

## 7

## Referências Bibliográficas

- [01] P. Masset, Volatility Stylized Facts, Working Paper (2011)
- [02] W. Paul, J. Baschnagel, Stochastic Processes from Physics to Finance, Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1999)
- [03] L. Bachelier, Theorie de la Especulation, Ann. Sci. Ecole. Sup. 17, 21 (1900)
- [04] M. Osborn, Oper. Res. 7, 145 (1959)
- [05] A.A.G. Cortines et al, Eur. Phys. J. B **60**, 385–389 (2007).
- [06] H.E. Stanley, Econophysics
- [07] K. French, Journal of Financial Economics, 8, 55-69 (1980)
- [08] E. Fama, The Journal of Business, 38, 34-105 (1965)
- [09] J. Hull, Opções Futuros e Outros derivativos, 3ª Edição, Ed. Bolsa de Mercadorias e Futuros (1997)
- [10] M. Dacorogna *et al*, An Introduction to High Frequency Finance, Ed. Academic Press (2001)
- [11] Y. Liu, P. Cizeau, M. Meyer, C.-K Peng, H.E. Stanley, Correlations in Economic Time Series, Physica A 245, 437 (1997)
- [12] J. Perelló, J. Mansoliver, e J-P Bouchaud, Applied Mathematical Finance 11, 27 (2004)
- [13] R. Vicente, C.M. de Toledo, V.B.P.Leite e N. Caticha, Physica A **361** , 272 (2006)
- [14] T. Di. Matteo, T. Aste, M. M. Dacorogna, Journal of Banking&Finance **29** , 827-851 (2005). T. Di. Matteo, Quantitative Finance 7,21 (2007)
- [15] L. Zunino, B.M. Tabak, A.Figliola, D.G. Perez, M. Garavaglia e O.A. Rosso, Physica A 387, 6558 (2008)
- [16] D.O.Cajueiro e B.M. Tabak, Chaos, Solitons and Fractals 22, 349 (2004)
- [17] M. Dacorogna *et al*, Journal of Empirical Finance 4, 213-239 (1997)
- [18] R. Gençay, F. Selçuk, B. Whitcher, Quantitative Finance 10, 895-915 (2010)
- [19] A. Arneodo, J. Muzy, D. Sornette, The European Physical Journal B 2, 277-282 (1998)
- [20] O. Vasicek, Journal of Financial Economics 5, 177 (1977)
- [21] J. Zimbar, Modelos de volatilidade estocástica. Prandini Rabbat & Associates
- [22] C. Anteneodo e R. Riera, Phys. Ver. E 72, 026106 (2005)
- [23] J. C. Hull and A. White, J. Finance 42, 281 (1987)
- [24] S. L. Heston, Rev. Financial Studies 6, 327 (1993)
- [25] P. Gopikrishnan, V. Plerou, L. A. Nunes Amaral, M. Meyer and H. E. Stanley, Phys. Rev. E. 60, 5305 (1999)
- [26] S. Micciche, G. Bonanno, F. Lillo, R. Mantegna, **Physica A** 314 (2002)
- [27] J.P. Bouchaud, A. Maticz, M. Potters, PRL 87, 228701 (2001)
- [28] A. M. Hibbert, R. Daigler, B.Dupoyet, Journal of Banking & Finance 32, 2254-2266 (2008)
- [29] D. Madan e G. Bakshi, SSRN Electronic Journal, Working paper series (1999)
- [30] J. Perelló, J. Masoliver, Phys. Rev. E 67, 037102 (2003)
- [31] P. A. Reigerson, R. Allez e J. P. Bouchaud, Physica A 300, 3026 (2011)
- [32] J. Perelló, J. Masoliver e J. P. Bouchaud, Applied Mathematical Finance 11, 27 (2004)
- [33] J.Perelló, J. Mansoliver e N.Anento, Physica A 344, pag 134 (2004)
- [34] K. E. Bassler, G. H. Gunaratne e J.L. McCauley, Physica A 369 (2006) 343-353
- [35] E. A. Novikov, Soviet Physics JETP 20, 1290 (1965)

## Apêndice 1

### Relação entre correlação e expoente de Hurst

Dado que  $\Delta$  representa um intervalo temporal elementar, o retorno logarítmico em intervalo  $k\Delta$  é definido como:

$$r_k(t) = x(t) - x(t - k\Delta)$$

Da propriedade de agregação dos retornos  $r_k(t) = \sum_{i=0}^{k-1} r_1(t - i\Delta)$  segue-se que:

$$E[r_{k+1}(t)^2] = E[r_k(t)^2] + E[r_1(t)^2] + 2 \sum_{i=0}^{k-1} E[r_1(t - i\Delta)r_1(t - k\Delta)] \quad \text{eq. (A.1.1)}$$

Assumindo estacionariedade do processo  $r_1(t)$ , a função de autocorrelação do processo com média zero é definida como:

$$C(l) = \frac{E[r_1(t)r_1(t - l\Delta)]}{E[r_1(t)^2]}$$

A eq. A.1.1, escrita em termos da função de correlação assume a forma:

$$E[r_{k+1}(t)^2] = E[r_k(t)^2] + E[r_1(t)^2] + 2E[r_1(t)^2] \sum_{i=0}^{k-1} C(k - i) \quad \text{eq. (A.1.2)}$$

Considerando que os retornos seguem um processo que satisfaz a lei de escala:

$$E[r_k(t)^2] = Ak^{f(2)},$$

chegamos à relação:

$$(k + 1)^{f(2)} = k^{f(2)} + 1 + 2 \sum_{i=0}^{k-1} C(k - i) \quad \text{eq. (A.1.3)}$$

Pode ser mostrado por indução que  $C(k)$  assumirá a forma:

$$C(k) = \frac{(k+1)^{f(2)}}{2} - k^{f(2)} + \frac{(k-1)^{f(2)}}{2} \quad \text{eq. (A.1.4)}$$

Identificando  $f(2) \equiv 2H(2)$ , para retornos sucessivos tem-se que:

$$C(1) = 2^{2H(2)-1} - 1$$

Para  $H(2) = 1/2$ , da eq. (A.1.4),  $C(k) = 0$  para  $\forall k$  e reproduz-se o ruído branco.

Por outro lado, para  $H(2) > 1/2$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} C(k) = \infty$ , representando um processo de memória de longo alcance. Neste caso, o comportamento assintótico de  $C(k)$  ( $k \gg 1$ ) pode ser encontrado expandindo o lado direito da eq. A.1.4 em uma aproximação de segunda ordem em  $k$ . Assim, temos que a correlação terá o comportamento ( $\tau \equiv k\Delta$ ):

$$C(\tau) = 2H(2)(2H(2) - 1)\tau^{2H(2)-2} \quad \text{eq. (A.1.5)}$$

É importante frisar que os resultados apresentados nas eqs. (A.1.4) e (A.1.5) são válidos apenas assumindo-se a estacionariedade do processo dos retornos. Desta forma, a associação usual de expoente de Hurst  $H(2) > 1/2$  com processos de memória longa nem sempre é possível. A detecção de  $H(2) > 1/2$  em um processo Markoviano indica dinâmica com incrementos não-estacionários [34]. Este seria o caso do processo dos retornos com variância estocástica.

Por outro lado, a partir da eq. A.1.2, podemos escrever:

$$E[r_{k+1}(t)^2] = E[r_k(t)^2] + E[r_1(t)^2] + \begin{array}{l} \text{correções devido à presença} \\ \text{de correlações até lag } k \end{array}$$

Para processos independentes,  $C(l) = 0$ , logo,

$$E[r_k(t)^2] \propto k, \quad \text{eq. (A.1.6)(A)}$$

característico de um processo difusivo.

Assim, para processos com correlação de curto alcance persistente até *lag*  $n$ , espera-se um crescimento mais rápido da dispersão, característico de um processo superdifusivo.

$$E[r_k(t)^2] \propto k^f \quad (f > 1) \quad \text{eq. (A.1.6)(B)}$$

## Apêndice 2

### Processo Multiplicativo e expoente de Hurst

Na formulação de cascata multiplicativa para volatilidade em diferentes resoluções temporais, a volatilidade em uma determinada escala fina  $\tau_i$  pode ser dada por uma composição dessa grandeza em escalas mais largas. Sendo a escala *coarse*  $\tau_0$  e dada uma razão constante  $s < 1$  entre as escalas intermediárias  $\tau_{i+1}$  e  $\tau_i$ , temos:

$$v_{\tau_{i+1}}(t) = \tilde{W}_{\tau_i, \tau_{i+1}} v_{\tau_i} \quad (\text{eq. A.2.1})$$

com  $\tau_i = s^i \tau_0$  e  $s < 1$ . Usando a eq. A.2.1, com  $\tau = \tau_0 s^n$ , temos:

$$v_{\tau}(t) = \prod_{i=0}^{n-1} \tilde{W}_{\tau_i, \tau_{i+1}} v_{\tau_0}(t) \quad (\text{eq. A.2.2})$$

Hipótese 1: as distribuições de  $\tilde{W}_{\tau_i, \tau_{i+1}}(t)$  são independentes entre si e da volatilidade. Então a seguinte formulação é válida:

$$\langle v_{\tau}(t) \rangle = \prod_{i=0}^{N-1} \langle \tilde{W}_{\tau_i, \tau_{i+1}} \rangle \langle v(\tau_0) \rangle \quad (\text{eq. A.2.3})$$

Hipótese 2: as distribuições de  $\tilde{W}_{\tau_i, \tau_{i+1}}(t)$  não dependem da escala inicial  $\tau_i$ . Elas seriam idênticas, dependendo apenas da razão  $s$  entre as escalas intermediárias. A partir disso, podemos afirmar que:

$$\tilde{W}_{\tau_i, \tau_{i+1}}(t) \rightarrow \tilde{W}_s(t)$$

e a seguinte formulação é válida:

$$\langle v_{\tau}(t) \rangle = \langle \tilde{W}_s(t) \rangle^N \langle v_{\tau}(t) \rangle \quad (\text{eq. A.2.4})$$

Assim, a partir do reescalonamento das escalas temporais:

$$\tau_0 \rightarrow \tau = \tau_0 s^n$$

obtém-se o reescalonamento da volatilidade:

$$\langle v(\tau_0) \rangle \rightarrow \langle v(\tau) \rangle = \langle \tilde{W}_s \rangle^N \langle v(\tau_0) \rangle \quad (\text{eq. A.2.5})$$

Isso representa um processo auto-afim,

$$\langle v(s\tau) \rangle = s^H \langle v(\tau_0) \rangle \quad (\text{eq. A.2.6})$$

onde H é um expoente de escala. Nesse caso, temos:

$$\langle v(s^n \tau_0) \rangle = s^{nH} \langle v(\tau_0) \rangle \quad (\text{eq. A.2.7})$$

Comparando as equações A.2.5 com A.2.7, mostramos que  $s^{nH} = \langle \tilde{W}_s \rangle^N$ ,  
ou:

$$H = \frac{\ln \langle \tilde{W}_s \rangle}{\ln s} \quad (\text{eq. A.2.8})$$

### Apêndice 3

#### Equação de Fokker-Planck

A equação diferencial estocástica de Itô-Langevan é dada por:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW \quad (\text{eq. A.3.1})$$

onde  $dW$  é um incremento de um processo de Wiener. Sabendo que  $\langle dW \rangle = 0$  e  $\langle dW^2 \rangle = 2dt$ . Consideremos uma função arbitrária  $f(x(t))$ . De acordo com a média sobre realizações da variável aleatória  $x$  do processo estocástico da eq. A.3.1 podemos escrever:

$$\langle df \rangle = \left\langle \frac{df}{dx} a(x, t) \right\rangle dt + \left\langle \frac{df}{dx} b(x, t) \right\rangle \langle dW \rangle + \left\langle \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} b^2(x, t) \right\rangle \langle (dW)^2 \rangle \quad (\text{eq. A.3.2})$$

Substituindo  $\langle dW \rangle$  e  $\langle dW^2 \rangle$  na equação, obtemos:

$$\langle df \rangle = \left\langle \frac{df}{dx} a(x, t) \right\rangle dt + \left\langle \frac{d^2 f}{dx^2} b^2(x, t) \right\rangle dt \quad (\text{eq. A.3.3 (A)})$$

$$\frac{d}{dt} \langle f(x(t)) \rangle = \left\langle \frac{df}{dx} a(x, t) \right\rangle + \left\langle \frac{d^2 f}{dx^2} b^2(x, t) \right\rangle \quad (\text{eq. A.3.3 (B)})$$

A definição de média sobre realizações nos dá a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt} \langle f(x(t)) \rangle = \int dx \left[ \frac{df}{dx} a(x, t) + \frac{d^2 f}{dx^2} b^2(x, t) \right] P(x, t) \quad (\text{eq. A.3.4})$$

Das condições de normalização de  $P(x, t)$ , obtemos:  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x, t) \rightarrow 0$

E a hipótese do contorno de fluxo nulo:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} P(x, t) \rightarrow 0$

Integrando A.3.4 por partes obtemos:

$$\frac{d}{dt} \langle f(x(t)) \rangle = \int dx f(x) \frac{d}{dx} [-a(x, t)P(x, t)] + \int dx f(x) \frac{d^2}{dx^2} [b^2(x, t)P(x, t)] \quad (\text{eq. A.3.5})$$

Reescrevendo o termo do lado esquerdo da equação, temos:

$$\frac{d}{dt} \langle f(x(t)) \rangle = \frac{d}{dt} \int dx P(x, t) f(x) = \int dx f(x) \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) \quad (\text{eq. A.3.6})$$

De A.3.5 e A.3.6, como  $f(x(t))$  é arbitrária, as integrais fornecem a equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{d}{dx} [-a(x, t)P(x, t)] + \frac{d^2}{dx^2} [b^2(x, t)P(x, t)] \quad (\text{eq. A.3.7})$$

Essa é a equação de Fokker-Planck (FP), que descreve a evolução temporal da função de distribuição de probabilidade. Essa formulação será utilizada para que possamos determinar a probabilidade assintótica dos modelos de volatilidade.

Podemos calcular uma expressão equivalente à eq. A.3.7 para um processo estocástico com mais de um ruído. Partimos da seguinte equação:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW_1 + c(x, t)dW_2 \quad (\text{eq. A.3.8})$$

onde  $dW_1$  e  $dW_2$  são ruídos independentes com distribuição  $N(0, 2dt)$ . Partindo novamente de uma função arbitrária  $f(x(t))$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \langle df \rangle &= \left\langle \frac{df}{dx} a(x, t) \right\rangle dt + \left\langle \frac{df}{dx} b(x, t) \right\rangle \langle dW_1 \rangle + \left\langle \frac{df}{dx} c(x, t) \right\rangle \langle dW_2 \rangle \\ &\quad + \left\langle \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} b^2(x, t) \right\rangle \langle (dW_1)^2 \rangle + \left\langle \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} c^2(x, t) \right\rangle \langle (dW_2)^2 \rangle \end{aligned}$$

Substituindo  $\langle dW \rangle$  e  $\langle |dW^2| \rangle$  nesta equação, obtemos:

$$\langle df \rangle = \left\langle \frac{df}{dx} a(x, t) \right\rangle dt + \left\langle \frac{d^2 f}{dx^2} b^2(x, t) \right\rangle dt + \left\langle \frac{d^2 f}{dx^2} c^2(x, t) \right\rangle dt \quad (\text{eq. A.3.9})$$

Replicando os mesmos cálculos feitos entre as equações A.3.3 e A.3.6, encontramos a equação de Fokker-Planck para o processo estocástico com dois ruídos:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{d}{dx} [-a(x, t)P(x, t)] + \frac{d^2}{dx^2} [(b^2(x, t) + c^2(x, t))P(x, t)] \quad (\text{eq. A.3.10})$$

## Apêndice 4

### Processos estocásticos com ruído multiplicativo

A equação básica dos processos estocásticos de reversão a média e ruído multiplicativo é dada por:

$$dx = -\gamma(x - \theta)|x|^{r-1} + \xi|x|^s dW \quad (\text{eq. A.4.1})$$

válido para  $\gamma, \theta$  e  $\xi > 0$ .

De acordo com A.3.1 e A.3.7, a solução estacionária da equação de Fokker-Plank, é dada por:

$$(\gamma(x - \theta)|x|^{r-1})P(x) + \frac{d}{dx}(\xi^2|x|^{2s}P(x)) = 0 \quad (\text{eq. A.4.2})(A)$$

$$(\gamma(x - \theta)|x|^{r-1} + 2s\xi^2|x|^{2s-1})P(x) + \xi^2|x|^{2s}\frac{d}{dx}P(x) = 0 \quad (\text{eq. A.4.2})(B)$$

$$-\frac{dP}{P} = \frac{(\gamma(x-\theta)|x|^{r-1} + 2s\xi^2|x|^{2s-1})}{\xi^2|x|^{2s}} dx \quad (\text{eq. A.4.2})(C)$$

$$-\frac{dP}{P} = \left( \frac{\gamma}{\xi^2} \frac{1}{|x|^{2s-r}} - \frac{\gamma\theta}{\xi^2} \frac{1}{|x|^{2s+1-r}} + \frac{2s}{|x|} \right) dx \quad (\text{eq. A.4.2})(D)$$

$$-\ln \frac{P}{P_0} = \frac{\gamma}{\xi^2} \left( -\frac{1}{2s-r-1} \right) \frac{1}{|x|^{2s-r-1}} - \frac{\gamma\theta}{\xi^2} \left( -\frac{1}{2s-r} \right) \frac{1}{|x|^{2s-r}} + 2s \ln(x) \quad (\text{eq. A.4.2})(E)$$

Dessa forma, podemos chegar à solução geral, que apresentará cauda em lei exponencial:

$$P(x) = \frac{P_0}{|x|^{2s}} \exp\left(\gamma\xi \frac{1}{2s-r-1} \frac{1}{|x|^{2s-r-1}}\right) \exp\left(-\gamma\xi\theta \frac{1}{2s-r} \frac{1}{|x|^{2s-r}}\right) \quad (\text{eq. A.4.3})$$

Após um pouco de álgebra, chegamos à formulação da eq. 4.1.3:

$$P(x) = \frac{A}{x^{2s}} \exp\left(-\gamma\xi \left[ \frac{x^{p+1}}{p+1} - \theta \frac{x^p}{p} \right]\right) \quad (\text{eq. A.4.4})$$

onde  $p=r-2s$ . Esse formato analítico é válido apenas para  $p \neq 0, -1$ , pois nestes casos a integral de A.4.2(D) fornece outros termos logarítmicos, gerando soluções particulares.

O caso  $p = -1$  é o de maior interesse porque nos leva a duas das distribuições apresentadas no capítulo 4. Ele corresponde aos modelos de Hull&White e HRML. Partindo da Eq. A.4.2(D), chegamos à seguinte distribuição de probabilidade:

$$P(x) = P_0 |x|^{-\left(\frac{\gamma}{\xi^2} - 2s\right)} \exp\left(\frac{\gamma\theta}{\xi^2} \frac{1}{|x|}\right) \quad (\text{eq. A.4.5})$$

Nesse caso a distribuição tem cauda em lei de potência independente do parâmetro  $\theta$ , pois o valor do expoente  $\gamma/\xi^2 - 2s$  é usualmente positivo.

O segundo caso,  $p=0$ , levará a uma distribuição de cauda exponencial. Partindo da Eq. A.4.2(D), chegamos à distribuição:

$$P(x) = P_0 |x|^{\frac{\gamma\theta}{\xi^2} - 2s} \exp\left(\frac{\gamma}{\xi^2} |x|\right) \quad (\text{eq. A.4.6})$$

Como o expoente  $\gamma\theta/\xi^2 - 2s$  é positivo, a lei de potência caracteriza a região de baixos valores.

## Apêndice 5

### Potencial determinístico

Considere a força determinística presente no modelo estocástico da eq. 4.6.3:

$$F(x) = -\gamma(x - \theta)x^{-1} = -\left(\gamma - \frac{\gamma\theta}{x}\right) \quad (\text{eq. A.5.1})$$

O potencial atrativo associado a essa força é dado pela integral da eq. A.5.1:

$$V(x) = \gamma x - \gamma\theta \ln x = \gamma(x - \theta \ln x) \quad (\text{eq. A.5.2})$$

Esse potencial tem o formato indicado na figura abaixo. É possível notar que a força é sempre atrativa para o valor de equilíbrio  $x=\theta$ . Abaixo plotamos um gráfico ilustrativo com  $\theta=2.5$  e  $\gamma=2$  para visualizar o formato desse potencial:

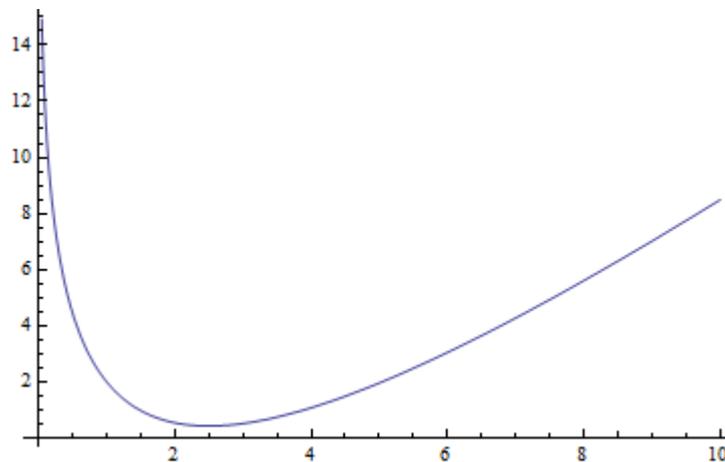


Figura A.5.1: Gráfico ilustrativo com o formato do potencial atrativo de reversão à média presente no modelo estocástico da eq. 4.6.3.

## Apêndice 6 Modelo Aditivo-Multiplicativo (AM Quadrático)

A equação geral do modelo aditivo-multiplicativo é dada por:

$$dx = -\gamma(x - \theta)x^{r-1}dt + \xi x^s dW_1 + \zeta dW_2 \quad (\text{eq. A.6.1})$$

Aplicando a solução estacionária da equação de Fokker Plank (Eq. A.3.9), teremos:

$$-\gamma(x - \theta)x^{r-1}P(x) + \frac{d}{dx}(\xi^2 x^{2s} + \zeta^2)P(x) = 0 \quad (\text{eq. A.6.2) (A)}$$

$$(\gamma(x - \theta)x^{r-1} + 2s\xi^2 x^{2s-1} + \zeta^2)P(x) = -(\xi^2 x^{2s} + \zeta^2) \frac{dP}{dx} \quad (\text{eq. A.6.2) (B)}$$

$$-\zeta^2 \left(1 + \frac{\xi^2}{\zeta^2} x^{2s}\right) \frac{dP}{dx} = -\left(\frac{\gamma}{\zeta^2} (x - \theta)x^{r-1} + 2s \frac{\xi^2}{\zeta^2} x^{2s-1}\right) P(x) \quad (\text{eq. A.6.2) (C)}$$

$$\frac{dP(x)}{P(x)} = -\left(\frac{\gamma_\zeta(x-\theta)x^{r-1} + 2s\lambda^2 x^{2s-1}}{1+\lambda^2 x^{2s}}\right) \quad (\text{eq. A.6.2) (D)}$$

onde  $\gamma_\zeta = \gamma/\zeta$  e  $\lambda = \xi/\zeta$ .

$$\frac{dP(x)}{P(x)} = \left(-\frac{\gamma_\zeta x}{1+\lambda^2 x^{2s}} + \frac{\theta x^{r-1}}{1+\lambda^2 x^{2s}} - \frac{2s\lambda^2 x^{2s-1}}{1+\lambda^2 x^{2s}}\right) dx \quad (\text{eq. A.6.3})$$

O caso estudado na seção 4.6 é para os parâmetros  $r=1$  e  $s=1/2$ . Por isso, resolveremos a eq. A.6.3 especificamente para esse caso. Assim, temos que a eq. A.6.3 assumirá a forma:

$$\frac{dP(x)}{P(x)} = \left(-\frac{\gamma_\zeta x}{1+\lambda^2 x} + \frac{\theta}{1+\lambda^2 x} - \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2 x}\right) dx \quad (\text{eq. A.6.4})$$

A partir desse resultado podemos então resolver essas três integrais e chegar à equação:

$$\ln \frac{P}{P_0} = (-\gamma_\xi \ln(1 + \lambda^2 x) + \theta \gamma_\zeta (\ln x - \ln(1 + \lambda^2 x)) - \ln(1 + \lambda^2 x)) \quad (\text{eq. A.6.5})$$

Após um pouco de manipulação algébrica, encontramos:

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\beta \ln(1 + \lambda^2 x) + \theta \gamma_\zeta \ln x \quad (\text{eq. A.6.6})$$

onde  $\beta = \gamma_\xi + \theta \gamma_\zeta + 1$ . Dessa forma, a distribuição de probabilidade estacionária será dada por:

$$P(x) = P_0 \frac{1}{(1 + \lambda^2 x)^\beta} x^{\gamma_\zeta \theta} \quad (\text{eq. A.6.7})$$

A importância desse modelo é devido à obtenção de distribuição assintótica com comportamento em lei de potência em ambos valores extremos ( $x \rightarrow 0$  e  $x \rightarrow \infty$ ).

## Apêndice 7

### Correlação leverage

A correlação *leverage* é usualmente descrita da seguinte forma:

$$L(\tau) = \frac{1}{Z} \langle dx'(t)v^2(t+\tau) \rangle \quad (\text{eq. A.7.1})$$

onde  $Z$  é dado pela eq. 5.2.4,  $dx'(t)$  é o retorno de média zero e  $v(t)$  é a volatilidade estimada na mesma grade temporal dos retornos. Partindo-se do modelo padrão de preços para o retorno logarítmico:

$$r(t) = \mu dt + v(t)dW_1(t) \quad (\text{eq. A.7.2})(A)$$

$$dx'(t) = v(t)dW_1(t) \quad (\text{eq. A.7.2})(B)$$

Consideramos então a volatilidade dependente do tempo  $v(t)$ , e sua dinâmica sendo descrita por uma função  $v(t) = v(Y(t))$ , onde  $Y(t)$  é um processo estocástico:

$$dY = f(Y)dt + g(Y)dW_2(t), \quad (\text{eq. A.7.3})$$

com  $f(Y)$  e  $g(Y)$  duas funções de  $Y$ . Nas eqs. A.7.2 e A.7.3,  $W_i(t)$  ( $i=1,2$ ) são dois processos de Wiener, cuja correlação é dada por:

$$\langle \xi_1(t)\xi_2(t') \rangle = \rho\delta(t-t'), \quad \text{com } -1 < \rho < 1. \quad (\text{eq. A.7.4})$$

Substituindo as equações A.7.2(B) em A.7.1, podemos escrever:

$$L(\tau) = \frac{\langle v(t)dW_1(t)v^2(t+\tau) \rangle}{Z} \quad (\text{eq. A.7.5})$$

Seguindo a convenção de Itô, temos que se  $\tau < 0$ ,  $dW_1(t)$  estará descorrelacionado das outras variáveis. Dado que  $\langle dW_1(t) \rangle = 0$ , nesse caso temos que  $L(\tau) = 0$ . Assim, podemos escrever:

$$L(\tau) = \theta(\tau) \frac{\langle v(t) dW_1(t) v^2(t+\tau) \rangle}{Z} \quad (\text{eq. A.7.6})$$

onde  $\theta(\tau)$  é a função degrau e  $Z$  está definido na eq. 5.2.4.

A média da eq. A.7.6 pode ser calculada a partir do teorema de Novikov [35], no qual fornece a média entre uma função de variável aleatória e a própria variável aleatória a partir da seguinte expressão:

$$\langle f(t, [\xi]) \xi_j(t) \rangle = \left\langle \frac{\delta f(t, [\xi])}{\delta \xi_j} \right\rangle$$

onde  $f(t, [\xi])$  é uma função de um conjunto de ruídos brancos  $[\xi]$ .

Considerando que o par  $\xi_1(t)$  e  $\xi_2(t)$  satisfaz a identidade  $\xi_1(t) = \rho \xi_2(t) + \sqrt{1 - \rho^2} \xi(t)$ , onde  $\xi(t)$  é um ruído Gaussiano independente de  $\xi_2(t)$  (e conseqüentemente, independente de  $v(t)$ ), podemos escrever, utilizando a regra da cadeia para derivadas funcionais:

$$\langle f(t, [\xi]) \xi_j(t) \rangle = \sum_{i=1}^n \rho_{ij} \left\langle \frac{\delta f(t, [\xi])}{\delta \xi_i} \right\rangle \quad (\text{eq. A.7.7})$$

Na eq. A.7.5 temos que calcular  $\langle v(t) v(t + \tau)^2 \xi_1(t) \rangle$  e portanto,  $f(t, [\xi]) = v(t) v(t + \tau)^2$ . No entanto,  $v(t)$  não depende funcionalmente de  $\xi_1(t)$ , logo,

$$\langle v(t) v(t + \tau)^2 \xi_1(t) \rangle = \rho \left\langle \frac{\delta [v(t) v(t + \tau)^2]}{\delta \xi_2(t)} \right\rangle \quad (\text{eq. A.7.8})$$

com

$$\frac{\delta [v(t) v(t + \tau)^2]}{\delta \xi_2(t)} = \left( v(t + \tau)^2 \frac{\delta v(t)}{\delta \xi_2(t)} + 2v(t) v(t + \tau) \frac{\delta v(t + \tau)}{\delta \xi_2(t)} \right) \quad (\text{eq. A.7.9)(A})$$

e

$$\frac{\delta v(t + \tau)}{\delta \xi_2(t)} = \theta(\tau) v'(t + \tau) \frac{\delta Y(t + \tau)}{\delta \xi_2(t)} \quad (\text{eq. A.7.9)(B})$$

onde  $v'(t + \tau) = \frac{dv(Y)}{dY}$  e  $\frac{\delta Y(t+\tau)}{\delta \xi_2(t)}$  é a derivada funcional de  $Y(t+\tau, [\xi_2])$  em relação a  $\xi_2(t)$ .

O primeiro termo da Eq. A.7.9(A) é nulo na formulação de Itô, enquanto no segundo, tem-se que:

$$\langle 2v(t)v(t + \tau) \frac{\delta v(t + \tau)}{\delta \xi_2(t)} \rangle = 2\theta(\tau) \langle v(t)v(t + \tau)v'(t + \tau) \frac{\delta Y(t + \tau)}{\delta \xi_2(t)} \rangle$$

Dessa forma, a correlação *leverage* fica assim representada:

$$L(\tau) = \frac{2\rho\theta(\tau)}{z} \langle v(t)v(t + \tau)v'(t + \tau) \frac{\delta Y(t+\tau)}{\delta \xi_2(t)} \rangle \quad (\text{eq. A.7.10})$$

Como foi mostrado no capítulo 4, o processo da volatilidade é caracterizado por uma reversão à média. Nesse caso, o processo estocástico de  $Y(t)$  terá a forma:

$$dY = -\gamma(Y - m) + g(Y)\xi_2(t) \quad (\text{eq. A.7.11})$$

A solução formal dessa equação é dada por:

$$Y(t) = m + \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-t')} g(Y(t')) \xi_2(t') dt' \quad (\text{eq. A.7.12})$$

De onde podemos concluir [30]:

$$\frac{\delta Y(t+\tau)}{\delta \xi_2(t)} = \theta(\tau) e^{-\gamma\tau} g(Y(t)) e^{\int_t^{t+\tau} g'(Y(s)) \xi_2(s) ds} \quad (\text{eq. A.7.13})$$

Substituindo a eq. A.7.13 na eq. A.7.10 teremos o seguinte resultado:

$$L(\tau) = \rho\theta(\tau)B(\tau)e^{-\gamma\tau} \quad (\text{eq. A.7.14})$$

$$\text{onde } B(\tau) = \frac{2\langle v(t)v(t+\tau)v'(t+\tau)G(t,t+\tau) \rangle}{z} \quad (\text{eq. A.7.15})$$

e

$$G(t, t + \tau) = g(Y(t)) e^{\int_t^{t+\tau} g'(Y(s)) \xi_2(s) ds} \quad (\text{eq. A.7.16})$$

A eq. A.7.14 mostra que modelos de preços descritos por um processo multiplicativo padrão, cuja dinâmica de volatilidade seja associada ao de uma variável subordinada  $Y(t)$  descrita por uma equação estocástica do tipo da A.7.11, leva à correlação *leverage* com dependência temporal exponencial para  $\tau > 0$ . Esse resultado está de acordo com evidências empíricas apresentadas na seção 5.2.

Para mostrar um exemplo prático desse cálculo, consideramos a correlação *leverage* para o OU aritmético. Nesse modelo simples, a volatilidade é dada por  $v(t) = Y(t)$ , onde  $Y(t)$  está definido na eq. A.7.11, com  $g(Y) = \zeta$ . Logo:

$$v'(t + \tau) = \frac{dv(Y)}{dY} = 1 \quad ; \quad g'(Y) = 0.$$

$$\text{De A.7.16, } G(t, t + \tau) = g(Y(t)) e^{\int_t^{t+\tau} g'(Y(s)) \xi_2(s) ds} = \zeta$$

e de A.7.15,

$$B(\tau) = \frac{2\zeta \langle v(t)v(t+\tau) \rangle}{Z} \quad (\text{eq.A.7.17)(A)}$$

Partindo da eq. A.7.12, podemos calcular a covariância de  $v(t)$  [32]. Note que  $\langle v(t)v(t + \tau) \rangle$  é a covariância acrescido de  $[\langle v(t) \rangle]^2 \equiv m^2$ . Assim, encontra-se para  $B(\tau)$ :

$$B(\tau) = 2\zeta \left[ \frac{m^2 + (\zeta^2/2\gamma) \exp(-\gamma\tau)}{[m^2 + (\zeta^2/2\gamma)]^2} \right] \quad (\text{eq.A.7.17)(B)}$$

Substituindo  $B(\tau)$  dado pela A.7.17(B) na eq. A.7.14 obtemos

$$L(\tau) = 2\rho\zeta \theta(\tau) \left[ \frac{m^2 + \left(\frac{\zeta^2}{2\gamma}\right) \exp(-\gamma\tau)}{[m^2 + (\zeta^2/2\gamma)]^2} \right] e^{-\gamma\tau} \quad (\text{eq.A.7.18})$$

Para este modelo simples, a correlação leverage já prevê uma dupla exponencial, com constantes características  $\gamma$  e  $2\gamma$ . Dependendo da significância dos coeficientes das duas exponenciais, o comportamento duplo exponencial pode ser observado ou não.

O comportamento na forma exponencial para a correlação leverage segundo a formulação da eq. 5.2.6 também pode ser justificada matematicamente.

Procedimento análogo à obtenção da eq. A.7.5 mostrado anteriormente leva à:

$$L(\tau) = \theta(\tau) \frac{\langle v(t)dW_1(t)v(t+\tau) \rangle}{Z'} \quad (\text{eq. A.7.19})$$

onde  $Z'$  é dado pela eq. 5.2.4. Usando o teorema de Novikov (eq. A.7.7):

$$\langle v(t)v(t+\tau)\xi_1(t) \rangle = \rho \left\langle \frac{\delta[v(t)v(t+\tau)]}{\delta\xi_2(t)} \right\rangle \quad (\text{eq. A.6.20})$$

Analogamente à eq. A.7.10, a correlação *leverage* se escreve como:

$$L(\tau) = \frac{\rho\theta(\tau)}{Z} \langle v(t)v'(t+\tau) \frac{\delta Y(t+\tau)}{\delta\xi_2(t)} \rangle \quad (\text{eq. A.7.21})$$

Usando as eqs. A.7.13 e A.7.16,

$$L(\tau) = \rho\theta(\tau)J(\tau)e^{-\gamma\tau} \quad (\text{eq. A.7.22})$$

onde

$$J(\tau) = \frac{\langle v(t)v'(t+\tau)G(t,t+\tau) \rangle}{Z} \quad (\text{eq. A.7.23})$$

## Apêndice 8

### Transformação de Itô para Modelo AM Quadrático

Para  $x \equiv v^2$ ;  $r = 0$ ;  $s = 1/2$  temos a equação estocástica do modelo AM quadrático:

$$dx = -\gamma(x-\theta)x^{-1}dt + \xi_1\sqrt{x}dW_1 + \xi_2dW_2 \quad (\text{eq. A.8.1})$$

com  $dW_1$  e  $dW_2$  não são correlacionados, com  $\langle dW_1 \rangle = \langle dW_2 \rangle = 0$  e  $\langle (dW_1)^2 \rangle = \langle (dW_2)^2 \rangle = 2dt$ .

Identificando os coeficientes de drift ( $a(x)$ ) e de difusão ( $b(x)$ ):

$$dx = \underbrace{-\gamma(x-\theta)x^{-1}}_{a(x)}dt + \underbrace{(\xi_1\sqrt{x}dW_1)}_{b_1(x)} + \underbrace{\xi_2dW_2}_{b_2(x)}$$

Fazendo a transformação de Itô para função da variável estocástica  $G(x)$  e tomando a média sobre os termos de segunda ordem nos ruídos:

$$dG = \left[ a(x)\frac{\partial G}{\partial x}dt + (b_1^2(x)\langle (dW_1)^2 \rangle + b_2^2(x)\langle (dW_2)^2 \rangle)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right] + b_1(x)\frac{\partial G}{\partial x}dW_1 + b_2(x)\frac{\partial G}{\partial x}dW_2$$

$$dG = \left[ a(x)\frac{\partial G}{\partial x}dt + (b_1^2(x) + b_2^2(x))\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right] + b_1(x)\frac{\partial G}{\partial x}dW_1 + b_2(x)\frac{\partial G}{\partial x}dW_2$$

$$\text{Fazendo } x \equiv v^2 \Rightarrow v \equiv G(x) = \sqrt{x} \Rightarrow G'(x) = \frac{x^{-1/2}}{2}, G''(x) = -\frac{x^{-3/2}}{4},$$

temos:

$$dG = \left\{ -\gamma(x-\theta)x^{-1} \cdot \frac{x^{-1/2}}{2} - \left[ \xi_1^2 x + \xi_2^2 \right] \cdot \frac{x^{-3/2}}{4} \right\} dt + \left( \xi_1 x^{1/2} dW_1 + \xi_2 dW_2 \right) \frac{x^{-1/2}}{2}$$

$$dG = \frac{1}{2} \left\{ \left[ -\gamma(x-\theta)x^{-3/2} - \frac{1}{2}\xi_1^2 \left[ x + \left( \frac{\xi_2}{\xi_1} \right)^2 \right] x^{-3/2} \right] dt + \left( \xi_1 dW_1 + \xi_2 x^{-1/2} dW_2 \right) \right\}$$

Reescrevendo em termos da volatilidade ( $\zeta \equiv \xi_2$  e  $\xi \equiv \xi_1$ ):

$$dv = \frac{1}{2} \left\{ \left[ -\gamma(v^2 - \theta)v^{-3} - \frac{1}{2}\xi^2 \left[ v^2 + \left( \frac{\zeta}{\xi} \right)^2 \right] v^{-3} \right] dt + \xi dW_1 + \zeta v^{-1} dW_2 \right\}.$$

Assim, o termo de reversão à média resultante será:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ -\gamma v^{-2}(v - \theta v^{-1}) - \frac{1}{2}\xi^2 v^{-2} \left[ v + \frac{\zeta^2}{\xi} v^{-1} \right] \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\left( \gamma + \frac{1}{2}\xi^2 \right) v^{-1} + \gamma\theta v^{-1} + \gamma\theta v^{-2} - \frac{1}{2}v^{-3}\zeta^2 \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \left[ -\left( \gamma + \frac{1}{2}\xi^2 \right) v^{-1} + v^{-3}(\gamma\theta - \frac{1}{2}\zeta^2) \right] = \frac{1}{2} \left[ -\left( \gamma + \frac{1}{2}\xi^2 \right) v^{-2} \left\{ v - v^{-1} \frac{(\gamma\theta - \frac{1}{2}\zeta^2)}{(\gamma + \frac{1}{2}\xi^2)} \right\} \right] \quad (\text{eq. A.8.2})$$

Logo, tomando como aproximação “de ordem zero” na eq. A.8.2, obtemos os parâmetros efetivos empíricos:

$$\gamma_{eff}^0 = \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{2}\xi^2 \right) \langle v^{-2} \rangle \quad (\text{eq. A.8.3A})$$

$$\theta_{eff}^0 = \frac{(\gamma\theta - \frac{1}{2}\zeta^2)}{(\gamma - \frac{1}{2}\xi^2)} \langle v^{-1} \rangle \quad (\text{eq. A.8.3B})$$

Note que como  $v$  é positiva definida, então é necessário que  $\gamma\theta > \frac{\zeta^2}{2}$  ou  $\gamma_\zeta > 1/2\theta$ . Utilizando os dados da tabela 4.7.2, com  $\gamma_\zeta = 8.91$  e  $\theta = 0.6$ , nossos resultados para o modelo AM quadrático satisfazem a relação acima.