstração da afirmação acima será dada no capítulo 10, corolário 10.2.3. Veja também outra prova na observação 9.4.6.

3

Parâmetros Conformes

Neste capítulo veremos que uma superfície com parametrização conforme (vide definição 1.1.19) é mínima se e somente se as suas coordenadas são harmônicas. Com isto podemos aplicar resultados da teoria de funções harmônicas (como o princípio do máximo) e podemos relacionar a parametrização da superfície com a parte real de uma curva holomorfa em \mathbb{C}^3 . Por fim vamos exibir duas aplicações: a primeira é que toda superfície mínima é real-analítica e a segunda é que não existe superfície mínima compacta em \mathbb{R}^3 .

Antes de mais nada, a pergunta natural a se fazer é: por que estudar apenas superfícies com parametrização conforme? O teorema abaixo nos dá a resposta.

Teorema 3.0.14 (Chern) *Seja (M, g) superfície riemanniana de classe C^1 . Então em uma vizinhança de qualquer ponto $p \in M$ existe uma parametrização conforme.*

Prova: Para uma demonstração, vide Ref. 16 . ■

Observação 3.0.15 *Como vimos na observação 1.1.4, uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ adquire métrica induzida pela métrica de \mathbb{R}^3 , logo é superfície riemanniana. Então, como estamos trabalhando apenas com superfícies de classe C^2 , podemos aplicar o teorema 3.0.14, donde toda superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ admite parametrização conforme¹.*

Quando a parametrização de uma superfície é conforme temos (vide 1.1.21 e 1.1.27):

$$\begin{cases} \det(g_{ij})(p) = \lambda^4(p) \\ H(p) = \frac{b_{11}(p) + b_{22}(p)}{2 \lambda^2(p)} \end{cases} \quad (3-1)$$

¹No caso particular de superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 existe uma demonstração mais fácil que pode ser encontrada em Ref. 17, Lemma 4.4 .

3.1

Coordenadas Harmônicas e Parâmetrizações Conformes

Com as fórmulas de $\det(g_{ij})$ e H obtidas acima podemos encontrar uma outra condição equivalente a $H = 0$. Para isto precisamos provar o seguinte resultado:

Teorema 3.1.1 *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização conforme de uma superfície S . Então:*

$$\Delta_{\mathbb{C}} X = 2\lambda^2 \vec{H}$$

em todo ponto da superfície, onde \vec{H} é o vetor curvatura média (vide 1.1.29) e o laplaciano é o canônico de \mathbb{R}^3 , ou seja, $\Delta_{\mathbb{C}} X = (\Delta_{\mathbb{C}} x_1, \Delta_{\mathbb{C}} x_2, \Delta_{\mathbb{C}} x_3)$ e $\Delta_{\mathbb{C}} x_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_2^2}$, $i = 1, 2, 3$.

Prova: Seja $p \in S$ e sejam (u_1, u_2) coordenadas conformes de Ω centradas em $X^{-1}(p)$. Então:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1} ; \frac{\partial X}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_2} ; \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1} ; \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle = 0 \end{cases} \quad (3-2)$$

Derivando a primeira equação de (3-2) em relação a u_1 obtemos:

$$\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} ; \frac{\partial X}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} ; \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle$$

Mas, derivando a segunda equação de (3-2) em relação a u_2 temos:

$$\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} ; \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1} ; \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} \right\rangle = 0$$

Logo

$$\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} ; \frac{\partial X}{\partial u_1} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} ; \frac{\partial X}{\partial u_1} \right\rangle$$

Usando a equação acima obtemos:

$$\begin{cases} \left\langle \Delta_{\mathbb{C}} X ; \frac{\partial X}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} \right) ; \frac{\partial X}{\partial u_1} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \Delta_{\mathbb{C}} X ; \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle = 0 \text{ (análogo)} \end{cases}$$

Portanto $\Delta_{\mathbb{C}}X \perp T_pS$. Se N é a normal unitária de S , então:

$$\langle \Delta_{\mathbb{C}}X ; N \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} \right) ; N \right\rangle = b_{11} + b_{22} = 2 \lambda^2 H$$

Como $\Delta_{\mathbb{C}}X$ só tem componente normal à S e $\vec{H} = H\vec{N}$, o resultado segue. ■

Corolário 3.1.2 *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização conforme da superfície $S := X(M)$.*

Então S é mínima se e somente se as coordenadas x_1, x_2 e x_3 são funções harmônicas.

Observação 3.1.3 *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização mínima conforme. Pelo corolário acima, sabemos que as coordenadas x_k são funções harmônicas. Mas pelo teorema 1.2.8, as coordenadas x_k são funções reais analíticas.*

Observação 3.1.4 *Sejam S_1 e S_2 superfícies mínimas conexas sem bordo imersas em \mathbb{R}^3 . Pela observação acima, as suas coordenadas são reais analíticas. Logo, se S_1 e S_2 coincidem em um aberto, então elas são iguais.*

Caso uma das superfícies tenha bordo, digamos S_2 , então ela está contida em S_1 . Se ambas tiverem bordo, existe uma superfície mínima S (obtida pela união das duas) que as contém.

Um exemplo do caso em que S_1 não tem bordo é $S_1 = \{x_3 = 0\}$ e $S_2 = \{(x_1, x_2, 0) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Fica claro que as superfícies coincidem em S_2 , ou seja, até onde os bordos permitem.

Observação 3.1.5 *Note que uma homotetia $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \mu(x_1, x_2, x_3)$ de \mathbb{R}^3 leva superfícies mínimas em superfícies mínimas.*

De fato, seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização mínima conforme, donde as coordenadas (x_1, x_2, x_3) são harmônicas. Como o laplaciano é um operador linear, temos $\Delta_{\mathbb{C}}(\mu X) = \mu \Delta_{\mathbb{C}}X = 0$. Portanto $\mu X = \mu(x_1, x_2, x_3)$ tem coordenadas harmônicas, logo é parametrização mínima conforme.

Observação 3.1.6 *Seja M uma variedade de dimensão n e seja $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ carta de M . Podemos definir o operador de Laplace-Beltrami como (vide Ref. 4, Chapter 1.5, Formula (17)):*

$$\Delta_M X := \operatorname{div}(\nabla X) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} g^{ij} \frac{\partial X}{\partial u_j} \right) \right]$$

onde (u_1, \dots, u_n) são as coordenadas canônicas de \mathbb{R}^n e (g^{ij}) é a inversa da primeira forma fundamental (g_{ij}) .

No caso de superfícies em \mathbb{R}^3 com parametrização conforme temos $n = 2$ e $\sqrt{\det (g_{ij})} = \lambda^2$. A inversa de (g_{ij}) é:

$$(g^{ij}) = \frac{1}{\lambda^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo $\sqrt{\det (g_{ij})} (g^{ij}) = I$. Então:

$$\Delta_M X = \operatorname{div}(\nabla X) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[\delta_{ij} \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \right] = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} \right) = \frac{\Delta_{\mathbb{C}} X}{\lambda^2}$$

Ou seja, usando coordenadas conformes, o laplaciano canônico de \mathbb{R}^3 e o operador de Laplace-Beltrami se relacionam por

$$\Delta_{\mathbb{C}} X = \lambda^2(p) \Delta_M X$$

Portanto, se temos $H \equiv 0$, o operador de Laplace-Beltrami aplicado em X também se anula.

Chegou o momento de relacionar as parametrizações mínimas conformes X a funções holomorfas. Antes vamos provar um lema que servirá de base para o resultado principal deste capítulo.

Lema 3.1.7 *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização de uma superfície qualquer, $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio. Defina, para $k \in \{1, 2, 3\}$, as funções*

$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1}(z) - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}(z)$$

onde $z = u_1 + iu_2 \in \Omega$. Então:

1. $\phi_k(z)$ é holomorfa $\iff x_k$ é harmônica;
2. X é parametrização conforme $\iff \sum_{k=1}^3 (\phi_k(z))^2 \equiv 0$

3. Suponha X parametrização conforme.

$$\text{Então } \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 \neq 0$$

Prova:

1. Segue das equações de Cauchy-Riemann.

2. Observe que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (\phi_k(\zeta))^2 &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right)^2 - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)^2 - 2i \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right) = \\ &= g_{11} - g_{22} - 2ig_{12} \end{aligned}$$

Portanto o resultado segue.

3. Usando que X é parametrização conforme, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 |\phi_k(\zeta)|^2 &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right)^2 + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)^2 = \\ &= g_{11} + g_{22} = 2\lambda^2 = 2\sqrt{\det(g_{ij})} \neq 0 \end{aligned}$$

Pois estamos lidando apenas com superfícies regulares.

■

Teorema 3.1.8 *Dada uma imersão mínima conforme $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, as 1-formas holomorfas $\phi_k(z)dz$ (onde $\phi_k(z)$ são definidas pelo lema 3.1.7) estão bem definidas globalmente.*

Prova: Para que as 1-formas $\phi(z)dz$ estejam bem definidas globalmente, temos que provar que elas são invariantes por mudança de cartas de M . Seja $p \in M$.

Sabemos que x_k são harmônicas em M por 3.1.2. Portanto, pela observação 1.2.4, podemos pegar vizinhança V de p onde existe conjugada harmônica de x_k , que denotaremos por x_k^* . Portanto a função $\Phi_k(z) := (x_k + ix_k^*)(z)$ é holomorfa em V , donde satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. Com isto obtemos:

$$\phi_k(z) = 2 \frac{\partial \Phi_k(z)}{\partial z}$$

Sejam $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V$ e $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V$ duas cartas de M . Denote por z os pontos de U_1 e por w os pontos de U_2 . Como M é superfície de Riemann (vide observação 1.1.23), $(\phi_1^{-1} \circ \phi_2) : U_2 \rightarrow U_1$ é aplicação holomorfa. Denote a mudança de cartas por $z(w) := (\phi_1^{-1} \circ \phi_2)(w)$.

Logo

$$\phi_k(w) = 2 \frac{\partial \Phi_k}{\partial w} = 2 \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial w} \right]$$

Como $z(w)$ é holomorfa, $\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} = \overline{\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial w}\right)} = 0$. Então

$$\phi_k(w) = 2 \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w} = \phi_k(z) \frac{dz}{dw}$$

Portanto

$$\phi_k(w) dw = \phi_k(z) dz$$

■

Observação 3.1.9 *O teorema acima vale para qualquer 1-forma holomorfa em uma superfície de riemann M , com praticamente² a mesma demonstração.*

Por causa do teorema acima, sempre que estivermos trabalhando com uma variedade M ao invés de um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ trabalharemos com a 1-forma holomorfa $\phi_k(z)dz$ (pois a função $\phi_k(z)$ só está definida localmente).

Teorema 3.1.10 *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização mínima conforme, $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$. Então as 1-formas $\phi_k(z)dz$ (onde $\phi_k(z)$ estão definidas no lema 3.1.7) são holomorfas satisfazendo*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^3 (\phi_k(z))^2 \equiv 0 \\ \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 \neq 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

Reciprocamente, sejam $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ e $\phi_3(z)$ funções holomorfas em um domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ satisfazendo as equações acima. Então existe parametrização mínima conforme $X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1}(z) - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}(z)$$

onde $z \in \Omega$.

Prova: A primeira parte do teorema segue diretamente do lema anterior 3.1.7 e do corolário 3.1.2.

Para a recíproca, defina

$$x_k(z) = \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta \right) \quad (3-4)$$

²Dada uma 1-forma holomorfa qualquer, é fácil ver que ela é fechada. Pelo lema de Poincaré 1.1.49, esta 1-forma é localmente exata. Portanto vale o mesmo raciocínio.

onde $k = 1, 2, 3$, $z_0 \in \Omega$.

Como ϕ_k é holomorfa e Ω é domínio simplesmente conexo, a integral está bem definida (pois independe do caminho) e é holomorfa. Portanto x_k também está bem definida e é harmônica (vide o teorema 1.2.2). Para as outras observações sobre x_k , use o lema 3.1.7. ■

Observação 3.1.11 *Mesmo quando Ω não é simplesmente conexo o teorema acima ainda pode ser verdadeiro: basta incluir a condição que os períodos das integrais acima (ou seja, que as integrais ao longo de qualquer caminho fechado) sejam imaginários puros. Equivalentemente, pelo teorema dos resíduos 1.2.15, basta que os resíduos das 1-formas $\phi_k(z)dz$ sejam reais. Desta forma a função x_k está bem definida.*

Isto será feito no exemplo do catenoide, que é parametrizado em \mathbb{C}^ (vide 3.2).*

Observação 3.1.12 *Suponha que o domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ não seja simplesmente conexo e que as integrais acima ao longo de algum caminho fechado tenham parte real não nula. Neste caso, apesar de não estarmos nas condições da observação acima, ainda conseguimos uma versão verdadeira do teorema 3.1.10.*

Seja $p : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ o recobrimento universal de Ω . Como Ω é superfície de Riemann, p é holomorfa, donde as funções $(\phi_k \circ p) : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ também são holomorfas. Neste caso podemos aplicar o teorema acima com $(\phi_k \circ p)$ no lugar de ϕ_k e $\tilde{\Omega}$ ao invés de Ω , donde encontramos recobrimento mínimo conforme $\tilde{X} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Por fim, usando fórmula de x_k (3-4) vemos que a superfície está determinada a menos de constantes aditivas, ou seja, está determinada a menos de uma translação. Como já vimos que sempre existe parametrização conforme, o teorema acima nos diz que estudar uma superfície mínima é equivalente a estudar triplas de funções ϕ_k satisfazendo $\sum_{k=1}^3 (\phi_k(\zeta))^2 \equiv 0$ e $\sum_{k=1}^3 |\phi_k(\zeta)|^2 \neq 0$. A última destas condições nos diz que as ϕ_k 's não podem ter um zero comum.

3.2

Exemplo: Catenoide

Seja $\Omega = \mathbb{C}^*$, $z \in \mathbb{C}^*$. Tome as 1-formas

$$\begin{cases} \phi_1(z) dz = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{z^2} - 1 \right] dz \\ \phi_2(z) dz = -\frac{i}{2} \left[\frac{1}{z^2} + 1 \right] dz \\ \phi_3(z) dz = \frac{1}{z} dz \end{cases}$$

Primeiramente observe que elas são holomorfas em \mathbb{C}^* . Além disto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (\phi_k(z))^2 &= \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{z^4} - \frac{2}{z^2} + 1 \right) \right] - \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^2} + 1 \right) \right] + \frac{1}{z^4} = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{z^4} - \frac{2}{z^2} + 1 - \frac{1}{z^4} - \frac{2}{z^2} - 1 + \frac{4}{z^2} \right] \equiv 0 \end{aligned}$$

Logo a primeira equação de (3-3) está satisfeita. Como $\phi_3(z)$ nunca se anula, a segunda equação de (3-3) também é satisfeita. Já que \mathbb{C}^* não é simplesmente conexo, queremos aplicar o teorema 3.1.10 nas condições da observação 3.1.11.

Todas as funções $\phi_k(z)$ tem pólos apenas em $z = 0$. Seja $\gamma(t) = e^{i2\pi t}$, $t \in [0, 1]$ um gerador do grupo fundamental de \mathbb{C}^* . Temos:

$$\int_{\gamma} \phi_1(z) dz = -\frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} + \frac{1}{2} \int_{\gamma} dz$$

Observe que o primeiro integrando tem $\text{Res}\left(\frac{1}{z^2}, 0\right) = 0$ (pois ele é a sua própria série de Laurent, sem termo em z^{-1}) e o segundo integrando é holomorfo em $B_1(0)$. Aplicando o teorema dos resíduos 1.2.15 temos:

$$\int_{\gamma} \phi_1(z) dz = 0$$

Pelo mesmo raciocínio temos:

$$\int_{\gamma} \phi_2(z) dz = -\frac{i}{2} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} - \frac{i}{2} \int_{\gamma} dz = 0$$

Por fim,

$$\int_{\gamma} \phi_3(z) dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \log(z) \Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = 2\pi i$$

Como as três integrais acima são imaginárias puras e γ é um gerador do grupo fundamental de \mathbb{C}^* , temos que o valor das integrais de $\phi_k(z)dz$ ao longo de qualquer caminho fechado são imaginários puros, $k = 1, 2, 3$. Podemos então aplicar o teorema 3.1.10 e obter:

$$x_1(z) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} + z \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{z}}{|z|^2} + z \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2} + u_1 \right)$$

onde $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}^*$. Analogamente

$$x_2(z) = \operatorname{Re} \left[\frac{-i}{2} \left(-\frac{1}{z} + z \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(-\frac{\bar{z}}{|z|^2} + z \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2} + u_2 \right)$$

E também

$$x_3(z) = \operatorname{Re}(\log z) = \log |z| = \log \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \frac{1}{2} \log(u_1^2 + u_2^2)$$

Por fim, note que esta parametrização nos dá um catenoide com constante $c = 1$ (vide 2.3.2).

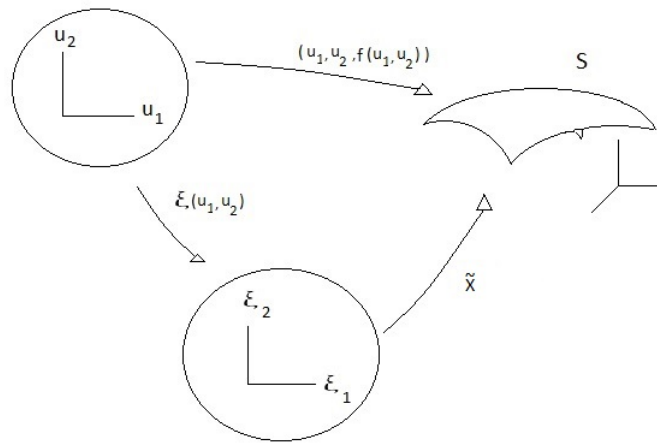
3.3

Aplicações

Vamos dar duas aplicações interessantes: a primeira é que toda superfície mínima não-paramétrica é gráfico de uma função real analítica, e a segunda é que não existe superfície mínima fechada em \mathbb{R}^3 (vide definição 1.1.9).

Proposição 3.3.1 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima escrita na forma não paramétrica como $X(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$. Então f é função real analítica.*

Prova: Como ser função analítica é uma propriedade local, basta provar para uma vizinhança simplesmente conexa V de um ponto qualquer (a_1, a_2) . Vimos que podemos tomar uma parametrização conforme de S em V , denotada por $\tilde{X}(\xi_1, \xi_2)$ (vide observação 3.0.15).



Como S é superfície mínima, sabemos que $\tilde{x}_i(\xi_1, \xi_2)$ é harmônica em (ξ_1, ξ_2) (pois é conforme, vide 3.1.2). Logo $\tilde{x}_i(\xi_1, \xi_2)$ é real analítica pelo teorema 1.2.8, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$. Já que

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \circ (\xi_1, \xi_2)(u_1, u_2) = (u_1, u_2)$$

e \tilde{X} é analítica, pela versão analítica do teorema da função inversa temos que $\xi(u_1, u_2)$ é analítica. Por fim, como $f(u_1, u_2) = \tilde{x}_3 \circ \xi(u_1, u_2)$ é composição de funções analíticas, o resultado segue. ■

Teorema 3.3.2 *Não existe superfície mínima fechada em \mathbb{R}^3 .*

Prova: Suponha por absurdo que tal superfície exista. Ao tomar uma parametrização mínima conforme $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ obtemos que (x_1, x_2, x_3) são funções harmônicas. Escolha uma destas coordenadas, denotada por x_i . Como x_i é contínua e M é compacta (vide 1.1.9), x_i assume máximo em M . Mas pelo princípio do máximo das funções harmônicas (vide 1.2.6), x_i não poderia assumir máximo em M , donde x_i é constante. Como este argumento vale para $i = 1, 2, 3$, temos um absurdo. ■

Observação 3.3.3 *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima conforme, M sem bordo. Como pelo teorema acima não existe superfície mínima fechada, sabemos que M não pode ser compacta. Em particular, já que M é superfície de Riemann (observação 1.1.23), sabemos que o recobrimento universal \tilde{M} de M só pode ser \mathbb{C} ou \mathbb{D} (vide teorema 1.2.26).*

4

Representação de Enneper-Weierstrass

No final do último capítulo conseguimos uma representação para superfícies mínimas através das funções ϕ_k 's. Esta representação parece útil: ao utilizar funções holomorfas para construir superfícies mínimas nós podemos aplicar teoremas de análise complexa para conseguir novos resultados. No entanto, a condição que as ϕ_k 's devem satisfazer (principalmente a soma dos seus quadrados sempre se anular) é difícil de ser checada a priori. Para resolver isto vamos modificar esta representação para obter outra equivalente, chamada representação de Enneper-Weierstrass. Nesta nova representação precisaremos apenas de uma função holomorfa f , uma meromorfa g e a condição a ser satisfeita só diz respeito aos zeros e pólos destas (o que é muito mais fácil de ser checado a priori).

4.1

Definição

Antes de definir a representação de Enneper-Weierstrass vamos provar um lema que relaciona as 1-formas holomorfas $\phi_k(z)dz$ com uma 1-forma holomorfa $f(z)dz$ e uma função meromorfa $g(z)$.

Lema 4.1.1 *Seja M superfície de Riemann, $z \in M$, $g(z)$ uma função meromorfa em M e $f(z)dz$ uma 1-forma holomorfa em M com a propriedade que, os pólos de ordem m de $g(z)$ são zeros de ordem $2m$ de $f(z)$ (em particular $f(z)dz$ só pode ter zeros de ordem par). Então as 1-formas*

$$\begin{cases} \phi_1(z) dz = \frac{f(1-g^2)}{2} dz \\ \phi_2(z) dz = \frac{if(1+g^2)}{2} dz \\ \phi_3(z) dz = fg dz \end{cases} \quad (4-1)$$

são holomorfas em M e satisfazem

$$\begin{cases} \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 \equiv 0 \\ |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0 \end{cases} \quad (4-2)$$

Reciprocamente, qualquer tripla de 1-forma holomorfas $\phi_i(z)dz$ em M , $i = 1, 2, 3$, satisfazendo (4-2) pode ser representada da maneira acima, exceto se $\phi_1 \equiv i\phi_2$, $\phi_3 \equiv 0$. Neste caso a superfície mínima gerada pelas $\phi_i(z)dz$ é um plano¹.

Prova: Basta mostrar o lema localmente. Vamos começar provando a ida.

Veja que as ϕ_k 's definidas desta maneira satisfazem $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$:

$$\frac{f^2(1-g^2)^2}{2^2} + \frac{i^2 f^2(1+g^2)^2}{2^2} + f^2 g^2 = \frac{f^2}{4} (1-2g^2+g^4-1-2g^2-g^4+4g^2) = 0$$

Por fim, se $p \in M$ é zero de ϕ_3 , então temos $f(p) = 0$ ou $g(p) = 0$. Vamos analisar os dois casos.

- Se $f(p) = 0$, então p é zero de ordem $2m$ de f e pólo de ordem m de g , onde $m \in \mathbb{N}^*$. Neste caso $(fg^2)(p) \in \mathbb{C}^*$, donde $\phi_1(p) \neq 0$ e $\phi_2(p) \neq 0$;
- Se $g(p) = 0$, então $f(p) \neq 0$. Logo $\phi_1(p) \neq 0$ e $\phi_2(p) \neq 0$.

Para provar a volta, defina:

$$\begin{cases} f dz = (\phi_1 - i\phi_2) dz \\ g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} \end{cases}$$

como $\phi_i(z)dz$ é bem definida globalmente em M (vide teorema 3.1.8), a 1-forma $f(z)dz$ também está.

Logo:

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \iff (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = -\phi_3^2 \Rightarrow \phi_1 + i\phi_2 = -fg^2$$

Então temos

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{f(1-g^2)}{2} \\ \phi_2 = \frac{if(1+g^2)}{2} \\ \phi_3 = fg \end{cases}$$

¹Basta ver que $\phi_3 \equiv 0$ implica em x_3 constante.

como queríamos. Já que $(\phi_1 + i\phi_2) = -fg^2$ é holomorfa, os pólos de ordem m de $g(z)$ devem ser zeros de ordem $\geq 2m$ de $f(z)dz$. Mas se p for pólo de ordem m de $g(z)$ e zero de ordem $> 2m$ de $f(z)dz$ então $(fg^2)(p) = 0$, donde $\phi_i(p) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Logo um pólo de ordem m de $g(z)$ tem que ser zero de ordem $2m$ de $f(z)dz$.

O único impedimento na representação acima é o caso em que $\phi_1 - i\phi_2 = 0$ (que é o denominador de g). Quando isto ocorre, a condição $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ implica em $\phi_3 \equiv 0$, que é o caso excepcional mencionado. ■

Teorema 4.1.2 (Representação de Enneper-Weierstrass) *Qualquer imersão mínima conforme não-plana $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ com M simplesmente conexo pode² ser escrita na forma*

$$\begin{cases} x_1(z) = \operatorname{Re} \left(\int_0^z \frac{f(1-g^2)}{2} dz \right) \\ x_2(z) = \operatorname{Re} \left(\int_0^z \frac{if(1+g^2)}{2} dz \right) \\ x_3(z) = \operatorname{Re} \left(\int_0^z fg dz \right) \end{cases}$$

onde $z \in M$, $f(z)dz$ é 1-forma holomorfa, $g(z)$ é função meromorfa e cada pólo de ordem m de g é um zero de ordem $2m$ de $f(z)dz$. Além disto, pelas observações 1.1.23 e 3.3.3, $M \cong \mathbb{C}$ ou $M \cong \mathbb{D}$.

A recíproca também vale: dadas 1-forma holomorfa $f(z)dz$ e função meromorfa g em M , onde os pólos de ordem m de g são zeros de ordem $2m$ de f , podemos encontrar imersão mínima conforme não-plana em \mathbb{R}^3 através das equações acima.

Prova: Pela observação 3.3.3 podemos supor $M = \mathbb{C}$ ou \mathbb{D} .

Podemos encontrar as 1-formas $\phi_k(z)dz$ usando o lema 3.1.7 e o teorema 3.1.10. Pelo lema anterior, podemos encontrar 1-forma holomorfa $f(z)dz$ e função meromorfa g em M e o resultado segue.

Vamos provar agora a recíproca. Como $f(z)dz$ é 1-forma holomorfa, ela está bem definida globalmente em M (vide 3.1.9). Então, já que M é simplesmente conexa, a integral nas equações do enunciado estão bem definidas e obtemos a imersão que queríamos. ■

²A menos de uma translação de \mathbb{R}^3 .

Observação 4.1.3 Assim como na observação 3.1.11, mesmo de M não for simplesmente conexo, para o teorema acima ser verdadeiro basta que os períodos das integrais sejam imaginários puros (ou, equivalentemente pelo teorema dos resíduos 1.2.15, que os resíduos das 1-formas $\phi_k(z)dz$ sejam reais).

Mesmo quando isto não ocorre, podemos trabalhar com o recobrimento universal $p : \tilde{M} \rightarrow M$. Desta maneira a composição da 1-forma $f(z)dz$ e da função meromorfa $g(z)$ com o recobrimento p ainda satisfazem as condições de pólos e zeros. Como \tilde{M} é simplesmente conexo, aplicamos o teorema acima e conseguimos um recobrimento mínimo conforme $\tilde{X} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Observação 4.1.4 Sejam $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima conforme não-plana e $p : \tilde{M} \rightarrow M$ o recobrimento universal de M . Logo $(X \circ p) : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é recobrimento mínimo conforme não-plano. Denote $w \in \tilde{M}$ e $p(w) = z \in M$. Sejam $\tilde{f}(w)dw$ e $\tilde{g}(w)$ a representação de Enneper-Weierstrass de $(X \circ p)$ e $f(z)dz$ e $g(z)$ a representação de Enneper-Weierstrass de X . É fácil ver pelo teorema acima que elas se relacionam da seguinte maneira:

$$\begin{cases} f(z) dz = f(p(w))d(p(w)) = \frac{dp(w)}{dw} \tilde{f}(w) dw \\ g(z) = g(p(w)) = \tilde{g}(w) \end{cases}$$

4.2

Plano Tangente, Primeira Forma Fundamental e Vetor Normal

Nesta seção vamos escrever várias entidades geométricas de uma superfície mínima não plana S usando $f(z)dz$ e $g(z)$ da representação de Enneper-Weierstrass. Seja $z = u_1 + iu_2$.

- O plano tangente de S é gerado por $\frac{\partial X}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial X}{\partial u_2}$.

Como $\frac{\partial X}{\partial u_1} - i\frac{\partial X}{\partial u_2} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u_1} = \operatorname{Re}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \\ \frac{\partial X}{\partial u_2} = -\operatorname{Im}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \operatorname{Im}(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3) \end{cases}$$

- A primeira forma fundamental de S é $(g_{ij}) = \lambda^2 I$, onde:

$$\lambda^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial u_1} \right|^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial u_2} \right|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 = \left[\frac{|f| (1 + |g|^2)}{2} \right]^2 \quad (4-3)$$

Portanto a métrica de S é dada por (vide 1.1.21):

$$ds^2 = \left[\frac{|f| (1 + |g|^2)}{2} \right]^2 |dz|^2 \quad (4-4)$$

onde $|dz|^2$ é a métrica canônica de \mathbb{C} .

- Para encontrar a normal unitária primeiro calculamos o produto vetorial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi_2} &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\phi_2) \operatorname{Im}(\bar{\phi}_3) + \operatorname{Re}(\phi_3) \operatorname{Im}(\phi_2) \\ \operatorname{Re}(\phi_3) \operatorname{Im}(\bar{\phi}_1) + \operatorname{Re}(\phi_1) \operatorname{Im}(\phi_3) \\ \operatorname{Re}(\phi_1) \operatorname{Im}(\bar{\phi}_2) + \operatorname{Re}(\phi_2) \operatorname{Im}(\phi_1) \end{pmatrix} = \operatorname{Im} \left(\phi_2 \bar{\phi}_3, \phi_3 \bar{\phi}_1, \phi_1 \bar{\phi}_2 \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{i|f|^2(\bar{g} + |g|^2 g)}{2}, \frac{|f|^2(g - |g|^2 \bar{g})}{2}, \frac{-i|f|^2(1 - 2i \operatorname{Im}(g^2) - |g|^4)}{4} \right) = \\ &= \left(\frac{|f|^2(\operatorname{Re}(\bar{g}) + |g|^2 \operatorname{Re}(g))}{2}, \frac{|f|^2(\operatorname{Im}(g) - |g|^2 \operatorname{Im}(\bar{g}))}{2}, \frac{|f|^2(|g|^4 - 1)}{4} \right) = \\ &= \frac{|f|^2 (1 + |g|^2)}{4} \left(2 \operatorname{Re}(g), 2 \operatorname{Im}(g), |g|^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

A sua norma é:

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right\| = \sqrt{\det(g_{ij})} = \lambda^2 = \left[\frac{|f| (1 + |g|^2)}{2} \right]^2$$

Logo a normal unitária é dada por:

$$N = \left(\frac{2 \operatorname{Re}(g)}{|g|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im}(g)}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right) \quad (4-5)$$

4.3

A função g e a Aplicação Normal de Gauss

Teorema 4.3.1 *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima conforme e seja $g : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a função meromorfa dada pela representação de Enneper-Weierstrass desta superfície. Denote por $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a projeção estereográfica através do pólo norte (vide 1.2.13). Então:*

$$\pi \circ N = g \quad (4-6)$$

Prova: Sabemos pela equação (4-5) que

$$N = \left(\frac{2 \operatorname{Re}(g)}{|g|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im}(g)}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right)$$

Além disto, a fórmula da inversa da projeção estereográfica é (vide 1.2.13):

$$\pi^{-1}(w) = \left(\frac{2 \operatorname{Re}(w)}{|w|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im}(w)}{|w|^2 + 1}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right)$$

Portanto $N = (\pi^{-1} \circ g)$ e, como π é bijeção, temos $\pi \circ N = g$. ■

Observação 4.3.2 *Em outras palavras, o teorema acima mostra que a função meromorfa $g(z)$ dada na representação de Enneper-Weierstrass e a aplicação normal de Gauss N são a mesma coisa. Como N não depende da parametrização da superfície, segue que g também não! Portanto g está bem definida globalmente. Já que a 1-forma meromorfa fdz também está bem-definida globalmente em M , a representação de Enneper-Weierstrass da superfície é global.*

Além disto, no caso do plano (que não possui representação de Enneper-Weierstrass) nós podemos tomar g como função constante, o que é equivalente à normal ser constante. No entanto a 1-forma $f(z)dz$ não pode ser definida neste caso.

O curioso é que o teorema acima nos dá mais uma definição para superfícies mínimas:

Teorema 4.3.3 *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão conforme.*

Então X é imersão mínima se e somente se a função $g := \pi \circ N$ é meromorfa.

Prova: O teorema anterior nos dá a ida, então precisamos provar apenas a recíproca.

Suponha $g := \pi \circ N$ meromorfa. Portanto g é aplicação conforme. Como a projeção estereográfica π é anti-conforme (vide 1.2.13), a sua inversa também é. Temos então que $N = (\pi^{-1} \circ g)$ é anti-conforme. Logo a aplicação de Weingarten DN é a composição de uma aplicação conforme com uma reflexão, donde DN tem autovalores de mesmo módulo e sinais opostos. Mas pela observação 1.1.28, $H = \text{tr}(DN) = 0$ e a imersão é mínima. ■

4.4

Normais de Superfícies Mínimas Completas

O objetivo desta seção é provar o seguinte resultado:

Teorema 4.4.1 (Osserman) *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima completa. Então a superfície é um plano ou a imagem da aplicação normal de Gauss N é densa em \mathbb{S}^2 .*

Observe que, caso a superfície não seja um plano, basta provar o teorema acima para M simplesmente conexa. De fato, se M não for simplesmente conexa, pegue $p : \tilde{M} \rightarrow M$ o seu recobrimento universal e suponha que o teorema seja verdadeiro para um recobrimento mínimo completo³ $(X \circ p) : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então a imagem de $(N \circ p) : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$ é densa. Como p é sobrejetiva, segue que a imagem de N é densa e o teorema acima é verdadeiro.

Portanto, pela observação 3.3.3, precisamos analisar os casos $M \cong \mathbb{C}$ e $M \cong \mathbb{D}$.

4.4.1

Caso 1: O recobrimento universal é \mathbb{C}

Teorema 4.4.2 *Seja $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ recobrimento mínimo completo. Então a superfície é um plano ou a imagem da aplicação normal de Gauss N assume todas as direções com, no máximo, duas exceções (em particular, a sua imagem é densa em \mathbb{S}^2).*

Prova: Suponha que a superfície não seja um plano. Note que, como ela é completa (vide 1.1.12), ela não pode ser um pedaço de um plano.

Podemos assumir que X é conforme (vide observações 3.0.15 e 1.1.23). Então a superfície possui representação de Enneper-Weierstrass, donde temos função meromorfa $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Pelo pequeno teorema de Picard (vide 1.2.19), g é constante (o que não pode acontecer, pois N seria constante pelo teorema 4.3.1 e a superfície seria plana) ou g assume todos os valores do plano complexo com, no máximo, uma

³Lembre-se que \tilde{M} é completa se e somente se M é completa, vide 1.1.4.

exceção. Em outras palavras, a imagem de g atinge todos os valores de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com, no máximo, duas exceções. Portanto, como a projeção estereográfica π é bijetiva, o mesmo pode ser dito de N . ■

4.4.2

Caso 2: O recobrimento universal é \mathbb{D}

Este caso é mais complicado. A ideia é trocar a métrica induzida por \mathbb{R}^3 por outra equivalente e mostrar que, nesta nova métrica, existe um caminho divergente com comprimento finito. Isto seria um absurdo pois a superfície é completa.

Teorema 4.4.3 *Seja $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ recobrimento mínimo completo. Então a aplicação normal de Gauss N é densa em \mathbb{S}^2 .*

Prova: Como o recobrimento universal de um plano é \mathbb{C} e a superfície é completa, sabemos que ela não está contida em um plano. Portanto podemos assumir que X é conforme (vide 3.0.15 e 1.1.23) e que a superfície tem representação de Enneper-Weierstrass dada por $f(z)dz$ e $g(z)$.

Suponha por absurdo que as normais da superfície não sejam densas em \mathbb{S}^2 . Logo existe aberto de \mathbb{S}^2 que não é intersectado pela imagem de N . Fazendo uma rotação em \mathbb{R}^3 se necessário, podemos supor que o pólo norte $(0, 0, 1)$ está contido neste aberto. Portanto podemos assumir que as normais unitárias satisfazem $N_3 \leq \eta < 1$, donde (por (4-5)):

$$N_3 = \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \leq \eta < 1 \iff |g(z)| \leq M < +\infty$$

Então, como g não tem pólos, f não se anula.

Troque a métrica $\lambda^2|dz|^2 = \left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2} \right]^2 |dz|^2$ (vide 1.1.21) pela métrica $|f|^2|dz|^2$. Observe que esta nova métrica está bem definida, pois $|f| \neq 0$, e é conforme, já que é uma homotetia da métrica conforme $|dz|^2$. Além disto, as duas métricas são equivalentes:

$$\frac{1}{4}|f|^2 \leq \left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2} \right]^2 \leq \left(\frac{1+M^2}{2} \right)^2 |f|^2$$

Em particular, como a superfície era completa com a métrica original, ela também será completa com a nova métrica $|f|^2|dz|^2$.

Então, para finalizar o teorema, basta provarmos o lema a seguir:

Lema 4.4.4 *Seja $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ função holomorfa que não possui zeros. Então \mathbb{D} munido da métrica $|f|^2|dz|^2$ não é completo.*

Com o lema acima chegamos a um absurdo. ■

Prova: [Lema] Queremos provar que existe caminho divergente C em \mathbb{D} tal que:

$$\int_C |f(z)| |dz| < +\infty$$

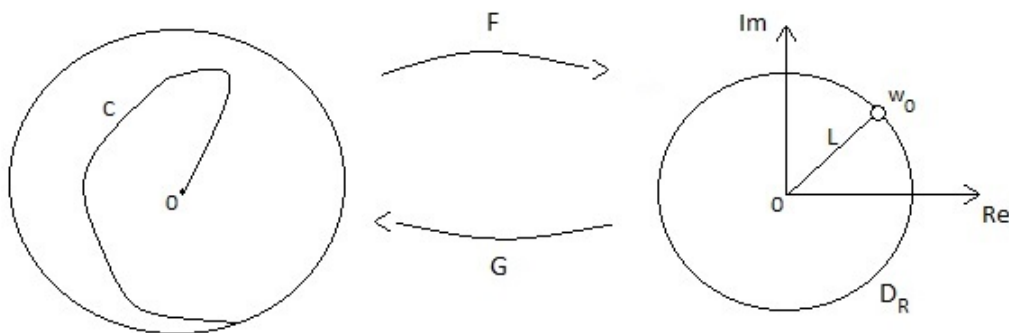
Defina a função $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$w := F(z) = \int_0^z f(\zeta) d\zeta$$

Então $F(z)$ leva $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ em um domínio contido em \mathbb{C} (pois $F'(z) = f(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{D}$). Observe que $F(0) = 0$, F é holomorfa, $F'(z) \neq 0$ e F é sobrejetiva sobre a sua imagem. No entanto, F pode não ser injetiva.

Seja $G(w) = z$ o ramo da inversa de F definido em um domínio de \mathbb{C} (que contém a origem) que satisfaz $G(0) = 0$. Logo $F \circ G(0) = G \circ F(0) = 0$. Como $|G(w)| < 1$, pelo teorema de Liouville (vide 1.2.16), G não pode ser função inteira. Então existe disco maximal $D_R = \{|w| < R < \infty\}$ no domínio de G , ou seja, $\exists w_0$ com $|w_0| = R$ tal que $G(w)$ não pode ser estendida numa vizinhança de w_0 .

Seja L o segmento de reta $L = \{tw_0; 0 \leq t < 1\}$, e seja C a imagem de L por $G(w)$.



Afirmamos que C é caminho divergente. De fato, suponha por absurdo que C não seja divergente. Então \exists sequência $t_n \rightarrow 1$ tal que os pontos $z_n := G(t_n w_0)$ convergem a um ponto $z_0 \in \mathbb{D}$. Mas então, pela continuidade de F , temos $F(z_0) = w_0$. Como $F'(z_0) = f(z_0) \neq 0$, pelo teorema da função inversa, $G(w)$ pode ser estendida numa vizinhança de w_0 . Absurdo.

Portanto C é caminho divergente e temos:

$$\begin{aligned} \text{Comp}(C) &= \int_C |f(z)| |dz| = \int_0^1 |f(z(t))| \left| \frac{dz(t)}{dt} \right| |dt| = \int_0^1 \left| \frac{dF(z(t))}{dz} \right| \left| \frac{dz(t)}{dt} \right| |dt| = \\ &= \int_0^1 \left| \frac{dF(z(t))}{dt} \right| |dt| = \int_0^1 \left| \frac{dw(t)}{dt} \right| |dt| = \int_L |dw| = \text{Comp}(L) = R < +\infty \end{aligned}$$

■

Observação 4.4.5 *Em particular, provamos que a função $F : \mathbb{D} \rightarrow F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C}$ da demonstração acima é uma isometria.*

Logo, de posse dos teoremas 4.4.2 e 4.4.3, o teorema 4.4.1 está provado.

4.5

Aplicação: Teorema de Bernstein

Usando o teorema da seção anterior provaremos um dos teoremas mais clássicos da teoria de superfícies mínimas. No capítulo seguinte provaremos o mesmo resultado de uma outra maneira.

Teorema 4.5.1 (Teorema de Bernstein) *Seja S um gráfico mínimo inteiro⁴. Então S é um plano.*

Prova: Como S é um gráfico inteiro, pela proposição 1.1.15, segue que S é completa. Além disto, por ser um gráfico, a imagem da aplicação normal de Gauss N está contida em uma das metades de \mathbb{S}^2 (dependendo apenas do sentido de N). Em particular, ela não é densa na esfera. Como S é superfície mínima, segue do teorema 4.4.1 que S é um plano. ■

4.6

Exemplos

⁴Para a definição, vide 1.1.14.

4.6.1

Catenoide

Começaremos analisando o recobrimento universal do catenoide, e encontrar a sua representação de Enneper-Weierstrass. Vimos em 2.3.2 que $X \circ p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dado por

$$\begin{cases} (X \circ p)_1 (w_1 + iw_2) = c \cosh(w_1) \cos(w_2) \\ (X \circ p)_2 (w_1 + iw_2) = c \cosh(w_1) \sin(w_2) \\ (X \circ p)_3 (w_1 + iw_2) = c w_1 \end{cases}$$

onde $w = w_1 + iw_2 \in \mathbb{C}$.

Vamos verificar que o recobrimento é conforme e, em seguida, encontrar as 1-formas holomorfas $\phi_k(w)dw$:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial w_1} = c \sinh(w_1) \cos(w_2) \\ \frac{\partial x_1}{\partial w_2} = -c \cosh(w_1) \sin(w_2) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial x_2}{\partial w_1} = c \sinh(w_1) \sin(w_2) \\ \frac{\partial x_2}{\partial w_2} = c \cosh(w_1) \cos(w_2) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial x_3}{\partial w_1} = c \\ \frac{\partial x_3}{\partial w_2} = 0 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} (g_{ij}) &= c^2 \begin{pmatrix} \sinh^2(w_1) [\cos^2(w_2) + \sin^2(w_2)] + 1 & 0 \\ 0 & \cosh^2(w_1) [\sin^2(w_2) + \cos^2(w_2)] \end{pmatrix} = \\ &= c^2 \begin{pmatrix} \cosh^2(w_1) & 0 \\ 0 & \cosh^2(w_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

As 1-formas $\phi_k(w)dw$ são (vide lema 3.1.7):

$$\begin{cases} \phi_1(w) dw = c [\sinh(w_1) \cos(w_2) + i \cosh(w_1) \sin(w_2)] = c \sinh(w) \\ \phi_2(w) dw = c [\sinh(w_1) \sin(w_2) - i \cosh(w_1) \cos(w_2)] = -ic \cosh(w) \\ \phi_3(w) dw = c \end{cases}$$

Com as fórmulas acima fica claro que as 1-formas $\phi_k(z)dz$ são holomorfas. Além disto, vemos mais uma vez que este recobrimento é conforme, pois:

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = c^2 [\sinh^2(w) - \cosh^2(w) + 1] = c^2[-1 + 1] \equiv 0$$

Então a representação de Enneper-Weierstrass do recobrimento universal do catenoide é:

$$\begin{cases} f(w) dw = c \sinh(w) - c \cosh(w) dw = -c e^{-w} dw \\ g(w) = \frac{c}{-c e^{-w}} = -e^w \end{cases} \quad (4-7)$$

onde $w \in \mathbb{C}$.

Pela observação 4.1.4 e usando que $z = p(w) = e^w$, donde $dw = \frac{dz}{z}$, temos:

$$\begin{cases} f(z) dz = -\frac{c}{z^2} dz \\ g(z) = -z \end{cases} \quad (4-8)$$

onde $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}^*$.

Portanto as 1-formas $\phi_k(z)dz$ do catenoide são (vide a equação (4-1)):

$$\begin{cases} \phi_1(z) dz = \frac{-c}{2} \left(\frac{1}{z^2} - 1 \right) dz \\ \phi_2(z) dz = \frac{-ic}{2} \left(\frac{1}{z^2} + 1 \right) dz \\ \phi_3(z) dz = \frac{c}{z} dz \end{cases}$$

Mas estas são exatamente as 1-formas holomorfas usadas no exemplo 3.2, multiplicadas por uma constante $c \in \mathbb{R}^*$. Seguindo o mesmo raciocínio, vemos que esta é a representação de Enneper-Weierstrass do catenoide de raio c , exemplificando a utilidade da observação 4.1.4.

Usando a equação (4-5), a normal unitária do recobrimento universal do catenoide é:

$$N(w) = \left(\frac{-2e^{w_1} \cos(w_2)}{e^{2w_1} + 1}, \frac{-2e^{w_1} \sin(w_2)}{e^{2w_1} + 1}, \frac{e^{2w_1} - 1}{e^{2w_1} + 1} \right)$$

enquanto a do catenoide é:

$$N(z) = \left(\frac{-u_1}{u_1^2 + u_2^2 + 1}, \frac{-u_2}{u_1^2 + u_2^2 + 1}, \frac{u_1^2 + u_2^2 - 1}{u_1^2 + u_2^2 + 1} \right)$$

Pela afirmação 2.3.5, sabemos que X é um difeomorfismo (vide observação 1.1.6) conforme entre o catenoide e \mathbb{C}^* , donde o catenoide é homeomorfo a um anel e a sua estrutura conforme é \mathbb{C}^* .

4.6.2 Helicoide

Para a imersão do helicoide ser conforme, precisamos fazer uma mudança de coordenadas em relação à imersão usada no capítulo 2. Se \tilde{u}_1 e \tilde{u}_2 denotarem as variáveis usadas no cap. 2, tome $u_1 = \sinh^{-1}(\tilde{u}_1)$ e $u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{c} + \frac{\pi}{2}$. Observe que esta mudança de coordenadas está bem definida pois as suas derivadas nunca se anulam. Logo $\cos\left(\frac{\tilde{u}_2}{c}\right) = \sin(u_2)$ e $\sin\left(\frac{\tilde{u}_2}{c}\right) = -\cos(u_2)$. Portanto, depois destas mudanças de coordenadas, a imersão do helicoide $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por:

$$\begin{cases} x_1 = c \sinh(u_1) \sin(u_2) \\ x_2 = -c \sinh(u_1) \cos(u_2) \\ x_3 = c \left[u_2 - \frac{\pi}{2} \right] \end{cases}$$

onde $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$.

Vamos primeiro ver que a imersão é conforme e depois encontrar as 1-formas holomorfas $\phi_k(z)dz$:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} = c \cosh(u_1) \sin(u_2) & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} = -c \cosh(u_1) \cos(u_2) & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} = 0 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} = c \sinh(u_1) \cos(u_2) & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} = c \sinh(u_1) \sin(u_2) & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} = c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (g_{ij}) &= c^2 \begin{pmatrix} \cosh^2(u_1) [\sin^2(u_2) + \cos^2(u_2)] & 0 \\ 0 & \sinh^2(u_1) [\cos^2(u_2) + \sin^2(u_2)] + 1 \end{pmatrix} = \\ &= c^2 \begin{pmatrix} \cosh^2(u_1) & 0 \\ 0 & \cosh^2(u_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{cases} \phi_1(z) dz = c [\cosh(u_1) \sin(u_2) - i \sinh(u_1) \cos(u_2)] dz = -ic \sinh(z) dz \\ \phi_2(z) dz = -c [\cosh(u_1) \cos(u_2) + i \sinh(u_1) \sin(u_2)] dz = -c \cosh(z) dz \\ \phi_3(z) dz = -ic dz \end{cases}$$

Logo as 1-formas $\phi_k(z)dz$ são holomorfas. Além disto, vemos mais uma vez que esta imersão é conforme, pois:

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = c^2 [-\sinh^2(z) + \cosh^2(z) - 1] = c^2 [1 - 1] \equiv 0$$

Então a representação de Enneper-Weierstrass do helicóide é dada por:

$$\begin{cases} f(z) dz = -ic \sinh(z) + ic \cosh(z) = ic e^{-z} \\ g(z) = \frac{-ic}{ic e^{-z}} = -e^z \end{cases}$$

onde $z \in \mathbb{C}$.

Usando a equação (4-5), a normal unitária do helicóide é:

$$N = \left(\frac{-2e^{u_1} \cos(u_2)}{e^{2u_1} + 1}, \frac{-2e^{u_1} \sin(u_2)}{e^{2u_1} + 1}, \frac{e^{2u_1} - 1}{e^{2u_1} + 1} \right)$$

Observação 4.6.1 *Não é por acaso que a primeira forma fundamental e a normal do helicóide são iguais às do catenoide: isto ocorre porque elas são superfícies mínimas conjugadas entre si. Entraremos em mais detalhes sobre o assunto no capítulo 6.*

Pela afirmação 2.3.8, sabemos que X é um difeomorfismo (vide observação 1.1.6) conforme entre o helicóide e \mathbb{C} , donde o helicóide é conformemente equivalente ao plano complexo.

4.6.3

Superfície de Scherk (duplamente periódica)

Seja $M = \mathbb{D}$ e tome a seguinte representação de Enneper-Weierstrass:

$$\begin{cases} f(z) dz = \frac{-4i}{(z^4 - 1)} dz = \frac{-4i}{(z+1)(z-1)(z+i)(z-i)} dz \\ g(z) = -i z \end{cases} \quad (4-9)$$

onde $z \in M$.

Como a função $g(z)$ e a 1-forma $f(z)dz$ são holomorfas em M (que é simplesmente conexo), $g(z)$ não tem pólos e $f(z)dz$ não tem zeros, a representação de Enneper-Weierstrass está bem definida. As 1-formas holomorfas $\phi_k(z)dz$ são:

$$\begin{cases} \phi_1(z) dz = \frac{-2i(z^2+1) dz}{(z^4-1)} = \frac{-2i dz}{(z+1)(z-1)} = \left[\frac{i}{z+1} - \frac{i}{z-1} \right] dz \\ \phi_2(z) dz = \frac{-2(z^2-1) dz}{(z^4-1)} = \frac{-2 dz}{(z+i)(z-i)} = \left[\frac{i}{z-i} - \frac{i}{z+i} \right] dz \\ \phi_3(z) dz = \frac{-4z dz}{(z^4-1)} = \left[\frac{2z}{z^2+1} - \frac{2z}{z^2-1} \right] dz \end{cases} \quad (4-10)$$

Portanto, tomando o ramo do logaritmo em que $\log(1) = 0$, temos

$$\begin{aligned} x_1(z) &= \operatorname{Re} \left[\int \frac{i dz}{z+1} - \int \frac{i dz}{z-1} \right] = \operatorname{Re} [i \log(z+1) - i \log(z-1)] = \\ &= \operatorname{Re} \left[i \log \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \right] = -\arg \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(z) &= \operatorname{Re} \left[\int \frac{i dz}{z-i} - \int \frac{i dz}{z+i} \right] = \operatorname{Re} [i \log(z-i) - i \log(z+i)] = \\ &= \operatorname{Re} \left[-i \log \left(\frac{z+i}{z-i} \right) \right] = \arg \left(\frac{z+i}{z-i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3(z) &= \operatorname{Re} \left[\int \frac{2z dz}{z^2+1} - \int \frac{2z dz}{z^2-1} \right] = \operatorname{Re} [\log(z^2+1) - \log(z^2-1)] = \\ &= \operatorname{Re} \left[\log \left(\frac{z^2+1}{z^2-1} \right) \right] = \log \left| \frac{z^2+1}{z^2-1} \right| \end{aligned}$$

Vamos ver que esta é a parametrização do pedaço da superfície de Scherk sobre o quadrado $\Omega_{-1,1}$. Observe que

$$\begin{cases} \frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)(\bar{z}-1)}{|z-1|^2} = \frac{|z|^2-1}{|z-1|^2} - i \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z-1|^2} \\ \frac{z+i}{z-i} = \frac{(z+i)(\bar{z}+i)}{|z-i|^2} = \frac{|z|^2-1}{|z-i|^2} + i \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z-i|^2} \end{cases} \quad (4-11)$$

Como, em M , temos $|z|^2 - 1 < 0$, segue que:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \left(\frac{z+1}{z-1} \right) < 0 \\ \operatorname{Re} \left(\frac{z+i}{z-i} \right) < 0 \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \arg \left(\frac{z+1}{z-1} \right) < \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} < \arg \left(\frac{z+i}{z-i} \right) < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} \frac{-3\pi}{2} < x_1(z) < \frac{-\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} < x_2(z) < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Portanto $(x_1, x_2)(M) \subset \Omega_{-1,1}$. Vamos ver que (x_1, x_2) é uma bijeção entre M e $\Omega_{-1,1}$. Dado ponto $(x_1, x_2) \in \Omega_{-1,1}$, seja

$$A := \tan^2(x_1) + \tan^2(x_2) \in \mathbb{R}$$

donde $A \geq 0$. Como

$$\begin{cases} \tan(x_1) = -\tan(-x_1) = \frac{-2 \operatorname{Im}(z)}{|z|^2 - 1} \\ \tan(x_2) = \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2 - 1} \end{cases} \quad (4-12)$$

temos

$$A = \frac{(-2 \operatorname{Im}(z))^2 + (2 \operatorname{Re}(z))^2}{(|z|^2 - 1)^2} = \frac{4 |z|^2}{|z|^4 - 2|z|^2 + 1}$$

donde

$$|z|^2 = \frac{A + 2 \pm 2\sqrt{A+1}}{A} \iff |z|^2 - 1 = \frac{2 \pm 2\sqrt{A+1}}{A}$$

Já que $|z|^2 - 1 < 0$ em M , temos

$$|z|^2 - 1 = \frac{2 - 2\sqrt{A+1}}{A}$$

Então, por (4-12), obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z) &= \frac{\tan(x_2) (2 - 2\sqrt{A+1})}{2A} \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{-\tan(x_1) (2 - 2\sqrt{A+1})}{2A}\end{aligned}$$

donde (x_1, x_2) é uma bijeção entre M e $\Omega_{-1,1}$.

Falta ver que esta superfície é de fato a superfície de Scherk. Pelas equações (4-11) e usando que o cosseno é função par, temos:

$$\begin{aligned}\cos(x_1) &= \frac{\frac{|z|^2-1}{|z-1|^2}}{\frac{|z+1|}{|z-1|}} = \frac{|z|^2-1}{|z^2-1|} \\ \cos(x_2) &= \frac{\frac{|z|^2-1}{|z-i|^2}}{\frac{|z+i|}{|z-i|}} = \frac{|z|^2-1}{|z^2+1|}\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\cos(x_2)}{\cos(x_1)} = \frac{\frac{|z|^2-1}{|z^2-1|}}{\frac{|z|^2-1}{|z^2+1|}} = \frac{|z^2+1|}{|z^2-1|} = e^{x_3}$$

Portanto X é uma imersão do pedaço da superfície de Scherk em $\Omega_{-1,1}$.

Para conseguir a superfície de Scherk inteira, a tentativa natural é pegar $M = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm i\}$ e usar a mesma representação de Enneper-Weierstrass $g(z)$ e $f(z) dz$ (elas continuam sem pólos e zeros em M).

No entanto, as 1-formas $\phi_k(z)dz$ tem resíduos imaginários puros (vide (4-10)), portanto as integrais da representação de Enneper-Weierstrass não estão bem definidas.

Mas pela observação 4.1.4, podemos pegar $p : \tilde{M} \rightarrow M$ recobrimento universal de $M = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm i\}$ e, desta forma, obter uma representação de Enneper-Weierstrass bem definida. Esta será a representação da superfície de Scherk completa.

4.6.4

Superfície de Enneper

Como vimos no capítulo 2, a imersão $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ da superfície de Enneper é dada por (vide (2-10)):

$$\begin{cases} x_1(u_1 + iu_2) = u_1 - \frac{u_1^3}{3} + u_1u_2^2 \\ x_2(u_1 + iu_2) = -u_2 - u_1^2u_2 + \frac{u_2^3}{3} \\ x_3(u_1 + iu_2) = u_1^2 - u_2^2 \end{cases}$$

onde $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$.

Pela primeira forma fundamental calculada no capítulo 2, vemos que esta imersão é conforme. Vamos encontrar as 1-formas $\phi_k(z)dz$:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} = 1 - u_1^2 + u_2^2 & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} = -2u_1u_2 & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} = 2u_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} = 2u_1u_2 & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} = -1 - u_1^2 + u_2^2 & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} = -2u_2 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{cases} \phi_1(z) dz = (1 - u_1^2 + u_2^2 - 2iu_1u_2) dz = (1 - z^2) dz \\ \phi_2(z) dz = -(2u_1u_2 + i + iu_1^2 - iu_2^2) dz = i(1 + z^2) dz \\ \phi_3(z) dz = (2u_1 + 2iu_2) dz = 2z dz \end{cases}$$

Fica claro que as 1-formas ϕ_k são holomorfas. Vemos novamente que esta imersão é conforme:

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 1 + z^4 - 2z^2 - 1 - z^4 - 2z^2 + 4z^2 = 0$$

A representação de Enneper-Weierstrass da superfície de Enneper é:

$$\begin{cases} f(z) dz = (1 - z^2 + 1 + z^2) dz = 2 dz \\ g(z) = \frac{2z}{2} = z \end{cases}$$

onde $z \in \mathbb{C}$.

Pela equação (4-5), a normal unitária é:

$$N = \left(\frac{2u_1}{u_1^2 + u_2^2 + 1}, \frac{2u_2}{u_1^2 + u_2^2 + 1}, \frac{u_1^2 + u_2^2 - 1}{u_1^2 + u_2^2 + 1} \right)$$

Observação 4.6.2 *Este é um bom momento para observar que a representação de Enneper-Weierstrass de uma superfície não é única. Se pegarmos*

$$\begin{cases} \tilde{f}(z) dz = 2z^2 dz \\ \tilde{g}(z) = \frac{1}{z} \end{cases}$$

Obtemos:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_1(z) dz = \frac{2z^2(1-z^{-2})}{2} dz = (z^2-1) dz = -\phi_1(z) dz \\ \tilde{\phi}_2(z) dz = \frac{i(2z^2)(1+z^{-2})}{2} dz = i(z^2+1) dz = \phi_2(z) dz \\ \tilde{\phi}_3(z) dz = (2z^2z^{-1}) dz = 2z dz = \phi_3(z) dz \end{cases}$$

Portanto esta nova representação nos dá a mesma superfície de Enneper a menos de uma reflexão no eixo x_1 .

4.6.5

Superfície de Jorge-Meeks

Jorge e Meeks construíram uma família enumerável de superfícies mínimas completas em \mathbb{R}^3 , chamadas superfícies de Jorge-Meeks. Elas são uma generalização do catenoide⁵.

⁵O catenoide é o caso $n = 1$ da superfície de Jorge-Meeks.

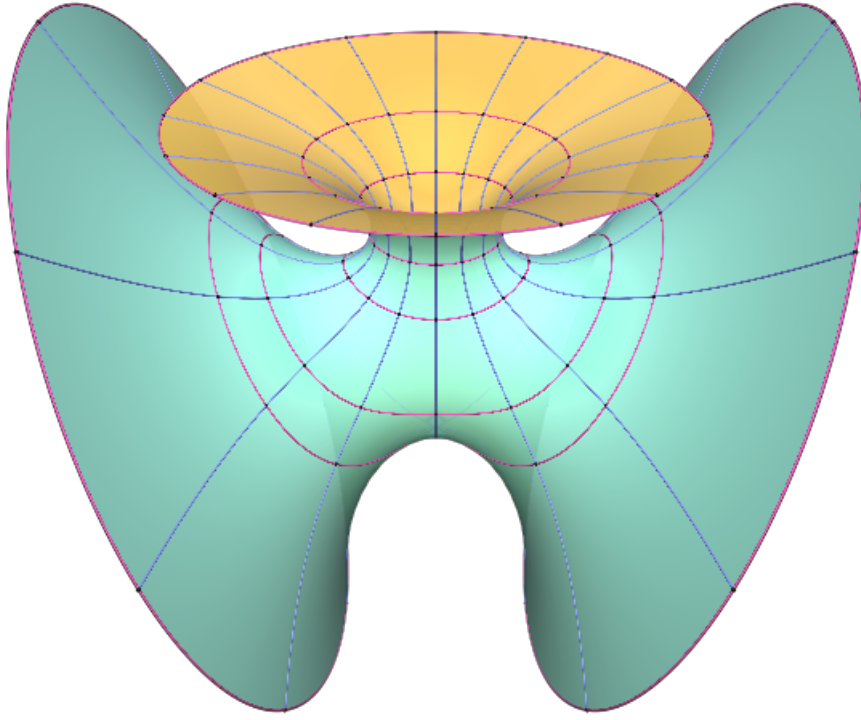


Figura 4.1: Superfície de Jorge-Meeks com $n = 2$ (também chamada de trioide)

Vamos construí-las através da representação de Enneper-Weierstrass.

Fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Seja $M = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z^{n+1} = 1\}$ e defina a representação de Enneper-Weierstrass em M como:

$$f(z) dz = \begin{cases} \frac{1}{(z^{n+1} - 1)^2} dz, & \text{se } z \neq \infty \\ 0, & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} z^n, & \text{se } z \neq \infty \\ \infty, & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

Observe que elas são contínuas. De fato, se $w = z^{-1}$, temos $dz = -w^{-2}dw$

e

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) dz &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{-f(w) dw}{w^2} = \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{-dw}{w^2 (w^{-n-1} - 1)^2} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{-w^{2n} dw}{(1 - w^{n+1})^2} = 0 \end{aligned}$$

portanto $z = \infty$ é um zero de ordem $2n$ de $f(z)dz$. Analogamente,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{w \rightarrow 0} w^{-n} = +\infty$$

donde $z = \infty$ é um pólo de ordem n de $g(z)$. Então a representação de Enneper-Weierstrass acima satisfaz a condição de zeros e pólos em M .

As 1-formas holomorfas $\phi_k(z)dz$ são:

$$\begin{cases} \phi_1(z) dz = \frac{1 - z^{2n}}{2(z^{n+1} - 1)^2} dz \\ \phi_2(z) dz = \frac{i(1 + z^{2n})}{2(z^{n+1} - 1)^2} dz \\ \phi_3(z) dz = \frac{z^n}{(z^{n+1} - 1)^2} dz \end{cases}$$

Note que as três se anulam em $z = \infty$. Portanto os seus pólos são $\{z \in \mathbb{C} : z^{n+1} = 1\}$.

Para a superfície mínima estar bem-definida, precisamos que as integrais das 1-formas acima ao longo de qualquer caminho fechado sejam imaginárias puras. Pelo teorema do resíduo (vide 1.2.15), basta provar que o resíduo das 1-formas acima são reais em $z = \theta$, onde $\theta^{n+1} = 1$.

Antes de começar as contas, observe que, como $\theta^{n+1} = 1$, temos:

$$z^{n+1} - 1 = z^{n+1} - \theta^{n+1} = (z - \theta) \sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \quad (4-13)$$

Além disto, no caso de $\theta = \pm 1$, donde $\theta^{2n} = 1$, temos:

$$1 - z^{2n} = \theta^{2n} - z^{2n} = (\theta - z) \sum_{j=1}^{2n} \theta^{2n-j} z^{j-1} \quad (4-14)$$

Vamos às contas. Primeiro vamos analisar os resíduos de $\phi_1(z)dz$ em $z = \theta$.

Caso 1: $\theta = \pm 1$

Neste caso, por (4-13) e (4-14), temos:

$$\phi_1(z) = \frac{-1}{2} \frac{1}{(z - \theta)} \frac{\sum_{j=1}^{2n} \theta^{2n-j} z^{j-1}}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^2}$$

Veja que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \theta} ((z - \theta) \phi_1(z)) &= \frac{-1}{2} \lim_{z \rightarrow \theta} \frac{\sum_{j=1}^{2n} \theta^{2n-j} z^{j-1}}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^2} = \\ &= \frac{-1}{2} \frac{\sum_{j=1}^{2n} \theta^{2n-j} \theta^{j-1}}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^n \right)^2} = \frac{-n}{(n+1)^2 \theta} \neq 0 \end{aligned}$$

Logo $\theta = \pm 1$ é pólo de ordem 1 de $\phi_1(z)dz$ cujo resíduo é:

$$\text{Res}(\phi_1(z), \pm 1) = \frac{\mp n}{(n+1)^2} \in \mathbb{R}$$

Caso 2: $\theta \neq \pm 1$

Por (4-13) temos:

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2(z - \theta)^2} \frac{1 - z^{2n}}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^2}$$

Observe que, como $\theta^{2n} \neq 1$, a função

$$\frac{1 - z^{2n}}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^2}$$

não tem zero nem pólo em $z = \theta$. Portanto $z = \theta$ é pólo de ordem 2 de $\phi_1(z) dz$, donde (por 1.2.14):

$$\begin{aligned}
\text{Res}(\phi_1(z), \theta) &= \lim_{z \rightarrow \theta} \frac{d}{dz} \left((z-\theta)^2 \phi_1(z) \right) = \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} \frac{1 - z^{2n}}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^2} \right]_{z=\theta} = \\
&= \left[\frac{-n z^{2n-1}}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^2} - \frac{(1 - z^{2n}) \left(\sum_{j=1}^n j \theta^{n-j} z^{j-1} \right)}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^3} \right]_{z=\theta} = \\
&= \frac{-n \theta^{2n-1}}{(n+1)^2 \theta^{2n}} - \frac{(1 - \theta^{2n}) \left(\frac{n(n+1)}{2} \theta^{n-1} \right)}{(n+1)^3 \theta^{3n}} = \\
&= \frac{-n}{(n+1)^2 \theta} - \frac{n (1 - \theta^{2n})}{2 (n+1)^2 \theta^{2n+1}} = \\
&= \frac{-n (2 \theta^{2n} + 1 - \theta^{2n})}{2 (n+1)^2 \theta^{2n+1}} = \\
&= \frac{-n}{2 (n+1)^2} \frac{\theta^{2n} + 1}{\theta^{2n+1}}
\end{aligned}$$

Como $\theta^{n+1} = 1$, temos $\theta^n = \theta^{-1} = \bar{\theta}$, donde:

$$\text{Res}(\phi_1(z), \theta) = \frac{-n}{2 (n+1)^2} (\bar{\theta} + \theta) = \frac{-n \text{Re}(\theta)}{(n+1)^2} \in \mathbb{R}$$

Portanto todos os resíduos de $\phi_1(z)dz$ são reais. Vamos analisar agora os resíduos de $\phi_2 dz$.

Caso 1: $\theta = \pm i$ e n ímpar

Neste caso, por (4-13), temos:

$$\phi_2(z) = \frac{i}{2} \frac{1}{(z-\theta)^2} \frac{1+z^{2n}}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^2}$$

Note que, usando que $\theta^{2n} = -1$ junto da regra de L'hôpital, obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \theta} ((z - \theta)\phi_2(z)) &= \frac{i}{2} \lim_{z \rightarrow \theta} \frac{1 + z^{2n}}{(z - \theta) \left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^2} = \\ &= \frac{i}{2} \lim_{z \rightarrow \theta} \frac{2nz^{2n-1}}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^2 + 2(z - \theta) \left(\sum_{j=1}^n j \theta^{n-j} z^{j-1} \right) \left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)} = \\ &= \frac{i n \theta^{2n-1}}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^n \right)^2} = \frac{i n}{(n+1)^2} \theta^{-1} = \frac{\pm n}{(n+1)^2} \neq 0 \end{aligned}$$

Logo, quando n é ímpar, $\theta = \pm i$ é pólo de ordem 1 de $\phi_2(z)dz$ com resíduo:

$$\text{Res}(\phi_2(z), \pm i) = \frac{\pm n}{(n+1)^2} \in \mathbb{R}$$

Caso 2: $\theta = \pm i$ com n par ou $\theta \neq \pm i$

Por (4-13) temos:

$$\phi_2(z) = \frac{i}{2} \frac{1}{(z - \theta)^2} \frac{1 + z^{2n}}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^2}$$

Observe que, como $\theta^{2n} \neq -1$, a função

$$\frac{1 + z^{2n}}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^2}$$

não tem zero nem pólo em $z = \theta$. Portanto $z = \theta$ é pólo de ordem 2 de $\phi_2(z) dz$, donde (por 1.2.14):

$$\begin{aligned}
\text{Res}(\phi_2(z), \theta) &= \lim_{z \rightarrow \theta} \frac{d}{dz} \left((z - \theta)^2 \phi_2(z) \right) = \frac{i}{2} \frac{d}{dz} \left[\frac{1 + z^{2n}}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^2} \right]_{z=\theta} = \\
&= \frac{i}{2} \left[\frac{2n z^{2n-1}}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^2} - \frac{(1 + z^{2n}) \left(\sum_{j=1}^n j \theta^{n-j} z^{j-1} \right)}{\left(\sum_{j=0}^n \theta^{n-j} z^j \right)^3} \right]_{z=\theta} = \\
&= \frac{i n \theta^{2n-1}}{(n+1)^2 \theta^{2n}} - \frac{i (1 + \theta^{2n}) \left(\frac{n(n+1)}{2} \theta^{n-1} \right)}{(n+1)^3 \theta^{3n}} = \\
&= \frac{i n \theta^{-1}}{(n+1)^2} - \frac{i n (1 + \theta^{2n})}{2 (n+1)^2 \theta^{2n+1}} = \frac{i n (2 \theta^{2n} - 1 - \theta^{2n})}{2 (n+1)^2 \theta^{2n+1}} = \\
&= \frac{i n}{2 (n+1)^2} \frac{\theta^{2n} - 1}{\theta^{2n+1}}
\end{aligned}$$

Como $\theta^{n+1} = 1$, temos $\theta^n = \theta^{-1} = \bar{\theta}$, donde:

$$\text{Res}(\phi_2(z), \theta) = \frac{i n}{2 (n+1)^2} (\bar{\theta} - \theta) = \frac{n \text{Im}(\theta)}{(n+1)^2} \in \mathbb{R}$$

Por fim, falta analisar os resíduos de $\phi_3(z)dz$. Observe que

$$\phi_3(z) = \frac{z^n}{(z^{n+1} - 1)^2} = \frac{-1}{n+1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^{n+1} - 1} \right)$$

Portanto, como $\phi_3(z)$ tem primitiva global, temos

$$\text{Res}(\phi_3(z), \theta) = 0$$

Logo a representação de Enneper-Weierstrass está bem definida e encontramos imersão mínima conforme através do teorema 4.1.2 e da observação 4.1.3.

Vamos mostrar que a superfície é completa. Pela fórmula (4-4), a métrica da superfície é:

$$ds^2 = \frac{(1 + |z^n|^2)^2}{4 |z^{n+1} - 1|^4} |dz|^2$$

Seja $C : [0, T)$ curva divergente em M parametrizada por comprimento

de arco e seja L a sua imagem na superfície de Jorge-Meeks. Podemos escrever

$$(C(t))^{n+1} = 1 + re^{i\alpha} \quad (4-15)$$

onde $r, \alpha : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$. Como $C(t) \rightarrow \theta$ quando $t \rightarrow T$, então

$$\lim_{t \rightarrow T} r = 0$$

Derivando a equação (4-15) em t , tomando a norma e usando que $C(t)$ é parametrizada por comprimento de arco, obtemos

$$(n+1) |C(t)|^n = |r' + ir\alpha'| |e^{i\alpha}| \geq |r'| \quad (4-16)$$

Além disto, $|C(t)| \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow T$. Portanto, para t suficientemente próximo de T (digamos $t > a$) temos:

$$(n+1) |C(t)|^n \leq A \quad (4-17)$$

onde A é uma constante real positiva. Então, usando (4-15), denotando $c_1 := \text{Comp}(L([0, a]))$ e usando novamente que $C(t)$ é parametrizada por comprimento de arco, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Comp}(L) &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1 + |C^n(t)|^2}{|C(t)^{n+1} - 1|^2} dt \geq c_1 + \frac{1}{2} \int_a^T \frac{1}{|re^{i\alpha}|^2} dt \geq \\ &\geq c_1 + \frac{1}{2} \int_a^T \frac{1}{r^2} dt = c_1 + \frac{1}{2} \int_a^T \frac{(n+1) |C^n(t)|}{(n+1) |C^n(t)|} \frac{1}{r^2} dt \geq \\ &\geq c_1 + \frac{1}{2A} \int_a^T \frac{|r'|}{r^2} dt \geq c_1 + \frac{1}{2A} \left| \int_a^T \frac{r'}{r^2} dt \right| \end{aligned}$$

Seja $b = r(a)$. Como $r \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow T$, temos

$$\text{Comp}(L) \geq c_1 + \frac{1}{2A} \left| \int_b^0 \frac{dr}{r^2} \right| = c_1 + \frac{1}{2A} \left| \left[\frac{-1}{r} \right]_b^0 \right| = +\infty$$

Portanto a superfície de Jorge-Meeks é completa.

4.6.6

Exemplo de Jorge-Xavier

O último exemplo que falaremos neste capítulo não foi mencionado anteriormente. Ela é uma superfície mínima completa simplesmente conexa, criada usando a representação de Enneper-Weierstrass, cuja imagem em \mathbb{R}^3 está contida entre dois planos. Isto é interessante porque já vimos que nenhuma superfície mínima é fechada, mas este exemplo mostra que ela pode ser limitada em uma direção.

Tome como representação de Enneper-Weierstrass:

$$\begin{cases} f(z) dz = e^{-\tilde{h}(z)} dz \\ g(z) = e^{\tilde{h}(z)} \end{cases}$$

onde $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ e $\tilde{h}(z)$ é função que será construída mais adiante de forma a obter uma superfície completa. Já podemos ver que o exemplo de Jorge-Xavier está contida numa faixa de \mathbb{R}^3 , pois:

$$\phi_3(z) dz = fg dz = dz \implies x_3 = u_1$$

Como $|z| < 1$, segue que $-1 < x_3 < 1$.

Além disto, a sua normal unitária é dada por:

$$N = \left(\frac{2 \operatorname{Re} [e^{\tilde{h}(z)}]}{e^{2 \operatorname{Re} [\tilde{h}(z)]} + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} [e^{\tilde{h}(z)}]}{e^{2 \operatorname{Re} [\tilde{h}(z)]} + 1}, \frac{e^{2 \operatorname{Re} [\tilde{h}(z)]} - 1}{e^{2 \operatorname{Re} [\tilde{h}(z)]} + 1} \right)$$

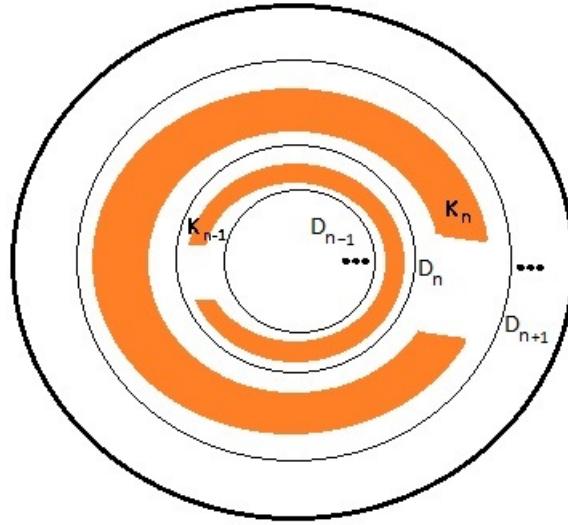
Vamos construir a função holomorfa $\tilde{h}(z)$. Seja D_n sequência de discos concêntricos tal que $\overline{D_n} \subset D_{n+1}$ e $\bigcup_n D_n = \mathbb{D}$. Seja K_n compacto obtido pegando um anel de raio constante $r_n > 0$, contido em $D_{n+1} \setminus \overline{D_n}$, e removendo um pequeno pedaço que contenha:

a interseção de D_{n+1} com o eixo x positivo, se n for par;

a interseção de D_{n+1} com o eixo x negativo, se n for ímpar.

Seja $K = \bigcup_n K_n$ (este conjunto não é fechado). Observe que $\mathbb{D} \setminus K$ é conexo, logo $\mathbb{S}^2 \setminus K$ também é conexo ⁶.

⁶Basta ver que $(\mathbb{S}^2 \setminus K)$ não pode ser escrito como a união disjunta de dois fechados não-vazios F_1 e F_2 . De fato, suponha por absurdo que isto fosse possível. Podemos assumir então $(\mathbb{D} \setminus K) \subset F_1$, donde $\partial \mathbb{D} \subset F_1$ pois F_1 é fechado. Além disto, se $(\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{D}) \subset F_i$, então $\partial \mathbb{D} \subset F_i$ pelo mesmo motivo, donde $i = 1$. Mas então $F_2 = \emptyset$, absurdo.



Sejam $U_n = D_{n+1} \setminus \overline{D_n}$ abertos disjuntos e $\Omega = \bigcup_n U_n$. Observe que $K_n \subset U_n$, logo $K \subset \Omega$. Tome também constantes reais c_n , $n \in \mathbb{N}^*$. A escolha dessas constantes c_n será feita mais adiante de forma que a superfície seja completa, mas é importante notar que ela é feita depois da escolha dos compactos K_n . Defina a função holomorfa:

$$h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

$$h(z) = c_n, \text{ se } z \in U_n$$

Usando o teorema de Runge (vide o caso particular de 1.2.22) em h , queremos mostrar que existe função holomorfa $\tilde{h} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$, vale

$$|\tilde{h}(z) - h(z)| = |\tilde{h}(z) - c_n| < 1, \text{ para } z \in K_n$$

Obtenha, pelo o teorema de Runge, um polinômio p_1 em \mathbb{D} com

$$|p_1 - h|_{\infty} < \frac{1}{2} \text{ no compacto } \overline{D_1}$$

Da mesma maneira, pegue p_n polinômio em \mathbb{D} , $n \geq 2$, com⁷

$$\begin{cases} |p_n - p_{n-1}|_\infty < \frac{1}{2^n} & \text{no compacto } \overline{D_{n-1}} \\ |p_n - h|_\infty < \frac{1}{2^n} & \text{no compacto } K_n \end{cases}$$

Afirmamos que a sequência (p_n) é sequência de Cauchy no espaço $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$. Ou seja, dado $\epsilon > 0$, queremos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que, $\forall n, m \geq n_0$ temos

$$|p_m - p_n|_\infty < \epsilon$$

Supondo $m > n \geq n_0$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} |p_m - p_n|_\infty &\leq |p_m - p_{m-1}|_\infty + \dots + |p_{n+1} - p_n|_\infty < \\ &< \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |p_k - p_{k-1}|_\infty < \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n_0}} \quad (4-18) \end{aligned}$$

Logo, tomando $n_0 > -\log_2 \epsilon$ positivo, temos o que queríamos.

Portanto a sequência de polinômios (p_n) é de Cauchy em $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$. Como este espaço é completo (vide 1.2.23), (p_n) converge na norma sup a uma função holomorfa $\tilde{h} \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$.

Para $z \in K_n$ temos:

$$|\tilde{h}(z) - h(z)| \leq |\tilde{h}(z) - p_n(z)| + |p_n(z) - h(z)| < |\tilde{h}(z) - p_n(z)| + \frac{1}{2^n}$$

Mas, em (4-18), vimos que (para $m > n$):

$$|p_m - p_n|_\infty < \frac{1}{2^n}$$

tomando $m \rightarrow +\infty$ temos $p_m(z) \rightarrow \tilde{h}(z)$, donde

$$|\tilde{h}(z) - p_n(z)| < \frac{1}{2^n}$$

Então, como $n \geq 1$, obtemos

$$|\tilde{h}(z) - h(z)| < |\tilde{h}(z) - p_n(z)| + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} < 1$$

⁷Observe que $(\overline{D_{n-1}} \cup K_n)$ é um compacto com duas componentes conexas e o seu complemento é conexo. Aplicamos então o caso particular do teorema de Runge (vide 1.2.22) na função holomorfa que é igual a p_{n-1} em $\overline{D_{n-1}}$ e igual a h em K_n .

Logo a função holomorfa \tilde{h} satisfaz o que queríamos.

Por fim, vamos ver que a superfície é completa. Seja $\gamma : [a, b) \rightarrow \mathbb{D}$ uma curva divergente parametrizada por comprimento de arco e seja C sua imagem na superfície. Existem dois casos possíveis. O primeiro é quando γ tem comprimento euclidiano infinito (ou seja, $b = \infty$). Neste caso o comprimento de C é:

$$\text{Comp}(C) = \int_{\gamma} \frac{|f| (1 + |g|^2)}{2} |dz| = \int_a^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|g|} + |g| \right) dt \geq \int_a^{\infty} dt = +\infty$$

O segundo caso a ser analisado é quando γ tem comprimento euclidiano finito (ou seja, $b < \infty$). Como γ é curva divergente, para n par ou ímpar ela deve atravessar infinitos⁸ K_n 's. Suponha sem perda de generalidade que, a partir de um certo ponto, γ atravessa todos os K_n 's com n par. Defina J_n o “conjunto do tempo” em que γ passa em K_n :

$$J_n = \{t \in [a, b); \gamma(t) \in K_n\}$$

Portanto:

$$2 \text{ Comp}(C) = \int_a^b \left(\frac{1}{|g|} + |g| \right) dt \geq \int_a^b |g| dt \geq \sum_{\substack{n > N \\ n \text{ par}}} \int_{J_n} |g| dt$$

Mas, em J_n , temos

$$|g| = |e^{\tilde{h}}| = |e^{\tilde{h} - c_n} e^{c_n}| \geq e^{-1} e^{c_n} = e^{c_n - 1}$$

Portanto

$$2 \text{ Comp}(C) \geq \sum_{\substack{n > N \\ n \text{ par}}} \int_{J_n} |g| dt \geq \sum_{\substack{n > N \\ n \text{ par}}} r_n e^{c_n - 1}$$

onde r_n é a largura de K_n . Basta então escolher c_n de forma que a série cresça rapidamente, por exemplo, $c_n = -\log(r_n)$. Neste caso $r_n e^{c_n - 1} = e^{-1}$ e a série acima diverge.

Logo a superfície de Jorge-Xavier é completa.

Observação 4.6.3 Apesar da superfície acima ser completa, ela

⁸Se γ evitasse uma quantidade infinita de K_n 's, desviando pelos eixos, a curva teria comprimento euclidiano infinito.

não é propriamente imersa. Isto será provado mais adiante, na proposição 8.4.3.

Observação 4.6.4 *Eugenio Calabi fez uma sequência de conjecturas relacionadas à existência de imersões mínimas completas que sejam limitadas em \mathbb{R}^3 . Uma delas, revista posteriormente por S.T. Yau, afirma:*

Conjectura 4.6.5 (Conjectura de Calabi-Yau) *Uma imersão mínima completa injetiva em \mathbb{R}^3 é própria, donde é mergulho.*

Se adicionarmos as hipóteses da superfície mínima ter gênero finito e um número finito de fins (vide definição 9.3.1), a conjectura é verdadeira e foi provada em 2008 no artigo Ref. 18 .

5

Curvatura Gaussiana e Curvatura Total

Neste capítulo estudaremos as curvaturas gaussiana e total de uma superfície mínima. Veremos como obtê-las através da representação de Enneper-Weierstrass, além de algumas interpretações interessantes. Como aplicação, provaremos o teorema de Bernstein de uma outra maneira, através de uma estimativa para a curvatura gaussiana.

5.1

Curvatura Gaussiana e a Representação de Enneper-Weierstrass

Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização mínima conforme não-plana, $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio. Denote $z = u_1 + iu_2 \in \Omega$. Sejam $f(z)dz$ e $g(z)$ dadas pela representação de Enneper-Weierstrass da superfície.

A ideia é calcular a curvatura gaussiana através da equação (1-1), usando $f(z)dz$ e $g(z)$. Para isto, lembre-se que

$$K = \frac{-\Delta_C \log \lambda}{\lambda^2}$$

onde

$$\Delta_C = \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

e, pela equação (4-3), temos

$$\lambda^2 = \left[\frac{|f| (1 + |g|^2)}{2} \right]^2$$

Já que $f(z)$ é holomorfa e $g(z)$ meromorfa, vale:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Então:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{-\Delta_C \log(\lambda)}{\lambda^2} = \frac{-4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\log \left(\frac{\sqrt{f \bar{f}} (1 + g \bar{g})}{2} \right) \right] = \\
&= \frac{-4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{f \bar{f}}{2} \right) + \log (1 + g \bar{g}) \right] = \\
&= \frac{-4}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\log \left(\frac{f \bar{f}}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\log (1 + g \bar{g})] \right\} \\
&= \frac{-4}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{2}{f \bar{f}} \right) \left(\frac{f \bar{f}'}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{g \bar{g}'}{1 + g \bar{g}} \right] \right\} = \\
&= \frac{-4}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\overline{\left(\frac{f'}{f} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{g \bar{g}'}{1 + g \bar{g}} \right] \right\} = \\
&= \frac{-4}{\lambda^2} \left\{ 0 + \frac{g' \bar{g}'}{1 + g \bar{g}} - \frac{g \bar{g}' g' \bar{g}}{(1 + g \bar{g})^2} \right\} = \frac{-4}{\lambda^2} \left\{ \frac{|g'|^2}{1 + |g|^2} - \frac{|g|^2 |g'|^2}{(1 + |g|^2)^2} \right\} = \\
&= \frac{-4}{\lambda^2} \frac{|g'|^2 (1 + |g|^2 - |g|^2)}{(1 + |g|^2)^2} = -4 \left[\frac{2}{|f| (1 + |g|^2)} \right]^2 \frac{|g'|^2}{(1 + |g|^2)^2} = \\
&= - \left[\frac{4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \right]^2
\end{aligned}$$

Como $H \equiv 0$, as curvaturas principais satisfazem $\kappa_1 = -\kappa_2$. Temos então $K = -\kappa_1^2$, donde segue o teorema abaixo.

Teorema 5.1.1 *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização mínima conforme não-plana, $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio. Denote $z = u_1 + iu_2 \in \Omega$. Sejam $f(z)dz$ e $g(z)$ dadas pela representação de Enneper-Weierstrass da superfície. Então em todo ponto da superfície temos:*

$$\begin{cases} \kappa_1 = \frac{-4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \\ \kappa_2 = \frac{4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \end{cases}$$

Além disto, a curvatura Gaussiana é:

$$K = - \left[\frac{4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \right]^2 \quad (5-1)$$

Conseguimos também o corolário abaixo.

Corolário 5.1.2 *A curvatura Gaussiana de uma superfície mínima é não-positiva e, exceto para um plano, ela só pode ter zeros isolados.*

Prova: Suponha que a superfície não é plana. Como g' é meromorfa, ela possui zeros isolados ou é identicamente nula (vide 1.2.1). Pelo mesmo motivo, g só tem pólos isolados. Logo, pelo teorema acima, K é identicamente nula ou seus zeros são isolados.

Além disto, uma superfície mínima que satisfaz $K \equiv 0$ é totalmente umbílica (vide 1.1.33). Pelo teorema de classificação de superfícies totalmente umbílicas 1.1.34, segue que ela é um plano ou uma esfera. Como esferas não são superfícies mínimas, a única superfície mínima com $K \equiv 0$ é um plano. ■

Chegou o momento de estudar as linhas assintóticas e de curvatura de uma superfície mínima. Defina a forma diferencial quadrática holomorfa:

$$\ell(z) dz^2 = (b_{11} - ib_{12}) dz^2 \quad (5-2)$$

onde (b_{ij}) é a segunda forma fundamental da superfície no ponto $X(z)$.

Vamos provar que ela é holomorfa. Como $H \equiv 0$ sabemos que $b_{11} \equiv -b_{22}$ (vide 1.1.27). Então, multiplicando a segunda equação de 1.1.42 e somando à primeira, as equações de Codazzi podem ser escritas como:

$$\frac{\partial \ell(z)}{\partial \bar{z}} = \lambda^2 \frac{\partial H}{\partial z}$$

Já que $H \equiv 0$, segue que $\ell(z)$ é holomorfa.

Proposição 5.1.3 *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização mínima conforme, $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio, $p \in X(\Omega)$. Seja $w(t) = w_1(t) + iw_2(t)$ curva C^1 em Ω com $w(t_0) = p$. Então as linhas assintóticas da superfície em p são descritas por $\text{Re}(\ell(w) dw^2) = 0$ e as linhas de curvatura por $\text{Im}(\ell(w) dw^2) = 0$.*

Prova: Denotemos $\dot{w}_i = \frac{dw_i(t_0)}{dt}$. Logo $dw = \dot{w}_1 + i\dot{w}_2$, donde

$$dw^2 = (\dot{w}_1^2 - \dot{w}_2^2) + i 2 \dot{w}_1 \dot{w}_2$$

Pela equação (1-2), sabemos que $w(t)$ é linha assintótica se e somente se

$$b_{11}\dot{w}_1^2 + 2b_{12}\dot{w}_1\dot{w}_2 + b_{22}\dot{w}_2^2 = 0$$

e, pela equação (1-3), $w(t)$ é linha de curvatura se e somente se

$$(g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11})\dot{w}_1^2 + (g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11})\dot{w}_1\dot{w}_2 + (g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12})\dot{w}_2^2 = 0$$

Usando $g_{11} = g_{22}$, $g_{12} = 0$ e $b_{11} = -b_{22}$, temos:

$$\begin{cases} \text{linhas assintóticas} & \Longleftrightarrow & b_{11}(\dot{w}_1^2 - \dot{w}_2^2) + 2b_{12}\dot{w}_1\dot{w}_2 = 0 \\ \text{linhas de curvatura} & \Longleftrightarrow & b_{12}(\dot{w}_1^2 - \dot{w}_2^2) - 2b_{11}\dot{w}_1\dot{w}_2 = 0 \end{cases}$$

Então as linhas assintóticas e as linhas de curvatura são dadas por $\operatorname{Re}(\ell(w) dw^2) = 0$ e $\operatorname{Im}(\ell(w) dw^2) = 0$, respectivamente. ■

5.2

Estimativa para o módulo de K

Nesta seção vamos encontrar uma cota superior para o módulo da curvatura gaussiana de uma superfície mínima. Usaremos para isto a fórmula de K que encontramos na seção anterior.

Teorema 5.2.1 *Seja $S = \operatorname{graf}(F)$ superfície mínima não-paramétrica em $B_R(0) = \{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$, onde $p = (0, 0, F(0, 0))$ e d é a menor distância do ponto p ao bordo de S ao longo da superfície. Então:*

$$|K(p)| \leq \frac{16}{d^2 \det((g_{ij})(p))} \quad (5-3)$$

onde $(g_{ij})(p)$ é a primeira forma fundamental em p .

Prova: Para superfícies mínimas não-paramétricas, escolhendo a normal unitária da superfície apontando para baixo, temos:

$$\begin{cases} \det(g_{ij}) = 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 \geq 1 \\ N = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, -1\right) \end{cases} \quad (5-4)$$

Seja $z = x_1 + ix_2$. Ao usar a fórmula da normal unitária em função da representação de Enneper-Weierstrass (vide (4-5)) obtemos:

$$N = \frac{1}{|g|^2 + 1} \left(2 \operatorname{Re}(g), 2 \operatorname{Im}(g), |g|^2 - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, -1\right)$$

Pela igualdade na terceira coordenada temos $|g|^2 < 1$. Além disto, $\forall z \in B_R(0)$:

$$\sqrt{\det(g_{ij})} (|g|^2 - 1) = -|g|^2 - 1 \implies |g(z)|^2 = \frac{\sqrt{\det(g_{ij})} - 1}{\sqrt{\det(g_{ij})} + 1}$$

Para uma dada curva C de classe C^1 em $B_R(0)$, o comprimento de sua imagem na superfície é:

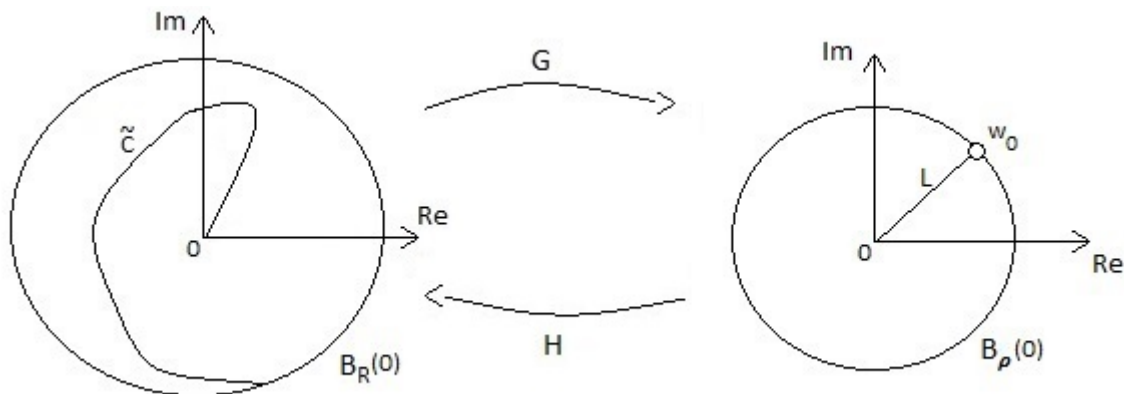
$$\int_C \lambda |dz| = \frac{1}{2} \int_C |f| (1 + |g|^2) |dz| \leq \int_C |f| |dz|$$

Em particular, para qualquer curva divergente \tilde{C} em $B_R(0)$ que comece na origem, vale:

$$d := \inf_{\{C; C(0)=0\}} \int_C \lambda |dz| \leq \int_{\tilde{C}} |f| |dz|$$

Vamos construir abaixo uma curva \tilde{C} usando um argumento parecido com o do lema 4.4.4.

Seja $w = G(z) = \int_0^z f(\zeta) d\zeta$, onde $G(0) = 0$. Como $|g|^2 < 1$, g não tem pólos e, portanto, f não tem zeros. Logo $G'(z) = f(z) \neq 0$ em $B_R(0)$. Defina a função inversa $z = H(w)$ numa vizinhança da origem com $H(0) = 0$. O domínio de $H(w)$ é o maior círculo $|w| < \rho$ centrado na origem tal que $\exists w_0$ no bordo (i.e., $|w_0| = \rho$) onde a inversa não pode ser estendida. Se $\rho = \infty$ chegaríamos a um absurdo usando o teorema de Liouville, pois a imagem de $H(w)$ está em $B_R(0)$, ou seja, é limitada. Logo $\rho < \infty$.



Seja $L = \{w(t) = tw_0; 0 \leq t < 1\}$ um raio. Ele é levado por H em um caminho divergente \tilde{C} em $B_R(0)$ que começa na origem (a demonstração de

que \tilde{C} é divergente é igual à que foi feita para o caminho C no lema 4.4.4). Mas

$$d \leq \int_{\tilde{C}} |f(z)| |dz| = \int_L |dw| = \rho$$

Pelo lema de Schwarz (vide 1.2.17) aplicado em $H(w) : B_\rho(0) \rightarrow B_R(0)$ temos

$$|H'(0)| \leq \frac{R}{\rho}$$

Logo

$$|f(0)| = |G'(0)| = \frac{1}{|H'(0)|} \geq \frac{\rho}{R} \geq \frac{d}{R}$$

Além disto, aplicando o teorema de Schwarz-Pick (vide 1.2.18) em $g(z) : B_R(0) \rightarrow B_1(0)$ na origem obtemos

$$R |g'(0)| \leq 1 - |g(0)|^2$$

Usando em p a fórmula da curvatura gaussiana de superfícies mínimas (vide equação (5-1)) e as desigualdades obtidas acima, chegamos a:

$$\begin{aligned} d \sqrt{|K(p)|} &= \frac{4d |g'(0)|}{|f(0)| (1 + |g(0)|^2)^2} \leq \frac{4R |g'(0)|}{(1 + |g(0)|^2)^2} \leq \frac{4 (1 - |g(0)|^2)}{(1 + |g(0)|^2)^2} = \\ &= \frac{4 \left(\frac{2}{\sqrt{\det(g_{ij})} + 1} \right)}{\left(\frac{2 \sqrt{\det(g_{ij})}}{\sqrt{\det(g_{ij})} + 1} \right)^2} = \frac{2 \left(\sqrt{\det(g_{ij})} + 1 \right)}{\det(g_{ij})} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \left(\frac{\sqrt{\det(g_{ij})} + 1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \right) \leq \frac{4}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$|K(p)| \leq \frac{16}{d^2 \det(g_{ij}(p))}$$

■

Corolário 5.2.2 *Nas mesmas condições do teorema acima, $\exists c$ constante tal que*

$$|K(p)| \leq \frac{c}{R^2} \quad (5-5)$$

Prova: Basta usar que $d \geq R$ e $\det(g_{ij}(p)) \geq 1$. ■

Observação 5.2.3 *Na demonstração do teorema não era necessário supor que $p = (0, 0, F(0, 0))$. Para levar um ponto qualquer da superfície no ponto p , basta aplicar uma translação e uma rotação em \mathbb{R}^3 . Como a curvatura gaussiana é preservada por isometrias, a estimativa obtida acima ainda vale.*

Observação 5.2.4 *R. Schoen provou uma generalização desta cota para superfícies mínimas imersas estáveis com fibrado normal trivial em uma 3-variedade com curvatura seccional limitada. Para mais detalhes, vide o artigo Ref. 19 ou o livro Ref. 15, Chapter 2, Corollary 2.11 .*

5.3

Aplicação: Teorema de Bernstein

Vamos ver agora uma segunda¹ demonstração do teorema de Bernstein, desta vez usando a estimativa da curvatura gaussiana obtida na seção anterior.

Teorema 5.3.1 (Teorema de Bernstein) *Seja S um gráfico mínimo inteiro. Então S é um plano.*

Prova: Seja $p = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2))$ um ponto qualquer de S . Vamos mostrar que $K(p) = 0$, logo S será um plano.

Podemos reduzir o domínio da parametrização de S a um disco centrado em $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ de raio $R > 0$ (e desta forma trabalhar apenas com um pedaço da superfície). Como S está definida em todo o plano (x_1, x_2) , podemos pegar qualquer valor para $R \in \mathbb{R}_+$. Pelo corolário 5.2.2 e pela observação 5.2.3, temos:

$$K(p) \leq \frac{c}{R^2}$$

Tomando $R \rightarrow \infty$, chegamos a $K(p) = 0$. Já que este argumento vale para qualquer ponto $p \in S$, segue que $K \equiv 0$ e, pelo corolário 5.1.2, S é um plano. ■

¹A primeira foi dada em 4.5.1.

5.4

Curvatura Total e a Representação de Enneper-Weierstrass

O objetivo desta seção é escrever a curvatura total (vide 1.1.39) usando $f(z)dz$ e $g(z)$ dadas pela representação de Enneper-Weierstrass.

Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização mínima conforme, $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio. Denote por $z = u_1 + iu_2$ os pontos de Ω . Seja Δ domínio cujo fecho está contido em Ω . A superfície cuja parametrização é $X|_{\Delta}$ tem curvatura total dada por (vide (5-1)):

$$\begin{aligned}
 C(M) &= \iint_{\Delta} K \, dA = \iint_{\Delta} K \lambda^2 \, du_1 \, du_2 = \\
 &= - \iint_{\Delta} \frac{16 |g'|^2}{|f|^2 (1 + |g|^2)^4} \frac{|f|^2 (1 + |g|^2)^2}{4} \, du_1 \, du_2 = \\
 &= - \iint_{\Delta} \frac{4 |g'|^2}{(1 + |g|^2)^2} \, du_1 \, du_2 = \\
 &= - \iint_{\Delta} \left[\frac{2 |g'|}{1 + |g|^2} \right]^2 \, du_1 \, du_2 \quad (5-6)
 \end{aligned}$$

Conseguimos também uma interpretação geométrica para a curvatura total. Pela observação 1.1.40, sabemos que a curvatura total absoluta (vide 1.1.39) de uma superfície é igual à área da imagem da aplicação normal de Gauss. Como vimos que a curvatura gaussiana de uma superfície mínima é não-positiva (vide 5.1.2), segue que

$$C(M) = \iint_{\Delta} K \, dA = - \iint_{\Delta} |K| \, dA = - \iint_{N(\Delta)} dA \quad (5-7)$$

levando em conta a multiplicidade de N .

Em outras palavras, suponha que N atinge quase todo ponto de \mathbb{S}^2 um mesmo número de vezes, denotado por $|\deg(N)|$. Então

$$C(M) = \iint_{\Delta} K \, dA = - |\deg(N)| \text{Area}(\mathbb{S}^2) = - 4\pi^2 |\deg(N)| \quad (5-8)$$

Portanto a curvatura total de uma superfície mínima nada mais é do que o negativo da área da imagem da aplicação normal de Gauss, levando em conta a multiplicidade.

5.5

Exemplos

5.5.1

Catenoide

O primeiro exemplo que vamos tratar é o catenoide. Já vimos no último capítulo que a sua representação de Enneper-Weierstrass é

$$\begin{cases} f(z) dz = \frac{-c}{z^2} dz \\ g(z) = -z \end{cases}$$

onde $z \in \mathbb{C}^*$.

Pela equação (5-1) temos:

$$K = - \left[\frac{4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \right]^2 = - \left[\frac{4 |z|^2}{|c| (1 + |z|^2)^2} \right]^2 = \frac{-16 |z|^4}{c^2 (1 + |z|^2)^4}$$

Como $z \neq 0$, segue que $K \neq 0$. Além disto, é fácil ver que K é limitado. Mais especificamente,

$$\frac{-1}{c^2} \leq K < 0$$

Vamos calcular a curvatura total do catenoide através da área da imagem de sua normal. Sabemos que $N = \pi^{-1} \circ g$, onde π é a projeção estereográfica através do pólo norte (vide 1.2.13). Como $g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ e $\pi^{-1}|_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\})$ são bijeções, N é injetiva e a sua imagem é $\mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, \pm 1)$. Portanto

$$C(\mathbb{C}^*) = \iint_{\mathbb{C}^*} K dA = - \iint_{\mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, \pm 1)} dA = - \text{Area}(\mathbb{S}^2) = -4\pi \quad (5-9)$$

5.5.2

Helicoide

O nosso segundo exemplo é o helicoide. A sua representação de Enneper-Weierstrass é

$$\begin{cases} f(z) dz = ic e^{-z} dz \\ g(z) = -e^z \end{cases}$$

onde $z \in \mathbb{C}$.

Seja $z = u_1 + iu_2$. Pela equação (5-1) temos:

$$K = - \left[\frac{4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \right]^2 = - \left[\frac{4 e^{u_1}}{|c| e^{-u_1} (1 + e^{2u_1})^2} \right]^2 = \frac{-16 e^{4u_1}}{c^2 (1 + e^{2u_1})^4}$$

Mais uma vez K é limitado:

$$\frac{-1}{c^2} \leq K < 0$$

Vamos agora calcular a curvatura total de um pedaço fundamental do helicóide (já sabemos que ela será não nula pois $K \neq 0$). Como vimos no exemplo 2.3.3, o domínio de parametrização de um pedaço fundamental é $\mathcal{D}_F = \mathbb{R} \times [0, 2\pi c]$. Logo, pela equação (5-6)

$$\begin{aligned} C(\mathcal{D}_F) &= \iint_{\mathcal{D}_F} K \, dA = - \iint_{\mathcal{D}_F} \left(\frac{2|g'|}{1 + |g|^2} \right)^2 du_1 du_2 = \\ &= - \int_0^{2\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4e^{2u_1}}{(1 + e^{2u_1})^2} du_1 du_2 = -8\pi c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{2u_1}}{(1 + e^{2u_1})^2} du_1 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $a = e^{2u_1}$, $da = 2e^{2u_1} du_1$ temos:

$$\iint_{\mathcal{D}_F} K \, dA = -4\pi c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{2u_1}}{(1 + e^{2u_1})^2} du_1 = -4\pi c \int_0^{+\infty} \frac{da}{(1 + a)^2} du_1 = -4\pi c$$

Por fim, como o helicóide é uma superfície simplesmente periódica e a sua curvatura total é a soma da curvatura total de infinitos pedaços fundamentais, temos:

$$C(\mathbb{C}) = \iint_{\mathbb{C}} K \, dA = -\infty$$

5.5.3

Superfície de Scherk

Vamos analisar o pedaço da superfície de Scherk sobre o quadrado $\Omega_{-1,1}$. Sabemos que ele tem como representação de Enneper-Weierstrass:

$$\begin{cases} f(z) \, dz = \frac{-4i}{z^4 - 1} \, dz \\ g(z) = i \, z \end{cases}$$

onde $z \in \mathbb{D}$.

Logo a sua curvatura gaussiana é:

$$K = - \left[\frac{4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \right]^2 = - \left[\frac{4}{\frac{4(1+|z|^2)^2}{|z^4-1|}} \right]^2 = - \frac{|z^4 - 1|^2}{(1 + |z|^2)^4}$$

Usando que $|z^4 - 1| \leq |z|^4 + 1$, obtemos

$$-1 \leq K < 0$$

Já que $K = -1$ em $z = 0$, esta estimativa é a melhor possível.

Como $N = \pi^{-1} \circ g = \pi^{-1}(iz)$, segue que N é bijeção entre \mathbb{D} e a metade inferior da esfera \mathbb{S}^2 . Portanto:

$$C(\mathbb{D}) = \iint_{\mathbb{D}} K dA = -\frac{1}{2} \text{Area}(\mathbb{S}^2) = -2\pi \quad (5-10)$$

Por fim, como a superfície de Scherk é duplamente periódica, a sua curvatura total é:

$$\iint K dA = -\infty \quad (5-11)$$

5.5.4

Superfície de Enneper

A representação de Enneper-Weierstrass da superfície de Enneper é:

$$\begin{cases} f(z) dz = 2 dz \\ g(z) = z \end{cases}$$

onde $z \in \mathbb{C}$.

Logo a sua curvatura gaussiana é:

$$K = - \left[\frac{4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \right]^2 = - \left[\frac{4}{2 (1 + |z|^2)^2} \right]^2 = \frac{-4}{(1 + |z|^2)^4}$$

Donde

$$-4 \leq K < 0$$

Como $N = \pi^{-1} \circ g$, segue que N é bijeção entre \mathbb{C} e $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$.

Portanto a curvatura total da superfície de Enneper é:

$$C(M) = \iint_{\mathbb{C}} K dA = -\text{Área}(\mathbb{S}^2) = -4\pi \quad (5-12)$$

Veremos no capítulo 9 que as únicas superfícies completas com curvatura total -4π são o catenoide e a superfície de Enneper (vide 9.4.1).

5.5.5

Superfície de Jorge-Meeks

Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $M = (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{z \in \mathbb{C} : z^{n+1} = 1\}$. A representação de Enneper-Weierstrass da superfície de Jorge-Meeks é:

$$f(z) dz = \begin{cases} \frac{1}{(z^{n+1} - 1)^2} dz, & \text{se } z \neq \infty \\ 0, & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} z^n, & \text{se } z \neq \infty \\ \infty, & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

onde $z \in M$.

Logo a sua curvatura gaussiana é (para $z \neq \infty$):

$$K = - \left[\frac{4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \right]^2 = - \frac{16 n^2 |z|^{2n-2} |z^{n+1} - 1|^4}{(1 + |z|^{2n})^4}$$

Como $N = \pi^{-1} \circ g$ e $g(z) = z^n$, segue que N é um recobrimento de n folhas de $\mathbb{S}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$, onde $p_k = \pi^{-1}(e^{i \frac{2k\pi}{n+1}})$. Portanto a curvatura total da superfície de Jorge-Meeks é:

$$C(M) = \iint_M K dA = -n \text{ Area}(\mathbb{S}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_{n+1}\}) = -4\pi n \quad (5-13)$$

6

Superfícies Mínimas Conjugadas e Associadas

6.1

Definição de Superfície Mínima Conjugada

Definição 6.1.1 (Superfície Mínima Conjugada) *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização mínima conforme, $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio simplesmente conexo, $S := X(\Omega)$.*

A sua superfície mínima conjugada S^ é parametrizada por $X^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X^*(z) = (x_1^*(z), x_2^*(z), x_3^*(z))$, de maneira que $X + iX^*$ seja holomorfa, i.e.:*

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u_1} = \frac{\partial X^*}{\partial u_2} \\ \frac{\partial X}{\partial u_2} = -\frac{\partial X^*}{\partial u_1} \end{cases} \quad (6-1)$$

onde $z = u_1 + iu_2 \in \Omega$. Em outras palavras, x_k^* é a conjugada harmônica de x_k , para $k = 1, 2, 3$ (vide 1.2.3 e 1.2.4).

Como X é não-constante, X^* também o é. Pela definição acima fica claro que a superfície conjugada está definida a menos de uma translação. Além disto, já que a parametrização de S é mínima e conforme, sabemos que (vide 1.1.21 e 3.1.2):

$$\begin{cases} \Delta X = 0 \\ \left| \frac{\partial X}{\partial u_1} \right|^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial u_2} \right|^2 = \lambda^2 \\ \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle = 0 \end{cases}$$

Pelas equações de Cauchy-Riemann (6-1), segue que

$$\begin{cases} \Delta X^* = 0 \\ \left| \frac{\partial X^*}{\partial u_1} \right|^2 = \left| \frac{\partial X^*}{\partial u_2} \right|^2 = \lambda^2 \\ \left\langle \frac{\partial X^*}{\partial u_1} ; \frac{\partial X^*}{\partial u_2} \right\rangle = 0 \end{cases} \quad (6-2)$$

Portanto a superfície conjugada a uma superfície mínima também é mínima e a sua parametrização X^* é conforme.

Antes de continuar, vamos olhar a construção da superfície conjugada de um ponto de vista diferente. Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplicação harmônica, $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio simplesmente conexo, e seja X^* a conjugada harmônica de X (ela está bem definida pois Ω é simplesmente conexo). Defina então a curva holomorfa $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ como:

$$\Phi(z) := X(z) + i X^*(z) \quad (6-3)$$

A escolha da letra Φ maiúscula não é por acaso, já que a sua derivada complexa é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial X}{\partial u_1} + \frac{\partial X^*}{\partial u_2} \right) + i \left(\frac{\partial X^*}{\partial u_1} - \frac{\partial X}{\partial u_2} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial X}{\partial u_1} - i \frac{\partial X}{\partial u_2} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \quad (6-4) \end{aligned}$$

Então, pelo lema 3.1.7, X é parametrização conforme se e somente se vale a relação de isotropia ¹:

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 = \langle \Phi' ; \Phi' \rangle = 0$$

Temos então a proposição a seguir:

Proposição 6.1.2 *Se $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ é parametrização mínima conforme, $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio simplesmente conexo, então a curva holomorfa $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ dada em (6-3) é isotrópica.*

Reciprocamente, se $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ é curva isotrópica não-constante, então

$$\begin{cases} X(z) := \operatorname{Re}(\Phi(z)) \\ X^*(z) := \operatorname{Im}(\Phi(z)) \end{cases}$$

¹Uma curva holomorfa Φ satisfazendo $\langle \Phi' ; \Phi' \rangle = 0$ é dita curva isotrópica.

definem duas parametrizações mínimas conformes $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $X^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ conjugadas entre si (neste caso Ω não precisa ser simplesmente conexo).

Observação 6.1.3 Caso Ω seja simplesmente conexo, podemos escrever as equações acima da forma (como visto no teorema 3.1.10):

$$\begin{cases} X(z) := x_0 + \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \phi(w) dw \right) \\ X^*(z) := x_0^* + \operatorname{Im} \left(\int_{z_0}^z \phi(w) dw \right) \end{cases}$$

onde $x_0, x_0^* \in \mathbb{R}^3$ e $z_0 \in \Omega$ são constantes quaisquer.

Observação 6.1.4 Caso Ω não seja simplesmente conexo, a parametrização mínima $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ pode não ter uma parametrização conjugada bem-definida. Um exemplo é o catenoide, que será estudado em 6.5.1.

Dizemos então que $X^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ é parametrização conjugada de alguma parametrização mínima conforme $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ se existir curva isotrópica $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ satisfazendo $\Phi(z) = X(z) + iX^*(z)$.

O lema a seguir trata do que acontece quando procuramos a superfície conjugada da conjugada.

Lema 6.1.5 Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização mínima conforme, $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio simplesmente conexo, e seja $X^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ a sua parametrização mínima conjugada. Logo

$$X^{**}(z) = -X(z)$$

Prova: Seja $\Phi = X + iX^*$ com $\langle \Phi' ; \Phi' \rangle = 0$. Multiplicando por $-i$ obtemos $\tilde{\Phi} = -i\Phi = X^* - iX$ e $\langle \tilde{\Phi}' ; \tilde{\Phi}' \rangle = -\langle \Phi' ; \Phi' \rangle = 0$. ■

6.2

Relações entre Superfícies Conjugadas

O teorema a seguir mostra como as superfícies conjugadas estão profundamente relacionadas entre si.

Teorema 6.2.1 Seja S superfície mínima com parametrização conforme $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio simplesmente conexo, e seja $X^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização de sua superfície conjugada S^* . Então

$$\phi_k^*(z) dz = -i \phi_k(z) dz, \quad k = 1, 2, 3$$

$$g = g^*$$

$$N = N^*$$

$$T_p S = T_p S^*$$

$$(g_{ij}) = (g_{ij})^*$$

$$K(p) = K^*(p)$$

Se as superfícies S e S^* não forem planas, temos:

$$f^*(z) dz = -i f(z) dz$$

Além disto, se (b_{ij}) e $(b_{ij})^*$ denotam as segundas formas fundamentais de S e S^* , respectivamente, então:

$$(b_{ij})^* = \begin{pmatrix} -b_{12} & b_{11} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix}$$

Prova: Observe que

$$\begin{cases} \phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \\ \phi_k^* = \frac{\partial x_k^*}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k^*}{\partial u_2} = -\frac{\partial x_k}{\partial u_2} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_1} = -i\phi_k \end{cases}$$

donde segue o primeiro item.

Se S e S^* são planas os três itens seguinte são triviais. Portanto suponha que S e S^* não sejam planas. Então

$$g^* = \frac{\phi_3^*}{\phi_1^* - i\phi_2^*} = \frac{-i\phi_3}{-i(\phi_1 - i\phi_2)} = g$$

Segue do teorema 4.3.1 que as normais são iguais e, como estamos trabalhando com superfícies em \mathbb{R}^3 , os planos tangentes também o são. Então, pela equação (4-1) e pelos itens anteriores, temos que $f^*(z)dz = -if(z)dz$.

Já vimos no começo da seção anterior que as primeiras formas fundamentais de S e S^* são iguais (vide equação (6-2)). Pelo teorema egregium de Gauss (vide 1.1.26), o mesmo vale para as curvaturas gaussianas.

Por fim, como as normais são iguais, usando as equações (6-1), temos

$$\begin{cases} b_{11}^* = \left\langle N^* ; \frac{\partial^2 X^*}{\partial u_1^2} \right\rangle = \left\langle N ; -\frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} \right\rangle = -b_{12} \\ b_{12}^* = \left\langle N^* ; \frac{\partial^2 X^*}{\partial u_1 \partial u_2} \right\rangle = \left\langle N ; \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} \right\rangle = b_{11} \\ b_{22}^* = \left\langle N^* ; \frac{\partial^2 X^*}{\partial u_2^2} \right\rangle = \left\langle N ; \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} \right\rangle = b_{12} \end{cases}$$

■

6.3

Definição de Superfícies Mínimas Associadas

Uma definição mais geral e que engloba superfícies conjugadas é a de superfície associada. Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio simplesmente conexo, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização mínima conforme e $S := X(M)$. Seja $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ curva isotrópica cuja parte real é X , isto é:

$$\Phi(z) = X(z) + iX^*(z)$$

onde $z = u_1 + iu_2 \in \Omega$ e $\langle \Phi'(z) ; \Phi'(z) \rangle = 0$ em Ω .

Então, $\forall \theta \in \mathbb{R}$ fixado, defina a curva²:

$$\Phi(z, \theta) := e^{-i\theta} \Phi(z) \quad (6-5)$$

Vemos que, pela linearidade do produto interno, $\Phi(z, \theta)$ é uma curva isotrópica e

$$\mathcal{Z}(z, \theta) := \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta} \Phi(z) \right] = X(z) \cos(\theta) + X^*(z) \sin(\theta)$$

define uma família de superfícies mínimas³ a um parâmetro com a seguinte propriedade:

$$\begin{cases} \mathcal{Z}(z, 0) = X(z) \\ \mathcal{Z}\left(z, \frac{\pi}{2}\right) = X^*(z) \end{cases}$$

²Estamos abusando um pouco da notação, mas não há problema pois $\Phi(z, 0) := \Phi(z)$

³Por linearidade do laplaciano.

Definição 6.3.1 (Superfícies Mínimas Associadas) *As superfícies parametrizadas por $\mathcal{Z}(z, \theta)$, $z \in \Omega$, são chamadas superfícies mínimas associadas à superfície S . Portanto uma superfície conjugada é também uma superfície associada. Além disto, como X não é constante, o mesmo vale para X^* e $\mathcal{Z}(z, \theta)$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.*

6.4

Relações entre Superfícies Mínimas Associadas

Da mesma forma que fizemos anteriormente para as superfícies conjugadas, nesta seção vamos mostrar as relações existentes entre superfícies mínimas associadas.

Teorema 6.4.1 *Seja $\mathcal{Z}(\cdot, \theta)$ família de parametrizações mínimas conformes associadas, $\mathcal{Z}(\cdot, 0) = X(\cdot)$. Então :*

$$\phi_k(z, \theta) dz = e^{-i\theta} \phi_k(z) dz$$

$$g(z, \theta) = g(z)$$

$$N(z, \theta) = N(z)$$

$$T_p \mathcal{Z}(\cdot, \theta) = T_p X$$

$(g_{ij}(\theta)) = (g_{ij})$, i.e., as superfícies $\mathcal{Z}(\cdot, \theta)$ são isométricas entre si.

$$K(p, \theta) = K(p)$$

$$\begin{aligned} (b_{ij}(\theta)) &= \begin{pmatrix} b_{11} \cos \theta - b_{12} \sin \theta & b_{12} \cos \theta + b_{11} \sin \theta \\ b_{12} \cos \theta + b_{11} \sin \theta & b_{22} \cos \theta + b_{12} \sin \theta \end{pmatrix} = \\ &= (b_{ij}) \cos \theta + (b_{ij})^* \sin \theta \end{aligned}$$

Se as superfícies $\mathcal{Z}(\cdot, \theta)$ não forem planas, então

$$f(z, \theta) dz = e^{-i\theta} f(z) dz$$

Além disto, a forma diferencial quadrática holomorfa $\ell(z, \theta)dz^2$ de $\mathcal{Z}(z, \theta)$ (vide equação (5-2)) satisfaz:

$$\ell(z, \theta) = e^{-i\theta} \ell(z)$$

Em particular, se

$$\theta - \tilde{\theta} = \frac{\pi}{2}$$

então as linhas assintóticas de $\mathcal{Z}(\cdot, \tilde{\theta})$ são as linhas de curvatura de $\mathcal{Z}(\cdot, \theta)$ e vice-versa.

Prova: O primeiro item segue diretamente das equações (6-4) e (6-5).

Pela relação entre X e X^* (vide equação (6-1)) temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial u_1} = \frac{\partial X}{\partial u_1} \cos \theta - \frac{\partial X}{\partial u_2} \sin \theta \\ \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial u_2} = \frac{\partial X}{\partial u_2} \cos \theta + \frac{\partial X}{\partial u_1} \sin \theta \end{cases} \quad (6-6)$$

Então \mathcal{Z}_{u_1} e \mathcal{Z}_{u_2} são combinações lineares de X_{u_1} e X_{u_2} , donde $T_p \mathcal{Z}(\cdot, \theta)$ independe de θ (pois é igual a $T_p X$). Como estamos lidando com superfícies em \mathbb{R}^3 , o mesmo vale para a aplicação normal de Gauss N e, pelo teorema 4.3.1, para $g(z)$.

Se as superfícies não são planas, usamos a equação (4-1) e obtemos a condição sobre as 1-formas holomorfas $f(z, \theta)dz$.

Por (6-6) temos:

$$\begin{cases} |\mathcal{Z}_{u_1}|^2 = |\mathcal{Z}_{u_2}|^2 = |X_{u_1}|^2 = |X_{u_2}|^2 \\ \langle \mathcal{Z}_{u_1} ; \mathcal{Z}_{u_2} \rangle = 0 \end{cases} \quad (6-7)$$

Então $(g_{ij}(\theta)) = (g_{ij})$. Usando o teorema egregium de Gauss (vide 1.1.26), as curvaturas gaussianas também coincidem.

Como as normais são iguais, pelas equações (6-6) temos:

$$\begin{aligned} b_{11}(\theta) &= \langle N ; \mathcal{Z}_{u_1 u_1} \rangle = \left\langle N ; \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} \right\rangle \cos \theta - \left\langle N ; \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} \right\rangle \sin \theta = \\ &= b_{11} \cos \theta - b_{12} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{12}(\theta) &= \langle N ; \mathcal{Z}_{u_1 u_2} \rangle = \left\langle N ; \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} \right\rangle \cos \theta + \left\langle N ; \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} \right\rangle \sin \theta = \\
&= b_{12} \cos \theta + b_{11} \sin \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{22}(\theta) &= \langle N ; \mathcal{Z}_{u_2 u_2} \rangle = \left\langle N ; \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} \right\rangle \cos \theta + \left\langle N ; \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} \right\rangle \sin \theta = \\
&= b_{22} \cos \theta + b_{12} \sin \theta
\end{aligned}$$

Usando o teorema 6.2.1, temos a condição sobre $(b_{ij}(\theta))$.

Falta apenas a última observação do enunciado. Considere a diferencial holomorfa quadrática que define as linhas assintóticas e de curvatura (vide proposição 5.1.3):

$$\ell(z, \theta) dz^2 = (b_{11}(\theta) - ib_{12}(\theta)) dz^2$$

Então

$$\begin{aligned}
\ell(z, \theta) &= \left((b_{11} \cos \theta - b_{12} \sin \theta) - i (b_{12} \cos \theta + b_{11} \sin \theta) \right) dz^2 = \\
&= \left(b_{11}(\cos \theta - i \sin \theta) - b_{12}(\sin \theta + i \cos \theta) \right) dz^2 = e^{-i\theta} \ell(z) dz^2 \quad (6-8)
\end{aligned}$$

Logo $\ell\left(z, \frac{\pi}{2}\right) = -b_{12} - ib_{11}$. Denote

$$\begin{cases} \eta_1 := b_{11}(u_1^2 - u_2^2) + 2b_{12}u_1u_2 \\ \eta_2 := -b_{12}(u_1^2 - u_2^2) + 2b_{11}u_1u_2 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{cases} \ell(z) dz^2 := \eta_1 + i\eta_2 \\ \ell\left(z, \frac{\pi}{2}\right) dz^2 := \eta_2 - i\eta_1 \end{cases}$$

O que prova a última afirmação. ■

Observação 6.4.2 *Em particular, as linhas assintóticas de X são as linhas de curvatura de X^* e vice-versa.*

O procedimento de torção que pega uma parametrização mínima conforme X e leva em $\mathcal{Z}(\cdot, \theta)$ é chamado de transformação de Bonnet.

Corolário 6.4.3 *A transformação de Bonnet leva geodésicas em geodésicas, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.*

Prova: Basta usar que, pelo teorema anterior, as superfícies $\mathcal{Z}(\cdot, \theta)$ são isométricas entre si. ■

Existem dois outros teoremas que iremos mencionar mas não demonstraremos. O primeiro é uma espécie de recíproca de parte do teorema 6.4.1.

Teorema 6.4.4 *Sejam $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\hat{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas imersões mínimas conformes, $\Omega = \mathbb{C}$ ou \mathbb{D} . Seja $\mathcal{Z}(\cdot, \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, a família de imersões mínimas associadas a X .*

Se X e \hat{X} são isométricas, então \hat{X} é congruente a umas das superfícies $\mathcal{Z}(\cdot, \theta)$. Mais precisamente, existem um movimento rígido $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$T \circ \hat{X} = \mathcal{Z}(\cdot, \theta_0)$$

Para referências da demonstração, vide Ref. 4, Chapter 3.1, Proposition 7 .

Por fim, o teorema abaixo dá condições para uma superfície associada de um gráfico mínimo ser também um gráfico.

Teorema 6.4.5 (Teorema de Krust) *Seja $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho mínimo. Se $X(\mathbb{D})$ pode ser escrita como gráfico sobre um domínio convexo em um plano, então as suas superfícies associadas também são gráficos.*

6.5

Exemplos

6.5.1

Catenoide e Helicoide

A primeira suspeita de superfícies conjugadas entre si são o helicoide e o recobrimento universal do catenoide: elas tem as mesmas normais, curvaturas gaussianas e as suas parametrizações são muito semelhantes. De fato, estas semelhanças não são mera coincidência.

Como o domínio de parametrização do helicoide e do recobrimento universal do catenóide são \mathbb{C} (que é simplesmente conexo), vamos comparar as suas 1-formas holomorfas $\phi_k(z) dz$. No Cap. 4 vimos que:

$$\begin{cases} \phi_{rec\ cat}(z) dz = (c \sinh(z), -ic \cosh(z), c) dz \\ \phi_{hel}(z) dz = (-ic \sinh(z), -c \cosh(z), -ic) dz = -i \phi_{rec\ cat}(z) dz \end{cases}$$

Portanto, se X é o recobrimento universal de um catenoide, X^* é a imersão de um helicoide. De forma análoga, se X é a imersão de um helicóide, X^* será o recobrimento universal de um catenóide.

Observe que, apesar de conjugadas, a curvatura total do catenoide é finita enquanto a do helicoide não é. Isto ocorre porque o recobrimento universal do catenoide tem infinitas folhas (ele tem um período de 2π na variável u_2), enquanto a imersão do helicoide é bijetiva. Em outras palavras, apesar da curvatura gaussiana ser igual pontualmente, as curvaturas totais não necessariamente o são.

Por fim, vamos ver que o catenoide, cujo domínio da imersão é \mathbb{C}^* , não possui superfícies mínimas associadas. Pelo teorema 6.4.1 temos:

$$\phi_3(z, \theta) dz = e^{-i\theta} \phi_3(z) dz$$

Vimos na seção 3.2 que a 1-forma $\phi_3(z)dz$ tem resíduo real em $z = 0$. Desta forma, o resíduo

$$\text{Res}(\phi_3(z, \theta), 0) = e^{-i\theta} \text{Res}(\phi_3(z), 0)$$

não é real, donde as representações de Enneper-Weierstrass das superfícies associadas ao catenoide não estão bem-definidas.

6.5.2

Superfície de Enneper

Já vimos na seção 4.6.4 que

$$\phi(z) dz = (1 - z^2, i(1 + z^2), 2z) dz$$

Como $M = \mathbb{C}$ é simplesmente conexo, temos:

$$\Phi(z) = \left(z - \frac{z^3}{3}, i \left(z + \frac{z^3}{3} \right), z^2 \right)$$

Portanto as suas superfícies associadas são dadas por

$$\mathcal{Z}(z, \theta) = \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \left(z - \frac{z^3}{3} \right), i e^{-i\theta} \left(z + \frac{z^3}{3} \right), e^{-i\theta} z^2 \right)$$

Tome $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ outro sistema de coordenadas de \mathbb{R}^3 obtidos através de uma rotação de $-\frac{\theta}{2}$ ao redor do eixo x_3 , ou seja:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2 = e^{-i\frac{\theta}{2}} (x_1 + ix_2) \\ \tilde{x}_3 = x_3 \end{cases}$$

Então as coordenadas \tilde{x}_1 e \tilde{x}_2 das superfícies associadas são:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(z) + i\tilde{x}_2(z) &= \\ &= e^{-i\frac{\theta}{2}} \left[\operatorname{Re}(e^{-i\theta} z) + i \operatorname{Re}(ie^{-i\theta} z) \right] + e^{-i\frac{\theta}{2}} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{-e^{-i\theta} z^3}{3} \right) + i \operatorname{Re} \left(\frac{ie^{-i\theta} z^3}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

Usando as identidades

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(c) + i \operatorname{Re}(ic) = \bar{c} \\ \operatorname{Re}(c) + i \operatorname{Re}(-ic) = c \end{cases}$$

obtemos

$$\tilde{x}_1(z) + i\tilde{x}_2(z) = e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{i\theta} \bar{z} + e^{-i\frac{\theta}{2}} \left(\frac{-1}{3} e^{-i\theta} z^3 \right) = e^{i\frac{\theta}{2}} \bar{z} - \frac{1}{3} e^{-i\frac{3\theta}{2}} z^3$$

Tomando $w = e^{-i\frac{\theta}{2}} z$ chegamos a:

$$\tilde{x}_1 = \operatorname{Re} \left[\overline{(e^{-i\frac{\theta}{2}} z)} - \frac{1}{3} e^{-i\frac{3\theta}{2}} z^3 \right] = \operatorname{Re} \left(w - \frac{w^3}{3} \right)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_2 &= \operatorname{Im} \left[\overline{(e^{-i\frac{\theta}{2}} z)} - \frac{1}{3} e^{-i\frac{3\theta}{2}} z^3 \right] = \\
&= \operatorname{Im} \left(\bar{w} - \frac{w^3}{3} \right) = \operatorname{Re} \left(-i\bar{w} + \frac{iw^3}{3} \right) = \operatorname{Re} \left[i \left(w + \frac{w^3}{3} \right) \right] \\
\tilde{x}_3 &= \operatorname{Re} (w^2)
\end{aligned}$$

Mas esta é exatamente a fórmula da imersão da superfície de Enneper. Nós apenas trocamos a variável de parametrização z por w e tomamos outro eixo de coordenadas. Isto quer dizer que todas as suas superfícies associadas à superfície de Enneper são também superfícies de Enneper.

6.5.3

Superfície de Scherk

Vamos analisar o pedaço da superfície de Scherk sobre $\Omega_{-1,1}$. A representação de Enneper-Weierstrass é dada por:

$$\begin{cases} f(z) dz = \frac{-4i}{z^4 - 1} dz \\ g(z) = -iz \end{cases}$$

onde $z \in \mathbb{D}$.

Então, pelo teorema 6.2.1, a sua superfície conjugada é dada por:

$$\begin{cases} f^*(z) dz = \frac{-4}{z^4 - 1} dz \\ g^*(z) = -iz \end{cases}$$

Esta representação de Enneper-Weierstrass nos dá um pedaço de uma superfície chamada segunda superfície de Scherk (ou superfície de Scherk simplesmente periódica).

A segunda superfície de Scherk pode ser escrita implicitamente como:

$$\operatorname{sen}(x_3) = \operatorname{senh}(x_1) \operatorname{senh}(x_2)$$

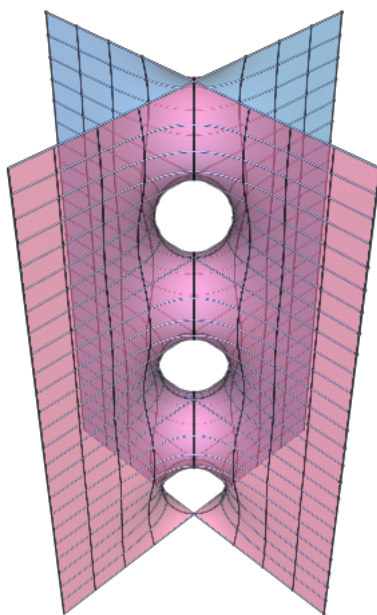


Figura 6.1: Segunda Superfície de Scherk - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal

Observe que o pedaço que pegamos da primeira superfície de Scherk é um gráfico mergulhado sobre $\Omega_{-1,1}$ (que é convexo). Pelo teorema de Krust, as superfícies associadas também serão gráficos (e portanto mergulhadas). Em particular, o pedaço que obtemos da segunda superfície de Scherk é o gráfico abaixo:

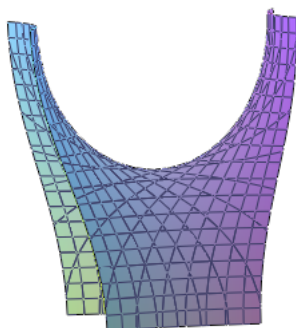


Figura 6.2: Pedaço da Segunda Superfície de Scherk

7

Princípios de Reflexão

7.1

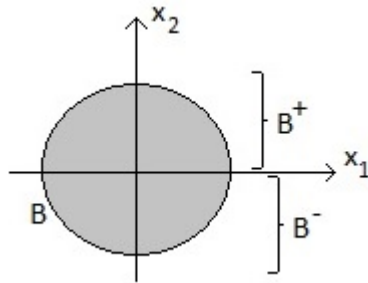
Eixos e Planos de Simetria em Superfícies Mínimas

Teorema 7.1.1 1. Qualquer linha reta em uma superfície mínima conexa é eixo de simetria por rotação de 180° .

2. Se uma superfície mínima conexa S intersecta um plano E perpendicularmente, então E é um plano de simetria de S .

Prova:

1. A menos de uma rotação e translação¹ podemos supor que a reta contida em S está no eixo x_1 e que um pedaço de S é o gráfico de uma função u de classe C^2 numa bola B centrada na origem². Logo $u(x_1, 0) \equiv 0$.



Sejam $B^+ := B \cap \{x_2 \geq 0\}$ e $B^- := B \cap \{x_2 \leq 0\}$. Vamos olhar a função $u|_{B^+}$ e estendê-la para B . Seja $v : B^- \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$v(x_1, x_2) = -u(x_1, -x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in B^-$$

Primeiro vamos verificar que v satisfaz a EDP das superfícies mínimas não-paramétricas (2-3) em B^- . Sabemos que

¹Observe que tanto uma rotação quanto uma translação são isometrias de \mathbb{R}^3 . Por isto, a primeira e segunda formas fundamentais da superfície são preservadas e, portanto, a imersão da superfície continua sendo mínima.

²Para isto, basta usar o teorema da função implícita e fazer outra rotação (preservando o eixo x_1), se necessário.

$$\begin{cases} v_{x_1}(x_1, x_2) = -u_{x_1}(x_1, -x_2) \\ v_{x_2}(x_1, x_2) = u_{x_2}(x_1, -x_2) \end{cases} \quad \begin{cases} v_{x_1 x_1}(x_1, x_2) = -u_{x_1 x_1}(x_1, -x_2) \\ v_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = u_{x_1 x_2}(x_1, -x_2) \\ v_{x_2 x_2}(x_1, x_2) = -u_{x_2 x_2}(x_1, -x_2) \end{cases} \quad (7-1)$$

Portanto, $\forall (x_1, x_2) \in B^-$:

$$\begin{aligned} & (1 + v_{x_1}^2)v_{x_2 x_2} + (1 + v_{x_2}^2)v_{x_1 x_1} - 2v_{x_1}v_{x_2}v_{x_1 x_2} = \\ & = - (1 + u_{x_1}^2)u_{x_2 x_2} - (1 + u_{x_2}^2)u_{x_1 x_1} + 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1 x_2} = 0 \end{aligned}$$

pois u satisfaz a EDP das superfícies mínimas em B^+ .

Queremos estender $u|_{B^+}$ para B da forma

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = \begin{cases} u(x_1, x_2), & \text{se } (x_1, x_2) \in B^+ \\ v(x_1, x_2), & \text{se } (x_1, x_2) \in B^- \end{cases}$$

Para isto temos que ver que u e v colam de forma C^2 ao longo de $B^+ \cap B^- = \{(x_1, 0) \in B\}$. Por (7-1) temos $v_{x_2} = u_{x_2}$ e $v_{x_1 x_2} = u_{x_1 x_2}$. Além disto, como $u(x_1, 0) \equiv 0$, temos que $v = u \equiv 0$, $v_{x_1} = u_{x_1} \equiv 0$ e $v_{x_1 x_1} = u_{x_1 x_1} \equiv 0$ em $B^+ \cap B^-$. Aplicando isto na EDP das superfícies mínimas não-paramétricas obtemos $v_{x_2 x_2} = u_{x_2 x_2} \equiv 0$ em $B^+ \cap B^-$. Portanto \tilde{u} é extensão de $u|_{B^+}$ a B e seu gráfico é superfície mínima.

Como S coincide com o gráfico de \tilde{u} no aberto B^+ , S coincide com o gráfico de \tilde{u} em todo o aberto B . Além disto, a rotação de S por 180° ao redor do eixo x_1 nos dá uma superfície mínima $\tilde{S} := \{(x_1, -x_2, -x_3) : (x_1, x_2, x_3) \in S\}$ que coincide com o gráfico de \tilde{u} no aberto B^- . Portanto S e \tilde{S} são gráficos em B que coincidem num aberto, donde $\tilde{S} \equiv S$ (vide 3.1.4) e o eixo x_1 é eixo de simetria de S por rotação de 180° .

2. A menos de uma rotação e translação podemos supor que a curva plana $c \subset S$ está no plano $\{x_2 = 0\}$, que c contém a origem e que um pedaço de S é o gráfico³ de uma função u de classe C^2 numa bola B centrada na origem. Como S intersecta o plano $\{x_2 = 0\}$ perpendicularmente ao longo de c , segue que $u_{x_2}(x_1, x_2) = 0$, $\forall (x_1, x_2) \in c$.

³Como S intersecta o plano perpendicularmente, podemos aplicar o teorema da função implícita.

Sejam $B^+ := B \cap \{x_2 \geq 0\}$ e $B^- := B \cap \{x_2 \leq 0\}$ como no item anterior. Vamos novamente olhar a função $u|_{B^+}$ e estendê-la para B . Seja $v : B^- \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$v(x_1, x_2) = u(x_1, -x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in B^-$$

Primeiro vamos ver que v satisfaz a EDP das superfícies mínimas não paramétricas (2-3) em B^- . Sabemos que

$$\begin{cases} v_{x_1}(x_1, x_2) = u_{x_1}(x_1, -x_2) \\ v_{x_2}(x_1, x_2) = -u_{x_2}(x_1, -x_2) \end{cases} \quad \begin{cases} v_{x_1 x_1}(x_1, x_2) = u_{x_1 x_1}(x_1, -x_2) \\ v_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = -u_{x_1 x_2}(x_1, -x_2) \\ v_{x_2 x_2}(x_1, x_2) = u_{x_2 x_2}(x_1, -x_2) \end{cases} \quad (7-2)$$

Portanto, $\forall (x_1, x_2) \in B^-$:

$$\begin{aligned} (1 + v_{x_1}^2)v_{x_2 x_2} + (1 + v_{x_2}^2)v_{x_1 x_1} - 2v_{x_1}v_{x_2}v_{x_1 x_2} &= \\ = (1 + u_{x_1}^2)u_{x_2 x_2} + (1 + u_{x_2}^2)u_{x_1 x_1} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1 x_2} &= 0 \end{aligned}$$

pois u satisfaz a EDP das superfícies mínimas em B^+ .

Queremos estender $u|_{B^+}$ para B da forma

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = \begin{cases} u(x_1, x_2), & \text{se } (x_1, x_2) \in B^+ \\ v(x_1, x_2), & \text{se } (x_1, x_2) \in B^- \end{cases}$$

Para isto temos que ver que u e v colam de forma C^2 ao longo de $B^+ \cap B^- = \{(x_1, 0) \in B\}$. Por (7-2) temos $v_{x_1} = u_{x_1}$, $v_{x_1 x_1} = u_{x_1 x_1}$ e $v_{x_2 x_2} = u_{x_2 x_2}$. Como ao longo de c temos $x_2 \equiv 0$, segue que $v = u$ em $B^+ \cap B^-$. Além disto, como $u_{x_2}|_c \equiv 0$, temos $v_{x_2} = u_{x_2}$ e $v_{x_1 x_2} = u_{x_1 x_2}$ em $B^+ \cap B^-$. Portanto \tilde{u} é extensão de $u|_{B^+}$ a B e seu gráfico é superfície mínima.

Como S coincide com o gráfico de \tilde{u} no aberto no aberto B^+ , S coincide com o gráfico de \tilde{u} em todo o aberto B . Além disto, a reflexão de S pelo plano $\{x_2 = 0\}$ nos dá uma superfície mínima $\tilde{S} := \{(x_1, -x_2, x_3) : (x_1, x_2, x_3) \in S\}$ que coincide com o gráfico de \tilde{u} no aberto B^- . Portanto S e \tilde{S} são gráficos em B que coincidem num aberto, donde $\tilde{S} \equiv S$ (vide 3.1.4) e o plano $\{x_2 = 0\}$ é plano de simetria de S por reflexão.



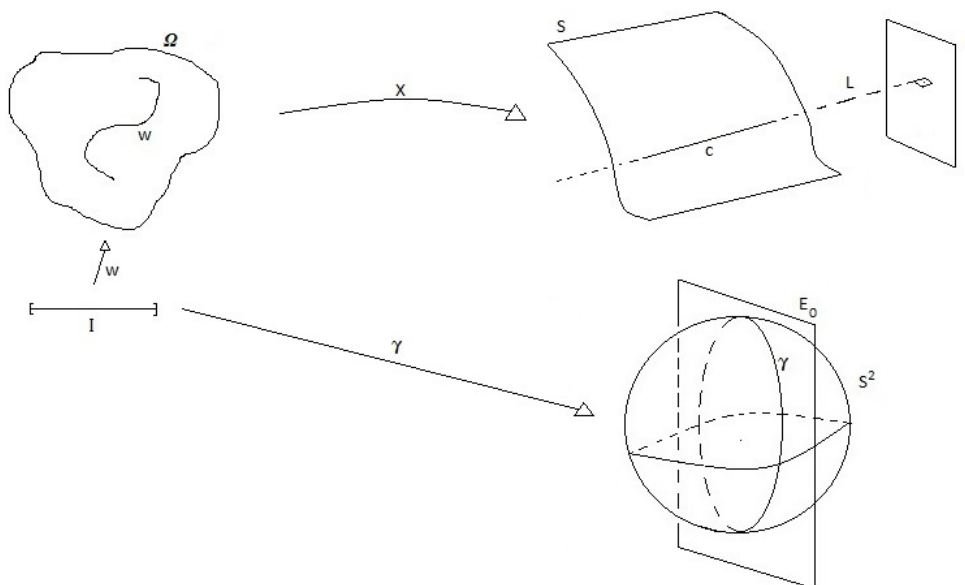
7.2

Geodésicas, Linhas Assintóticas e de Curvatura

Usando os teoremas 1.1.38 e 6.4.1 junto do corolário 6.4.3, conseguimos o seguinte resultado:

Teorema 7.2.1 *Suponha $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio simplesmente conexo. Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização mínima conforme não-plana de uma superfície S com aplicação normal de Gauss $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$, e assuma que $X^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a parametrização mínima conforme da superfície conjugada S^* (portanto S^* tem as mesmas normais que S). Tome uma curva $w : I \rightarrow \Omega$ de classe C^3 com $\dot{w} \neq 0$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, e considere as curvas $c := X \circ w$ e $c^* := X^* \circ w$. Então ambas tem a mesma imagem esférica $\gamma := N \circ w$ e valem os seguintes resultados:*

1. *Se c é um segmento de reta, i. e., $c(I)$ está contido numa reta L , então $\gamma(I)$ está contido em um grande círculo C de \mathbb{S}^2 . Este grande círculo C está no plano E_0 , que cruza a origem e é perpendicular a L . Além disto, c é geodésica e linha assintótica de S , e c^* é geodésica plana de S^* . A curva c^* está em algum plano E paralelo a E_0 e S^* intersecta E ortogonalmente ao longo de c^* .*
2. *Se c é geodésica plana em S , então c é a interseção ortogonal de S com um plano E e $\gamma(I)$ está no grande círculo $C = E_0 \cap \mathbb{S}^2$, onde E_0 é o plano paralelo a E contendo a origem. Além disto, c^* é um segmento de reta (e portanto é geodésica e linha assintótica) em S^* e $c^*(I)$ está contida em alguma reta L perpendicular a E .*



Prova: Como as normais de S e S^* são iguais (pelo teorema 6.2.1), segue que c e c^* têm a mesma imagem esférica. Vamos provar o resto em partes:

1. Se c é segmento de uma reta L , então $\dot{c} \perp N$. Seja E_0 o plano perpendicular a L passando pela origem. Como a normal à superfície é normal a c , temos $\gamma(I) \subset E_0$. Além disto, pelo teorema 1.1.38, segue que c é geodésica e linha assintótica. Pelo teorema 6.4.1 e pelo corolário 6.4.3, temos que c^* é geodésica e linha de curvatura. Usando novamente o teorema 1.1.38, descobrimos que c^* é curva plana. Seja E o plano que contém c^* . Vamos ver que ele é paralelo a E_0 . Pelo teorema 1.1.38, sabemos que S^* intersecta E ortogonalmente em c^* . Portanto $\gamma(I) \subset \tilde{E}_0$, onde \tilde{E}_0 é plano paralelo a E passando pela origem, ou seja, $\gamma(I)$ está contida no grande círculo $C := \tilde{E}_0 \cap \mathbb{S}^2$.

Suponha por absurdo que $\tilde{E}_0 \neq E_0$. Então $\gamma(I)$ só poderia assumir dois valores (que são $\tilde{E}_0 \cap E_0 \cap \mathbb{S}^2$). Como este conjunto é desconexo e γ é contínua ao longo de I , segue que N é constante ao longo de w . Logo, como a normal à superfície ao longo de c^* está em E e é perpendicular a c^* , segue que c^* é um segmento de reta e, portanto, também é linha assintótica. Mas isto só pode ocorrer se $K \equiv 0$ ao longo de c^* e, salvo no caso da superfície ser um plano, os zeros de K são isolados (vide 5.1.2). Absurdo! Logo $\tilde{E}_0 = E_0$ e E é paralelo a E_0 .

2. Como c é geodésica plana, pelo teorema 1.1.38 segue que c é linha de curvatura de S . Além disto, c é a interseção ortogonal de S com E , onde E é o plano que contém c . Como $N \perp S$, segue que $\gamma(I) \subset E_0$, onde E_0 é o plano paralelo a E que passa pela origem.

Como c é geodésica e linha de curvatura, segue que c^* é geodésica e linha assintótica, portanto c^* é segmento de reta. Seja L a reta que contém c^* . Vamos ver que $L \perp E$. Seja \tilde{E} o plano perpendicular a L . Portanto $\gamma(I) \subset \tilde{E}_0$, onde \tilde{E}_0 é o plano paralelo a \tilde{E} passando pela origem. Suponha por absurdo que $E_0 \neq \tilde{E}_0$. Por continuidade, $\gamma(I)$ é constante e assume um dos valores de $E_0 \cap \tilde{E}_0 \cap \mathbb{S}^2$. Pelo mesmo argumento usado no item acima, isto é um absurdo. Portanto $L \perp E$.

■

Vamos separar algumas consequências simples (e bastante úteis) dos teoremas anteriores:

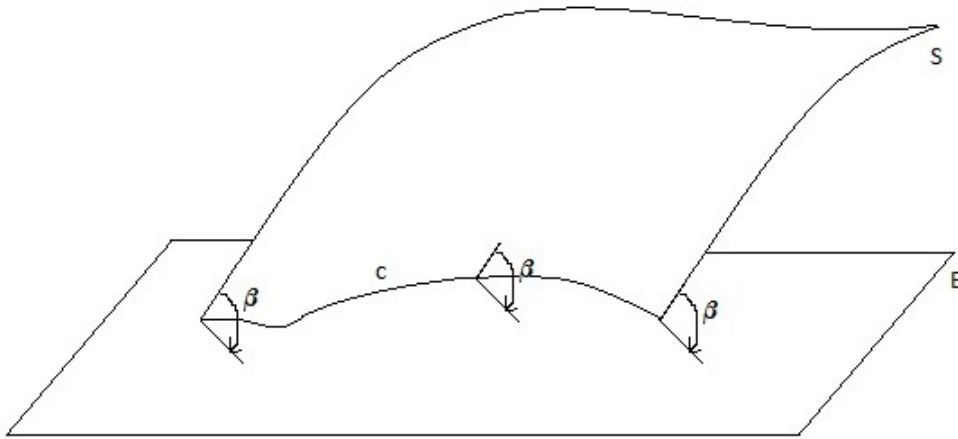
Corolário 7.2.2 1. Segmentos de reta e geodésicas planas contidas em uma superfície mínima não plana S são mapeadas pela normal N de S em grandes círculos de \mathbb{S}^2 .

2. Linhas de curvatura planas em S são mapeadas por N em círculos de \mathbb{S}^2 .

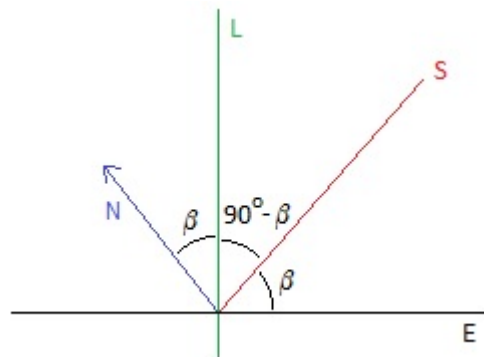
3. Segmentos de reta e geodésicas planas em uma superfície mínima S são eixos de simetria de rotação ou reflexão, respectivamente.

Prova:

1. Segue diretamente do teorema anterior.
2. Seja c tal curva e E o plano onde ela está contida. Seja L a reta perpendicular a E . Sabemos pelo teorema 1.1.38 que S intersecta E ao longo de c em um ângulo constante β .



Como a imagem esférica γ é perpendicular a S ao longo de c , segue que γ faz um ângulo de β com a reta L . Portanto γ está no círculo gerado por um ângulo de azimute de β da reta L .



3. Basta usar o teorema 7.2.1 junto do teorema 7.1.1.

■

7.3

Exemplo

Nesta seção veremos alguns exemplos para ilustrar o corolário 7.2.2.

7.3.1

Catenoide

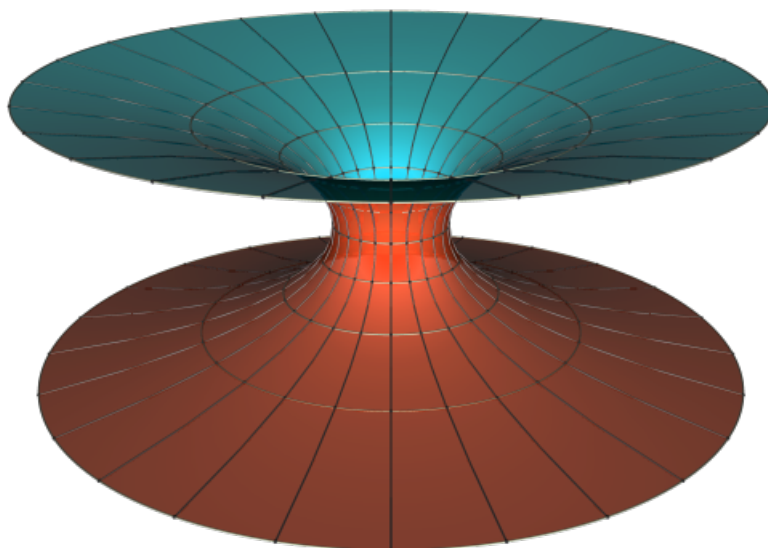


Figura 7.1: Catenoide - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal

Pegue o catenoide da figura acima e intersecte-o (pela sua parte mais estreita) com o plano $\{x_3 = 0\}$. Como o plano é perpendicular ao catenoide, a curva plana c obtida pela interseção é uma geodésica (vide o teorema 1.1.38). É fácil ver que a normal ao longo de c está contida num grande círculo de \mathbb{S}^2 (obtido por $x_3 = 0$), o que está de acordo com o item 2 do teorema 7.2.1 e com o item 1 do corolário 7.2.2. Além disto, pelo item 3 do mesmo corolário, vemos que este é um plano de simetria do catenoide por reflexão.

Outro exemplo para o item 1 do corolário 7.2.2 é obtido pela interseção do catenoide com um plano que contenha o eixo x_3 , ou seja, que passe pelo

eixo de rotação do catenoide. Esta nova curva é uma geodésica⁴ e a sua normal está contida em um outro grande círculo de \mathbb{S}^2 .

7.3.2 Helicoide

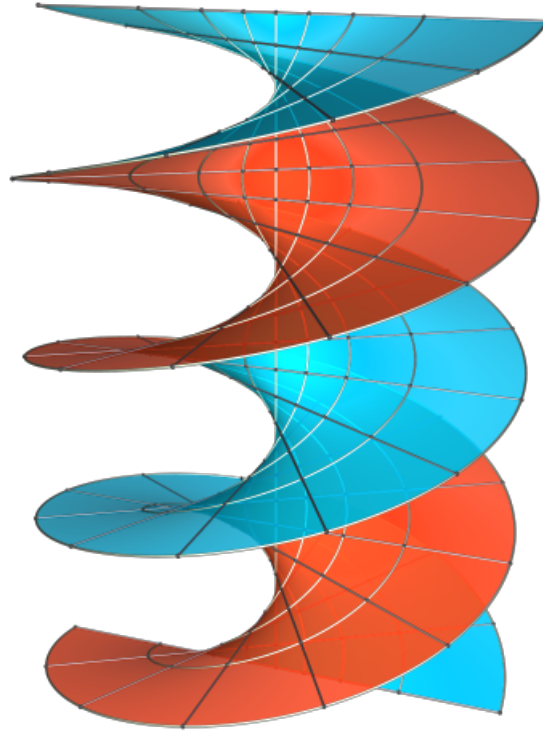


Figura 7.2: Helicoide - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal

Quando intersectamos o helicoide com um plano $\{x_3 = t\}$ obtemos uma reta que chamaremos de L (isto fica claro pela parametrização do helicoide, vide exemplo 2.3.3). Ao percorrer L na figura podemos ver que a normal à superfície varia num grande círculo contido num plano perpendicular a L . Além disto, se rodarmos em 180° o helicoide ao longo desta reta L obtemos o mesmo helicoide de antes, pois ela é um eixo de simetria por rotação de 180° pelo teorema 7.1.1.

⁴Sempre que intersectamos uma superfície de revolução com um plano que contenha o seu eixo de rotação obtemos uma geodésica.

7.3.3

Superfície de Scherk

Sabemos que a superfície de Scherk é periódica e está definida nas “casas brancas de um tabuleiro de xadrez infinito” (para mais informações, vide seção 2.3.4). Vimos também que, em cada quina das “casas”, temos uma reta paralela ao eixo x_3 . Perceba que esta reta é um eixo de simetria por rotação de 180° e que, em particular, isto leva as “casas brancas” do tabuleiro nelas mesmas.

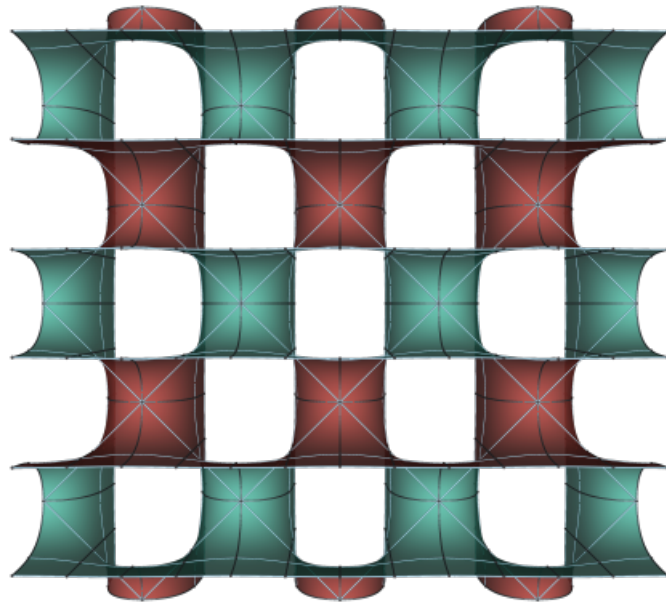


Figura 7.3: Vista superior da superfície de Scherk duplamente periódica - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal

Além disto, existe outro conjunto de linhas retas na superfície de Scherk. Observe que, se

$$x_1 = \pm x_2 + 2\pi m$$

onde $m \in \mathbb{Z}$, então

$$\cos(x_1) = \cos(x_2)$$

donde

$$f(x_1, x_2) = \log \left(\frac{\cos(x_2)}{\cos(x_1)} \right) = 0$$

Portanto as retas parametrizadas por

$$r_{m,\pm}(t) = (t, 2\pi m \pm t, 0)$$

onde $t \in \mathbb{R}$, estão contidas na superfície. Logo, pelo teorema 7.1.1, a superfície de Scherk é invariante por rotação de 180° ao longo delas.

8

Princípios do Máximo

Neste capítulo provaremos dois princípios do máximo para superfícies mínimas, chamados princípio do máximo geométrico interior e do bordo. Para demonstrá-los usaremos os princípios do máximo de Hopf, que foram enunciados em 1.1.53 e 1.1.54. Depois faremos algumas aplicações interessantes, mostrando assim a versatilidade destes teoremas.

Observe que ao longo deste capítulo a letra u será usada para funções $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$, enquanto x e y serão as coordenadas de \mathbb{R}^2 .

8.1

Princípio do Máximo Geométrico Interior

Observe que a EDP das superfícies mínimas não-paramétricas (2-3) não é linear. Então não podemos aplicar os princípios do máximo de Hopf às soluções desta equação. No entanto, o lema abaixo nos diz que podemos aplicá-los à diferença de duas soluções.

Lema 8.1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domínio e sejam u e w duas soluções da EDP das superfícies mínimas não-paramétricas (2-3), $u, w : \Omega \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$.*

Então existe um operador linear elíptico de segunda ordem L em Ω (vide 1.1.52) tal que a função diferença

$$v := w - u$$

satisfaz

$$Lv \equiv 0 \quad \text{em } \Omega$$

Prova: Seja $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ a função de classe C^1 em cinco variáveis dada por:

$$F(p, q, r, s, t) = (1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs$$

Dizemos que uma função $u : \Omega \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ é solução de F em um domínio Ω se, $\forall (x_0, y_0) \in \Omega$, temos

$$F\left(u_x(x_0, y_0), u_y(x_0, y_0), u_{xx}(x_0, y_0), u_{xy}(x_0, y_0), u_{yy}(x_0, y_0)\right) = 0$$

onde usamos aqui a notação de sub-índice para indicar derivadas parciais.

Sabemos que u e w são soluções¹ de F em Ω . Além disto, temos $\forall (x_0, y_0) \in \Omega$:

$$\begin{aligned} & F\left(w_x(x_0, y_0), w_y(x_0, y_0), w_{xx}(x_0, y_0), w_{xy}(x_0, y_0), w_{yy}(x_0, y_0)\right) - \\ & - F\left(u_x(x_0, y_0), u_y(x_0, y_0), u_{xx}(x_0, y_0), u_{xy}(x_0, y_0), u_{yy}(x_0, y_0)\right) = 0 \end{aligned}$$

Vamos aplicar na equação acima o teorema do valor médio de várias variáveis (vide 1.1.47) nos pontos

$$\begin{cases} b = \left(w_x(x_0, y_0), w_y(x_0, y_0), w_{xx}(x_0, y_0), w_{xy}(x_0, y_0), w_{yy}(x_0, y_0)\right) \\ a = \left(u_x(x_0, y_0), u_y(x_0, y_0), u_{xx}(x_0, y_0), u_{xy}(x_0, y_0), u_{yy}(x_0, y_0)\right) \end{cases}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \nabla F &= \left(\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) = \\ &= \left(2pt - 2qs, 2qr - 2ps, 1 + q^2, -2pq, 1 + p^2\right) \end{aligned}$$

Logo, usando o teorema do valor médio e a linearidade da derivada, obtemos (para algum $\tau \in [0, 1]$):

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \nabla F((1 - \tau)a + \tau b) ; b - a \right\rangle = \\ &= \left[1 + q^2(\alpha)\right] v_{xx}(x_0, y_0) + \left[-2p(\alpha)q(\alpha)\right] v_{xy}(x_0, y_0) + \left[1 + p^2(\alpha)\right] v_{yy}(x_0, y_0) + \\ &+ \left[2p(\alpha)t(\alpha) - 2q(\alpha)s(\alpha)\right] v_x(x_0, y_0) + \left[2q(\alpha)r(\alpha) - 2p(\alpha)s(\alpha)\right] v_y(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (8-1)$$

onde $\alpha = (1 - \tau)a + \tau b$. Note que τ e α dependem de (x_0, y_0) pois a e b dependem do ponto.

Observe que, como qualquer ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ nos dá uma EDP linear de segunda ordem como a obtida acima, existe operador linear de segunda ordem L tal que $Lv \equiv 0$ em Ω . Além disto, o operador é estritamente elíptico

¹Pois são soluções da EDP das superfícies mínimas não-paramétricas (2-3).

em todo ponto pois a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 + q^2(\alpha) & -p(\alpha)q(\alpha) \\ -p(\alpha)q(\alpha) & 1 + p^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

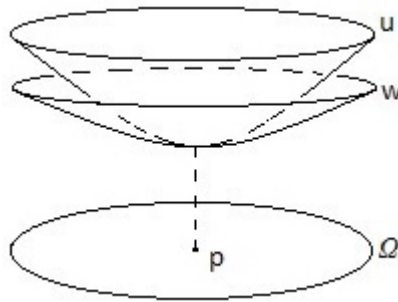
tem autovalores estritamente positivos $\lambda = 1$ e $\Lambda = 1 + p^2(\alpha) + q^2(\alpha)$, não importando o ponto $\alpha(x_0, y_0)$ em que p, q, r, s e t são calculados.

Então o operador L é linear estritamente elíptico de segunda ordem sem termo linear em v e com coeficientes localmente limitados. ■

De posse do lema acima, provaremos primeiro a versão local do teorema e, em seguida, demonstraremos a versão global.

Teorema 8.1.2 (Princípio do Máximo Geométrico Interior - Local)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domínio, $p \in \Omega$. Sejam u e w duas soluções da EDP das superfícies mínimas não-paramétricas (2-3), $u, w : \Omega \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$. Suponha que $u \geq w$ em Ω e que $u(p) = w(p)$. Então $u \equiv w$.



Prova: Defina $v := w - u$ em Ω . Logo $v \leq 0$ em Ω e $v(p) = 0$. Além disto, pelo lema 8.1.1, existe um operador linear elíptico de segunda ordem L em Ω (vide 1.1.52) tal que

$$Lv \equiv 0 \quad \text{em } \Omega$$

Além disto, L não tem termo linear em v e possui coeficientes localmente limitados.

Aplicando o princípio do máximo interior de Hopf (vide 1.1.53) temos² $v \equiv 0$, donde $u \equiv w$ em Ω . ■

Teorema 8.1.3 (Princípio do Máximo Geométrico Interior - Global)

Sejam S_1 e S_2 superfícies mínimas conexas sem bordo que se tocam num ponto p e, numa vizinhança V de p , S_1 está por cima de S_2 . Então $S_1 \equiv S_2$.

²Já que no enunciado do princípio do máximo interior de Hopf 1.1.53 as funções precisam ser contínuas até o bordo, basta tomar v restrita a um subdomínio Δ com $\overline{\Delta} \subset \Omega$ e $p \in \Delta$. Como podemos fazer isto para qualquer tal Δ , temos $v \equiv 0$ em Ω .

Prova: Olhando apenas para a vizinhança V de p podemos aplicar o teorema da função implícita (e uma rotação em \mathbb{R}^3 , se necessária) de forma que S_1 seja o gráfico de uma função u e S_2 de uma função w , ambas sobre um mesmo domínio Ω . Denote por \tilde{p} a projeção de p em Ω . Temos que $u \geq w$ em Ω e $u(\tilde{p}) = w(\tilde{p})$. Pelo princípio do máximo geométrico interior, temos $u \equiv w$ em Ω , donde $S_1 \equiv S_2$ em V . Mas sabemos que duas superfícies mínimas conexas que coincidam num aberto são iguais (vide 3.1.4), donde $S_1 \equiv S_2$. ■

Observação 8.1.4 *Sejam S_1 e S_2 duas superfícies mínimas com bordo nas condições do teorema acima. Ao seguirmos o raciocínio da demonstração, observamos um possível problema no último passo: elas podem não coincidir sempre porque o bordo de uma é atingido antes. Para mais detalhes, vide a observação 3.1.4.*

8.2

Princípio do Máximo Geométrico no Bordo

Teorema 8.2.1 *Sejam S_1 e S_2 duas superfícies mínimas não-paramétricas dadas por funções u e $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é domínio limitado cujo bordo é uma curva C^1 . Suponha que $u(p) = w(p)$, onde $p \in \partial\Omega$, e que o espaço tangente a S_1 e S_2 em p esteja bem-definido. Se $u \geq w$ em Ω , $T_p S_1 = T_p S_2$ e $T_p \partial S_1 = T_p \partial S_2$, então $u \equiv w$ em $\bar{\Omega}$ e $S_1 \equiv S_2$.*

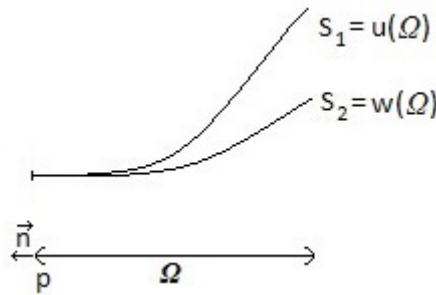


Figura 8.1: Vista lateral

Prova: Defina $v := w - u$ em $\bar{\Omega}$. Sabemos que $v \leq 0$ em $\bar{\Omega}$ e $v(p) = 0$ é ponto de máximo no bordo. Seja \vec{n} a normal unitária a Ω em p que aponta para fora de Ω . Como $T_p S_1 = T_p S_2$ e $T_p \partial S_1 = T_p \partial S_2$, segue que

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \implies \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0$$

Pelo lema 8.1.1, podemos aplicar o princípio do máximo do bordo de Hopf e obter $v \equiv 0$ em $\bar{\Omega}$, donde $u \equiv w$ e $S_1 \equiv S_2$. ■

8.3

Aplicações

Teorema 8.3.1 (Propriedade do Fecho Convexo) *Seja S superfície mínima compacta com bordo. Então $S \subset \text{Conv}(\partial S)$.*

Prova: Seja Π um plano e Π^+ um semi-espço fechado determinado por ele. Suponha que $\partial S \subset \Pi^+$. Queremos provar que $S \subset \Pi^+$, ou seja, que os pontos interiores de S satisfazem esta propriedade.

Fazendo uma rotação se necessário, podemos supor que $\Pi = \{x_3 = 0\}$ e $\Pi^+ = \{x_3 \geq 0\}$. Como S é compacta e a projeção de S na coordenada x_3 é contínua, $\exists \tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) \in S$ tal que $\tilde{p}_3 = \inf_{(x_1, x_2, x_3) \in S} x_3$. Suponha por absurdo que $\tilde{p}_3 < 0$.

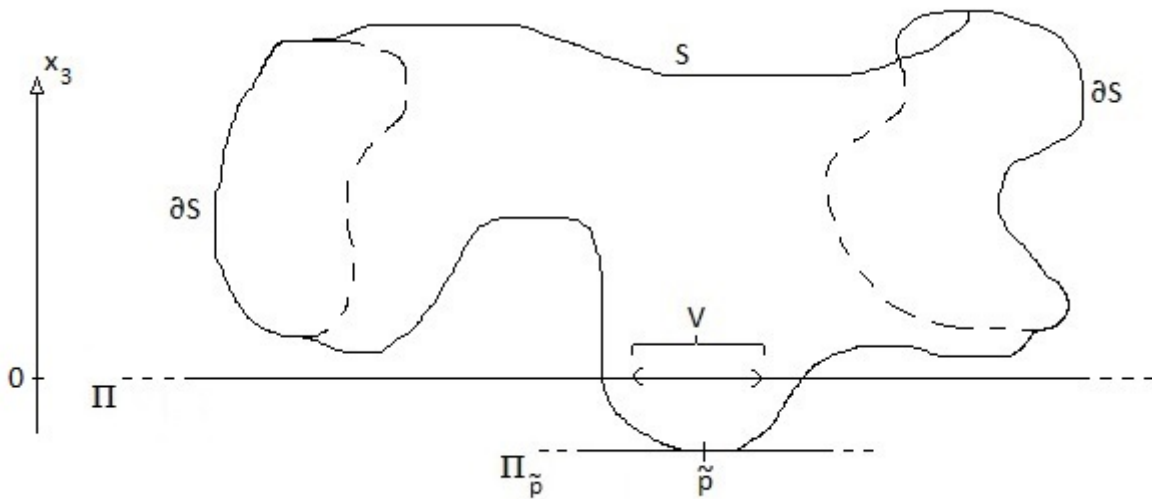


Figura 8.2: Vista lateral de S

Pelo teorema da função implícita, sabemos que S pode ser escrita como gráfico de uma função u de classe C^2 numa vizinhança de \tilde{p} . Além disto, como \tilde{p} atinge o mínimo da coordenada x_3 , S pode ser escrita localmente como gráfico de uma função u sobre um aberto V do plano $\Pi = \{x_3 = 0\}$ (pois, como um ponto de mínimo no eixo x_3 é ponto crítico, o plano tangente à superfície neste ponto é horizontal).

Já que $u \geq \tilde{p}_3$ em V e $u(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_3$, podemos aplicar o princípio do máximo geométrico interior a S e $\Pi_{\tilde{p}}$ (vide 8.1.3). Como $\Pi_{\tilde{p}}$ não tem bordo, pela observação 8.1.4 temos $S \subset \Pi_{\tilde{p}}$, donde $\partial S \subset \Pi_{\tilde{p}}$. Mas os pontos $(p_1, p_2, p_3) \in \partial S$ satisfazem $p_3 \geq 0$ enquanto os pontos de $\Pi_{\tilde{p}}$ satisfazem $p_3 = \tilde{p}_3 < 0$. Absurdo.

Como o argumento acima vale para qualquer plano Π com $\partial S \subset \Pi^+$, usando a observação 1.1.44 temos $S \subset \text{Conv}(\partial S)$. ■

Observação 8.3.2 *Pela demonstração acima vemos também que, se existir um ponto interior $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) \in S$ satisfazendo $\tilde{p}_3 = 0$, então $S \subset \Pi$. Portanto, se S não é plana, seus pontos interiores devem ser pontos interiores de Π^+ , i.e., $\{x_3 > 0\}$.*

Como isto vale para qualquer plano Π com $\partial S \subset \Pi^+$, segue que os pontos interiores de S devem estar no interior de $\text{Conv}(\partial S)$, a não ser que S seja plana.

Teorema 8.3.3 (Unicidade do Problema de Dirichlet) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domínio limitado, $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ e $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ duas soluções em Ω da EDP das superfícies mínimas não paramétricas, ambas de classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Suponha também que $u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega} = f$, onde $f : \partial\Omega \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$. Então $u \equiv w$ em $\bar{\Omega}$.*

Prova: Para $t \in \mathbb{R}$ seja $v_t : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ a função

$$v_t(x_1, x_2) := u(x_1, x_2) - w(x_1, x_2) + t$$

onde $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$. Logo v_t também é de classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Como $\bar{\Omega}$ é compacto, as funções u , w e v_t atingem seus máximos e mínimos. Seja $p \in \bar{\Omega}$ um ponto de mínimo de $v_0 = u - w$. Então para $t_0 = -v_0(p)$ temos $v_{t_0}(x_1, x_2) \geq v_{t_0}(p) = 0$, $\forall (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$. Vamos analisar os casos $p \in \Omega$ e $p \in \partial\Omega$ separadamente.

Se $p \in \Omega$, então $v_{t_0} \geq 0$ em Ω e $v_{t_0}(p) = 0$. Pelo lema 8.1.1, podemos³ aplicar o princípio do máximo interior de Hopf 1.1.53 a v_{t_0} e obter $v_{t_0} \equiv 0$ em $\bar{\Omega}$. Como $u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega}$, segue que $v_{t_0}|_{\partial\Omega} \equiv t_0$. Portanto $t_0 = 0$ e $u \equiv w$ em $\bar{\Omega}$.

Se $p \in \partial\Omega$, como $u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega}$, temos $t_0 = 0$. Logo, como $v_{t_0}(x_1, x_2) \geq 0$, $\forall (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$, segue que $u \geq w$ em $\bar{\Omega}$. Repetindo o mesmo argumento trocando u e w entre si conseguimos $w \geq u$ em $\bar{\Omega}$, donde $u \equiv w$ em $\bar{\Omega}$. ■

³Lembre-se que o operador linear elíptico de segunda ordem L do lema 8.1.1 não possui termo linear em v . Portanto $Lv_t \equiv Lv_0 \equiv 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Além disto, como L é linear, temos $Lv_t \equiv L(-v_t) \equiv 0$.

8.4

Teorema do Semi-espço

Teorema 8.4.1 (Teorema do Semi-espço) *Uma superfície mínima S conexa, sem bordo, propriamente imersa não pode estar contida em um semi-espço, a não ser que S seja um plano.*

Prova: Suponha que S esteja contida em um semi-espço fechado⁴. A menos de uma rotação e translação, podemos supor que este semi-espço seja $\Pi_0^+ := \{x_3 \geq 0\}$. Seja $T := \{t \in \mathbb{R}; S \subset \Pi_t^+\}$, onde $\Pi_t^+ := \{x_3 \geq t\}$, e seja $t_0 := \sup T$. Claramente $t_0 < \infty$ pois S é não-vazia. Denotaremos $\Pi := \Pi_{t_0}$.

Como t_0 é o sup do conjunto T , existe sequência de pontos $q_n \in S$ cuja terceira coordenada converge para t_0 .

De fato, suponha por absurdo que não exista tal sequência. Projete S na coordenada x_3 . Como S é fechada (pois é propriamente imersa) e a projeção é contínua, $\exists \tilde{t} > t_0$ tal que $\text{proj}_{x_3} S \subset [\tilde{t}, +\infty)$. Logo $\tilde{t} \in T$, donde t_0 não é o sup de T . Absurdo.

Temos então duas possibilidades:

- 1) Se a sequência q_n admite subsequência convergente a um ponto $q \in \mathbb{R}^3$, então $q \in S \cap \Pi$ (pois S é propriamente imersa, logo é fechada). Como $S \geq \Pi$ na terceira coordenada, aplicamos o princípio do máximo geométrico interior (vide 8.1.3) em uma vizinhança de q e obtemos $S \equiv \Pi$. Portanto S é um plano.
- 2) Se a sequência q_n for divergente, S é assintótica ao plano Π no infinito.



Figura 8.3: Vista lateral de S e Π

A ideia é mostrar que este segundo caso não pode acontecer. Para isso, usaremos o princípio do máximo geométrico interior em S e a metade de baixo de um catenoide.

Dados $p \in \mathbb{R}^3$ e $c \in \mathbb{R}_+$ denote por C_c^- a metade⁵ de baixo⁶ do catenoide centrado em p cujo círculo central tem raio c e é paralelo ao plano Π (para mais informações sobre a parametrização de um catenoide vide 2.3.2). Sabemos que a coordenada x_3 de C_c^- é ilimitada por baixo, logo o pedaço $C_c^- \cap \Pi^+$ é compacto (ou vazio) para quaisquer c e p . Vamos escolher c e p mais adiante.

⁴Se S está em um semi-espço aberto, podemos colocá-la num semi-espço fechado.

⁵Incluindo o bordo.

⁶Ou seja, com $x_3 \leq p_3$, onde $p = (p_1, p_2, p_3)$.

Tome um cilindro fechado Σ que contenha pontos de S , onde a base B de Σ é uma bola fechada no plano Π de raio $R > 0$ centrada em (p_1, p_2, t_0) .

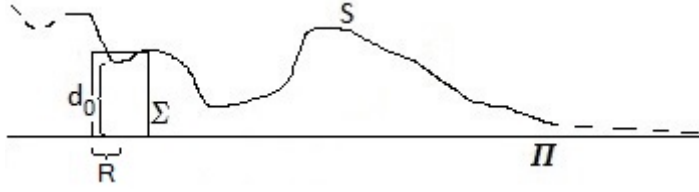


Figura 8.4: Vista lateral de S , Σ e Π

Como S é propriamente imersa, as interseções $B := \Pi \cap \Sigma$ e $S \cap \Sigma$ são compactas. Logo existe um mínimo d_0 para a distância entre eles, i.e., o conjunto $\{d(\tilde{p}, q); \tilde{p} \in B, q \in S \cap \Sigma\}$ assume um mínimo d_0 . Temos $d_0 > 0$, senão S e Π se tocam, donde S é um plano pelo princípio do máximo geométrico interior (e estaríamos no caso 1 ao invés do caso 2). Usando a desigualdade triangular vemos que, se $t_0 < p_3 < t_0 + d_0$, o ponto $p = (p_1, p_2, p_3)$ está entre Π e S .

Vamos mostrar que podemos tomar p_3 da forma acima tal que exista uma metade de catenoide C_r^- centrada em p com $(C_r^- \cap \Pi^+) = \partial B$, onde $r \in [0, R]$. Pela fórmula não-paramétrica do catenoide (vide (2-6)) temos:

$$p_3 = t_0 + r \cosh^{-1} \left(\frac{R}{r} \right) = t_0 + r \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - r^2}}{r} \right)$$

donde

$$\lim_{r \rightarrow R} p_3 = \lim_{r \rightarrow R} t_0 + r \cosh^{-1} \left(\frac{R}{r} \right) = t_0$$

Logo, pela continuidade de p_3 em r , podemos escolher r perto de R tal que $t_0 < p_3 < t_0 + d_0$.

Então temos $(C_r^- \cap \Pi^+) \subset \Sigma$ e, como a terceira coordenada dos pontos de C_r^- satisfazem $x_3 \leq p_3 < t_0 + d_0$, segue que $C_r^- \cap S = \emptyset$.

Observe que, para $c \leq r$, o bordo de C_c^- (que é o seu círculo central) está contido em Σ . Logo ∂C_c^- não intersecta S para estes valores de c , pois o círculo central tem coordenada $x_3 = p_3 < t_0 + d_0$.

Por fim, conforme o valor de c diminui, apesar do círculo central do catenoide diminuir, o catenoide em si “abre” (ou seja, a coordenada x_3 decresce cada vez mais devagar, tendendo a um plano Π_{p_3} quando $c \rightarrow 0$). De fato, pela equação (2-6) temos:

$$x_3 = p_3 - c \ln \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - c}}{c} \right)$$

Logo $x_3(x_1, x_2)$ é contínua em c e, quando $c \rightarrow 0$, o termo linear domina o termo logarítmico. Portanto $x_3(x_1, x_2) \xrightarrow{c \rightarrow 0} 0, \forall (x_1, x_2)$.

O objetivo agora é encontrar o valor exato de c tal que $S \geq C_c^-$ (isto é, que S esteja acima de C_c^- no eixo x_3) mas que S e C_c^- se tocam em algum ponto.

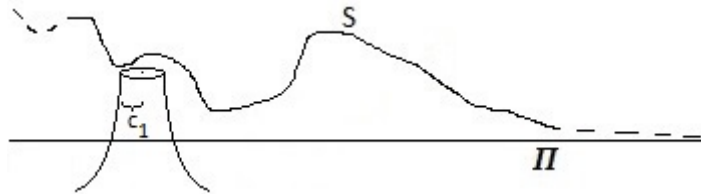


Figura 8.5: Catenoide com raio central c_1

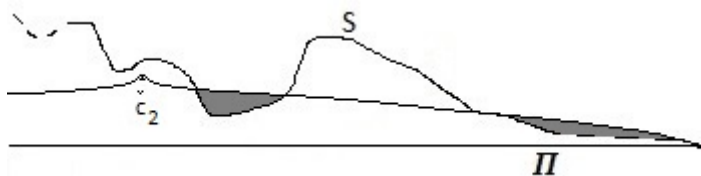


Figura 8.6: Catenoide com raio central $c_2 < c_1$

Vamos analisar os valores de $c \in (0, r)$ em que o conjunto de pontos entre S e C_c^- é não-vazio. Denote este conjunto de pontos por Q_c , ou seja,

$$Q_c := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists (x_1, x_2, q_3) \in S \text{ e } \exists (x_1, x_2, \tilde{q}_3) \in C_c^- \text{ com } \tilde{q}_3 \geq x_3 \geq q_3 \right\}$$

Este conjunto está em cinza na figura anterior. Observe que, na definição de Q_c , \tilde{q}_3 pode ser escrito como

$$\tilde{q}_3 = p_3 - c \ln \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - c}}{c} \right)$$

Além disto, $(S \cap C_c^-) \subset Q_c$.

Queremos ver que Q_c é compacto ou vazio para qualquer valor de c . Denote por B_c a bola fechada contida no plano Π cujo bordo é $C_c^- \cap \Pi$. Então $Q_c \subset (B_c \times [t_0, p_3])$. Provar que Q_c é fechado é mais complicado.

Seja $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}) \in Q_c$ sequência com $x_n \rightarrow x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Logo existem sequências $q_{3n} \in S$ e $\tilde{q}_{3n} \in C_c^-$ tal que

$$q_{3n} \leq x_{3n} \leq \tilde{q}_{3n} \quad (8-2)$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Como⁷ $(x_{1_n}, x_{2_n}) \in B_c \setminus \mathring{B}$, que é compacto, temos $(x_1, x_2) \in B_c \setminus \mathring{B}$.

Sabemos que $C_c^- \cap \Pi^+$ é gráfico de função contínua sobre um subconjunto fechado de B_c , que é compacto. Logo $C_c^- \cap \Pi^+$ é compacto, donde $(x_{1_n}, x_{2_n}, \tilde{q}_{3_n}) \rightarrow (x_1, x_2, \tilde{q}_3)$ (a menos de tomar uma subsequência). Então, usando (8-2), podemos pegar $\epsilon > 0$ tal que, para n suficientemente grande, temos $q_{3_n} \in [t_0, \tilde{q}_3 + \epsilon]$, que é um compacto. Logo $q_{3_n} \rightarrow q_3$ (a menos de tomar uma subsequência). Como S é fechada⁸, $(x_1, x_2, q_3) \in S$. As desigualdades passam ao limite e temos $q_3 \leq x_3 \leq \tilde{q}_3$, donde Q_c é fechada.

Seja $L := \{c \in \mathbb{R}_+ : Q_c \neq \emptyset\}$ e seja \tilde{c} o sup deste conjunto. L é não-vazio pois S tende assintoticamente a $\Pi = \Pi_{t_0}$ e, quando $c \rightarrow 0$, C_c^- tende ao plano Π_{p_3} , onde $p_3 > t_0$. Portanto, para c suficientemente pequeno temos $Q_c \neq \emptyset$. Vamos ver que $\tilde{c} \in L$.

Primeiro veja que L é fechado. De fato, seja sequência $c_n \rightarrow c$ e seja $(x_1, x_2, x_3) \in Q_{c_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Logo $\exists \tilde{q}_{3_n} \in C_{c_n}^-$ com $\tilde{q}_{3_n} \geq x_3$. Mas

$$\tilde{q}_{3_n} = \tilde{q}_3(c_n) = p_3 - c_n \ln \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - c_n}}{c_n} \right) \geq x_3$$

e $\tilde{q}_{3_n} \rightarrow \tilde{q}_3(c) =: \tilde{q}_3$, pois $\tilde{q}_3(c)$ é contínua em c . Como $\tilde{q}_{3_n} \geq x_3$, segue que $\tilde{q}_3 \geq x_3$ e L é fechado.

Além disto, vimos que $C_r^- \cap S = \emptyset$, o que nos dá $Q_r = \emptyset$. Portanto L é limitado, donde é compacto e atinge o sup. Logo $\tilde{c} \in L$.

Tome o catenoide com raio \tilde{c} :

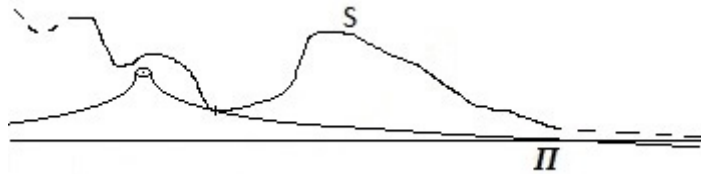


Figura 8.7: Catenoide de raio central \tilde{c}

Queremos mostrar que $S \geq C_{\tilde{c}}^-$ na terceira coordenada.

Suponha por absurdo que $\exists (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{q}_3) \in C_{\tilde{c}}^-$ com $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, q_3) \in S$ tal que $\hat{q}_3 > q_3$ (obviamente $\hat{q}_3 \geq t_0$ pois $S \subset \Pi^+$). Como S é fechada e $C_c^- \cap \Pi^+$

⁷Observe que a terceira coordenada dos pontos de $C_c^- \cap \Sigma$ (i.e., o pedaço de C_c^- que é gráfico sobre B) satisfazem $x_3 \leq p_3$. Portanto eles estão abaixo de S , donde Q_c está no exterior do cilindro Σ .

⁸Pois é propriamente imersa.

é compacto, a função altura entre C_c^- e S

$$h(c) := \sup \left\{ (\tilde{q}_3 - q_3) : (x_1, x_2, \tilde{q}_3) \in C_c^- \cap \Pi^+, (x_1, x_2, q_3) \in S \right\}$$

está bem definida e é contínua em c (pois \tilde{q}_3 é contínua em c). Mas $h(\tilde{c}) > 0$ pois $\hat{q}_3 - q_3 > 0$ e $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{q}_3) \in C_{\tilde{c}}^- \cap \Pi^+$. Pela continuidade de $h(c)$, $\exists \epsilon > 0$ tal que, se $|c - \tilde{c}| < \epsilon$, temos $h(c) > 0$. Mas então, para $c = \tilde{c} + \frac{\epsilon}{2}$, temos $Q_c \neq \emptyset$. Logo \tilde{c} não é o sup de L , absurdo.

Como $Q_{\tilde{c}} \neq \emptyset$, S e $C_{\tilde{c}}^-$ se tocam em algum ponto. Aplicando o princípio do máximo geométrico interior (vide 8.1.3) numa vizinhança de um destes pontos, temos $C_{\tilde{c}}^- \subset S$ (pois ambas são conexas, $C_{\tilde{c}}^-$ tem bordo e S não — vide observação 8.1.4). Mas $S \subset \Pi^+$ enquanto $C_{\tilde{c}}^- \not\subset \Pi^+$. Absurdo.

Logo a única possibilidade é $S \equiv \Pi$. ■

Hoffman e Meeks provaram uma versão mais geral do teorema acima, chamada teorema Forte do Semi-espço.

Teorema 8.4.2 (Teorema Forte do Semi-espço) *Sejam S_1 e S_2 duas superfícies mínimas, sem bordo, propriamente imersas em \mathbb{R}^3 . Então elas se intersectam, a não ser que sejam planos paralelos.*

Prova: Vide Ref. 20 . ■

Em particular, quando uma das superfícies é um plano, obtemos o teorema anterior.

Com o teorema do semi-espço podemos provar o seguinte fato, previamente mencionado na seção 4.6.6:

Proposição 8.4.3 *A superfície de Jorge-Xavier não é propriamente imersa.*

Prova: Suponha por absurdo que a superfície de Jorge-Xavier seja propriamente imersa. Sabemos que ela está contida no semi-espço $\{x_3 > -1\}$. Pelo teorema do semi-espço, ela é um plano. Absurdo! ■

9

Superfícies Mínimas Completas de Curvatura Total Finita

Neste capítulo estudaremos as superfícies mínimas completas que possuem curvatura total finita. Veremos que elas são conformemente equivalentes a superfícies de Riemann compactas com um número finito de pontos removidos. A seguir, estenderemos a 1-forma $f(z)dz$ e a função $g(z)$ da representação de Enneper-Weierstrass meromorficamente a estes pontos removidos. Desta maneira veremos que a curvatura total de uma superfície mínima completa só pode assumir certos valores. Depois relacionaremos a curvatura total com a topologia da superfície e classificaremos as superfícies mínimas completas com certos valores de curvatura total ou com certa topologia. Além disto, veremos a definição de um fim de uma superfície mínima. Esta noção será estudada mais a fundo no capítulo 10.

9.1**Teoremas de Huber**

O resultado abaixo é a base de toda a teoria desenvolvida neste capítulo.

Teorema 9.1.1 *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima completa de uma superfície de curvatura total finita. Então existe superfície de Riemann compacta \hat{M} e um número finito de pontos $\{p_1, \dots, p_k\} \in \hat{M}$ tal que M é conformemente equivalente a $\hat{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$.*

O teorema acima segue diretamente de dois resultados provados por Huber, cujas demonstrações não serão dadas aqui¹.

Teorema 9.1.2 (Huber 1) *Seja M superfície de Riemann aberta² completa com³ $C^-(M) < \infty$.*

Então $C^+(M) < \infty$ e M tem topologia finita, ou seja, M é homeomorfa a uma superfície orientável compacta menos um número finito de pontos.

¹Elas podem ser encontradas em Ref. 21 .

²Vide a definição 1.1.9.

³A notação está explicada em 1.1.41.

Teorema 9.1.3 (Huber 2) *Seja M superfície de Riemann aberta completa com $C^-(M) < \infty$. Então M é parabólica (vide definição 1.2.27).*

Prova:

Sabemos que uma superfície mínima M é uma superfície de Riemann⁴ aberta⁵ com curvatura gaussiana $K \leq 0$ em todo ponto⁶. Então M tem curvatura total finita se e somente se $C^-(M) < \infty$.

Pelo primeiro teorema de Huber, temos que M é homeomorfa a uma superfície compacta \hat{M} com um número finito de pontos removidos. Queremos definir uma métrica nesta nova superfície através do pullback da métrica de M e, desta forma, torná-las superfícies de Riemann isométricas entre si. Para tal, estamos interessados no tipo conforme de M e não apenas na sua topologia. Em outras palavras, apesar de remover um disco ou um ponto de \hat{M} ser o mesmo do ponto de vista topológico, não o é do ponto de vista conforme. Vamos ver que, no caso da nossa superfície mínima M , ela é conformemente equivalente a \hat{M} menos um número finito de pontos, ou seja, nenhum disco foi removido de \hat{M} .

Suponha por absurdo que M é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta \hat{M} com um número finito de pontos e com ao menos um disco removido. Sem perda de generalidade, suponha que M é conformemente equivalente a $\hat{M} \setminus \mathbb{D}$. Vamos ver que neste caso M seria hiperbólica, o que não é possível pelo teorema de Huber 9.1.3.

Seja B o bordo do disco \mathbb{D} que foi removido, e seja A um anel fechado em M com $B \subset \partial A$, i.e. A é homeomorfo a $B \times [0, 1]$ onde o bordo B corresponde a $B \times \{0\}$. Seja B' a outra componente do bordo de A .

Aplique o método de Perron na família⁷

$$\mathcal{F} = \left\{ u : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua, subharmônica em } A, \text{ tal que } u|_{B'} \leq 1 \text{ e } u|_B \leq 0 \right\}$$

Seja $v(z) = \sup_{u \in \mathcal{F}} u(z)$, para $z \in A$. Como a função constante igual a zero está em \mathcal{F} , temos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Então podemos aplicar o teorema 1.2.12 e v está bem definida. Considerando que $v|_{B'} \leq 1$, sabemos que $v \not\equiv \infty$, donde v é função harmônica em $\text{int}(A)$ satisfazendo:

$$0 \leq v(z) \leq 1, \forall z \in A$$

⁴Vide observação 1.1.23.

⁵Pois M não tem bordo, já que é completa, e não pode ser compacta pelo teorema 3.3.2.

⁶Vide a equação (5-1).

⁷Vide 1.2.9, 1.2.10, 1.2.11 e 1.2.12.

Defina a função $h : \hat{M} \setminus \mathbb{D}$ por:

$$h(z) = \begin{cases} v(z), & z \in A \\ 1, & z \in (\hat{M} \setminus A) \end{cases}$$

Ela é contínua em $\hat{M} \setminus \mathbb{D}$ e superharmônica⁸ em $\text{int}(\hat{M} \setminus \mathbb{D})$. Então $-h$ é função negativa subharmônica não-constante⁹ em $\text{int}(\hat{M} \setminus \mathbb{D})$. Portanto $\hat{M} \setminus \mathbb{D}$ é hiperbólica, donde M também é (pois elas são conformemente equivalentes). Absurdo, pois o teorema 9.1.3 nos diz que M é parabólica.

Logo M é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta \hat{M} com um número finito de pontos removidos. ■

No capítulo 4 vimos vários exemplos de superfícies mínimas completas de curvatura total finita: o plano, o catenoide, a superfície de Enneper e as superfícies de Jorge-Meeks. Em todos estes exemplos o domínio de parametrização era¹⁰ \mathbb{S}^2 com alguns pontos removidos, o que está de acordo com o teorema provado acima.

Observação 9.1.4 *Quando temos uma superfície mínima completa mas não sabemos (ou temos dificuldade de) calcular a sua curvatura total, o teorema acima serve como um critério para ver se $C(M) = -\infty$. Por exemplo, vimos no capítulo 4 o exemplo de Jorge-Xavier, que é superfície mínima completa. No entanto, como o seu domínio de parametrização é \mathbb{D} , cujo bordo não é um ponto, segue que a sua curvatura total não pode ser finita¹¹.*

9.2

Extensões Meromorfas de $f(z)dz$ e $g(z)$ a \hat{M}

Vamos começar estendendo $g(z)$ meromorficamente a \hat{M} .

Teorema 9.2.1 (Osserman) *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima completa de curvatura total finita. Então $g : M \rightarrow \mathbb{C}$ se estende meromorficamente a $g : \hat{M} \rightarrow \mathbb{C}$.*

Prova: Pelo teorema 9.1.1, sabemos que M é conformemente equivalente a $\hat{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$. Queremos estender g meromorficamente a cada um dos pontos removidos p_i , $i \in \{1, \dots, k\}$.

⁸Ela é harmônica para $z \in \text{int}(A)$ e para $z \in (\hat{M} \setminus A)$. Além disto, em qualquer ponto da colagem ($z \in B'$) vale a desigualdade do valor médio (vide 1.2.9).

⁹Pois $-h|_B = -v|_B \equiv 0$, $-h_{\hat{M} \setminus A} = -1$ e $-h$ é contínua.

¹⁰Pois $\mathbb{C} = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$.

¹¹Outra maneira de ver isto é observar que o disco \mathbb{D} é uma superfície de Riemann hiperbólica. Para tal, basta observar que a função $\text{Re}(z) - 1$ é subharmônica em \mathbb{D} (pois é parte real de função holomorfa, donde é harmônica), é negativa e não constante.

Suponha por absurdo que ao menos um dos p_i seja uma singularidade essencial de g . Então, pelo grande teorema de Picard (vide 1.2.20), g assume todos os valores de \mathbb{S}^2 uma infinidade de vezes com, no máximo, duas exceções. Mas isto implica que a área esférica de g , ou seja, que a área da imagem da aplicação normal de Gauss $N = \pi^{-1} \circ g$ é infinita. Portanto $C(M) = -\infty$, absurdo.

Logo cada um dos pontos p_i é, no máximo, um pólo de g e, portanto, g é meromorfa em \hat{M} . ■

Estender a 1-forma $f(z)dz$ meromorficamente a \hat{M} é mais complicado do que fazer o mesmo para g . Para isto precisamos de um lema prévio.

Lema 9.2.2 *Seja f função holomorfa sem zeros definida em $0 < r_1 < |z| < \infty$. Suponha que para qualquer caminho C divergente ao infinito temos*

$$\int_C |f(z)| |dz| = \infty.$$

Então f tem, no máximo, um pólo em ∞ .

Prova: Como $f(z) \neq 0$, a função $\log |f(z)| = \operatorname{Re}(\log f(z))$ é harmônica. A sua expansão de Laurent no infinito é (vide 1.2.5):

$$\log |f(z)| = \alpha \log |z| + h(z) + H(z)$$

onde $h(z)$ é harmônica e limitada numa vizinhança $r_1 < r_2 < |z| < \infty$ do infinito e $H(z)$ é função harmônica em \mathbb{C} .

Seja $N \in \mathbb{N}^*$, $N > \alpha$. Então, para $|z| > r_2$, temos

$$|f(z)| = |z|^\alpha e^{h(z)} e^{H(z)} \leq M |z|^N e^{H(z)} = M |z|^N e^{G(z)}$$

onde M é cota superior para $e^{h(z)}$ na vizinhança do infinito e $G(z)$ é função inteira cuja parte real é $H(z)$ (tal $G(z)$ existe pois \mathbb{C} é simplesmente conexo, vide 1.2.3 e 1.2.4).

Defina a função inteira

$$F(z) = \int_0^z w^N e^{G(w)} dw, \quad F(0) = 0$$

Observe que, pelo teorema fundamental do cálculo, $F'(z) \neq 0$, $\forall z \neq 0$. Seja

$$\zeta(z) = [F(z)]^{\frac{1}{N+1}}$$

um ramo da $(N + 1)$ -ésima raiz de $F(z)$ numa vizinhança V de $z = 0$ satisfazendo $\zeta(0) = 0$ e $\zeta'(0) \neq 0$. De fato, tal ramo existe pois, como $e^{G(z)}$ é função inteira que nunca se anula, usamos o teorema fundamental do cálculo e obtemos

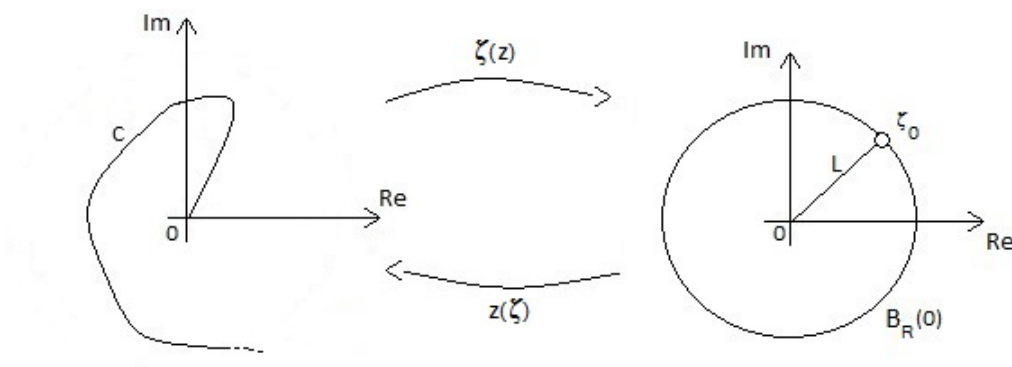
$$F'(z) = z^N \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right)$$

onde $a_0 \neq 0$. Portanto

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{F'(z)}{z^N} = a_0 \neq 0$$

Logo $F(z)$ tem um zero de ordem $(N + 1)$ em $z = 0$, donde podemos escolher um ramo $\zeta(z) = [F(z)]^{\frac{1}{N+1}}$ com $\zeta(0) = 0$ e $\zeta'(0) \neq 0$.

Como $\zeta'(0) \neq 0$ temos portanto um ramo da inversa $z(\zeta)$ numa vizinhança de $\zeta = 0$. Existem duas possibilidades: esta inversa $z(\zeta)$ se estende holomorficamente a todo o plano- ζ ou existe uma bola máxima $B_R(0)$ no plano- ζ onde ela pode ser estendida. Vamos ver que o segundo caso não pode ocorrer.



Suponha por absurdo que exista $B_R(0)$ bola máxima, $\exists \zeta_0$ com $|\zeta_0| = R$ onde a inversa $z(\zeta)$ não pode ser estendida. Seja $L(t) = t\zeta_0$, $t \in [0, 1)$ curva ligando a origem a ζ_0 . A sua imagem inversa no plano- z será uma curva $C := z(L)$.

Se C diverge ao infinito, a partir de um certo ponto ela estaria na região $|z| > r_2$. Denotemos por \tilde{C} o pedaço divergente da curva C que está sempre na região $|z| > r_2$, i.e., $\tilde{C} := \{z(t\zeta_0); t \in (\tilde{t}, 1)\}$ onde $|z(t\zeta_0)| > r_2$, $\forall t > \tilde{t}$.

Logo

$$\begin{aligned}
 \int_C |f(z)| |dz| &\leq L + M \int_{\tilde{C}} |z^N e^{G(z)}| |dz| = L + M \int_{\tilde{C}} |F'(z)| |dz| = \\
 &= L + M \int_{\tilde{C}} |dF| = L + M \int_{\tilde{t}}^1 (N+1) t^N |\zeta_0|^N |\zeta_0| dt = \\
 &= L + MR^{N+1} \int_{\tilde{t}}^1 (N+1) t^N dt < L + MR^{N+1} < +\infty
 \end{aligned}$$

onde L é o valor da integral até \tilde{t} . Mas isto contradiz a hipótese. Então C não pode divergir ao infinito.

Logo \exists sequência $t_n \rightarrow 1$, $t_n \in [0, 1)$, e sequência $z_n := z(t_n \zeta_0) \in V$ com $z_n \rightarrow z_0 \in \bar{V} \subset \mathbb{C}$ (lembre-se que a vizinhança V é onde ζ está definida). Como $F'(z_0) \neq 0$, tomando um ramo compatível com a definição de ζ anterior, podemos estender ζ holomorficamente a uma vizinhança de z_0 . Obtemos então $|F(z_0)| = |\zeta_0|^{N+1} \neq 0$. Logo:

$$\zeta'(z_0) = \frac{1}{N+1} [F(z_0)]^{\frac{N}{N+1}} F'(z_0) \neq 0$$

Portanto, pelo teorema da função inversa, podemos estender a inversa $z(\zeta)$ holomorficamente ao ponto ζ_0 . Logo a bola $B_R(0)$ não era máxima, absurdo.

Então a inversa $z(\zeta)$ é função inteira, i.e., holomorfa em todo o plano- ζ . Observe que

$$z(\zeta_1) = z(\zeta_2) \implies F(z(\zeta_1)) = F(z(\zeta_2)) \implies \zeta_1^{N+1} = \zeta_2^{N+1}$$

Logo cada valor z é assumido, no máximo, $(N+1)$ vezes. Portanto, pelo corolário do grande teorema de Picard (vide 1.2.21), $z(\zeta)$ é um polinômio. Além disto, segue também que $z(\zeta) = 0 \implies \zeta = 0$. Já que $\zeta = 0$ é o único zero do polinômio z , temos:

$$z(\zeta) = A \zeta^k$$

onde $k \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbb{C}$.

Como $z'(\zeta) = A k \zeta^{k-1}$ e $z'(0) = \frac{1}{\zeta'(0)} \neq 0$, segue que $k = 1$, $A \neq 0$.

Portanto

$$F(z) = \left(\frac{z}{A}\right)^{N+1}$$

Logo $G(z)$ deve ser constante, donde $H(z)$ também é constante. Então

$$|f(z)| \leq M_1 |z|^N$$

perto do infinito. Segue que $f(z)$ tem, no máximo, um pólo no infinito. ■

Teorema 9.2.3 (Osserman) *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima completa de curvatura total finita. Então a 1-forma holomorfa $f(z)dz$ em M se estende meromorficamente a \hat{M} .*

Prova: Pelo teorema 9.1.1, sabemos que M é conformemente equivalente a $\hat{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$. Podemos pegar a função holomorfa $f(z)$ numa vizinhança V de um dos pontos removidos p_i , $i \in \{1, \dots, k\}$. Suponha que V não contenha nenhum outro ponto removido p_j , $j \neq i$. Vamos estender f meromorficamente a p_i . Suponha que $f \not\equiv 0$ (caso contrário estenda f tomando $f(p_i) = 0$, $i \in \{1, \dots, k\}$).

Observe que g é meromorfa em \hat{M} , então (a menos de uma rotação em \mathbb{R}^3 e reduzindo V , se necessário) podemos supor¹² que $g(V)$ é limitado. Portanto f não tem zeros em V (vide 4.1.2).

Além disto, se $\psi(z)$ é carta de \hat{M} ao redor de p_i com $\psi(0) = p_i$, podemos tomar V de forma que $\psi^{-1}(V) = B_{\frac{r_1}{r_1}}(0)$. Componha agora com a função $1/z$ de forma a obter carta de $A := \{0 < r_1 < |z| < \infty\}$ numa vizinhança V de p_i em $\hat{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$. Vamos estudar o comportamento de f em $A = \{0 < r_1 < |z| < \infty\}$ quando $|z| \rightarrow \infty$.

Seja C um caminho divergente ao infinito em A . Como g é limitada em A e M é completa, segue que

$$\infty = \int_C \lambda |dz| = \frac{1}{2} \int_C |f|(1 + |g|^2) |dz| < \left(\frac{1 + L^2}{2}\right) \int_C |f| |dz|$$

onde $g(z) < L$ em A .

Logo $\int_C |f| |dz| = \infty$ para qualquer caminho C divergente ao infinito em A . Como sabemos que f não tem zeros em A podemos aplicar o lema anterior e descobrimos que f tem, no máximo, um pólo no infinito. Portanto f (e portanto $f(z)dz$) se estende meromorficamente a $\hat{M} \setminus \{p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_k\}$.

¹²Lembre-se que $g = \pi \circ N$ por 4.3.1.

Repetindo o argumento para todos os pontos p_i obtemos extensão meromorfa de $f(z)dz$ a \hat{M} . ■

Com o resultado anterior podemos dizer quais valores de curvaturas total são possíveis para uma superfície mínima completa.

Teorema 9.2.4 *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima completa em \mathbb{R}^3 . Então $C(M) = -\infty$ ou $C(M) = -4\pi m = -4\pi \deg(g)$, onde $m \in \mathbb{N}$.*

Prova: Como $K \leq 0$, a integral $C(M) = \iint_M K \, dA = \iint_{\hat{M}} K \, dA$ diverge a $-\infty$ ou então a curvatura total é finita. No segundo caso, sabemos que g se estende meromorficamente a \hat{M} . Como g é meromorfa num compacto \hat{M} , sabemos que g é constante (e neste caso $K \equiv 0$) ou g assume cada valor de \mathbb{S}^2 um número finito de vezes m (este valor é chamado grau de g e denotado $\deg(g)$).

Como a curvatura total de M é o negativo da área esférica de g em $\hat{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ (que é o mesmo em \hat{M}), segue que

$$C(M) = m \text{ Area}(\mathbb{S}^2) = 4\pi m$$

■

9.3

Relação entre a Curvatura Total e a Topologia de S

Definição 9.3.1 (Fim) *Seja $X : \hat{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima completa, \hat{M} superfície de Riemann compacta e p_1, \dots, p_k um número finito de pontos de \hat{M} . Se $V \subset \hat{M}$ é vizinhança de p_i que não contém nenhum dos outros pontos p_j , então a imagem $X(V \setminus \{p_i\})$ é um fim de $X(\hat{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\})$, denotado por E_i .*

Se $X|_{V \setminus \{p_i\}}$ é mergulho, dizemos que o fim E_i é um fim mergulhado.

Segue diretamente da definição acima que $X(\hat{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\})$ é superfície mínima imersa completa com k fins.

Um exemplo ilustrativo é o catenoide. Sabemos que ele é conformemente equivalente a $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cong \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, \pm 1)$, portanto ele tem dois fins. Geometricamente eles são os dois pedaços do catenoide que tendem ao infinito.

Agora que sabemos o que é um fim, podemos enunciar o teorema abaixo.

Teorema 9.3.2 (Fórmula de Jorge-Meeks) *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima completa em \mathbb{R}^3 . Logo*

$$C(M) = \iint_M K \, dA \leq 2\pi (\chi(M) - k) \quad (9-1)$$

onde $\chi(M)$ é a característica de Euler¹³ de M e k é o número de fins da superfície (ou seja, o número de pontos excluídos de \hat{M}).

Além disto, vale a igualdade se e somente se todo fim é mergulhado.

Demonstraremos o teorema acima usando argumentos de superfícies de Riemann e, por isto, não provaremos o “se e somente se”. Para uma prova dele (e do resto do teorema) usando outros tipos de argumentos, vide Ref. 22, Chapter III, theorem 2.11 .

Prova: Se a curvatura total da superfície não é finita ($C(M) = -\infty$) ou se a superfície é um plano, o resultado é trivial (no caso do plano $\chi(M) = 1$ e $k = 1$). Suponha então que a superfície não é um plano e possui curvatura total finita. Sejam $f(z)dz$ e $g(z)$ obtidas na representação de Enneper-Weierstrass da superfície.

Pelos resultados da seção anterior, encontramos \hat{M} superfície de Riemann compacta com $\hat{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ conformemente equivalente a M . Além disto, g se estende meromorficamente a \hat{M} .

Afirmamos que, como $g = \pi \circ N$ (aplicando uma rotação em \mathbb{R}^3 se necessário) podemos assumir que $g(p_i) \notin \{0, \infty\}$ para qualquer um dos pontos p_i , e podemos assumir também que os pólos de $g(z)$ são todos pólos simples.

De fato, como g não é constante (pois a superfície não é plana), então os zeros da função $\left(\frac{1}{g}\right)'$ são isolados (vide 1.2.1). Denote por Σ a união dos zeros desta função com os pontos p_1, \dots, p_k . Logo Σ é um conjunto isolado de pontos. Então podemos escolher um ponto $q \in \mathbb{S}^2$ tal que $\pi(\pm q) \notin \Sigma$. Aplique uma rotação em \mathbb{R}^3 que leve q e $-q$ nos pólos norte e sul de \mathbb{S}^2 , respectivamente. Pela escolha de q , os pólos de $g(z)$ são simples (senão $\pi(q)$ seria zero de $\left(\frac{1}{g}\right)'$) e $\pi^{-1}(p_i) \neq \pm q$ pra todo i , o que implica em $g(p_i) \neq \{0, \infty\}$.

Sabemos então que $f(z)dz$ deve ter zeros de ordem 2 em cada um dos pólos (simples) de $g(z)$, e $f(z)dz$ não possui nenhum outro zero (vide 4.1.2). Portanto, se o grau de g em \hat{M} é $\deg(g) = m \in \mathbb{N}^*$, então $f(z)dz$ tem exatamente m zeros de ordem 2 em M .

Em cada ponto p_i podemos introduzir coordenadas locais ζ com $\zeta = 0$ em p_i . Para $0 < \zeta < \epsilon$ temos $|g| < L$ (pois p_i não é pólo de g), logo $f \neq 0$. Além disto, pela completude da superfície, se C é curva em M divergindo a p_i ,

¹³Vide 1.1.46.

temos

$$\infty = \int_C \lambda |d\zeta| = \frac{1}{2} \int_C |f| (1 + |g|^2) |d\zeta| \leq \frac{1+L^2}{2} \int_C |f(\zeta)| |d\zeta|$$

Então, pelo lema 9.2.2, $f(\zeta)$ deve ter um pólo na origem. De fato, se $f(\zeta)$ fosse finita em $\zeta = 0$, então $|f(\zeta)|$ seria limitada em C (pois é função contínua em um compacto). Pegando então uma curva C de comprimento finito, poderíamos cotar o lado direito por uma constante real, o que seria um absurdo.

Vamos provar que $\zeta = 0$ é um pólo de ordem ≥ 2 de $f(\zeta)$.

Suponha por absurdo que $\zeta = 0$ é um pólo de ordem 1 de f . Então perto da origem temos:

$$\begin{cases} f(\zeta) = \frac{a_{-1}}{\zeta} + O(1) \\ g(\zeta) = b_0 + O(\zeta) \end{cases}$$

onde $a_{-1} \neq 0$ pois $\zeta = 0$ é pólo de f e $b_0 \neq 0$ pois $\zeta = 0$ não é zero de g por hipótese.

Como as funções

$$x_k(\zeta) = \operatorname{Re} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_k(w) dw \right)$$

tem valor único em $0 < |\zeta| < \epsilon$, as 1-formas $\phi_k(\zeta)d\zeta$ devem ter períodos imaginários puros (se não o fosse, a superfície seria periódica perto de p_i , donde $C(M) = -\infty$). Usando as fórmulas de $\phi_k(\zeta)d\zeta$ em função de $f(\zeta)d\zeta$ e $g(\zeta)$ (vide 4-1) temos:

$$\begin{cases} \phi_1(\zeta) d\zeta = \left[\frac{a_{-1} (1 - b_0^2)}{2 \zeta} + O(1) \right] d\zeta \\ \phi_2(\zeta) d\zeta = \left[\frac{i a_{-1} (1 + b_0^2)}{2 \zeta} + O(1) \right] d\zeta \\ \phi_3(\zeta) d\zeta = \left[\frac{a_{-1} b_0}{\zeta} + O(1) \right] d\zeta \end{cases}$$

Exigindo que seus resíduos sejam imaginários puros, obtemos:

$$\begin{cases} a_{-1} (1 - b_0^2) \in \mathbb{R} \\ a_{-1} (1 + b_0^2) \in \text{Im} \\ a_{-1} b_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (9-2)$$

Seja $\arg(a_{-1}) = \theta$ e seja $b_0 = c + id$.

Suponha por absurdo que $d = 0$, ou seja, $b_0 \in \mathbb{R}$. Segue da terceira condição de (9-2) que $a_{-1} \in \mathbb{R}$. Então, pela segunda condição de (9-2), $a_{-1}(1 + b_0^2) = 0$. Mas $a_{-1} \neq 0$ e, se $b_0 \in \mathbb{R}$, temos $(1 + b_0^2) > 0$, absurdo. Logo $d \neq 0$.

Suponha por absurdo que $c = 0$, i.e., $b_0 \in \text{Im}$. Pela terceira condição de (9-2) temos $a_{-1} \in \text{Im}$. Então, pela primeira condição de (9-2) e por $a_{-1} \neq 0$, obtemos $(1 - b_0^2) \in \text{Im}$. Mas como $b_0 \in \text{Im}$, temos $b_0^2 \in \mathbb{R}_-$, donde $(1 - b_0^2) \in \mathbb{R}_+$. Absurdo. Logo $c \neq 0$.

Pela terceira condição de (9-2), temos que:

$$\arg(b_0) = -\theta \implies \tan(-\theta) = \frac{d}{c}$$

Pela primeira condição de (9-2), temos:

$$\arg(1 - b_0^2) = -\theta$$

Mas $(1 - b_0^2) = (1 - c^2 + d^2) - 2icd$, donde

$$\tan(-\theta) = \frac{-2cd}{1 - c^2 + d^2} = \frac{d}{c}$$

Como $c, d \neq 0$, temos:

$$-2c^2 = 1 - c^2 + d^2 \implies 1 + c^2 + d^2 = 0$$

Mas $c, d \in \mathbb{R}$, absurdo. Denotando por ν_i a ordem do pólo de $f(z)dz$ em p_i , concluimos que $\nu_i \geq 2$, $\forall i \in \{p_1, \dots, p_k\}$.

Como $f(z)dz$ é uma 1-forma meromorfa não constante numa superfície de Riemann \hat{M} compacta, podemos aplicar a relação de Riemann (vide 1.2.28) para obter¹⁴:

$$\chi(\hat{M}) = \sum_{i=1}^k \nu_i - 2m \geq 2k - 2m$$

¹⁴Usamos que f só tem pólos em p_i e tem m zeros, todos de ordem 2.

Usando que $C(M) = -4\pi m$ e $\chi(M) = \chi(\hat{M}) - k$, chegamos a:

$$\iint_M K \, dA = -4\pi m \leq 2\pi \left(\chi(\hat{M}) - 2k \right) = 2\pi \left(\chi(M) - k \right)$$

■

9.4

Aplicações

Através da fórmula de Jorge-Meeks conseguimos vários resultados interessantes.

Corolário 9.4.1 (Osserman) *As únicas superfícies mínimas completas com $C(M) = -4\pi$ são o catenoide ou a superfície de Enneper.*

Prova: Como $C(M) = -4\pi \deg(g)$, temos que g é função meromorfa de grau um definida numa superfície de Riemann compacta \hat{M} . Portanto g é aplicação bijetiva, aberta e fechada, donde é biholomorfismo entre \hat{M} e \mathbb{S}^2 .

Logo \hat{M} tem gênero $G = 0$, donde $\chi(M) = 2 - k$. Então a desigualdade da fórmula de Jorge-Meeks nos diz que $k \leq 2$. Como $k \neq 0$ (senão a superfície mínima teria bordo, donde não seria completa, ou seria fechada, o que não pode ocorrer pelo teorema 3.3.2), vamos analisar separadamente os casos $k = 1$ e $k = 2$.

Suponha $k = 1$. Neste caso $M \cong \mathbb{C}$ e, como $g(z)$ é função meromorfa injetiva, podemos tomar $g(z) = z$. Sabemos que a 1-forma holomorfa $f(z)dz$ não tem zeros em \mathbb{C} (pois g não tem pólos). Já que $f(z)dz$ é holomorfa em \mathbb{C} e tem, no máximo, um pólo no infinito, segue que $f(z)$ é um polinômio. Como não possui zeros, $f(z)dz$ é constante. Portanto $M = \mathbb{C}$, $f(z)dz = c \, dz$ e $g(z) = z$. Pelos exemplos vistos no capítulo 4, sabemos que esta é a superfície de Enneper.

Suponha $k = 2$. Podemos tomar $M \cong \mathbb{C}^*$ e, como $g(z)$ é função meromorfa injetiva, podemos tomar $g(z) = z$. Sabemos então que $f(z)dz$ é uma 1-forma meromorfa em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ cujo único zero é $z = \infty$, e este possui ordem 2 (pois g só tem um pólo, de ordem 1, no infinito). Portanto o único pólo (possível) de $f(z)dz$ é $z = 0$. Denote por ν_0 a ordem deste pólo.

Suponha por absurdo que $\nu_0 > 2$. Então temos que $z^{\nu_0} f(z)$ é função holomorfa de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ em $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$. Portanto $(z^{\nu_0} f(z))^{-1}$ é função holomorfa de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ em \mathbb{C} . Como $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é superfície de Riemann compacta, pelo princípio do máximo (vide 1.2.7), $(z^{\nu_0} f(z))^{-1}$ é função constante, donde

$$f(z) \, dz = \frac{1}{c \, z^{\nu_0}} \, dz$$

para $c \in \mathbb{C}$. Mas como $z = \infty$ é um pólo de ordem 2 de f , temos que $\nu_0 = 2$, absurdo.

Portanto $\nu_0 \leq 2$, donde $z^{\nu_0} f(z)$ é função holomorfa de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ em \mathbb{C} . Como $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é superfície de Riemann compacta, aplicamos novamente o princípio do máximo (vide 1.2.7) e obtemos que $z^{\nu_0} f(z)$ é função constante. Logo

$$f(z) dz = \frac{c}{z^{\nu_0}} dz$$

onde $c \in \mathbb{C}$. Como $z = \infty$ é um zero de $f(z)dz$ de ordem 2, segue que $\nu_0 = 2$. Portanto $M = \mathbb{C}^*$, $f(z)dz = \frac{c}{z^2} dz$ e $g(z) = z$. Pelos exemplos vistos no capítulo 4, sabemos que esta superfície é um catenoide. ■

Corolário 9.4.2 *Se a aplicação normal de Gauss (numa superfície mínima completa) é injetiva, então a superfície é um catenoide ou a superfície de Enneper.*

Prova: Se N é injetiva, como $g = \pi \circ N$ e π é bijeção, segue que g é injetiva em M . Portanto, como podemos estender g meromorficamente a uma superfície de Riemann compacta \hat{M} adicionando um número finito de pontos a M , temos $\deg(g) = 1$. Logo $C(M) = -4\pi$ e o resultado segue do corolário anterior. ■

Corolário 9.4.3 *O único anel mínimo mergulhado com curvatura total finita é o catenoide.*

Prova: Um anel M tem $\chi(M) = 0$ e $k = 2$. Como os fins estão mergulhados, vale a igualdade na fórmula de Jorge-Meeks, donde $C(M) = -4\pi$. Como a superfície de Enneper só tem um fim ($k=1$), segue o resultado. ■

Observação 9.4.4 *Existem alguns resultados que classificação para superfícies¹⁵ mínimas completas imersas em \mathbb{R}^3 cuja curvatura total assume certos valores. Já vimos no corolário 9.4.1 que as únicas tais superfícies com $C(M) = -4\pi$ são o catenoide e a superfície de Enneper. O caso de superfícies imersas com $C(M) = -8\pi$ foi totalmente classificado por Francisco Lopez em Ref. 23. Em particular, ele mostrou que a única delas de gênero um é a superfície de Chen-Gackstatter (vide observação abaixo), enquanto todas as outras*

¹⁵Como informamos no capítulo 1, ao longo de todo o texto estamos trabalhando apenas com superfícies orientáveis. Mencionamos apenas por curiosidade que existe um resultado de classificação para superfícies mínimas completas (orientáveis ou não) com $C(M) > -8\pi$. Detalhes podem ser encontrados em Ref. 22, Chapter III, theorem 2.23.

têm gênero zero (a superfície de Jorge-Meeks com $n = 2$ é uma delas). Já o caso de superfícies completas mergulhadas com $C(M) = -12\pi$ foi resolvido¹⁶ por Celso Costa em Ref. 24 .

Observação 9.4.5 (Superfície de Chen-Gackstatter) A superfície de Chen-Gackstatter foi a primeira¹⁷ superfície mínima não-periódica descoberta cujo domínio de parametrização M é um toro menos um número finito de pontos. Mais especificamente, M é um toro com um ponto removido. Logo ela possui um fim, o que a torna parecida com uma superfície de Enneper, e uma alça.

Para mais detalhes, vide Ref. 4, Chapter 3.8.B2 .

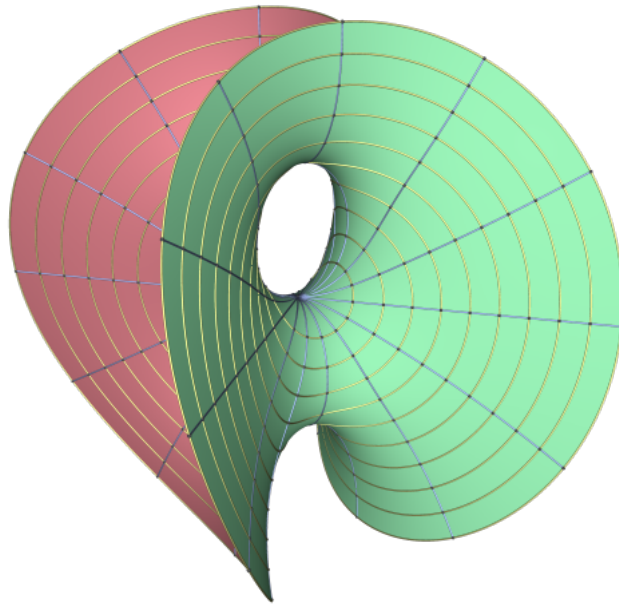


Figura 9.1: Superfície de Chen-Gackstatter - Crédito: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal

Observação 9.4.6 Outro resultado interessante, provado por F. Lopez e A. Ros em Ref. 25 , é o seguinte:

Teorema 9.4.7 (Lopez-Ros) As únicas superfícies mínimas completas mergulhadas com gênero zero e curvatura total finita são o plano e o catenóide.

¹⁶As únicas existentes são deformações da superfície de Costa. Curiosamente este resultado, de 1990, é mais antigo que o de Lopez, de 1992.

¹⁷Em 1982.

Em particular, este teorema mostra que qualquer outra superfície mínima completa de curvatura total finita que possui $\hat{M} = \mathbb{S}^2$ não é mergulhada. Em particular, a superfície de Enneper e as superfícies de Jorge-Meeks (com $n \geq 2$) não são mergulhadas.

Para a aplicação abaixo, precisaremos de um resultado prévio que não será provado.

Teorema 9.4.8 (Sá Earp, Rosenberg) *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima completa não-plana com um fim A conformemente equivalente a um anel $A = \{z : 0 < r^{-1} \leq |z| < r < \infty\}$. Então a aplicação $g = \pi \circ N$ pode omitir, no máximo, seis pontos no fim anelar A de M .*

Para a sua demonstração, vide Ref. 26, Theorem 3.1 .

Teorema 9.4.9 *Seja S gráfico mínimo completo no exterior de um domínio limitado $B \subset \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3\}$. Então S tem curvatura total finita.*

Prova: Denote por $\partial S := S|_{\partial B}$.

Como S é gráfico sobre um anel topológico, sabemos que ela é homeomorfa a um anel.

Suponha que S não é plana (senão a demonstração é trivial). Como S é gráfico, a sua normal unitária N omite todo um hemisfério de \mathbb{S}^2 . Pelo teorema anterior temos que S não pode ser conformemente equivalente a um anel $A = \{0 < r^{-1} \leq |z| < r < \infty\}$. Logo $S \setminus \partial S$ é conformemente equivalente a $\mathbb{D} \setminus \{p\}$.

Já que $g = \pi \circ N$, pelo grande teorema de Picard (vide 1.2.20), p não é singularidade essencial de g (senão N assumiria todos os valores de \mathbb{S}^2 perto de p com, no máximo, duas exceções, donde S não seria gráfico). Então podemos estender g meromorficamente ao ponto, donde N é estendida continuamente a p . Então, numa vizinhança de p , o número de pré-imagens de N é finito, donde a sua curvatura total é finita numa vizinhança de p (vide (5-7)). Como o resto da superfície é limitada (é gráfico sobre um compacto) e K é limitada neste compacto, segue que $C(S)$ é finita. ■

Teorema 9.4.10 *Os fns das superfícies de Jorge-Meeks¹⁸ são mergulhados.*

Prova: Vimos na seção 5.5.5 que a curvatura total da superfície de Jorge-Meeks é:

$$C(M) = -4\pi n$$

¹⁸Vide 4.6.5.

Além disto, como o domínio de parametrização é $M = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z^{n+1} = 1\}$, temos $\hat{M} = \mathbb{S}^2$. Portanto:

$$\chi(M) = 2 - 2g - k = 2 - (n + 1) = (1 - n)$$

Então temos a igualdade na fórmula de Jorge-Meeks (vide 9.3.2), donde os fins são mergulhados. ■

10

Desenvolvimento Assintótico de Fins Mínimos Mergulhados de Curvatura Total Finita

No fim do último capítulo vimos que um gráfico mínimo completo sobre o exterior de um aberto conexo limitado tem curvatura total finita. Neste capítulo mostraremos a recíproca: que um fim mergulhado de uma superfície mínima completa de curvatura total finita é gráfico sobre o exterior de um compacto conexo. Mostraremos que um fim deste tipo deve se comportar como um fim plano ou catenoide, isto é, ele converge geometricamente a um plano ou a um catenoide. Veremos uma aplicação desta classificação ainda neste capítulo e outra no capítulo seguinte.

10.1

Classificação de Fins Mergulhados de Curvatura Total Finita

Teorema 10.1.1 *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima conforme. Suponha que esta imersão possui um fim mergulhado completo de curvatura total finita $X : V \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^3$. A menos de uma rotação em \mathbb{R}^3 , podemos supor que $N(p) = (0, 0, -1)$.*

Então $X(V \setminus \{p\})$ é um gráfico sobre o exterior de um compacto do plano (x_1, x_2) , i.e., $\{x_3 = 0\}$, com o seguinte comportamento assintótico:

$$x_3(x_1, x_2) = \alpha \ln \rho + \beta + \frac{(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2)}{\rho^2} + O(\rho^{-2})$$

onde $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Além disto, as 1-formas meromorfas $\phi_1(z)dz$ e $\phi_2(z)dz$ têm pólos de ordem dois em p e não possuem resíduos, enquanto a 1-forma meromorfa $\phi_3(z)dz$ é regular (caso $\alpha = 0$) ou tem um pólo simples em p (caso $\alpha \neq 0$).

Prova: Suponha que a imersão mínima não seja um plano (senão o resultado segue automaticamente). Vamos dividir a demonstração em dois casos: N injetiva e N não injetiva.

Caso 1: N injetiva

Sem perda de generalidade, assuma $p = 0$. Além disto, já que $N(0) = (0, 0, -1)$ e N é contínua, podemos supor (diminuindo V se necessário) que $N(V)$ está contida no hemisfério (aberto) inferior de \mathbb{S}^2 .

Como N é injetiva, a menos de uma mudança de variável¹, podemos supor que $g(z) = z$ em V . Estenda $f(z)dz$ meromorficamente a $z = 0$ (isto pode ser feito pelo teorema 9.2.3). Portanto

$$f(z) dz = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j z^j \right) dz$$

onde, para apenas um número finito de termos $j \leq -1$, temos $c_j \neq 0$.

Observe que, como $x_1(z) = \operatorname{Re} \left\{ \int \phi_1(z) dz \right\}$ e $x_2(z) = \operatorname{Re} \left\{ \int \phi_2(z) dz \right\}$, temos (em $V \setminus \{0\}$):

$$\begin{aligned} 2(x_1 - ix_2) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \int \phi_1(z) dz \right\} - 2i \operatorname{Re} \left\{ \int \phi_2(z) dz \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \int_{z_0}^z f(1 - g^2) dz \right\} - i \operatorname{Re} \left\{ \int_{z_0}^z if(1 + g^2) dz \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \int_{z_0}^z f(1 - g^2) dz \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \int_{z_0}^z f(1 + g^2) dz \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z f dz \right) - \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z fg^2 dz \right) + i \operatorname{Im} \left(\int_{z_0}^z f dz \right) + i \operatorname{Im} \left(\int_{z_0}^z fg^2 dz \right) = \\ &= \int_{z_0}^z f dz - \overline{\int_{z_0}^z fg^2 dz} = \int_{z_0}^z f dz - \overline{\int_{z_0}^z f z^2 dz} \quad (10-1) \end{aligned}$$

¹Como $N(p) = (0, 0, -1)$, pelo teorema 4.3.1 temos $g(X^{-1}(p)) = g(0) = 0$. Então

$$g(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

e $a_1 \neq 0$, pois N é injetiva perto de p . Fazendo uma mudança de variável $\zeta = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$ (que está bem-definida, pois $a_1 \neq 0$, e leva p em $\zeta = 0$), obtemos $g(\zeta) = \zeta$. Renomeando ζ por z , o resultado segue.

Como $x_1 - ix_2$ está bem definido, a soma das duas integrais acima também está. Já que

$$c_{-1} \log(z) - \overline{c_{-3}} \overline{\log(z)} = (c_{-1} - \overline{c_{-3}}) \log|z| + i(c_{-1} + \overline{c_{-3}}) \arg(z)$$

para a soma das integrais estar bem definida, precisamos que $c_{-1} = -\overline{c_{-3}}$.

Além disto, a métrica da superfície é dada por

$$ds = \frac{(1 + |z|^2)}{2} |f dz|$$

Já que o fim é completo, $f dz$ tem que ter um pólo em $z = 0$ (senão ds seria limitada numa vizinhança de p , donde uma curva divergente a p teria comprimento finito). Como $c_{-1} = -\overline{c_{-3}}$, sabemos que este pólo é de ordem ≥ 2 .

Afirmamos que p é pólo de ordem 2 de $f(z)dz$. De fato, suponha por absurdo que $c_{-k}z^{-k}$, $k \geq 3$, é o termo de ordem mais negativa da série de Laurent de $f(z)dz$. Portanto o termo dominante de $\int_{z_0}^z f dz$ perto de $z = 0$ é:

$$\int c_{-k} z^{-k} dz = \left(-\frac{c_{-k}}{k} z^{-k+1} \right), \quad k \geq 3$$

Além disto, os termos da integral $\int_{z_0}^z f z^2 dz$ tem potências de \bar{z} mais altas, i.e., mais positivas que a acima. Portanto

$$-\frac{c_{-k}}{k} z^{-k+1}, \quad k \geq 3$$

também é o termo dominante de $\left(\int_{z_0}^z f dz - \overline{\int_{z_0}^z f z^2 dz} \right)$ perto de $z = 0$.

Pegue uma curva $|z| = \epsilon$ perto de $z = 0$ e denote por ω a sua imagem por X . Olhe para a projeção de ω no plano $\{x_3 = 0\}$. Como $-k + 1 \leq -2$, esta projeção tem auto-interseções². Além disto, como o fim é mergulhado e a curva em $V \setminus \{0\}$ também é, ω não tem auto-interseção. Já que a normal N do fim da superfície está no hemisfério (aberto) inferior de \mathbb{S}^2 , o vetor tangente a ω nunca é vertical. Portanto a projeção da imagem da curva $|z| = \epsilon$ no plano $\{x_3 = 0\}$ é injetiva, donde temos uma contradição. Logo p é um pólo de ordem

²Seja $z(t) = \epsilon e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$. Então uma auto-interseção acontece em $z(0) = z\left(\frac{1}{k-1}\right)$.

2 de $f dz$. O mesmo vale para as 1-formas $\phi_1 dz$ e $\phi_2 dz$. Já que $c_{-1} = -\overline{c_{-3}} = 0$, estas 1-formas não têm resíduo. Fica claro também que $\phi_3 dz$ tem um pólo de ordem 1 em p .

Então³ temos:

$$f(z) dz = \left(c_{-2} z^{-2} + w_1(z) \right) dz$$

onde $c_{-2} \neq 0$ e $w_1(z)$ é holomorfa em V . Já que

$$x_3(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f g dz = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z z f(z) dz = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left[c_{-2} z^{-1} + z w_1(z) \right] dz \quad (10-2)$$

e $x_3(z)$ está bem definida, segue que $c_{-2} \in \mathbb{R}^*$. Portanto:

$$\begin{cases} x_1 - ix_2 = -\frac{c_{-2}}{2} z^{-1} + \frac{c}{2} + \frac{z w_2(z)}{2} + \frac{\bar{z} \overline{w_3(z)}}{2} \\ x_3 = \text{const.} + c_{-2} \log |z| + O(|z|^2) \quad (|z| \rightarrow 0) \end{cases} \quad (10-3)$$

onde $w_i(z)$ são holomorfas e c é constante. Seja $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Então (para $|z|$ pequeno):

$$\begin{aligned} \rho^2 &= |x_1 - ix_2|^2 = \frac{|c_{-2}|^2}{4 |z|^2} + \left[-\left(\frac{c_{-2} \bar{c}}{4 z} \right) - \overline{\left(\frac{c_{-2} \bar{c}}{4 z} \right)} \right] + \frac{|c|^2}{4} - \\ &- \frac{c_{-2} \bar{z} \overline{w_2(0)}}{4 z} - \frac{\overline{c_{-2}} z w_2(0)}{4 \bar{z}} - \frac{c_{-2} w_3(0)}{4} - \frac{\overline{c_{-2}} \overline{w_3(0)}}{4} + O(|z|) = \\ &= \frac{|c_{-2}|^2}{4 |z|^2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{c_{-2} \bar{c}}{z} \right] + \frac{|c|^2}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{c_{-2} \overline{w_2(0)} \bar{z}}{z} \right] - \\ &- \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[c_{-2} w_3(0) \right] + O(|z|) \quad (10-4) \end{aligned}$$

³Como $c_{-1} = -\overline{c_{-3}} = 0$.

Mas pela primeira fórmula de (10-3) temos (para $|z|$ pequeno):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[(x_1 - ix_2) \bar{c} \right] &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{c_{-2} \bar{c}}{z} \right] + \frac{|c|^2}{2} + O(|z|) \implies \\ \implies \operatorname{Re} \left[\frac{c_{-2} \bar{c}}{z} \right] &= -2 \operatorname{Re} \left[(x_1 - ix_2) \bar{c} \right] + |c|^2 + O(|z|) \quad (10-5) \end{aligned}$$

Além disto, através da expressão (10-4), temos que (para $|z|$ pequeno):

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{|c_{-2}|^2}{4|z|^2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{c_{-2} \bar{c}}{z} \right] + \frac{|c|^2}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{c_{-2} \overline{w_2(0)} \bar{z}}{z} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[c_{-2} w_3(0) \right] + O(|z|) = \\ &= \frac{1}{|z|^2} \left\{ \frac{|c_{-2}|^2}{4} - \frac{|z|^2}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{c_{-2} \bar{c}}{z} \right] + \frac{|c|^2 |z|^2}{4} - \frac{|z|^2}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{c_{-2} \overline{w_2(0)} \bar{z}}{z} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{|z|^2}{2} \operatorname{Re} \left[c_{-2} w_3(0) \right] + O(|z|^3) \right\} \end{aligned}$$

Logo

$$\rho = \frac{1}{|z|} \sqrt{\frac{|c_{-2}|^2}{4} + O(|z|)}$$

Como, para $|z|$ pequeno, a raiz quadrada é limitada, obtemos:

$$\rho \leq \frac{M}{|z|}$$

onde $M \in \mathbb{R}_+$. Portanto, para $|z|$ pequeno:

$$|z| = O(\rho^{-1})$$

Juntando isto às expressões (10-4) e (10-5) obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{|c_{-2}|^2}{|z|^2} &= 4 \rho^2 - 4 \operatorname{Re} \left[(x_1 - ix_2) \bar{c} \right] + |c|^2 + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{c_{-2} \overline{w_2(0)} \bar{z}}{z} \right] + \\
 &\quad + 2 \operatorname{Re} \left[c_{-2} w_3(0) \right] + O(\rho^{-1}) = \\
 &= 4 \rho^2 \left\{ 1 - \frac{1}{\rho^2} \operatorname{Re} \left[(x_1 - ix_2) \bar{c} \right] + \frac{|c|^2}{4 \rho^2} + \frac{1}{2 \rho^2} \operatorname{Re} \left[\frac{c_{-2} \overline{w_2(0)} \bar{z}}{z} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2 \rho^2} \operatorname{Re} \left[c_{-2} w_3(0) \right] + O(\rho^{-3}) \right\} = \\
 &= 4 \rho^2 \left\{ 1 - \frac{1}{\rho^2} \operatorname{Re} \left[(x_1 - ix_2) \bar{c} \right] + O(\rho^{-2}) \right\} \quad (10-6)
 \end{aligned}$$

Tomando o logaritmo, usando⁴ que $\log(1 - a) = -a + O(a^2)$ e $a = \frac{O(|z|^{-1})}{\rho^2} = O(\rho^{-1})$, temos:

$$\begin{aligned}
 2 \log |c_{-2}| - 2 \log |z| &= \\
 &= \log(4) + 2 \log \rho + \log \left\{ 1 - \frac{1}{\rho^2} \operatorname{Re} \left[(x_1 - ix_2) \bar{c} \right] + O(\rho^{-2}) \right\} = \\
 &= \log(4) + 2 \log \rho - \frac{1}{\rho^2} \operatorname{Re} \left[(x_1 - ix_2) \bar{c} \right] + O(\rho^{-2})
 \end{aligned}$$

Então

$$\log |z| = \log |c_{-2}| - \log(2) - \log \rho + \frac{1}{2 \rho^2} \operatorname{Re} \left[(x_1 - ix_2) \bar{c} \right] + O(\rho^{-2}) \quad (10-7)$$

Substituindo (10-7) na segunda expressão de (10-3) chegamos a:

$$x_3 = \text{const} - c_{-2} \log \rho + \frac{c_{-2} \operatorname{Re} \left[(x_1 - ix_2) \bar{c} \right]}{2 \rho^2} + O(\rho^{-2}) \quad (10-8)$$

⁴Para $|z|$ pequeno, i.e., ρ grande.

para $|z|$ pequeno (i.e., ρ grande). Tome

$$\begin{cases} \alpha = -c_{-2} \\ \beta = \text{const} \\ \gamma_1 = \frac{c_{-2} \operatorname{Re}(c)}{2} \\ \gamma_2 = -\frac{c_{-2} \operatorname{Im}(c)}{2} \end{cases}$$

e o resultado segue.

Caso 2: N não injetiva

O passo a passo deste caso é muito semelhante ao caso 1, com pequenas modificações.

Se N não é injetiva, a menos de uma mudança de coordenadas, podemos assumir que $g(z) = z^n$ em V , $n \geq 2$, e $p = 0$. Além disto, já que $N(0) = (0, 0, -1)$ e N é contínua, podemos supor (diminuindo V se necessário) que $N(V)$ está contida no hemisfério (aberto) inferior de \mathbb{S}^2 .

Estenda $f(z)dz$ meromorficamente a p . Portanto

$$f(z) dz = \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} c_j z^j \right) dz$$

onde, para apenas um número finito de termos $j \leq -1$, temos $c_j \neq 0$.

Novamente:

$$2(x_1 - ix_2) = \int_{z_0}^z f dz - \overline{\int_{z_0}^z f g^2 dz} = \int_{z_0}^z f dz - \overline{\int_{z_0}^z f z^{2n} dz} \quad (10-9)$$

Como $x_1 - ix_2$ está bem definido, $c_{-1} = -\overline{c_{-1-2n}}$. Além disto, a métrica da superfície é dada por:

$$ds = \frac{(1 + |z|^2)}{2} |f dz|$$

Já que o fim é completo, $f dz$ tem que ter um pólo em $z = 0$. Como $c_{-1} = -\overline{c_{-1-2n}}$, sabemos que este pólo é de ordem ≥ 2 . Pela mesma demonstração feita no caso 1, p é pólo de ordem 2 de $f dz$. O mesmo vale para as 1-formas $\phi_1 dz$ e $\phi_2 dz$, que não terão resíduos pois $c_{-1} = -\overline{c_{-1-2n}} = 0$.

Como $n \geq 2$, segue que $\phi_3 dz = fg dz$ é holomorfa perto de $z = 0$. Usando também que $c_{-1} = -\overline{c_{-1-2n}} = 0$, chegamos a:

$$x_3(z) = \text{const} + O(|z|^2)$$

para $|z|$ pequeno. Pelo mesmo raciocínio usado no caso 1, vemos que $|z| = O(\rho^{-1})$. Logo

$$x_3 = \text{const} + O(\rho^{-2}) \quad (10-10)$$

para ρ grande. Tomando

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \text{const} \\ \gamma_1 = 0 \\ \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

o resultado segue. ■

Resumindo, obtemos o seguinte:

Definição 10.1.2 (Fim Plano e Catenoide) *Considere um fim mergulhado de uma superfície mínima completa de curvatura total finita. O fim é dito plano se $\alpha = 0$, e é dito catenoide se $\alpha \neq 0$. A constante α é chamada de crescimento logarítmico do fim.*

Pela demonstração feita acima, o crescimento logarítmico de um fim parametrizado numa vizinhança V de um ponto p é o resíduo da 1-forma $\phi_3(z)dz$ em p . Além disto, um fim mergulhado completo de curvatura total finita é um fim catenoide se e somente se a aplicação normal de Gauss N é injetiva (equivalentemente ele é um fim plano se e somente se N não é injetiva).

Observação 10.1.3 *A demonstração acima nos mostra que o termo $O(\rho^{-2})$ do enunciado do teorema 10.1.1 é da forma:*

$$O(\rho^{-2}) = \frac{a_1}{\rho^2} + \dots + \frac{a_n}{\rho^n} + \dots$$

De fato, ele é obtido por composições das integrais das séries de Laurent de fdz e fg^2dz com a série de Taylor do logaritmo⁵. Por razões óbvias, o mesmo vale para $O(\rho^{-1})$ quando englobamos o termo

$$\frac{(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2)}{\rho^2}$$

⁵O único passo mais sutil é quando escrevemos $|z| = O(\rho^{-1})$. Usando que a inversa de uma função analítica é analítica, vemos que este passo não cria problemas.

no resto.

10.2

Aplicação

Teorema 10.2.1 *A única superfície mínima completa de curvatura total finita com um fim mergulhado é o plano.*

Prova: Como a superfície possui um único fim, ela é dada por uma imersão mínima conforme $X : \hat{M} \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde \hat{M} é uma superfície de Riemann compacta e $p \in \hat{M}$ (vide o teorema 9.1.1). Denote o fim da superfície por $X(V \setminus \{p\})$, onde $V \subset \hat{M}$ é uma vizinhança de p .

Como o fim é mergulhado, existe um plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ tal que, fora de um compacto de Π , a superfície é um gráfico assintótico a um plano ou a um catenoide (vide teorema 10.1.1). A menos de uma rotação e translação em \mathbb{R}^3 , podemos supor que $\Pi = \{x_3 = 0\}$ e que o fim está acima do plano (isto é, a terceira coordenada dos pontos de $X(V \setminus \{p\})$ é positiva).

Observe que o restante da superfície é parametrizada por $X : (\hat{M} \setminus V) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Como $\hat{M} \setminus V$ é um compacto, este pedaço da superfície é limitado. Em particular, o ínfimo

$$\inf \left\{ x_3 : (x_1, x_2, x_3) \in X(\hat{M} \setminus V) \right\}$$

é finito e é assumido.

Então

$$\bar{t} := \inf \left\{ x_3 : (x_1, x_2, x_3) \in X(\hat{M} \setminus \{p\}) \right\}$$

existe e é assumido na superfície. De fato, como a imersão é contínua em ∂V e o fim está acima do plano $\{x_3 = 0\}$, o ínfimo da coordenada x_3 em $X(V \setminus \{p\})$ é maior ou igual ao ínfimo em $X(\hat{M} \setminus V)$.

Portanto a superfície está acima do plano $\{x_3 = \bar{t}\}$ e eles se tocam em algum ponto. Pelo princípio do máximo interior (vide 8.1.3), temos que a superfície é um plano. ■

Observação 10.2.2 *O teorema acima é falso se tirarmos a hipótese de curvatura total finita. Um contra-exemplo seria o helicóide.*

O corolário a seguir é feita de outra forma, mais trabalhosa, em Ref. 2, Capítulo 3.5, Exemplo 7. Isto é um bom indicador que toda a teoria construída até aqui é útil.

Corolário 10.2.3 *O fim da superfície de Enneper não é mergulhado (donde a superfície de Enneper tem auto-interseções).*

Prova: Como a superfície de Enneper é completa (vide 2.3.12), possui um único fim e a sua curvatura total é -4π , pelo teorema 10.2.1 este fim não pode ser mergulhado. ■

11

Teorema de Schoen

Como já vimos em 9.4.5, em 1981 Chen e Gackstatter descobriram uma superfície mínima similar à uma superfície de Enneper de gênero um. Após esta descoberta, muitos se perguntaram se era possível fazer o mesmo com outras superfícies mínimas — em particular, colocar uma alça em um catenoide, obtendo uma superfície mínima tipo catenoide de gênero um. Em 1983 Richard Schoen provou que isto era impossível: ele mostrou que as únicas superfícies mínimas completas com curvatura total finita e dois fins mergulhados são um par de planos ou um catenoide.

Neste capítulo provaremos alguns dos resultados obtidos por R. Schoen em Ref. 27. Entre eles, o resultado mencionado acima e outros em que simetrias do bordo de superfícies mínimas compactas são herdadas por toda a superfície. Para isto usaremos a classificação de fins mergulhados feita em 10.1.1 e os princípios do máximo geométricos interior e do bordo (vide 8.1.3 e 8.2.1).

11.1

Resultados de Simetria

Ao longo deste capítulo identificaremos \mathbb{R}^2 com $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Além disto, $M \subset \mathbb{R}^3$ será superfície mínima imersa, compacta e conexa, e $B := \partial M$ será seu bordo de classe C^2 . Supomos também que o espaço tangente de M esteja bem definido em B , e que M seja mergulhado em uma vizinhança do seu bordo (em particular B é mergulhado). Além disto, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ será um domínio convexo¹ limitado com bordo $\partial\Omega$.

Denotaremos por $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção $p(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ e $\Pi_t := \{x_3 = t\}$. Portanto $\Pi_0 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Diremos que um conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é gráfico quando a sua projeção em $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ é injetiva.

Definição 11.1.1 (Inclinação Localmente Limitada) *Seja S o fecho de uma subvariedade de \mathbb{R}^3 (i.e., uma superfície ou curva). Dizemos que S tem inclinação localmente limitada se o plano tangente $T_p S$ não contém o vetor vertical unitário $v = (0, 0, 1)$, para qualquer ponto p no interior de S .*

¹Em particular Ω é simplesmente conexo.

Observação 11.1.2 *Note que existe variedade analítica que é gráfico de uma função f , onde f não é nem de classe C^1 . Por exemplo, tome $f(x_1) = (x_1)^{\frac{1}{3}}$, $x_1 \in \mathbb{R}$. O gráfico de f é variedade analítica (pois $x_1 = x_2^3$), mas f não possui derivada bem definida em $x = 0$. Em particular, como a origem é ponto interior do gráfico de f , ele não possui inclinação localmente limitada.*

Sejam A e B subconjuntos de \mathbb{R}^3 . Denotaremos $A \geq B$ quando, $\forall (x_1, x_2)$ com $(p^{-1}(x_1, x_2) \cap A) \neq \emptyset$ e $(p^{-1}(x_1, x_2) \cap B) \neq \emptyset$, temos todos os pontos de $(p^{-1}(x_1, x_2) \cap A)$ acima de todos os pontos de $(p^{-1}(x_1, x_2) \cap B)$. Em outras palavras, se $(x_1, x_2, x_3) \in A$ e $(x_1, x_2, y_3) \in B$ então $x_3 \geq y_3$.

Para qualquer conjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ e $\forall t \in \mathbb{R}$ denotaremos por Σ_{t+} a parte de Σ acima de ou em Π_t , i.e.,

$$\Sigma_{t+} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma : x_3 \geq t\}$$

Analogamente Σ_{t-} denota os pontos de Σ abaixo de ou em Π_t . Denotaremos também por Σ_{t+}^* a reflexão de Σ_{t+} através de Π_t , ou seja,

$$\Sigma_{t+}^* = \{(x_1, x_2, 2t - x_3) : (x_1, x_2, x_3) \in \Sigma_{t+}\}$$

Observe que, se $A_{t+} \geq B_{t+}$, então $A_{t+}^* \leq B_{t+}^*$.

Por fim, note que a reflexão de uma superfície mínima também é mínima pois reflexões são isometrias de \mathbb{R}^3 , e assim preservam minimalidade.

Teorema 11.1.3 *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ superfície mínima imersa, compacta² e conexa com bordo $\partial M =: B$ de classe C^2 (não necessariamente conexo). Suponha que M é mergulhada em uma vizinhança de B_{0+} e que o espaço tangente de M em B_{0+} esteja bem definido³. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domínio convexo limitado com bordo $\partial\Omega$. Suponha que B satisfaz:*

1. $B \subset (\partial\Omega) \times \mathbb{R}$;
2. B_{0+} é gráfico de inclinação localmente limitada;
3. $B_{0+}^* \geq B_{0-}$.

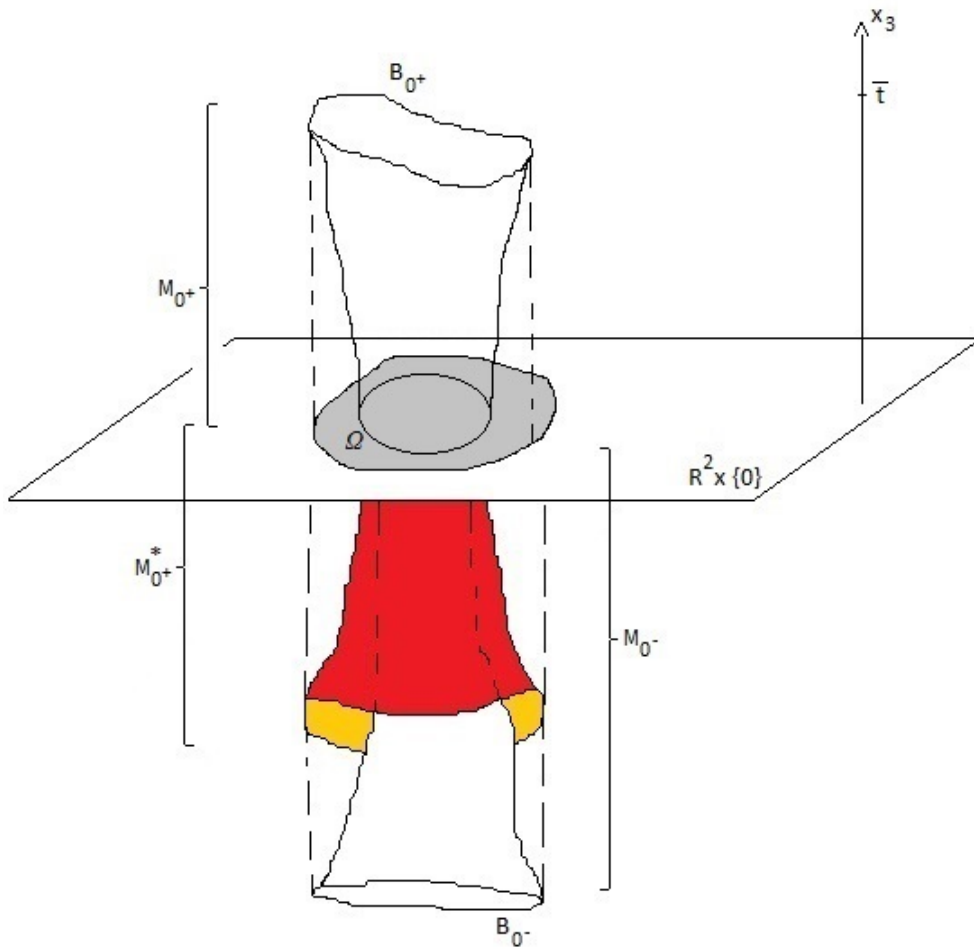
Então M satisfaz:

1. M_{0+} é gráfico de inclinação localmente limitada;

²Logo é propriamente imersa.

³Em particular, não pode ocorrer algo como na figura 8.1, onde duas superfícies diferentes se encontram em B_{0+} . De fato, como o espaço tangente de M está bem definido em B_{0+} e M é mergulhada em uma vizinhança deste bordo, ambas teriam o mesmo espaço tangente e elas só se tocariam no bordo. Então basta usar o princípio do máximo do bordo 8.2.1 para ver que as duas superfícies seriam iguais.

$$2. M_{0+}^* \geq M_{0-}$$



Prova: Antes de mais nada, note que, pela primeira condição sobre B , segue que $M \subset (\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ e $M \cap (\partial\Omega \times \mathbb{R}) = B$ (vide a propriedade do fecho convexo 8.3.1).

Como B_{0+} é gráfico e $B_{0+}^* \geq B_{0-}$, segue que $B_{t+}^* \geq B_{t-}$, $\forall t \geq 0$. De fato, se B_{0+} é gráfico, é claro que B_{t+} também é, pois a condição de injetividade de p tem que ser satisfeita apenas por um subconjunto de pontos de B_{0+} . Além disto, se $(x_1, x_2, x_3) \in B_{0+}$ e $(x_1, x_2, \tilde{x}_3) \in B_{0-}$, segue que $-x_3 \geq \tilde{x}_3$. Como $\forall t \geq 0$ temos $2t - x_3 \geq -x_3 \geq \tilde{x}_3$, então $B_{t+}^* \geq B_{0-}$, $\forall t \geq 0$. Por fim, se $(x_1, x_2, x_3) \in (B_{0+} \cap B_{t-})$, então não existe nenhum ponto $(x_1, x_2, \bar{x}_3) \in (B_{0+} \cap B_{t+})$, senão B_{0+} não seria gráfico.

Seja

$$\bar{t} := \max_{(x_1, x_2, x_3) \in B} x_3$$

Se $\bar{t} \leq 0$ então, pela propriedade do fecho convexo (vide teorema 8.3.1), M_{0+} não tem pontos interiores ou M_{0+} é uma região de Π_0 . Em ambos os casos o teorema é verdadeiro.

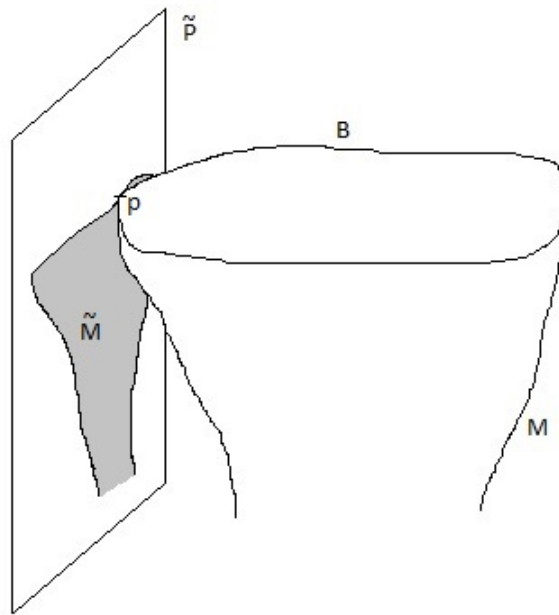
Suponha então $\bar{t} > 0$. Seja T o conjunto dos valores $t \in [0, \bar{t}]$ tal que M_{t+} é gráfico com inclinação localmente limitada e $M_{t+}^* \geq M_{t-}$. Em outras palavras, T é o conjunto de valores de t para os quais o teorema é verdadeiro trocando Π_0 por Π_t . Queremos mostrar que $0 \in T$.

Este é o chamado processo de Alexandrov: vamos começar com o plano $\Pi_{\bar{t}}$ e descer ele até Π_0 (i.e., diminuir o valor de t de \bar{t} até 0). Vamos ver que sempre que descemos a afirmação do teorema continua verdadeira, i.e., que continuamos com $t \in T$. Dito de outra forma, vamos mostrar que T é um subconjunto aberto e fechado de $[0, \bar{t}]$, donde $T = [0, \bar{t}]$ pois não é vazio.

Seja $t > 0$, $t \in T$. Vamos provar primeiro que qualquer ponto de $M \cap \Pi_t$ é ponto de inclinação finita de M , i.e., que $v = (0, 0, 1) \notin T_p M$, $\forall p \in M \cap \Pi_t$.

Caso 1: $p \in (B \cap \Pi_t)$

Suponha por absurdo que $v \in T_p M$. Como B_{0+} tem inclinação localmente limitada, $v \notin T_p B$. Logo $T_p M = T_p(\partial\Omega \times \mathbb{R})$. Pegue plano vertical \tilde{P} tangente a B em p tal que $T_p M = \tilde{P}$.



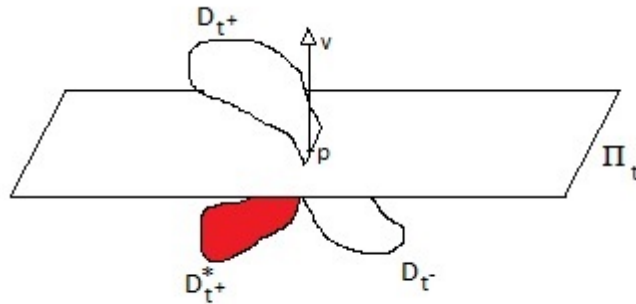
Pela convexidade de $\partial\Omega$ e pelo princípio do máximo do bordo (vide 8.2.1) aplicado⁴ a \tilde{P} e M em p , M é superfície plana contida em \tilde{P} . Absurdo, pois $B \subset M$ tem pontos fora de \tilde{P} .

⁴No enunciado de 8.2.1 ambas as superfícies deveriam ter o mesmo bordo, o que não ocorre neste caso. Para consertar isto, observe que M , numa vizinhança de p , pode ser escrita como gráfico sobre \tilde{P} (e obviamente \tilde{P} é gráfico sobre si mesmo). Chamaremos a projeção deste pedaço de M sobre \tilde{P} de \tilde{M} . Aplique então o princípio do máximo do bordo 8.2.1 em \tilde{M} e no pedaço de M que é gráfico sobre \tilde{M} . Observe que isto pode ser feito pois ambos são gráficos sobre o mesmo domínio \tilde{M} .

Caso 2: $p \in (M \cap \Pi_t)$ ponto interior

Como M é propriamente imersa, podemos pegar uma vizinhança de p que seja mergulhada. Seja $D \subset M$ um disco aberto mergulhado contendo p .

Já que $t \in T$, temos $D_{t+}^* \geq D_{t-}$ (pois $D \subset M$). Se $v \in T_p D$, então os semi-discos D_{t+}^* e D_{t-} se encontram tangencialmente num bordo contendo p .



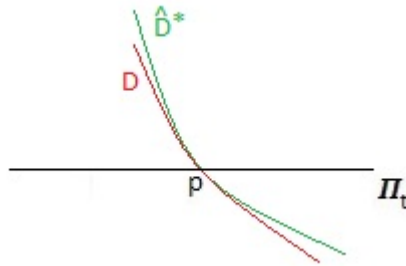
Como ambos os semi-discos são superfícies mínimas, pelo princípio do máximo do bordo (vide 8.2.1) temos $D_{t+}^* = D_{t-}$. Portanto, como M_{t+}^* e M_{t-} coincidem em um aberto e M é conexa, M é invariante por reflexão através de Π_t (isto é, $M_{t+}^* = M_{t-}$). Em particular $B_{t+}^* = B_{t-}$.

Seja $(x_1, x_2, x_3) \in B_{t+} \subset B_{0+}$. Vamos olhar a reflexão deste ponto através do plano Π_t . Se $(x_1, x_2, 2t - x_3) \in (B_{t-} \cap B_{0+})$ então B_{0+} não seria gráfico sobre $\partial\Omega$, absurdo. Logo $(x_1, x_2, 2t - x_3) \in B_{0-}$. Mas como $B_{0+}^* \geq B_{0-}$, temos $-x_3 \geq 2t - x_3$, absurdo. Portanto $v \notin T_p M$.

Vamos mostrar agora que M não tem nenhum ponto de auto-interseção em Π_t .

Suponha por absurdo que $p \in M \cap \Pi_t$ é ponto de auto-interseção de M . Como a superfície é mergulhada perto de B_{0+} (por hipótese), podemos assumir que p é ponto interior de M . Sejam D e \hat{D} dois discos abertos mergulhados em M , $p \in (D \cap \hat{D})$, $D \not\subset \hat{D}$ e $\hat{D} \not\subset D$ (i.e., os dois discos são realmente distintos).

Como $t \in T$ e os discos estão em M , temos (em particular) $D_{t+}^* \geq \hat{D}_{t-}$ e $\hat{D}_{t+}^* \geq D_{t-}$. Refletindo os conjuntos da primeira desigualdade através de Π_t obtemos $\hat{D}_{t-}^* = (\hat{D}^*)_{t+} \geq D_{t+}$ e $\hat{D}_{t+}^* = (\hat{D}^*)_{t-} \geq D_{t-}$. Segue então que $\hat{D}^* \geq D$.



Como $p \in (\hat{D} \cap D)$ e $p \in \Pi_t$, então $p \in (\hat{D}^* \cap D)$. Pelo princípio do máximo interior aplicado⁵ a D e \hat{D}^* no ponto p (vide 8.1.3), temos $\hat{D}^* = D$. Logo M^* coincide com M em um aberto. Como M é conexa, segue que $M^* = M$. Mas isto novamente contradiz a hipótese que B_{0+} é gráfico ou que $B_{0+}^* \geq B_{0-}$.

Provamos até aqui que M não tem nenhum ponto de auto-interseção em Π_t , donde qualquer $p \in (M \cap \Pi_t)$ é ponto mergulhado de M e é ponto de inclinação finita (pois $v \notin T_p M$). Com isto, iremos provar que T é aberto, i.e., que $\forall t \in T$, $t > 0$, existe vizinhança de t em T .

Vamos mostrar que $\exists \epsilon_0 > 0$ tal que, $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0]$, o conjunto dos pontos de M ϵ -próximos de Π_t na coordenada x_3 , dado por

$$U_\epsilon := M \cap \{|x_3 - t| < \epsilon\}$$

é um gráfico com inclinação localmente limitada sobre um subconjunto de $\overline{\Omega} \times \{0\}$.

Primeiro vamos pegar ϵ_0 pequeno de forma que U_{ϵ_0} seja gráfico sobre $\overline{\Omega}$ e que cada componente conexa de U_{ϵ_0} intersecte o plano Π_t . Observe que, se isto for verdade pra ϵ_0 , então é verdade para qualquer $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$.

Como M é compacta, ela é propriamente imersa em \mathbb{R}^3 . Logo M não pode ter sequência de componentes conexas se aproximando do plano Π_t sem tocá-lo. Portanto, para ϵ_0 suficientemente pequeno, todas as componentes conexas de U_{ϵ_0} intersectam Π_t .

Já que toda componente conexa de U_{ϵ_0} tem um ponto em Π_t , pela continuidade de M (e diminuindo ϵ_0 se necessário) temos que U_{ϵ_0} possui inclinação localmente limitada.

Suponha que U_{ϵ_0} não seja gráfico. Seja Σ o conjunto de pontos de $\overline{\Omega}$ tal que $\overline{U_{\epsilon_0}}$ não é gráfico em cima deles. Em outras palavras

$$\Sigma := \left\{ (x_1, x_2) \in \overline{\Omega} : \exists x_3, \tilde{x}_3 \text{ distintos com } (x_1, x_2, x_3) \in \overline{U_{\epsilon_0}} \text{ e } (x_1, x_2, \tilde{x}_3) \in \overline{U_{\epsilon_0}} \right\}$$

⁵Note que, se $T_p \hat{D}^* \neq T_p D$, então $\hat{D}^* \not\geq D$.

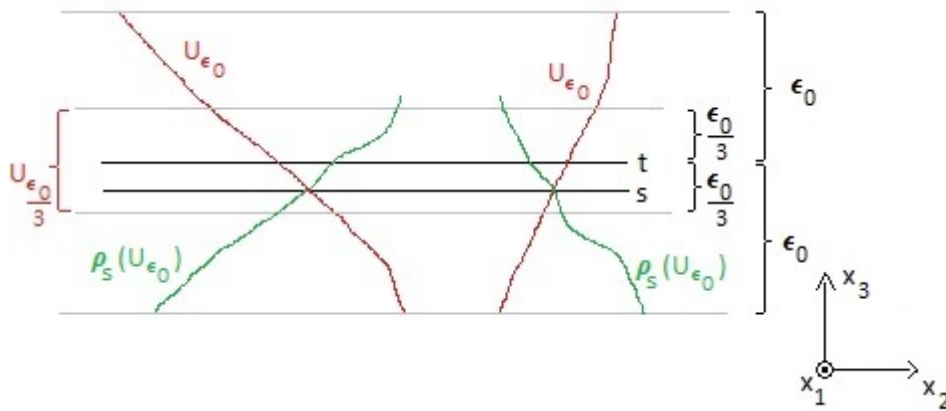
Observe que Σ é fechado (pois $\overline{U_{\epsilon_0}}$ é compacta, M é mergulhada em uma vizinhança de Π_t e U_{ϵ_0} tem inclinação localmente limitada) e limitado (pois $\Sigma \subset \overline{\Omega}$), donde Σ é compacto. Seja $h : \Sigma \rightarrow (0, 2\epsilon_0]$ a função contínua que pega um ponto $(x_1, x_2) \in \Sigma$ e nos dá a menor distância entre os pontos acima dele em $\overline{U_{\epsilon_0}}$, ou seja

$$h(x_1, x_2) = \min_{(x_1, x_2, x_3) \text{ e } (x_1, x_2, \tilde{x}_3) \in \overline{U_{\epsilon_0}}} |x_3 - \tilde{x}_3|$$

Como h é função contínua em um compacto, ela assume mínimo não nulo. Tomando ϵ_0 menor que este mínimo temos que U_{ϵ_0} é gráfico.

Seja $s \in (0, t]$ com $|s - t| < \frac{\epsilon_0}{3}$. Queremos mostrar que $M_{s+}^* \geq M_{s-}$. Se $s \geq t$ o resultado segue de $2s - x_3 \geq 2t - x_3$. Suponha então $s < t$.

Denotemos por ρ_s a reflexão através de Π_s .



Pela escolha de s , temos que $\rho_s(U_{\frac{\epsilon_0}{3}}) \subset \{|x_3 - t| < \epsilon_0\}$. Como U_{ϵ_0} é gráfico, temos:

$$\rho_s(M_{s+} \cap U_{\frac{\epsilon_0}{3}}) > M_{s-} \quad (11-1)$$

Por outro lado, o conjunto

$$(M_{s+} \setminus U_{\frac{\epsilon_0}{3}}) = M_{s+} \cap \left\{ |x_3 - t| \geq \frac{\epsilon_0}{3} \right\} \subset M_{t+}$$

é compacto (pois é interseção de um compacto com um fechado) satisfazendo⁶

$$\rho_t(M_{s+} \setminus U_{\frac{\epsilon_0}{3}}) \cap M_{t-} = \emptyset$$

Pela continuidade de ρ_t em t e da função distância entre estes dois

⁶Temos $t \in T$, $t > 0$. Se tivessem interseção, ela seria no interior de M pois $B_{0+}^* \geq B_{0-}$. Assim, pelo princípio do máximo interior (vide 8.1.3), seguiria que $M_{t+}^* = M_{t-}$. Mas neste caso teríamos novamente uma contradição com B_{0+} gráfico ou $B_{0+}^* \geq B_{0-}$.

compactos, se s é suficientemente próximo de t , temos:

$$\rho_s(M_{s+} \setminus U_{\frac{\epsilon_0}{3}}) \cap M_{s-} = \emptyset$$

Logo, usando (11-1), vale:

$$\rho_s(M_{s+}) \cap M_{s-} = \emptyset \quad (11-2)$$

Afirmamos que

$$\rho_s(M_{s+} \setminus U_{\frac{\epsilon_0}{3}}) > M_{s-} \quad (11-3)$$

De fato, suponha por absurdo que existam pontos $(x_1, x_2, x_3) \in (M_{s+} \setminus U_{\frac{\epsilon_0}{3}})$ e $(x_1, x_2, \tilde{x}_3) \in M_{s-}$ com $(2s - x_3) \leq \tilde{x}_3$. Portanto, para algum $\tilde{s} \in (s, t)$ teríamos igualdade, i.e., um ponto na interseção (basta usar que $2t - x_3 \geq \tilde{x}_3$ e o teorema do valor intermediário). Mas então $|\tilde{s} - t| < \frac{\epsilon_0}{3}$ e $(\rho_{\tilde{s}}(M_{\tilde{s}+}) \cap M_{\tilde{s}-}) \neq \emptyset$, o que contradiz (11-2). Logo a inequação (11-3) vale.

Por (11-1) e (11-3) temos $\rho_s(M_{s+}) \geq M_{s-}$ para s suficientemente próximo de t . Além disto, vimos que M_{s+} tem inclinação localmente limitada. Sabemos também que $U_{\epsilon_0} \cap M_{s+}$ e M_{t+} são gráficos. Vamos ver que M_{s+} é gráfico.

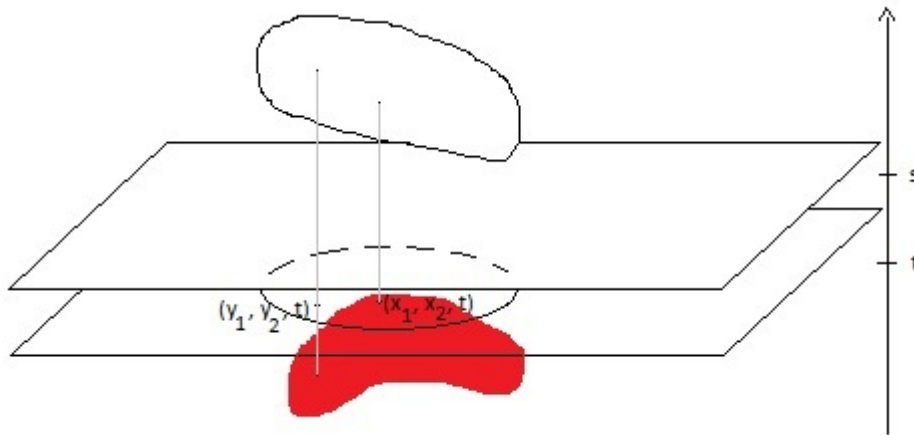
Se M_{s+} não for gráfico, queremos diminuir ϵ_0 de forma que s fique ainda mais próximo de t e, desta forma, M_{s+} seja gráfico. Suponha por absurdo que isto não seja possível, i.e., que para qualquer s com $(t - \epsilon_0) < s < t$ existam pontos $(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}) \in M$ e $(x_{1s}, x_{2s}, \tilde{x}_{3s}) \in M$ com $s \leq x_{3s} < t$ e $\tilde{x}_{3s} \geq (t + \epsilon_0)$. Tomando sequência $s_n \rightarrow t$ e subsequências convergentes (pois estão em compactos) de $(x_{1s_n}, x_{2s_n}, x_{3s_n}) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$ e $\tilde{x}_{3s_n} \rightarrow \tilde{x}_3$ (se necessário tome sub-sub-sequência para garantir a convergência de \tilde{x}_{3s_n}) de forma que $(x_1, x_2, x_3) \in M_{t+}$ e $(x_1, x_2, \tilde{x}_3) \in M_{t+}$. Além disto, $x_3 \leq t$ e $\tilde{x}_3 \geq t + \epsilon_0$, donde são distintos. Portanto M_{t+} não é gráfico, absurdo.

Até agora vimos que T é aberto, logo podemos começar o processo de Alexandrov e baixar t de \bar{t} para algum valor menor. Falta ver que o processo de Alexandrov não para até chegar em $t = 0$, i.e., que T é fechado. Suponha $(t, \bar{t}) \subset T$, onde $t \in [0, \bar{t})$. Queremos mostrar que $t \in T$.

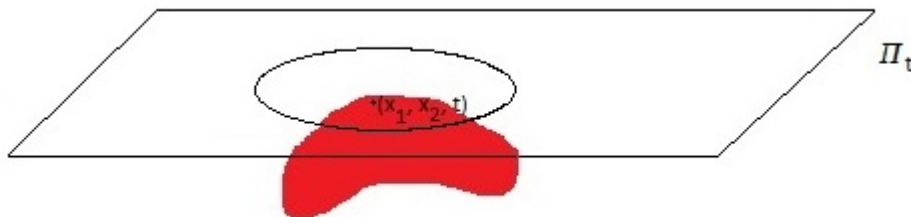
Primeiro vamos provar que M_{t+} é gráfico. Observe que, se $(x_1, x_2, x_3) \in M_{t+}$ e $(x_1, x_2, \tilde{x}_3) \in M_{t+}$ com $x_3 > \tilde{x}_3$, então $\tilde{x}_3 = t$ (pois $\forall s \in (t, \bar{t}]$ temos $s \in T$, donde M_{s+} é gráfico). Como B_{0+} é gráfico, segue que $(x_1, x_2) \in \Omega$, i.e., (x_1, x_2, t) é ponto interior de M . Já que M tem inclinação finita em (x_1, x_2, x_3) (pois $x_3 > t$), então em uma vizinhança de (x_1, x_2, x_3) a superfície M é gráfico⁷ sobre uma vizinhança de (x_1, x_2, t) . Logo, para $(y_1, y_2, t) \in \Pi_t$ suficientemente próxima de (x_1, x_2, t) temos que $(p^{-1}(y_1, y_2) \cap M_{s+})$ contém um ponto perto

⁷Pelo teorema da função implícita.

de (x_1, x_2, x_3) , onde $s = t + \epsilon$, $\epsilon > 0$. Como $s \in T$, este é o único ponto de $p^{-1}(y_1, y_2) \cap M_{s+}$.



Tomando sequência $s_n \rightarrow t$, $s_n > t$, vemos que existe vizinhança de (x_1, x_2, t) em $M \cap \Pi_{t-}$. De fato, se em qualquer vizinhança de (x_1, x_2, t) em M existir \tilde{p} com $\tilde{p}_3 > t$, então para algum $s > t$ teríamos que M_{s+} não é gráfico.



Aplicando o princípio do máximo interior (vide 8.1.3) a esta vizinhança e a Π_t , temos que $M \subset \Pi_t$ (pois M é conexa), donde $B \subset \Pi_t$. Mas existe ponto de B em $\Pi_{\bar{t}}$, e $\bar{t} > t$ por hipótese. Como os planos Π_t são todos paralelos entre si, temos um absurdo. Logo M_{t+} é gráfico. Como qualquer ponto interior de M_{t+} é ponto interior de M_{s+} , para algum $s > t$, segue que M_{t+} tem inclinação localmente limitada.

Falta ver que $M_{t+}^* \geq M_{t-}$. De fato, se não fosse verdade, existiriam pontos $(x_1, x_2, x_3) \in M_{t+}$ e $(x_1, x_2, y_3) \in M_{t-}$ com $2t - x_3 < y_3$. Como $y_3 \leq t$, temos $x_3 > t$. Neste caso, para $t < s < x_3$ não teríamos $M_{s+}^* \geq M_{s-}$, absurdo. ■

Se, no enunciado do teorema acima, exigirmos que B seja a união de duas curvas em planos paralelos disjuntos ortogonais a Π_0 , então não precisamos do conjunto Ω .

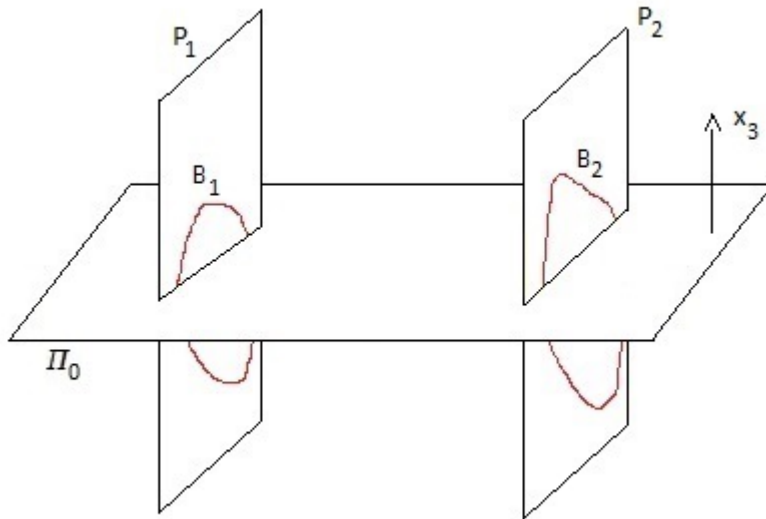
Teorema 11.1.4 *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ superfície mínima imersa, compacta e conexa com bordo $\partial M =: B$ de classe C^2 . Suponha que M é mergulhada em uma*

vizinhança de B_{0+} e que o espaço tangente de M em B_{0+} esteja bem definido. Suponha que $B = B^1 \cup B^2$, onde as curvas simples fechadas B^i estão em planos paralelos distintos P_i , $i = 1, 2$. Assuma que os planos P_i são ortogonais ao plano Π_0 . Suponha que B satisfaz:

1. B_{0+} é gráfico de inclinação localmente limitada;
2. $B_{0+}^* \geq B_{0-}$.

Então M satisfaz:

1. M_{0+} é gráfico de inclinação localmente limitada;
2. $M_{0+}^* \geq M_{0-}$.



Prova: A demonstração é a mesma do teorema anterior, com duas pequenas mudanças.

A primeira ocorre quando demonstramos que $p \in (B \cap \Pi_t)$ é ponto de inclinação finita. O raciocínio é o mesmo, mas agora temos que $T_p M = P_i$, onde $p \in B^i$. Como a superfície está em um lado do plano P_i (pois está no fecho convexo de B , vide 8.3.1), podemos repetir o argumento substituindo \tilde{P} por P_i .

A outra mudança é na prova de que U_ϵ é gráfico de inclinação localmente limitada. Agora a superfície será um gráfico sobre um subconjunto de $\text{Conv}(B) \cap \Pi_0$ (vide 8.3.1, 1.1.43 e 1.1.44), e este conjunto é compacto, pois é interseção de um compacto com um fechado. Usando estas observações, o resto do argumento é idêntico. ■

11.2

Um Teorema de Unicidade para Superfícies Mínimas Completas

Lema 11.2.1 *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima completa imersa de curvatura total finita. Se M tem apenas dois fins, ambos mergulhados, então ambos são fins planos (crescimento logarítmico $\alpha = 0$ em 10.1.1) ou eles são paralelos entre si. Caso os fins sejam paralelos podemos expandir ambos no mesmo sistema de coordenadas. Neste caso, se α_1 e α_2 denotarem o crescimento logarítmico dos fins, temos $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ e nenhum deles é zero (ou seja, ambos são fins catenoides).*

Prova: Tome dois sistemas de coordenadas X e Y de forma que os fins sejam dados por:

$$\begin{cases} x_3 = u_1(x_1, x_2) = \alpha_1 \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \beta_1 + \frac{\gamma_{x,1}x_1 + \gamma_{x,2}x_2}{x_1^2 + x_2^2} + O\left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right) \\ y_3 = u_2(y_1, y_2) = \alpha_2 \log \sqrt{y_1^2 + y_2^2} + \beta_2 + \frac{\gamma_{y,1}y_1 + \gamma_{y,2}y_2}{y_1^2 + y_2^2} + O\left(\frac{1}{y_1^2 + y_2^2}\right) \end{cases}$$

Seja $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformação linear ortogonal que leva o sistema de coordenadas Y em X , i.e.,

$$X = AY$$

onde $X = (x_1, x_2, x_3)^T$, $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$, $A = (a_{ij}) \in O(3, \mathbb{R})$.

Seja $b = (b_1, b_2, b_3)$ um vetor qualquer (que escolheremos depois) e considere a função $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(X) = \langle b ; X \rangle = \sum_{i=1}^3 (b_i x_i) = \langle b ; AY \rangle$$

Como M é superfície mínima, as suas coordenadas x_i são harmônicas (vide 3.1.2), donde $h|_M$ é harmônica (pois $\Delta h(X) = \langle b ; \Delta X \rangle = 0$).

Para $R > 0$ grande, seja M^R a parte compacta de M limitada pelos cilindros verticais de raio R sobre os planos limites dos dois fins, i.e.,

$$M^R := \left\{ (x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) \in M : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 \text{ ou } y_1^2 + y_2^2 \leq R^2 \right\}$$

Logo (aumentando R se necessário)

$$\partial M^R = C_R^1 \cup C_R^2$$

onde

$$\begin{cases} C_R^1 = \left\{ (x_1, x_2, u_1(x_1, x_2)) : x_1^2 + x_2^2 = R^2 \right\} \\ C_R^2 = \left\{ (y_1, y_2, u_2(x_1, x_2)) : y_1^2 + y_2^2 = R^2 \right\} \end{cases}$$

Podemos parametrizar os bordos C_R^i em coordenadas cilíndricas por⁸:

$$C_R^i(R, \theta) = \left(R \cos \theta, R \sin \theta, \alpha_i \log R + \beta_i + O(R^{-1}) \right)$$

onde $i = 1, 2$ e o resto é da forma

$$O(R^{-1}) = \frac{\gamma_1 \cos \theta + \gamma_2 \sin \theta}{R} + S(R, \theta)$$

onde, fixado θ , o termo $S(R, \theta)$ é uma série de Laurent em R (vide a observação 10.1.3). Em particular, neste caso específico temos:

$$\frac{\partial}{\partial R} O(R^{-1}) = O(R^{-2})$$

Então os vetores unitários n_i tangentes a M e normais a C_R^i são:

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{\partial}{\partial R} C_R^i(R, \theta) = \frac{\partial}{\partial R} \left(R \cos \theta, R \sin \theta, \alpha_i \log R + \beta_i + O(R^{-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{R} \left(R \cos \theta, R \sin \theta, \alpha_i + O(R^{-1}) \right) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} n_1 = \frac{1}{R} \left(x_1, x_2, \alpha_1 + O(R^{-1}) \right) \\ n_2 = \frac{1}{R} \left(y_1, y_2, \alpha_2 + O(R^{-1}) \right) \end{cases}$$

Já que h é harmônica ($\Delta h = \operatorname{div}(\vec{\nabla} h) = 0$), pelo teorema da divergência temos ($\forall R > 0$ suficientemente grande):

$$0 = \iint_{M^R} \operatorname{div}(\vec{\nabla} h) dS = \int_{\partial M^R} \langle \vec{\nabla} h; \vec{n} \rangle ds = \int_{C_R^1} \frac{\partial h}{\partial n_1} ds + \int_{C_R^2} \frac{\partial h}{\partial n_2} ds$$

Tomando $R \rightarrow +\infty$ (podemos pois as condições do bordo de ∂M^R continuam sendo satisfeitas) e usando novamente coordenadas cilíndricas,

⁸Para $R \rightarrow +\infty$.

temos:

$$\begin{aligned}
 \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^1} \langle \vec{\nabla} h ; \vec{n}_1 \rangle ds &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^1} \langle b ; \vec{n}_1 \rangle ds = \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \left(b_1 R \cos \theta + b_2 R \sin \theta + b_3 \alpha_1 + O(R^{-1}) \right) R d\theta = \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} 2\pi \left(b_3 \alpha_1 + O(R^{-1}) \right) = 2\pi b_3 \alpha_1
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^2} \langle \vec{\nabla} h ; \vec{n}_2 \rangle ds &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^2} \langle bA ; \vec{n}_2 \rangle ds = \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \left((bA)_1 R \cos \theta + (bA)_2 R \sin \theta + (bA)_3 \alpha_2 + O(R^{-1}) \right) R d\theta = \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} 2\pi \left((bA)_3 \alpha_2 + O(R^{-1}) \right) = 2\pi (bA)_3 \alpha_2 = 2\pi \sum_{i=1}^3 (b_i a_{i3} \alpha_2)
 \end{aligned}$$

onde bA é o produto de matrizes usual (b é vetor 1×3 e A é matriz 3×3) e $(bA)_j$ é a j -ésima coluna de bA .

Portanto

$$b_3 \alpha_1 + \sum_{i=1}^3 (b_i a_{i3} \alpha_2) = 0 \quad (11-4)$$

para qualquer $b \in \mathbb{R}^3$. Agora vamos escolher o vetor b .

Tomando $b_3 = 0$ e b_1, b_2 quaisquer, temos

$$\begin{cases} a_{13} \alpha_2 = 0 \\ a_{23} \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Caso 1: $\alpha_2 = 0$

Tomando b com $b_3 \neq 0$ temos $\alpha_1 = 0$, donde ambos os fins são planos.

Caso 2: $\alpha_2 \neq 0$

Neste caso $a_{13} = a_{23} = 0$. Como $A \in O(3, \mathbb{R})$, todas as suas linhas e colunas são vetores unitários. Portanto $a_{33} = \pm 1$, donde $a_{31} = a_{32} = 0$.

Logo $x_3 = \pm y_3$ e A é uma rotação⁹ no plano $\{y_3 = 0\}$. Podemos então tomar $X = Y$, donde $A = I$. Neste caso (11-4) se torna, $\forall b \in \mathbb{R}^3$

$$b_3(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \quad \therefore \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

Como supomos $\alpha_2 \neq 0$, temos $\alpha_1 \neq 0$. Portanto ambos os fins são catenoides. ■

O principal resultado do capítulo é o seguinte:

Teorema 11.2.2 (de Schoen) *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ superfície mínima imersa, conexa, completa de curvatura total finita com apenas dois fins, ambos mergulhados. Então M é um par de planos ou um catenoide.*

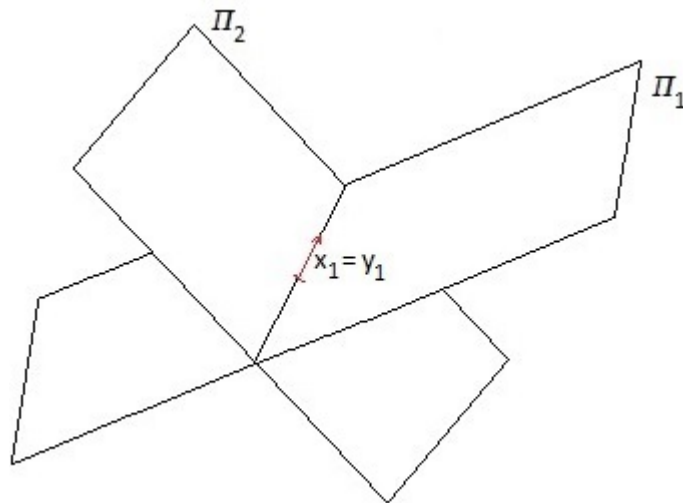
Prova: Sejam Π_1 e Π_2 os planos sobre os quais os dois fins são gráficos.

Caso 1: Π_1 e Π_2 não são paralelos

Pelo lema 11.2.1, ambos os fins são planos. Logo

$$\begin{cases} x_3 = u_1(x_1, x_2) = \beta_1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \\ y_3 = u_2(y_1, y_2) = \beta_2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}\right) \end{cases}$$

em sistemas de coordenadas apropriados. A menos de uma translação e rotação em \mathbb{R}^3 podemos supor $\beta_1 = \beta_2 = 0$ e $x_1 = y_1$ (ou seja, os eixos x_1 e y_1 estão em $\Pi_1 \cap \Pi_2$ com a mesma orientação).



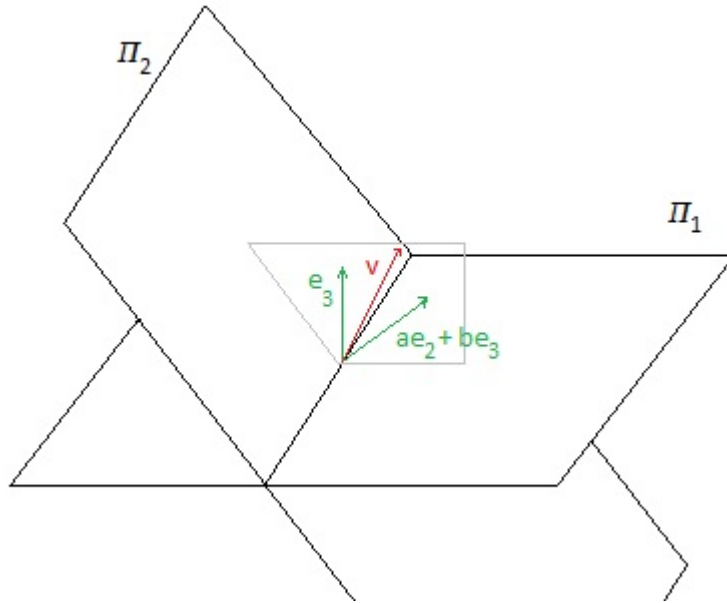
⁹Ela leva os eixos y_1 e y_2 em x_1 e x_2 ou em x_2 e x_1 , dependendo do sinal de $x_3 = \pm y_3$.

Sejam $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{e_1, d_2, d_3\}$ bases ortonormais correspondentes aos sistemas de coordenadas X e Y , respectivamente. Então $d_3 = ae_2 + be_3$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$ e $a \neq 0$ (pois Π_1 e Π_2 não são paralelos). Logo:

$$\begin{cases} \Pi_1 = \{x_3 = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) : \langle (x_1, x_2, x_3) ; e_3 \rangle = 0\} \\ \Pi_2 = \{y_3 = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) : \langle (x_1, x_2, x_3) ; (ae_2 + be_3) \rangle = 0\} \end{cases}$$

Tome o vetor unitário:

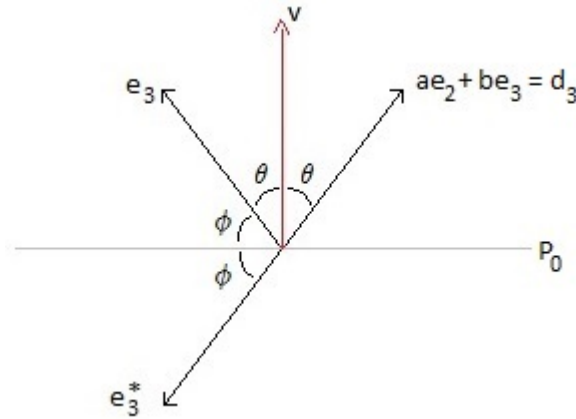
$$v := \frac{ae_2 + (b+1)e_3}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} = \frac{e_3 + d_3}{\|e_3 + d_3\|}$$



Defina

$$P_t := \{(x_1, x_2, x_3) : \langle (x_1, x_2, x_3) ; v \rangle = t\}$$

para $t \in \mathbb{R}$. Todos os planos desta família são ortogonais a v e, variando t , o plano P_t sobe ou desce na direção de v . Observe que, como d_3 e e_3 são vetores unitários, ambos fazem o mesmo ângulo com o vetor v (isto é, v é a bissetriz do ângulo entre e_3 e d_3). Denotando por e_3^* e d_3^* a reflexão dos vetores e_3 e d_3 através do plano P_0 , temos:



Pela figura acima, vemos que $e_3^* = -d_3$ e $d_3^* = -e_3$. Além disto, sabemos que $\Pi_1 \perp \pm e_3$ e $\Pi_2 \perp \pm d_3$. Portanto $\Pi_1 \cup \Pi_2$ é invariante por reflexão através de P_0 (pois Π_1 é levado em Π_2 e vice versa).

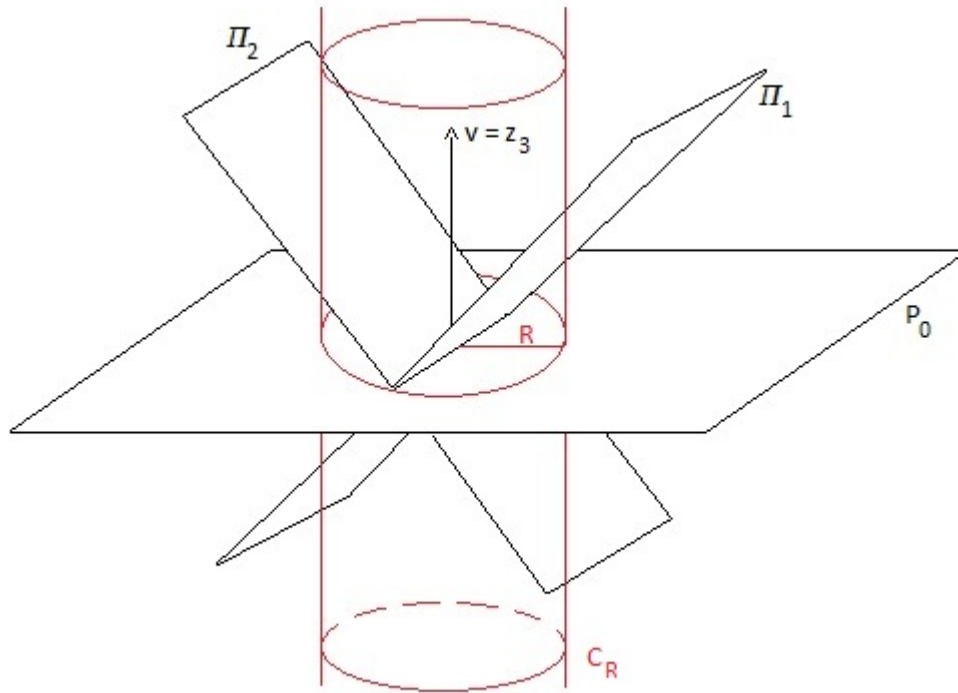
Observe também que

$$(\Pi_1 \cup \Pi_2)_{0+} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \Pi_1 \cup \Pi_2 : \langle (x_1, x_2, x_3) ; v \rangle \geq 0 \right\}$$

é um gráfico sobre todo o plano P_0 . De fato, se não o fosse, existiria reta $L \perp P_0$ cruzando $(\Pi_1 \cup \Pi_2)_{0+}$ duas vezes. Como $\Pi_1 \cup \Pi_2$ é invariante por reflexão, a reta L cruza $\Pi_1 \cup \Pi_2$ ao menos três vezes. Isto só é possível se $L \subset \Pi_1$ ou $L \subset \Pi_2$. Mas como $L \perp P_0$, temos $L \parallel v$ e $v \notin (\Pi_1 \cup \Pi_2)$, absurdo. Analogamente, se existir reta $L \perp P_0$ que não intersecte $(\Pi_1 \cup \Pi_2)_{0+}$, então ela não intersecta $(\Pi_1 \cup \Pi_2)$, donde $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, absurdo.

Como M está pontualmente próxima de $\Pi_1 \cup \Pi_2$ no infinito, afirmamos que M é invariante por reflexão através de P_0 e que M_{0+} é gráfico sobre P_0 .

Para ver isto, sejam (z_1, z_2, z_3) coordenadas euclidianas correspondentes a P_0 , i.e., $z_3 = v$.



Para $R > 0$, seja $C_R := \{(z_1, z_2, z_3) : z_1^2 + z_2^2 = R^2\}$ o cilindro de raio R perpendicular a P_0 . Seja $M^R = M \cap \{(z_1, z_2, z_3) : z_1^2 + z_2^2 \leq R^2\}$ a parte de M contida no interior do cilindro tal que $\partial M^R \subset C_R$.

Afirmamos que $\forall t > 0 \exists R > 0$ suficientemente grande tal que M^R satisfaz as hipóteses do teorema 11.1.3 em relação a P_t . De fato, a condição 1 segue da construção de M^R , a condição 2 segue de $B_{0+} \subset M_{0+} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty}$ $(\Pi_1 \cup \Pi_2)_{0+}$ (que é gráfico com inclinação localmente limitada) e a condição 3 é verdade pois, para R suficientemente grande, temos

$$\text{dist}\left((\partial M^R)_{0+}, (\Pi_1 \cup \Pi_2)_{0+}\right) < \frac{t}{2}$$

Logo, pelo teorema 11.1.3, $(M_{t+}^R)^* \geq M_{t-}^R$ e M_{t+}^R é gráfico sobre P_t (donde o é sobre P_0). Tomando $R \rightarrow +\infty$ (note que as condições do teorema continuam satisfeitas aumentando R), obtemos $M_{t+}^* \geq M_{t-}$ e M_{t+} é gráfico sobre P_0 . Tomando agora $t \rightarrow 0$ (e observando que ser \geq é condição fechada) chegamos a $M_{0+}^* \geq M_{0-}$. Além disto, M_{0+} também é gráfico¹⁰ sobre P_0 .

¹⁰O argumento é o igual ao que foi usado para provar que o conjunto T no teorema 11.1.3 é fechado. A ideia é mostrar que, se existir um ponto em P_0 tal que M_{0+} tenha dois pontos acima dele, então um destes pontos de M_{0+} está no plano P_0 . Além disto, existe uma vizinhança deste ponto contida em M que está abaixo do plano P_0 (senão M_{t+} não seria gráfico para algum $t > 0$). Então, pelo princípio do máximo interior (vide 8.1.3), a superfície

Repetindo o mesmo argumento por baixo, i.e, trocando v por $-v$, temos $M_{0-}^* \leq M_{0+}$, donde $M_{0+}^* \leq M_{0-}$. Segue então que $M_{0+}^* = M_{0-}$. Em particular, pela observação 3.1.4, temos $M^* = M$ (onde $*$ denota reflexão através de P_0). Portanto, como cada um dos pedaços é gráfico, M é mergulhada fora de P_0 (ou seja, $M \setminus (M \cap P_0)$ é mergulhada).

Defina agora o vetor (lembrando que $a^2 + b^2 = 1$ e $a \neq 0$):

$$w := \frac{ae_2 + (b-1)e_3}{\sqrt{a^2 + (b-1)^2}} = \frac{d_3 - e_3}{\|d_3 - e_3\|}$$

A ideia é repetir o argumento anterior substituindo v por w , e trabalhando com os planos

$$Q_t := \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \langle (x_1, x_2, x_3) ; w \rangle = t \right\}$$

ao invés dos planos P_t .

Primeiro note que os planos Q_0 e P_0 são ortogonais entre si:

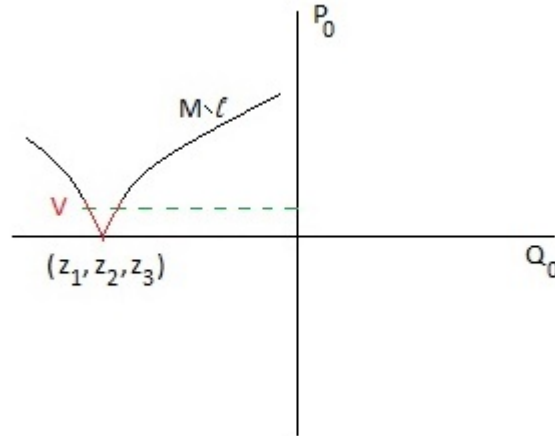
$$\langle v ; w \rangle = \frac{a^2 + (b+1)(b-1)}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2} \sqrt{a^2 + (b-1)^2}} = \frac{a^2 + b^2 - 1}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2} \sqrt{a^2 + (b-1)^2}} = 0$$

Repetindo o argumento usado com P_t , temos $(\Pi_1 \cup \Pi_2)$ invariantes por reflexão através de Q_0 , donde $(\Pi_1 \cup \Pi_2)_{0+}$ é gráfico sobre Q_0 . Além disto, M é invariante por reflexão através de Q_0 e é mergulhada fora de Q_0 (ou seja, $M \setminus (M \cap Q_0)$ é mergulhada).

Como M é mergulhada fora de P_0 e fora de Q_0 , o conjunto Σ de auto-interseções de M está contido na reta $\ell := (Q_0 \cap P_0)$.

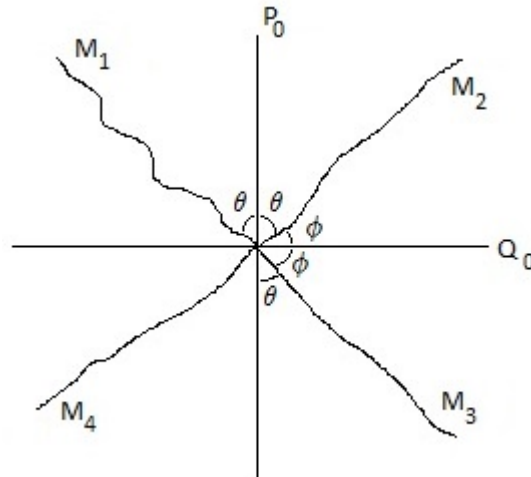
Observe que $(M \setminus \ell)$ não intersecta P_0 nem Q_0 . De fato, suponha por absurdo que exista um ponto $(z_1, z_2, z_3) \in (M \setminus \ell)$ que esteja no plano Q_0 . Como o pedaço de M em Q_{0+} é um gráfico sobre Q_0 (e ℓ é fechado) podemos pegar vizinhança $V \subset (M \setminus \ell)$ deste ponto. Mas então V não é gráfico sobre P_0 (donde o pedaço de M em P_{0+} também não o é), absurdo. O mesmo argumento vale trocando Q_0 por P_0 .

seria plana, absurdo. Para mais detalhes, vide o final da demonstração do teorema 11.1.3.



Além disto, já que M é conexa e sem bordo, segue que $\ell \subset M$.

Logo $(M \setminus \ell)$ tem, pelo menos, quatro componentes conexas (ao menos uma em cada quadrante de $\mathbb{R}^3 \setminus (P_0 \cup Q_0)$). Como $(M \setminus \ell)$ é gráfico (contínuo) sobre $(P_0 \setminus \ell)$ e sobre $(Q_0 \setminus \ell)$, então $(M \setminus \ell)$ tem exatamente quatro componentes conexas, que denotaremos por M_1, M_2, M_3, M_4 como na figura abaixo.



Como ℓ é uma reta contida na superfície mínima conexa M , pelo teorema 7.1.1 temos que M é invariante por reflexão de 180° através dela. Portanto as componentes conexas em quadrantes opostos se unem em ℓ (vide figura acima) de forma a se tornarem superfícies mínimas mergulhadas $(M_1 \cup M_3 \cup \ell)$ e $(M_2 \cup M_4 \cup \ell)$, cada uma com um fim assintótico a Π_1 ou Π_2 . Como ambas são gráficos inteiros sobre um plano, elas são planos inteiros pelo teorema de Bernstein (vide 4.5.1).

Caso 2: Π_1 e Π_2 são paralelos

A menos de uma rotação em \mathbb{R}^3 , podemos assumir que Π_1 e Π_2 são paralelos a $\{x_3 = 0\}$. Vamos mostrar que M é invariante por rotação ao

redor do eixo x_3 , donde é um catenoide. Pelo lema 11.2.1 temos (para $(x_1^2 + x_2^2)$ grande):

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2) = \alpha_1 \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \beta_1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \\ u_2(x_1, x_2) = \alpha_2 \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \beta_2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \end{cases}$$

onde $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ e $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, 2$.

Seja $R := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Se para R grande tivermos $u_1 < u_2$, denotaremos $\alpha := \alpha_2 > 0$ (logo $\alpha_1 = -\alpha$). Transladando o eixo x_3 se necessário, podemos assumir que $\beta_1 + \beta_2 = 0$. Denotando $\beta := \beta_2$ temos (para R grande):

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2) = -\alpha \log R - \beta + O(R^{-1}) \\ u_2(x_1, x_2) = \alpha \log R + \beta + O(R^{-1}) \end{cases}$$

Note que, se $t > 0$, então para $R > 0$ suficientemente grande temos

$$2t - u_2(x_1, x_2) > u_1(x_1, x_2) \quad (11-5)$$

pois $u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2) \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow +\infty$.

Seja

$$V := \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < R^2\} \times \mathbb{R}$$

e $B := M \cap \partial V$. Então, para R grande, $B_{t+}^* \geq B_{t-}$ (segue de 11-5) e B_{t+} é gráfico com inclinação limitada. Pelo teorema 11.1.3, $(M \cap V)_{t+}^* \geq (M \cap V)_{t-}$. Tomando $R \rightarrow +\infty$ (note que as condições do teorema 11.1.3 continuam satisfeitas se aumentarmos R) temos $M_{t+}^* \geq M_{t-}$, $\forall t > 0$. Portanto $M_{0+}^* \geq M_{0-}$ (pois \geq é condição fechada).

Usando o mesmo argumento por baixo (i.e., trocando x_3 por $-x_3$) temos $M_{0-}^* \leq M_{0+}$, que é equivalente a $M_{0+}^* \leq M_{0-}$. Logo $M_{0+}^* = M_{0-}$, donde $M^* = M$ (pois coincidem num aberto da superfície) e $u_1 = -u_2$.

Precisamos encontrar o eixo de simetria de M . Sabemos que $u_1 = -u_2$ e

$$u_2(x_1, x_2) = \alpha \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \beta + \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} + O\left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

onde $\alpha > 0$, β , γ_1 e γ_2 são constantes reais.

Ao fazer uma translação no plano $\{x_3 = 0\}$ da forma

$$(x_1, x_2) \mapsto (y_1 + a_1, y_2 + a_2)$$

onde a_1 e a_2 são constantes que vamos escolher depois, a expansão de u_2 em (y_1, y_2) vira¹¹:

¹¹Usamos aqui a expansão de Taylor de primeira ordem de $\log(1+t)$ e que $\log(a+c) = \log(a+c) + \log(a) - \log(a) = \log(a) + \log\left(1 + \frac{c}{a}\right)$.

$$\begin{aligned}
u_2(y_1, y_2) &= \frac{\alpha}{2} \log \left[y_1^2 + y_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1y_1 + 2a_2y_2 \right] + \beta + \\
&+ \frac{\gamma_1y_1 + \gamma_2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1y_1 + 2a_2y_2} + \frac{\gamma_1a_1 + \gamma_2a_2}{y_1^2 + y_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1y_1 + 2a_2y_2} + \\
&+ O\left(\frac{1}{y_1^2 + y_2^2}\right) = \\
&= \frac{\alpha}{2} \log \left[y_1^2 + y_2^2 \right] + \frac{\alpha}{2} \log \left[1 + \frac{a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1y_1 + a_2y_2)}{y_1^2 + y_2^2} \right] + \beta + \\
&+ \frac{\gamma_1y_1 + \gamma_2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1y_1 + a_2y_2)} + O\left(\frac{1}{y_1^2 + y_2^2}\right) = \\
&= \alpha \log \sqrt{y_1^2 + y_2^2} + \frac{\alpha(a_1^2 + a_2^2)}{2(y_1^2 + y_2^2)} + \frac{\alpha(a_1y_1 + a_2y_2)}{y_1^2 + y_2^2} + O\left(\frac{1}{y_1^2 + y_2^2}\right) + \\
&+ \beta + \frac{\gamma_1y_1 + \gamma_2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1y_1 + a_2y_2)} + O\left(\frac{1}{y_1^2 + y_2^2}\right) = \\
&= \alpha \log \sqrt{y_1^2 + y_2^2} + O\left(\frac{1}{y_1^2 + y_2^2}\right) + \frac{\alpha(a_1y_1 + a_2y_2)}{y_1^2 + y_2^2} + \\
&+ \beta + \frac{\gamma_1y_1 + \gamma_2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1y_1 + a_2y_2)} + O\left(\frac{1}{y_1^2 + y_2^2}\right)
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 y_1 + a_2 y_2)} = \\
& = \frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2} - \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 y_1 + a_2 y_2)}{y_1^2 + y_2^2} \right) \cdot \left(\frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 y_1 + a_2 y_2)} \right) = \\
& = \frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2} - \frac{(\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2)(a_1^2 + a_2^2)}{(y_1^2 + y_2^2)(y_1^2 + y_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 y_1 + a_2 y_2))} - \\
& \quad - \frac{2a_1 \gamma_1 y_1^2 + 2(a_1 \gamma_2 + a_2 \gamma_1) y_1 y_2 + 2a_2 \gamma_2 y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)(y_1^2 + y_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 y_1 + a_2 y_2))} = \\
& = \frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2} + O\left(\frac{1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + O\left(\frac{1}{y_1^2 + y_2^2}\right) = \\
& \quad = \frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2} + O\left(\frac{1}{y_1^2 + y_2^2}\right)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
u_2(y_1, y_2) &= \alpha \log \sqrt{y_1^2 + y_2^2} + \beta + \\
& \quad + \frac{(\gamma_1 + \alpha a_1)y_1 + (\gamma_2 + \alpha a_2)y_2}{y_1^2 + y_2^2} + O\left(\frac{1}{y_1^2 + y_2^2}\right) = \\
& = \alpha \log \sqrt{y_1^2 + y_2^2} + \beta + \frac{\tilde{\gamma}_1 y_1 + \tilde{\gamma}_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2} + O\left(\frac{1}{y_1^2 + y_2^2}\right)
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\gamma}_i = \gamma_i + \alpha a_i$, $i = 1, 2$.

Tomando $a_i = -\frac{\gamma_i}{\alpha}$ e renomeando y novamente por x podemos assumir que

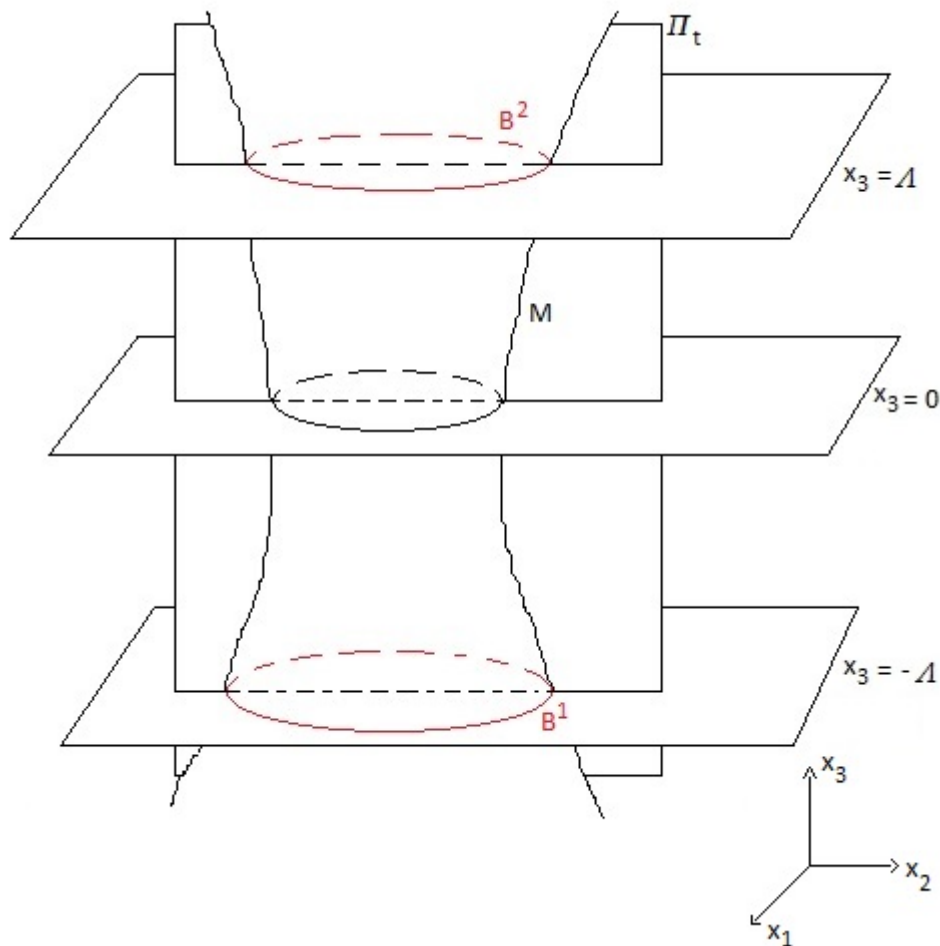
$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2) = -u_2(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) = \alpha \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \beta + O\left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right) \end{cases} \quad (11-6)$$

Afirmamos que, nestas coordenadas, o eixo x_3 é eixo de simetria por rotação de M . Como M não é plana, pelos teoremas 1.1.51 e 2.3.4, basta provar que M é invariante por reflexão através de todos os planos da forma $\{b_1x_1 + b_2x_2 = 0\}$ (são todos que contém o eixo x_3). Como as expansões de u_1 e u_2 são invariantes por rotação ao redor do eixo x_3 , basta mostrar que M é invariante por reflexão através do plano $\{x_1 = 0\}$. Vamos provar isto com a ajuda do teorema 11.1.4.

Seja $\Lambda > 0$ grande e sejam

$$B^1 \cup B^2 := M \cap \{|x_3| = \Lambda\}$$

onde $B^1 := M \cap \{x_3 = -\Lambda\}$ e $B^2 := M \cap \{x_3 = \Lambda\}$. Para $t \in \mathbb{R}$ denotaremos $\Pi_t = \{x_1 = t\}$. Queremos provar que M é invariante por reflexão¹² através de Π_0 .



Fixe $t > 0$ qualquer. Denote por $*$ a reflexão através do plano Π_t . Vamos

¹²Note que, diferentemente do enunciado do teorema 11.1.4, aqui os planos Π_t são ortogonais ao eixo x_1 , e não ao eixo x_3 .

mostrar que, para $\Lambda > 0$ grande (dependendo de t) temos que B_{t+}^i é gráfico de inclinação limitada sobre Π_0 e que $(B_{t+}^i)^* \geq B_{t-}^i$, para $i = 1, 2$. Faremos a demonstração apenas para B^2 (o caso B^1 é análogo).

Pela expansão de u_2 temos¹³

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\alpha}{2} \log(x_1^2 + x_2^2) + \beta + O\left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right) \right] = \\ &= \frac{\alpha x_1}{x_1^2 + x_2^2} + O\left(\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

Então, para $x_1 \geq t$ e $x_1^2 + x_2^2$ suficientemente grande (dependendo da escolha de t) temos

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} > 0$$

Observe que, para Λ grande, todo ponto de B^2 tem $(x_1^2 + x_2^2)$ grande¹⁴. Logo o desenvolvimento assintótico de u_2 e a desigualdade acima valem. Usando o teorema da função implícita e que B_{t+}^2 está em um semi-círculo temos que, para Λ suficientemente grande, B_{t+}^2 é gráfico sobre Π_0 .

Além disto, já que o vetor normal η a B^2 no plano¹⁵ $\{x_3 = \Lambda\}$ é

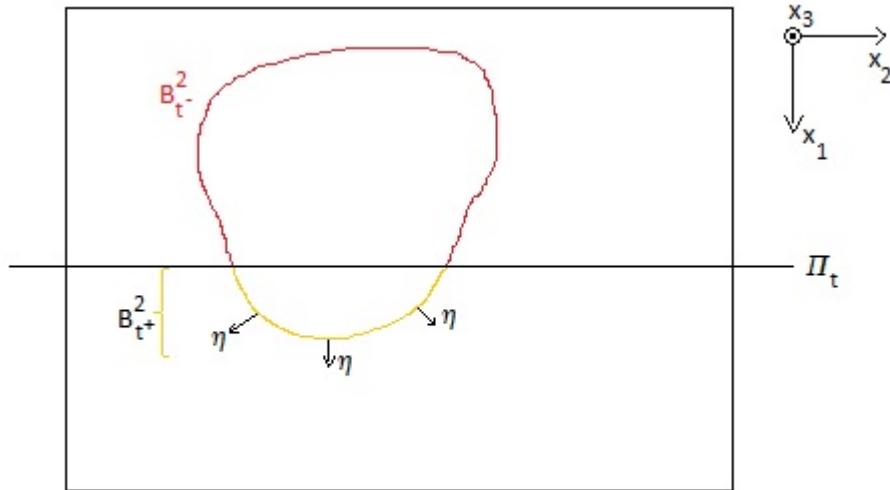
$$\eta = \left(\frac{\alpha x_1}{x_1^2 + x_2^2} + O\left(\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}}\right), \frac{\alpha x_2}{x_1^2 + x_2^2} + O\left(\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}}\right), 0 \right)$$

e a sua primeira coordenada é não nula para $x_1 \geq t$ e Λ suficientemente grande, temos que B_{t+}^2 tem inclinação limitada sobre Π_0 nestas condições (se não tivesse inclinação limitada a primeira coordenada de η se anulava).

¹³Usamos mais uma vez que o resto $O\left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right)$ é uma série de Laurent em $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (vide a observação 10.1.3).

¹⁴Basta usar o desenvolvimento assintótico de $u_2(x_1, x_2)$.

¹⁵A normal à superfície M em um ponto deste plano é $\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, -1\right)$. Projetando no plano $\{x_3 = \Lambda\}$ encontramos η .



Para ver que $(B_{t+}^2)^* \geq B_{t-}^2$ (para Λ suficientemente grande) note que, em B^2 , temos (vide (11-6)):

$$\log \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + O\left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right) = \frac{\Lambda - \beta}{\alpha}$$

Tomando a exponencial obtemos

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} e^{O((x_1^2 + x_2^2)^{-1})} = e^{\frac{\Lambda - \beta}{\alpha}} =: R$$

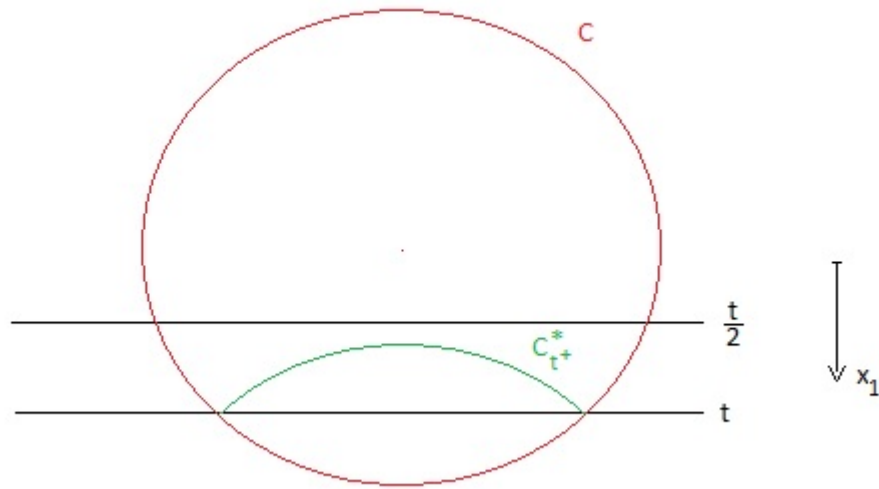
Como $e^{O((x_1^2 + x_2^2)^{-1})} = 1 + O((x_1^2 + x_2^2)^{-1})$ (pela série de Taylor da exponencial), segue que

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = R + O\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)$$

Portanto, quando $(x_1^2 + x_2^2)$ é grande, B^2 está (uniformemente) próximo de um círculo plano. Observe que, se C é o círculo de raio R centrado na origem do plano $\{x_3 = \Lambda\}$, temos

$$\text{dist}(C_{t+}^*, C_{\frac{t}{2}-}) \geq \epsilon(t) > 0$$

onde $\epsilon(t) > 0$ só depende de t .



Logo, se Λ é suficientemente grande, teremos $(x_1^2 + x_2^2)$ grande em B^2 , donde B^2 está arbitrariamente próximo (a uma distância menor que $\frac{\epsilon(t)}{2}$) de C e obtemos

$$(B_{t+}^2)^* \geq B_{\frac{t}{2}-}^2 = B_{t-}^2 \cap \left\{ x_1 \leq \frac{t}{2} \right\} \quad (11-7)$$

Como já vimos que, para Λ grande, $B_{\frac{t}{2}+}^2$ é gráfico sobre Π_0 , segue que

$$(B_{t+}^2)^* \geq B_{t-}^2 \cap \left\{ x_1 \geq \frac{t}{2} \right\} \quad (11-8)$$



Portanto, por (11-7) e (11-8), temos

$$(B_{t+}^2)^* \geq B_{t-}^2$$

como queríamos.

Analogamente podemos provar que $(B_{t+}^1)^* \geq B_{t-}^1$ e que B_{t+}^1 é gráfico com inclinação limitada sobre Π_0 (para Λ grande, dependendo de t).

Aplicando o teorema 11.1.4 obtemos:

$$\left(M \cap \{|x_3| \leq \Lambda\}\right)_{t+}^* \geq \left(M \cap \{|x_3| \leq \Lambda\}\right)_{t-}$$

para Λ suficientemente grande. Tomando $\Lambda \rightarrow +\infty$ temos ($\forall t > 0$) que:

$$M_{t+}^* \geq M_{t-}$$

Como podemos tomar qualquer valor de $t > 0$, fazendo $t \rightarrow 0$ temos (usamos mais uma vez que \geq é condição fechada):

$$M_{0+}^* \geq M_{0-}$$

Repetindo todo o argumento trocando x_1 por $-x_1$ obtemos $M_{0-}^* \leq M_{0+}$, que é equivalente a

$$M_{0+}^* \leq M_{0-}$$

Portanto, pela observação 3.1.4, $M^* = M$ (onde $*$ denota a reflexão através do plano Π_0) e o resultado segue. ■

Pelo teorema acima podemos provar que não é possível construir um catenoide com uma alça, ou seja:

Corolário 11.2.3 *Não existe superfície mínima completa, com curvatura total finita, de gênero ≥ 1 e com apenas dois fins, ambos mergulhados.*

Recentemente foram feitas versões do teorema de Schoen em outros espaços homogêneos (vide Ref. 28 , Ref. 29 e Ref. 30, Theorem 2.1).

Referências Bibliográficas

1. HIRSCH, M. W.. **Differential Topology**. Springer-Verlag, 1976.
2. DO CARMO, M. P.. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. SBM, 2010.
3. KÜHNEL, W.. **Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds**. AMS, 2006.
4. DIERKES, U.; HILDEBRANDT, S.; KÜSTER, A. ; WOHLRAB, O.. **Minimal Surfaces I**. Springer, 1992.
5. DO CARMO, M. P.. **Geometria Riemanniana**. Projeto Euclides, 2008.
6. AHLFORS, L. V.. **Complex Analysis**. McGraw-Hill, 1979.
7. CONWAY, J. B.. **Functions of One Complex Variable**. 1978.
8. SÁ EARP, R.; TOUBIANA, E.. **Introduction à la Geometrie Hyperbolique et aux Surfaces de Riemann**. Cassini, 2009.
9. FARKAS, H.; KRA, I.. **Riemann Surfaces**. Springer, 1992.
10. GUILLEMIN, V.; POLLACK, A.. **Differential Topology**. AMS, 2000.
11. PUGH, C. C.. **Real Mathematical Analysis**. Springer, 2002.
12. HOPF, H.. **Differential Geometry in the Large**. Springer-Verlag, 1989.
13. GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S.. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Springer, 2001.
14. CARTAN, H.. **Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables**. Dover, 1995.
15. COLDING, T. H.; MINICOZZI II, W. P.. **A Course in Minimal Surfaces**. American Mathematical Society, 2011.
16. CHERN, S. S.. **An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface**. Proc. Amer. Math. Soc., 6:771–782, 1965.

17. OSSERMAN, R.. **A Survey of Minimal Surfaces**. Van Nostrand, 1969.
18. COLDING, T. H.; MINICOZZI II, W. P.. **The Calabi-Yau conjectures for embedded surfaces**. *Ann. of Math.*, 167:211–243, 2008.
19. SCHOEN, R.. **Estimates for stable minimal surfaces in three-dimensional manifolds**. *Ann. of Math. Studies*, 103:111–126, 1983.
20. HOFFMAN, D.; MEEKS, III, W. H.. **The strong halfspace theorem for minimal surfaces**. *Inventiones Mathematicae*, 1990.
21. HUBER, A.. **On subharmonic functions and differential geometry in the large**. *Comentarii Mathematici Helvetici*, 32:13–72, 1958.
22. BARBOSA, J. L. M.; COLARES, A. G.. **Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3** . *Monografias de Matemática número 40*, IMPA, 1986.
23. LOPEZ, F. J.. **The Classification of Complete Minimal Surfaces with Total Curvature Greater Than -12π** . *Transactions of the American Mathematical Society*, 334:49–74, 1992.
24. COSTA, C. J.. **Classification of complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 with total curvature 12π** . *Inventiones mathematicae*, p. 273–303, 1991.
25. LOPEZ, F.; ROS, A.. **On embedded complete minimal surfaces of genus zero**. *J. Differential Geom.*, 33:293–300, 1991.
26. SÁ EARP, R.; ROSENBERG, H.. **On values of the Gauss map of complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3** . *Comentarii Mathematici Helvetici*, 63:579–586, 1988.
27. SCHOEN, R.. **Uniqueness, Symmetry and Embeddedness of Minimal Surfaces**. *J. Differential Geom.*, 18:791–809, 1983.
28. L. HAUSWIRTH, B. NELLI, R. S. E. T.. **A Schoen Theorem for Minimal Surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$** . *ArXiv*: 1111 0851, 2013.
29. LEVITT, G.; ROSENBERG, H.. **Symmetry of constant mean curvature hypersurfaces in hyperbolic space**. *Duke Math. J.*, 52:53–59, 1985.
30. B. NELLI, R. SÁ EARP, E. T.. **Maximum Principle and Symmetry for Minimal Hypersurfaces in $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$** . *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* (to appear), 2013.

31. LAWSON JR., H. B.. **Lectures on Minimal Submanifolds, Vol. I.** Publish or Perish, 1980.
32. HOFFMAN, D.; KARCHER, H.. **Complete Embedded Minimal Surfaces of Finite Total Curvature.** Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Geometry V (Minimal surfaces, R. Osserman, Ed.). 1997.
33. FORSTER, O.. **Lectures on Riemann Surfaces.** Springer, 1981.
34. EVANS, L.. **Partial Differential Equations.** AMS, 2010.
35. MARKUSHEVICH, A. I.. **Theory of Functions of a Complex Variable, Vol. 2.** Prentice-Hall, 1965.
36. HOFFMAN, D.; MEEKS, III, W. H.. **Minimal Surfaces Based on the Catenoid.** The American Mathematical Monthly, Vol.97, Number 8, 1990.
37. HOFFMAN, D.. **The Computer-Aided Discovery of New Embedded Minimal Surfaces.** The Mathematical Intelligencer, Vol. 9, Number 3, 1987.
38. MORREY JR., C. B.. **Multiple Integrals in the Calculus of Variations.** Springer, 2008.
39. SPIVAK, M.. **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry**, volumen 4. Publish or Perish, 1999.