

### 3

## O Método dos Elementos Discretos (MED) para Rochas Fraturadas

Este capítulo apresenta os conceitos básicos do método dos elementos discretos (MED), começando com uma breve descrição do método, junto com as principais considerações físicas e numéricas. Ao final do capítulo é apresentado o software UDEC (Universal Distinct Element Code), o qual corresponde ao software utilizado na modelagem de estabilidade de poço nesta dissertação.

### 3.1. Que é o MED?

O MED é um método numérico que foi desenvolvido por Cundall, 1971 com o objetivo de modelar o comportamento mecânico, hidráulico e térmico de um maciço rochoso fraturado, quando os modelos tradicionais do meio contínuo não forneciam resultados satisfatórios. No MED o maciço rochoso é representado por uma associação de blocos discretos (figura 3.1), e avaliar a interação entre estes promovida pela aplicação de forças ou deslocamentos. As fraturas simulam as condições de contorno e interfaces entre cada bloco de rocha intacta. Os blocos de rocha podem ser rígidos ou deformáveis, e as rotações nos blocos são permitidas. No caso de blocos deformáveis estes podem ser discretizados por diferenças finitas e caracterizados por modelos constitutivos elásticos ou elastoplásticos. As forças de contato e deslocamentos nas interfaces de uma montagem de blocos são calculadas através de uma série de equações que definem o movimento dos blocos. Os movimentos resultam da propagação através do sistema de blocos dos distúrbios causados pelos carregamentos aplicados ou forças de corpo. Este é um processo dinâmico no qual a velocidade de propagação depende das propriedades físicas do sistema discreto.

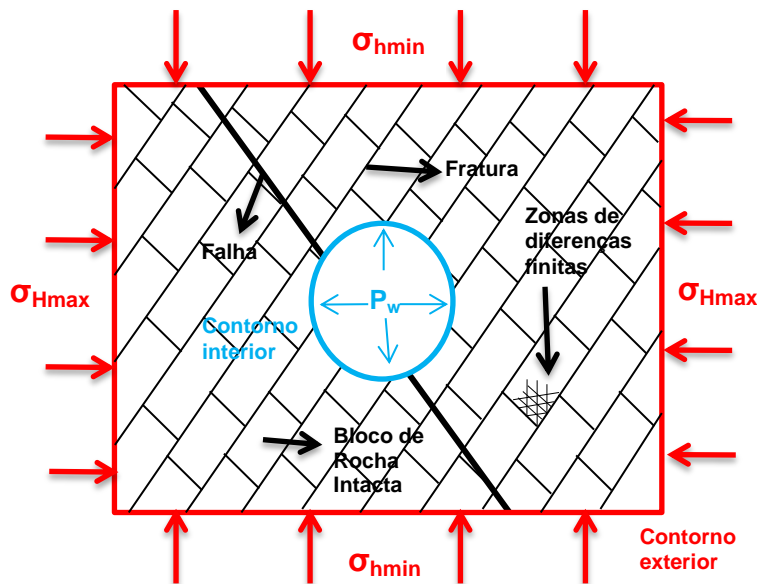


Figura 3.1 - Perfuração de um poço em um maciço rochoso fraturado (manual UDEC, 2011).

O MED possui duas características que o distinguem dos métodos numéricos do meio contínuo (elementos finitos, diferenças finitas) e são: i) o comportamento do sistema geológico é definido por um material contínuo para a rocha intacta, e por um material descontínuo que representa as descontinuidades, ii) os mecanismos de deformação incluem grandes deslocamentos (escorregamento das juntas e separação) e rotação dos blocos. A geometria de cada bloco de rocha é limitada pelo espaçamento e orientação das descontinuidades no maciço rochoso, permitindo interatuar com (ou se desconectar) com os blocos vizinhos. O MED não somente inclui a representação teórica do contínuo para os blocos de rochas, mas também as leis de força-descolamento, as quais especificam as forças entre blocos e as leis que especificam o movimento de cada bloco devido a forças de desequilíbrio atuando sobre eles.

### 3.2. Formulação do Método dos Elementos Discretos (MED)

Para compreender o MED é preciso definir quais são as principais considerações no desenvolvimento do método, divididas em duas categorias: 1) considerações físicas, que seriam todas aquelas leis que modelam um determinado comportamento físico do sistema, e 2) as considerações numéricas, que seriam aquelas leis encargadas da otimização matemática. A figura 3.2 apresenta um fluxograma onde são descritas as principais características destas considerações. Este fluxograma está relacionado com os efeitos hidráulicos e mecânicos que serão abordados nesta dissertação.

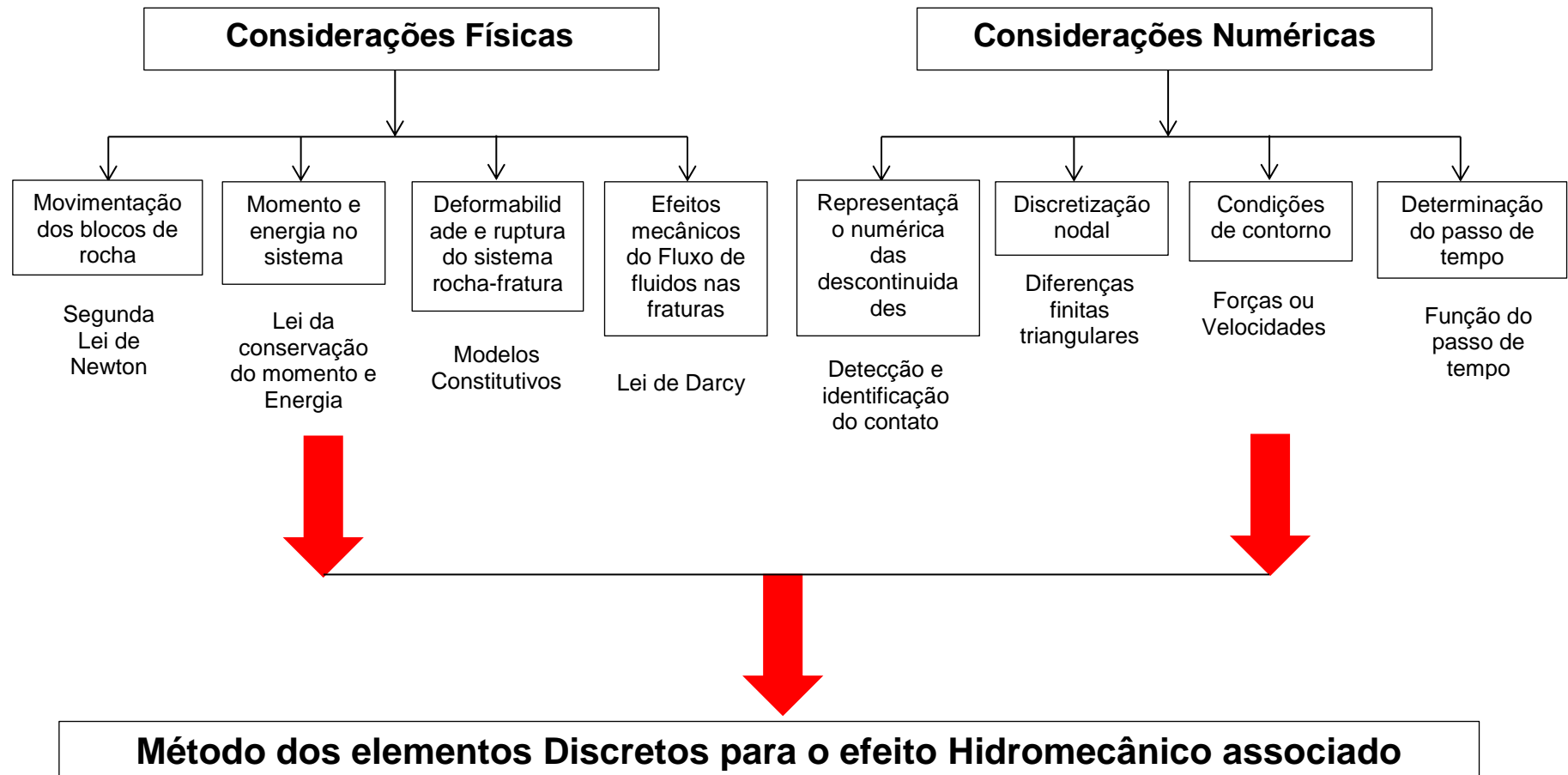


Figura 3. 2– Fluxograma das principais considerações físicas e numéricas envolvidas no MED.

### 3.2.1.Considerações Físicas

- **Movimentação dos Blocos de Rocha**

O movimento de um bloco individual de rocha é determinado pela magnitude e direção do momento de desequilíbrio e as forças atuantes, como resultado de mudanças de carregamento no sistema de blocos. Considerando o movimento em uma dimensão de uma massa única com amortecimento viscoso, e atuando sobre ela uma força variável  $F^{(t)}$ , a segunda lei de Newton incluindo amortecimento viscoso, pode ser definida como:

$$\ddot{u} = \frac{F^{(t)}}{m} - \alpha_v \dot{u} + g \quad (3.1)$$

Onde:

$\dot{u}$  =Velocidade (m/s);

t=Tempo(s);

m=massa (Kg);

F=força (N);

g=aceleração da gravidade (m/s<sup>2</sup>);

$\alpha_v$ =coeficiente de amortecimento (1/s).

Utilizando um esquema de diferencias finitas centrais pode ser escrito para o lado esquerdo da equação (3.1), assim:

$$\dot{u}^{(t+\frac{\Delta t}{2})} = \frac{\left[ \dot{u}^{(t-\frac{\Delta t}{2})} \left( 1 - \frac{\alpha_v \Delta t}{2} \right) + \left( \frac{F^{(t)}}{m} + g \right) \Delta t \right]}{(1 + \alpha_v \Delta t / 2)} \quad (3.2)$$

Com as velocidades armazenadas no ponto médio do passo de tempo, é possível expressar deslocamentos como:

$$u^{(t+\Delta t)} = u^{(t)} + \dot{u}^{(t+\frac{\Delta t}{2})} \Delta t \quad (3.3)$$

Como as forças dependem dos deslocamentos, o cálculo força-deslocamento é realizado em um determinado instante de tempo. A aceleração é também fornecida pela força neste mesmo instante de tempo ( $t + \Delta t$ ) e pela massa. A figura 3.3 ilustra o esquema de diferenças finitas centrais com a ordem de cálculos indicadas por setas.

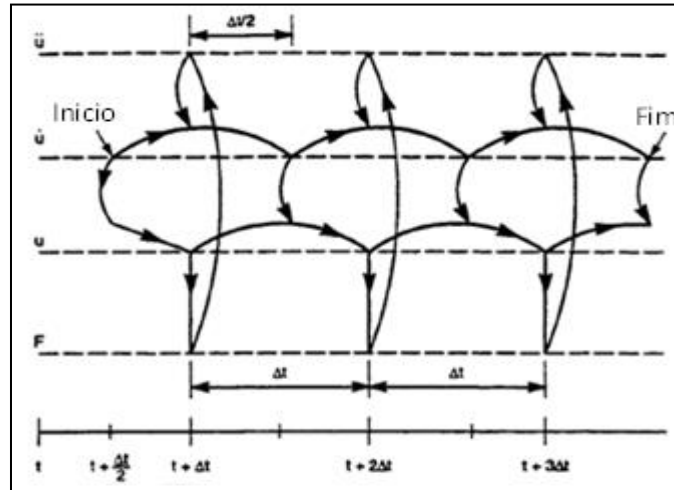


Figura 3. 3 – Natureza entrelaçada do ciclo de calculo utilizado na formulação dos elementos discretos (manual UDEC, 2011).

Para um sistema de blocos em duas dimensões que estão sob varias forças (por exemplo, a gravidade), a equação (3.2) pode ser expressa assim:

$$\dot{u}^{(t+\frac{\Delta t}{2})} = \frac{\left[ \dot{u}^{(t-\frac{\Delta t}{2})} \left( 1 - \frac{\alpha_v \Delta t}{2} \right) + \left( \frac{\sum F^{(t)}}{m} + g_i \right) \Delta t \right]}{(1 + \alpha_v \Delta t / 2)} \quad (3.4)$$

$$\dot{\theta}^{(t+\frac{\Delta t}{2})} = \frac{\left[ \dot{\theta}^{(t-\frac{\Delta t}{2})} \left( 1 - \frac{\alpha_v \Delta t}{2} \right) + \left( \frac{\sum M^t}{I} \right) \Delta t \right]}{(1 + \alpha_v \Delta t / 2)} \quad (3.5)$$

Onde:

$\dot{\theta}$  = Velocidade angular do bloco em torno de seu centroide;

$I$  =Momento de inercia do bloco;

$\sum M$  =momentos totais atuando no centroide do bloco;

$\dot{u}_i$  =componentes de velocidade no centroide do bloco;

$g_i$  =Componente da aceleração gravitacional (Forças de corpo).

### • Equilíbrio de Momento e Energia

Considerem-se dois corpos (denotados pelos subíndices a e b) em contato por um determinado período de tempo. Pelas leis de Newton, existe uma força comum  $F$  que atua na direção oposta sobre os dois corpos, os quais se aceleram em proporção as forças:

$$m_a \ddot{u}_a = F \quad (3.6)$$

$$m_b \ddot{u}_b = -F \quad (3.7)$$

Combinando as equações (3.6) e (3.7), e integrando:

$$\int_0^T m_a \ddot{u}_a dt = - \int_0^T m_b \ddot{u}_b dt \quad (3.8)$$

$$m_a (\dot{u}_a^T - \dot{u}_a^0) = -m_b (\dot{u}_b^T - \dot{u}_b^0) \quad (3.9)$$

$$m_a \dot{u}_a^T + m_b \dot{u}_b^T = m_b \dot{u}_b^0 + m_a \dot{u}_a^0 \quad (3.10)$$

A equação (3.10) indica que o momento total no final de um período de tempo arbitrário é idêntico ao momento no começo.

Agora, supondo que um corpo com uma velocidade inicial  $v_0$  é levado a uma velocidade final  $v$  em uma distancia  $S$  através de uma força constante,  $F$ :

$$m\dot{v} = F \quad (3.11)$$

Utilizando a regra da cadeia:  $\dot{v} = v \frac{dv}{dS}$

$$m \int_{v_0}^v v dv = \int_0^S F ds \quad (3.12)$$

Assumindo o parâmetro  $m$  na equação (3.12) constante:

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = FS \quad (3.13)$$

A equação (3.13) expressa o trabalho realizado por uma força, o qual é igual à mudança na energia cinética do corpo.

A força de oposição ao movimento esta relacionada ao deslocamento pela equação ( $F = -KS$ ) onde  $K$  expressa à rigidez da mola, portanto, temos que a equação 3.12 pode ser expressa como:

$$m \int_{v_0}^v v dv = - \int_0^S KS ds \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{2} m (v_0^2 - v^2) = \frac{1}{2} KS^2 \quad (3.15)$$

Neste caso a diminuição na energia cinética é igual à energia armazenada na mola. O mesmo argumento pode ser utilizado em sentido oposto, de tal modo que a energia cinética cedida a um corpo é igual à diminuição na energia armazenada em uma mola. Portanto, a energia cinética de um corpo depois de uma colisão elástica é igual á energia cinética antes da colisão.

- **Deformabilidade dos Blocos de Rocha**

Os blocos podem ser rígidos ou deformáveis no método dos elementos discretos. A formulação básica para blocos rígidos foi proposta por Cundall (1978). Esta formulação representa o meio como um conjunto de blocos distintos que não mudam sua geometria devido ao carregamento aplicado. Conseqüentemente, esta formulação é mais aplicável a problemas nos quais o comportamento do sistema é dominado pelas discontinuidades e onde as propriedades elásticas do material podem ser ignoradas. Tais condições resultam

em ambientes de baixas tensões onde o material possui resistência elevada e baixa deformabilidade.

Os blocos deformáveis são internamente discretizados com o método de diferenças finitas triangulares. A complexidade da deformação dos blocos depende do número de elementos dentro dos quais os blocos estão divididos. A figura 3.4 ilustra o zoneamento no interior dos blocos para um determinado sistema de descontinuidades.

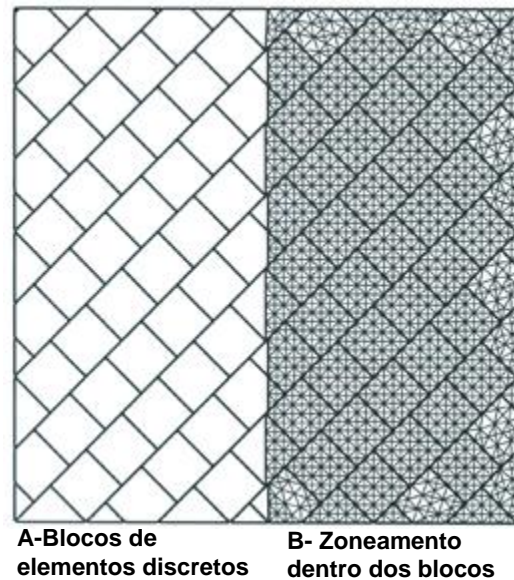


Figura 3.4 – Zoneamento dentro do modelo contendo um sistema de descontinuidades continua e descontínua (manual UDEC, 2011).

Os vértices de um elemento triangular são pontos de rede e as equações de movimento para cada um desses pontos (ou “nós”) estão formulados como:

$$\ddot{u} = \frac{\int_{S_e} \sigma_{ij} n_j ds_e + F_i}{m} + g_i \quad (3.16)$$

Onde:

$S_e$ =superfície de contorno da massa  $m$ , aglomerada no ponto de rede;

$n_j$ =vetor normal a  $s$ ;

$F_i$ =é a resultante de todas as forças externas aplicadas ao ponto de rede;

$g_i$ =é a aceleração da gravidade.



Durante um determinado passo de tempo, as deformações e as rotações estão relacionadas aos deslocamentos nodais de acordo com as equações 3.17 e 3.18:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (3.17)$$

$$\dot{\theta}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i}) \quad (3.18)$$

As relações constitutivas para blocos deformáveis são utilizadas de modo incremental de tal modo que a implementação de problemas não lineares podem ser realizados facilmente. A forma dessas equações é:

$$\Delta\sigma_{ij}^e = \lambda\Delta\varepsilon_v\xi_{ij} + 2\mu\Delta\varepsilon_{ij} \quad (3.19)$$

Onde:

$\lambda, \mu$  = constantes de Lamé;

$\Delta\sigma_{ij}^e$  = incrementos elásticos do tensor de tensões;

$\Delta\varepsilon_{ij}$  = deformações incrementais;

$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{22}$  = incremento de deformação volumétrica;

$\xi_{ij}$  = função delta de Kronecker.

- **Deformabilidade das Fraturas**

O modelo básico que representa a relação tensão-deslocamento das fraturas é linear, e encontra-se expressa pela seguinte equação:

$$\Delta\sigma_n = -K_n\Delta u_n \quad (3.20)$$

Onde:

$\Delta\sigma_n$  = incremento da tensão efetiva normal;

$K_n$  = rigidez;

$\Delta u_n$ =incremento do deslocamento normal.

Existe um limite da resistência na tração T da fratura. Se essa resistência é excedida ( $\sigma_n < T$ ), a fratura se ativa mecanicamente. Esta modelagem no software UDEC é realizada anulando-se a resistência à tração da fratura. Similarmente, no cisalhamento a resposta é controlada por uma rigidez ao cisalhamento constante  $K_s$ . Os valores da tensão de cisalhamento  $\tau_s$  encontram-se em uma faixa cujo limite está definido pela combinação da resistência coesiva (C) e a resistência de atrito ( $\Phi$ ), como apresentado na equação 3.21:

$$|\tau_s| \leq C + \sigma_n \tan(\phi) = \tau_{\max} \quad (3.21)$$

Então:

$$\Delta \tau_s = -K_s \Delta u_s^e \quad (3.22)$$

Ou, se:

$$|\tau_s| \geq \tau_{\max} \quad (3.23)$$

Então:

$$\tau_s = \text{sign}(\Delta u_s) \tau_{\max} \quad (3.24)$$

Onde:

$\Delta u_s^e$ =componente elástico do deslocamento de cisalhamento;

$\Delta u_s$ =incremento do deslocamento de cisalhamento.

Este modelo é descrito como o modelo de escorregamento de Coulomb e é ilustrado na figura 3.5. Acrescenta-se a isso que a dilatância da fratura pode ocorrer no começo do escorregamento (escorregamento não elástico). A dilatância é governada por um ângulo específico de dilatância  $\phi$ . A dilatância acumulada é limitada por qualquer aumento elevado na tensão normal ou por elevados deslocamentos de cisalhamento acumulados que excedem um valor limite de UCS (*Uniaxial compressive strength*). Esta limitação sobre a dilatância corresponde ao fato de que o achatamento das asperezas a grandes

tensões normais ou grandes cisalhamentos deveram eventualmente prevenir. No modelo de Coulomb a dilatação encontra-se restrita, como apresentado na figura 3.5.

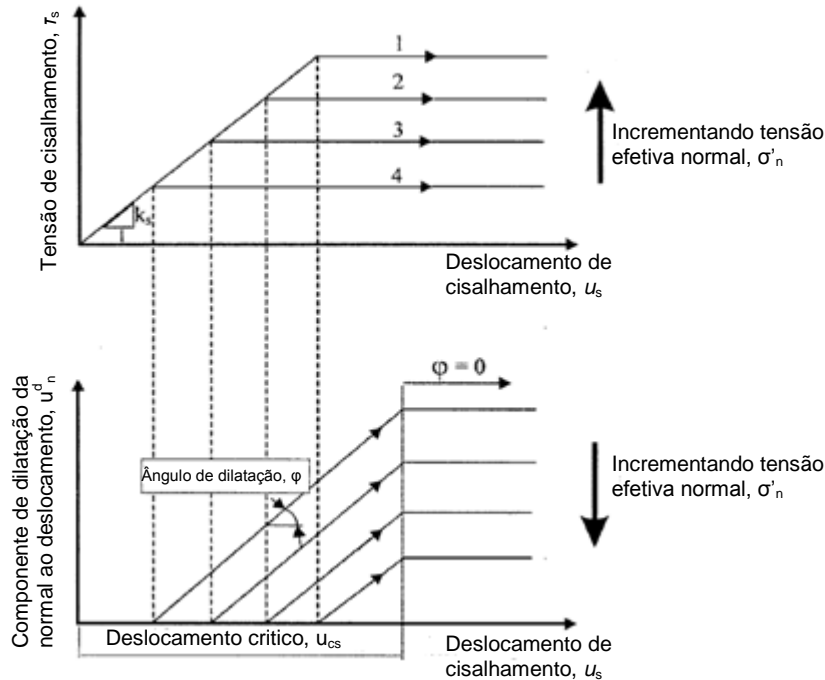


Figura 3.5 – Modelo de escorregamento de Coulomb para o comportamento básico da fratura (Zhang *et al*, 1999).

Se:

$$|\tau_s| \leq \tau_{\max} \quad \text{Então } \phi=0 \quad (3.25)$$

E

$$\text{Se } |\tau_s| = \tau_{\max} \quad \text{e } |u_s| \geq u_{cs} \quad \text{então } \phi=0 \quad (3.26)$$

O modelo de Coulomb pode ser adaptado para aproximar uma resposta de enfraquecimento causada pelo deslocamento (*displacement-weakening response*) que algumas vezes é observada em sistemas de fraturas. Isso acontece devido à redução da resistência em qualquer caso onde a resistência à tração ou ao cisalhamento seja excedida.

- Fluxo de fluido nas fraturas

A condutividade de uma fratura pode ser modelada de acordo com a abertura da mesma. A figura abaixo ilustra como o fluxo dentro das discontinuidades pode ser modelado.

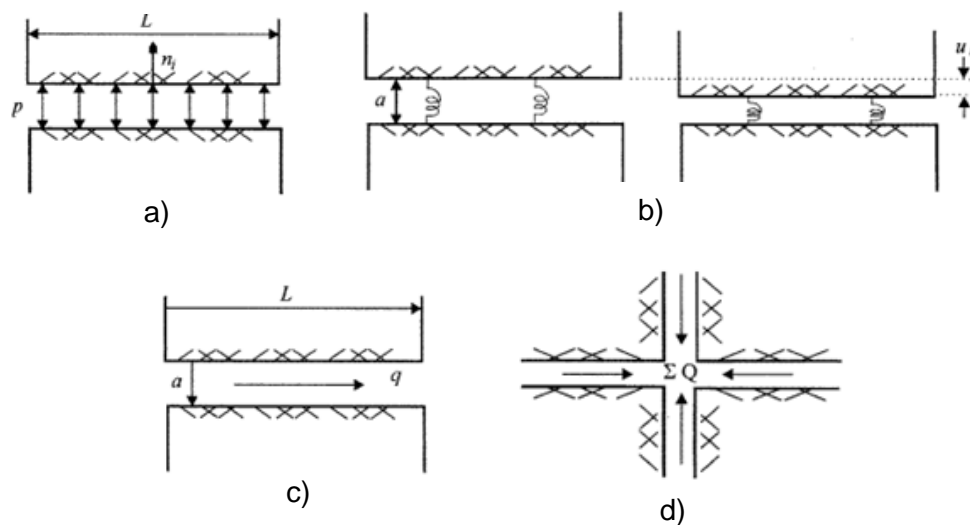


Figura 3.6 – Comportamento da deformação hidráulico- mecânica no MED, a) pressão do fluido causando efeitos mecânicos; b) deformação do bloco afetando a abertura hidráulica  $a$ ; c) fluxo de fluidos afetado pela abertura  $a$ , d) Geração de pressão diferencial do fluido (Zhang *et al*, 1999).

A implementação numérica para o fluxo de fluido faz uso do domínio hidráulico descrito na figura 3.7 para um sistema de forma compacta. Neste sistema existe uma rede de domínios hidráulicos, que são preenchidos com o fluido a pressão, e comunicados com seus vizinhos.

① até ⑤: Domínios Hidráulicos    (A) até (I): Contatos dos blocos

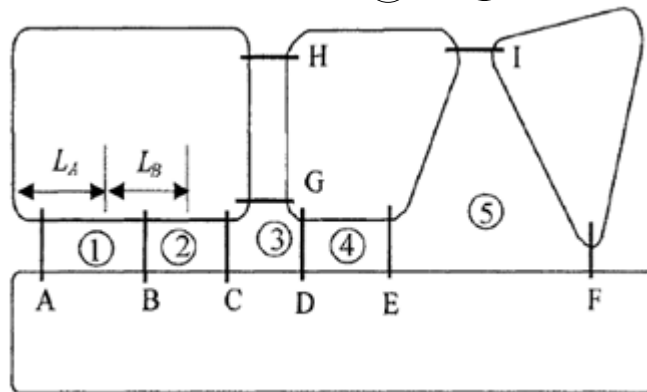


Figura 3.7 – Fluxo nas fraturas modeladas como fluxo entre domínios hidráulicos (Zhang *et al*, 1999).

Conforme à figura 3.7, os domínios hidráulicos 1, 2 e 4 representam fraturas. O domínio 3 está localizado na intercepção de duas fraturas, enquanto que o domínio 5 corresponde a um espaço vazio. Os domínios hidráulicos estão separados por contatos nos quais as forças de interação mecânica são aplicadas. Os contatos A até G representam contatos aresta-aresta, enquanto que H representa um contato vértice-aresta e I representa um contato vértice-vértice. Como os blocos são deformáveis, eles estão subdivididos em elementos de malha triangulares. Os pontos de rede podem existir tanto nos vértices dos blocos quanto ao longo das arestas. Um ponto de contato encontra-se localizado em um ponto de rede, uma borda ou um ponto de rede de outro bloco. Por exemplo, na figura 3.7 o contato B implica a existência de um ponto de rede ao longo de uma das arestas em contato. Como resultado, a fratura entre dois blocos está representada pelos domínios 1 e 2.

Para um ponto de contato (vértice-vértice como o contato I, ou vértice-aresta como o contato F), a taxa de fluxo de um domínio hidráulico a um domínio adjacente com uma pressão diferencial  $\Delta p$  é expressa pela equação (3.27):

$$q = -K_c \Delta p \quad (3.27)$$

Onde:

$K_c$  = fator de condutividade no ponto de contato.

No caso de um contato aresta-aresta, são definidos os segmentos,  $L_A$  e  $L_B$  que denotam os comprimentos dos contatos A e B, respectivamente (figura 3.7). O comprimento é definido como a soma das meias-distâncias aos contatos mais próximos. Para tais contatos pode ser utilizada uma lei cubica de fluxo em uma fratura plana (Louis, 1969; Norton e Knapp, 1977; Witherspoon *et al.*1980):

$$q = -K_j a^3 \frac{\Delta p}{l} \quad (3.28)$$

Onde:

$K_j$ =fator de condutividade da fratura cujo valor teórico é  $1/2 \mu$  ;

$\mu$  =viscosidade dinâmica do fluido;

$a$ = abertura hidráulica; e

$l$ =comprimento assignado ao contato entre domínios.

A equação 3.28 implica que o fluxo pode tomar lugar em um contato sempre e quando as pressões no domínio sejam zero; neste caso, a gravidade pode fazer com que o fluido migre de um domínio para outro que não esteja completamente saturado. No entanto, a permeabilidade aparente deve diminuir como o faz a saturação. Portanto, há dois fatores a se considerar:

1. Permeabilidade deve ser zero para um valor de saturação igual a zero;
2. O fluido não pode ser extraído de um domínio hidráulico de saturação igual a zero.

A abertura hidráulica é dada por:

$$a = a_0 + u_n \quad (3.29)$$

Onde:

$a_0$ =abertura hidráulica da fratura em tensão normal zero;

$u_n$ =deslocamento normal da fratura (positivo denotando abertura).

Um mínimo valor de  $a_{res}$  é assumido para a abertura hidráulica, sob o qual o fechamento mecânico não afeta a permeabilidade do contato. Um valor máximo,  $a_{max}$

também é fixado para melhorar a eficiência no cálculo explícito. A variação da abertura hidráulica com a tensão normal é apresentada na figura 3.8.

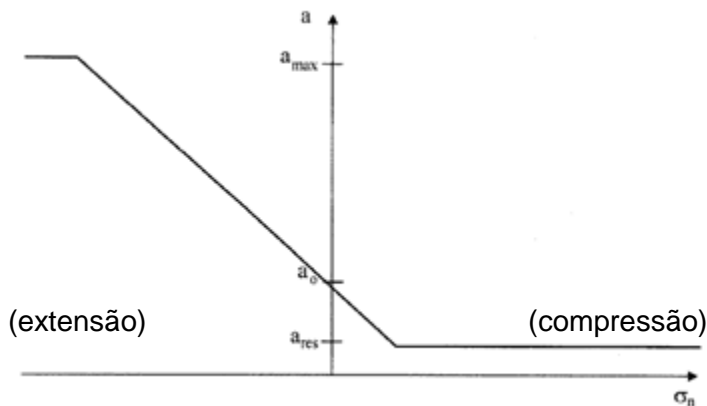


Figura 3.8 – Relação entre abertura hidráulica,  $a$  e tensão normal na fratura,  $\sigma_n$  (Zhang et al, 1999).

### 3.2.2. Considerações numéricas

- **Representação Numérica das Descontinuidades**

Uma fratura de rocha é representada numericamente como uma superfície de contato (composta de pontos individuais de contato) formada entre duas bordas de um bloco. Em geral, para cada interface entre dois blocos são criados elementos para representar pontos de contato. No MED, os blocos adjacentes podem ter contato ao longo de um segmento de aresta comum ou em pontos discretos, onde um vértice encontra-se em uma aresta ou em outro vértice. A figura 3.9 apresenta o esquema de representação de contatos. Para blocos rígidos, um contato é criado em cada vértice a fim de permitir a interação com outro vértice ou aresta de um bloco oposto. Se os blocos são deformáveis (internamente discretizados), os pontos de contato são criados em todos os pontos da rede que estão localizados dentro do borde do bloco em contato.

Para a modelagem exposta na figura 3.9, se supõe que as extremidades dos blocos tenham resistência infinita. Na realidade, o esmagamento das extremidades dos blocos ocorreria como um resultado da concentração de tensões. No entanto, a modelagem

explícita deste efeito é impraticável. Entretanto uma representação realista pode ser realizada arredondando-se as esquinas dos blocos, de tal modo que os blocos podem-se deslizar um sobre outro quando as duas extremidades opostas interagem.

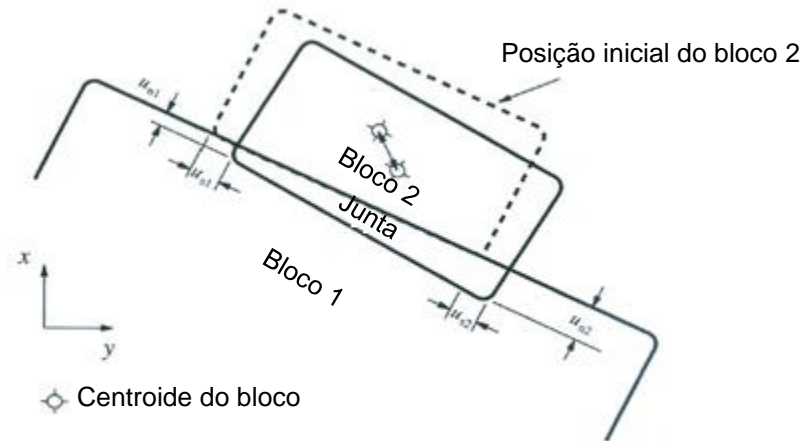


Figura 3.9 – Contato entre dois blocos rígidos (manual UDEC, 2011).

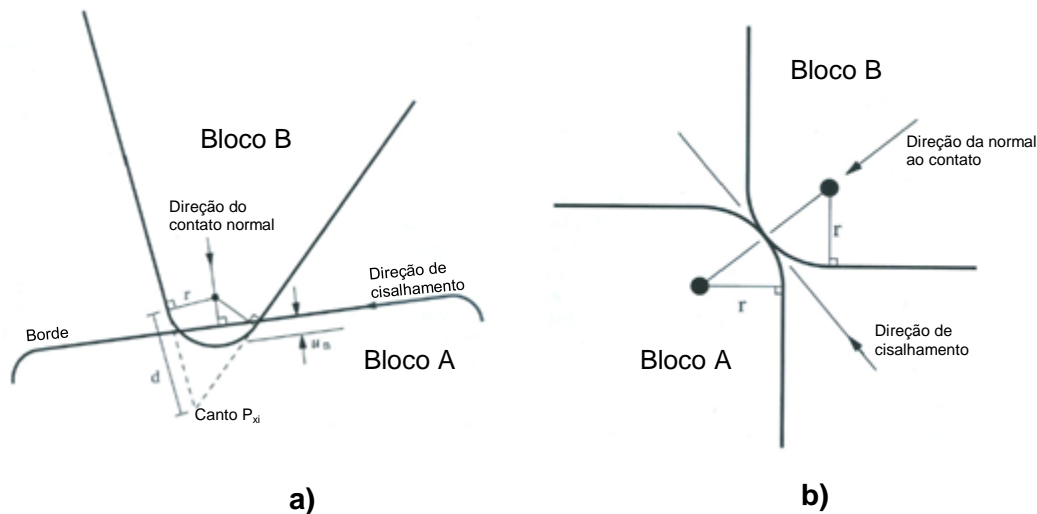


Figura 3.10 – Definição dos contatos no MED, a) contato limite de esquina arredondado, b) interação vértice-vértice (manual UDEC, 2011).

O arredondamento dos vértices é utilizado no MED especificando um arco para cada vértice do bloco. O arco é definido pela distância do ápice do ponto de tangência com os limites adjacentes (figura 3.10). Os vértices arredondados podem introduzir



inexatidão na solução se o arredondamento é muito grande. Se o comprimento do arredondamento é mantido aproximadamente igual a 1% do comprimento da borda representativa no modelo, é obtida uma boa precisão.

Os pontos de contato são atualizados automaticamente sempre que os blocos se movem. Os algoritmos para realizar esta atualização devem ser computacionalmente eficientes, particularmente para a análise dinâmicas onde podem ocorrer grandes deslocamentos, requerendo a exclusão e a adição de centenas de contatos durante uma modelagem dinâmica. O MED tem a vantagem de possuir uma rede de domínios criados pela interação de blocos em duas dimensões. Os domínios são as regiões no espaço entre blocos, os quais são definidos por pontos de contatos como D1 e D2 na figura 3.11. Durante um determinado passo de tempo novos contatos podem ser formados somente entre os vértices e as arestas dentro do mesmo domínio, desta forma, podem ser executadas atualizações sempre que alguma medida prescrita de movimento seja alcançada dentro do domínio.

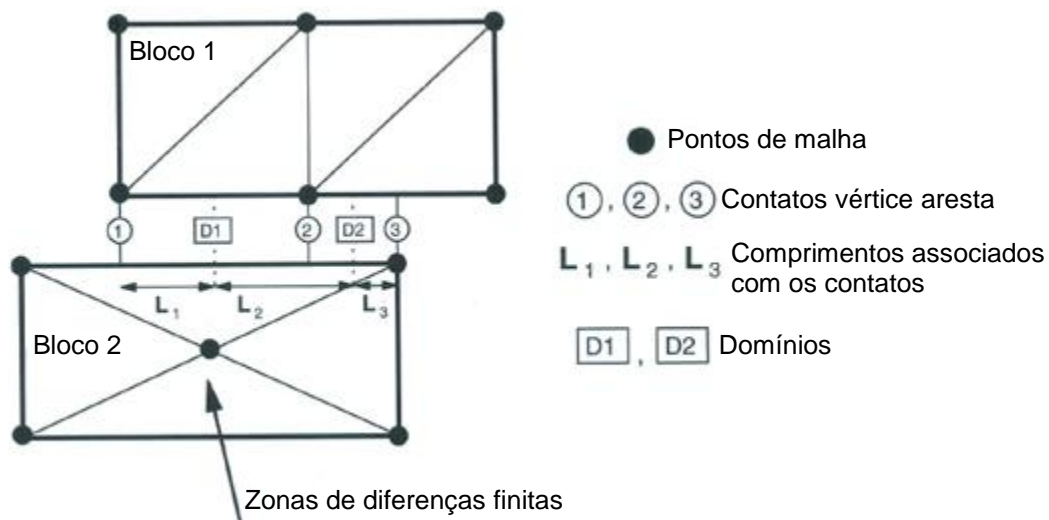


Figura 3.11 – Contatos e domínios entre dois blocos deformáveis (manual UDEC, 2011).

- **Discretização Nodal Mista para Deformação em uma Rede Triangular**

A taxa de deformação  $\dot{\epsilon}_{ij}$  é definida a partir da derivada das velocidades nodais. A taxa de deformação é então particionada em dois componentes desviadores,  $\dot{e}_{ij}$  e  $\dot{e}$ , como apresentado na equação (3.30).

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \dot{e} \xi_{ij} \quad (3.30)$$

Onde:

$\xi_{ij}$  = função de Kroenecker.

Uma taxa de deformação volumétrica nodal (definida como o peso médio dos valores dos elementos em torno do ponto de rede), é calculado como:

$$\dot{e}_n = \frac{\sum_{e=1}^{m_n} \dot{e}_e V_e}{\sum_{e=1}^{m_n} V_e} \quad (3.31)$$

Onde “ $m_n$ ” são os elementos em torno do nó “ $n$ ”, e “ $V_e$ ” é o volume do elemento “ $e$ ”.

Depois que os valores da taxa de deformação volumétrica são obtidos, é calculado um valor principal para o elemento  $\bar{e}$  tomando a média dos valores dos nós:

$$\bar{e} = \frac{1}{d} \sum_{n=1}^d \dot{e}_n \quad (3.32)$$

Onde  $d=3$  para um triângulo, e  $d=4$  para um tetraedro.

Finalmente, a taxa de deformação de um elemento é redefinida pela superposição da parcela desviadora e o volume médio.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \bar{e} \xi_{ij} \quad (3.33)$$

O modelo constitutivo é utilizado para derivar novas tensões (a partir das taxas de deformação) e tensões anteriores.

- **Discretização Nodal Mista para Tensões em uma Rede Triangular**

Considerando uma lei constitutiva de incremento volumétrico de tensão-deformação, para pequenos incrementos pode ser empregada a seguinte expressão:

$$\dot{\sigma} = K(\bar{\dot{e}} - \dot{e}^p) \quad (3.34)$$

Onde  $\dot{e}^p$  representa o incremento plástico volumétrico-deformação, cujo valor é diferente de zero para materiais dilatantes/contractantes. As forças nodais associadas devem ser consistentes com as suposições feitas para definir a cinemática do elemento. Para atingir este objetivo, é aplicado um procedimento de discretização nodal mista sobre o termo  $K\dot{e}^p$ , como é descrito na equação (3.34). Por conveniência a termo  $K\dot{e}^p$  e igual  $\dot{\sigma}^p$  como apresentado na equação (3.35).

$$\dot{\sigma} = K\bar{\dot{e}} - \dot{\sigma}^p \quad (3.35)$$

O valor  $\dot{\sigma}^p$  é uma quantidade padrão avaliada no procedimento do modelo constitutivo.

A técnica para discretização nodal mista sobre tensões é similar para a deformação. Primeiro, os valores nodais para  $\dot{\sigma}^p$  são calculados como um peso médio dos valores dos elementos em torno deles.

$$\dot{\sigma}_n^p = \frac{\sum_{e=1}^{m_n} \dot{\sigma}_e V_e}{\sum_{e=1}^{m_n} V_e} \quad (3.36)$$

Depois que os valores  $\dot{\sigma}^p$  são obtidos, é calculado um valor principal para o elemento  $\bar{\dot{\sigma}}^p$  tomando a media dos valores nodais:

$$\bar{\dot{\sigma}}^p = \frac{1}{d} \sum_{n=1}^d \dot{\sigma}_n^p \quad (3.37)$$

Onde  $d=3$  para um triângulo, e  $d=4$  para um tetraedro.

Finalmente, as tensões calculadas pelo modelo constitutivo são corrigidas pela substituição de  $\bar{\sigma}^p$  por  $\dot{\sigma}^p$ .

$$\sigma_{ij} \Rightarrow \sigma_{ij} + (\dot{\sigma}^p - \bar{\sigma}^p) \xi_{ij} \quad (3.38)$$

Certamente, a discretização nodal mista sobre tensões somente é relevante para materiais dilatante/contractantes.

- **Condições de contorno**

Tensão (carregamento) ou deslocamento (velocidade) pode ser aplicado no contorno de um modelo no MED. A condição é aplicada no centroide dos blocos ao longo do contorno para um modelo de corpo rígido. Para blocos deformáveis, os deslocamentos são especificados em termos de velocidades prescritas em pontos dados da rede. Nota-se que a equação (3.38) não envolve aqueles pontos. Em uma condição de contorno, as forças estão derivadas como segue:

$$F_i = \sigma_{ij}^b n_j \Delta s \quad (3.39)$$

Onde:

$n_j$ =vetor normal apontando fora do segmento da condição de contorno.

$\Delta s$ =é o comprimento do segmento do contorno sobre o qual as tensões  $\sigma_{ij}^b$  atuam.

A força  $F_i$  é adicionada na equação (3.16) para um ponto apropriado de rede.

Quando são realizadas análises estáticas, o problema de definir as condições de contorno para um modelo numérico sem limites pode ser abordado pelo acoplamento da montagem de blocos a uma representação contorno-elemento do campo. Devido a que comportamento não linear é usualmente confinado na vizinhança da estrutura ou escavação sob estudo, a suposição do comportamento linear-elástico nestas zonas é justificado.

Uma matriz de rigidez  $K$  a qual relaciona as forças e deslocamentos nas interfaces da montagem dos elementos distintos e um plano infinito ou plano médio representa a

região do contorno do elemento. O módulo elástico do domínio do campo distante deve refletir a deformabilidade da massa de rocha fraturada. Durante o processo de cálculo, o movimento dos blocos define os deslocamentos na interface. O domínio do elemento-contorno proporciona reação elástica dada pela seguinte expressão:

$$F = -Ku \quad (3.40)$$

- **Determinação do Passo de Tempo Mecânico: Solução Estável**

O comportamento dinâmico é representado numericamente por um algoritmo de passo de tempo no qual o tamanho do passo é limitado pela consideração de que as velocidades e as acelerações são constantes dentro do passo. Adicionalmente, o passo de tempo deve ser suficientemente pequeno durante um passo simples, a fim de garantir que as perturbações mecânicas não se propaguem entre um elemento discreto e os blocos nos seus arredores. Nota-se que a restrição de tempo se aplica tanto para contatos quanto para blocos. Para blocos rígidos, a rigidez da massa do bloco e a interface definem a limitação do passo de tempo (salienta-se que para blocos deformáveis, o tamanho da zona é utilizado). A rigidez do sistema inclui contribuições dos módulos da rocha intacta e a rigidez dos contatos.

É importante destacar que o esquema de solução empregado pelo MED é condicionalmente estável. Nesse esquema, é determinado um passo de tempo limitado, o qual satisfaz o critério de estabilidade para o cálculo da deformação do bloco interno e os deslocamentos relativos do bloco inteiro. O passo de tempo computacional requerido para a estabilidade da deformação do bloco é estimado como:

$$\Delta t_n = 2 \min \left( \frac{m_i}{k_i} \right)^{1/2} \quad (3.41)$$

Onde:

$m_i$ = massa associada com o nó do bloco; e

$k_i$ =é a medida de rigidez dos elementos em torno do nó.

O termo de rigidez  $K_i$  deve se levado em consideração tanto para a rocha intata quanto para as descontinuidades. O parâmetro anterior é calculado como a soma de dois componentes, como visto na equação (3.42).

$$K_i = \sum (K_{zi} + K_{ji}) \quad (3.42)$$

O primeiro termo do lado direito representa a soma das contribuições da rigidez de todos os elementos conectados ao nó  $i$ , os quais são estimados como:

$$K_{zi} = \frac{8}{3} \left( K + \frac{4}{3} G \right) \frac{b_{\max}^2}{h_{\min}} \quad (3.43)$$

Onde:

$K$  e  $G$  correspondem aos módulos de rigidez de *Bulk* e de rigidez ao cisalhamento, respetivamente;

$b_{\max}$  = é a zona de borda mais longa;

$h_{\min}$  = mínima altura de um elemento triangular.

### 3.3.

#### O software UDEC (Universal Distinct Element Code)

O software UDEC desenvolvido pela ITASCA (figura 3.12) corresponde ao mais recente resultado dos estudos em duas dimensões do método dos elementos discretos realizados por Cundall *et al.* no ano de 1980. Neste ano foram combinadas as formulações para a representação de corpos rígidos e deformáveis separados por descontinuidades. O código pode realizar análises estáticas ou dinâmicas. No ano de 1983 o Dr Cundall começou a trabalhar na versão tridimensional do método. A partir desse trabalho foi desenvolvido o software 3DEC, que começou a ser utilizado para estudar a estabilidade de minas e a avaliação das tensões tridimensionais devido a processos de escavação.

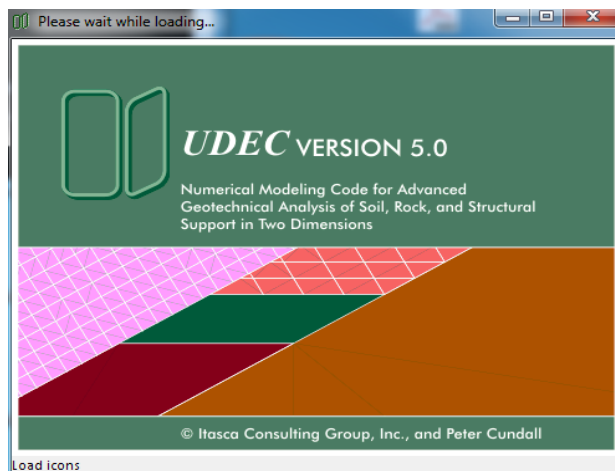


Figura 3. 12 – O software UDEC (Itasca 2011).

A modelagem de problemas em meios rochosos fraturados é realizada no software UDEC em um conjunto de oito etapas. A figura 3.13 apresenta a janela principal do software UDEC. À continuação é apresentada cada uma das etapas junto com uma sucinta definição:

- **Etapa 1: Definição da Geometria do Problema**

Nesta primeira etapa são definidos os contornos do modelo de elementos discretos. Estes contornos podem ser lineares (quadrado) ou curvos (circulo). Além dos contornos, nesta etapa são definidos o raio de arredondamento dos cantos dos blocos e o mínimo comprimento de borda para que um bloco seja gerado.

- **Etapa 2: Discretização por Diferenças Finitas**

Na segunda etapa é construída a malha de diferenças finitas mediante a escolha do máximo comprimento de borda de um elemento triangular. Esta etapa é realizada apenas para as modelagens de blocos deformáveis.

- **Etapa 3: Modelos Constitutivos e Propriedades dos Materiais**

Nesta etapa são definidos os modelos constitutivos da rocha intacta e da fratura. Da escolha destes modelos dependem as propriedades mecânicas requeridas nos materiais.

- **Etapa 4: Condições de Contorno**

As condições de contorno podem ser aplicadas em termos de forças ou deslocamentos. No caso de problemas com fluxo de fluidos nesta etapa são definidas as condições iniciais de poropressão do sistema.

- **Etapa 5: Utilidades**

Na etapa de utilidades podem-se desenhar os deslocamentos, tensões, velocidades, etc, de algum ponto dentro do sistema discreto. O gráfico da máxima força de desequilíbrio *versus* o número e ciclos é escolhido nesta etapa.

- **Etapa 6: Configurações**

Nesta etapa são escolhidas algumas características especiais na modelagem. Entre elas esta o valor da gravidade, o coeficiente de amortecimento, o máximo comprimento de separação entre blocos, o máximo comprimento de sobreposição dos blocos, entre outros valores.

- **Etapa 7: Execução do problema**

Com todas as características anteriores já definidas, o problema pode ser resolvido. O critério de parada da execução pode se escolhida de duas formas: até que a relação do máximo resíduo do equilíbrio atual com respeito à máxima força atinja um valor mínimo, ou definindo-se a quantidade de ciclos de execução do programa.

- **Etapa 8: Gráficas**

Quando o sistema tinha atingido a condição de equilíbrio, podem ser visualizados nesta etapa os resultados de tensão, deformação, poropressão, velocidade etc.



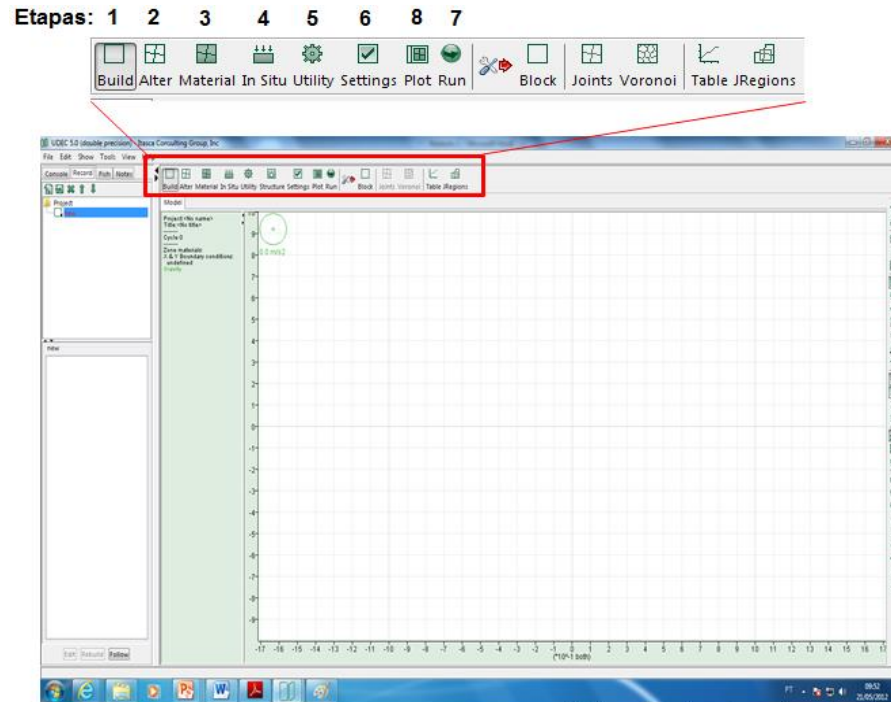


Figura 3. 13 – Janela principal do software UDEC (Itasca, 2011).

Outra característica importante do software UDEC é que ele possui sua própria linguagem de programação chamada FISH. Esta linguagem foi desenvolvida no ano de 1996 como resposta aos usuários que desejavam realizar mais operações e que eram impossíveis de realizar com as estruturas existentes.

Na linguagem FISH é possível desenvolver funções, por exemplo, para avaliar novos modelos constitutivos e para desenhar e imprimir novas variáveis.