



**Flávio Lúcio de Oliveira Coelho**

**Avaliação de VaR de Mercados Emergentes e  
Desenvolvidos via Modelos de Cópulas Dinâmicas**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica da PUC- Rio como requisito parcial  
para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Cristiano Augusto Coelho Fernandes  
Co-orientador: Prof. Rafael Martins de Souza

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2012



**Flávio Lúcio de Oliveira Coelho**

**Avaliação de VaR de Mercados Emergentes e Desenvolvidos via Modelos de Cópulas Dinâmicas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Cristiano Augusto Coelho Fernandes**  
**Orientador**  
Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

**Prof. Rafael Martins de Souza**  
Co-Orientador  
FGV

**Prof. Marco Aurélio dos Santos Sanfins**  
UFF

**Prof. Álvaro de Lima Veiga Filho**  
Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**  
Coordenador Setorial do Centro  
Técnico Científico

Rio de Janeiro, 20 de dezembro de 2012

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Flávio Lúcio de Oliveira Coelho**

Graduou-se em Estatística pela Escola Nacional de Ciências Estatísticas – ENCE. Pós-Graduado em Gerência de Risco pela Universidade Federal Fluminense – UFF. Atualmente, atua como Especialista em Pricing e Underwriting na SulAmérica Seguros.

#### Ficha Catalográfica

Coelho, Flávio Lúcio de Oliveira.

Avaliação de VaR de Mercados Emergentes e Desenvolvidos via Modelos de Cópulas Dinâmicas / Flávio Lúcio de Oliveira Coelho; orientador: Cristiano **Augusto Coelho Fernandes**; ; co-orientador: **Rafael Martins de Souza**. – 2012.

81 f. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica, 2012.

Inclui bibliografia

1. Engenharia elétrica – Teses. 1. Cópulas dinâmicas. 2. Modelos não lineares. 3. Modelos GARCH. 4. Generalized Autoregressive Score (GAS). 5. Valor em Risco. I. Fernandes, Cristiano Augusto Coelho. II. de Souza, Rafael Martins. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. IV. Título.

CDD: 621.3

## Agradecimentos

A Deus por sempre estar ao meu lado dando força para continuar em busca dos meus sonhos.

Agradeço a toda minha família, a minha mãe Zeli, meus irmãos Fernando e Cristiane pela compreensão da minha ausência e a falta de dedicação com eles. Em memória, agradeço especialmente ao meu pai, Honório por tudo na minha vida.

A minha Esposa e aos meus Filhos Arthur e Alícia pela paciência e compreensão de minhas ausências durante esse período árduo de minha vida.

A minha sogra Creuza pela dedicação aos meus filhos nos momentos de minha ausência.

Em especial ao meu orientador, Professor Cristiano Fernandes e ao meu co-orientador, Rafael Martins de Souza pela amizade, paciência, companheirismo e por conduzirem de forma espetacular esta dissertação.

Ao grande amigo Adrian Pizzinga por me incentivar a estudar na nesta conceituada instituição.

Aos amigos Marco Paiva, Max Paiva e Wilson Morgado pelos incentivos dado para a realização do mestrado e pelas horas de trabalhos cedidas.

A todos os colegas de trabalho pelo companheirismo dedicado

A Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) pela bolsa de isenção concedida.

Aos professores que participaram da Comissão Examinadora.

A nossa maior glória não reside no fato de nunca cairmos, mas sim em levantarmo-nos sempre depois de cada queda (*Confúcio*).

## Resumo

Coelho, Flávio Lúcio de Oliveira; Fernandes, Cristiano Augusto Coelho (Orientador); de Souza, Rafael Martins (Co-orientador). **Avaliação de VaR de Mercados Emergentes e Desenvolvidos via Modelos de Cópulas Dinâmicas**. Rio de Janeiro, 2012. 81p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Esta dissertação tem por objetivo investigar como a crise do **subprime** impactou a estrutura de dependência entre os mercados emergentes e desenvolvidos, utilizando como proxy para esses mercados os índices MSCI (**Morgan Stanley Capital International**). A metodologia proposta é baseada na construção de distribuições bivariadas através de cópulas condicionais. A distribuição marginal de cada um dos índices é obtida via ajuste de modelos GARCH univariados e a modelagem de dependência é realizada através das cópulas normal, normal GAS (**Generalised Autoregressive Score**) e Joe-Clayton simétrica, considerando os parâmetros fixos (forma estática) ou variantes no tempo (forma dinâmica). Diante dos resultados obtidos, a cópula normal GAS (variantes no tempo) com quebra estrutural se mostrou a mais adequada para capturar a dependência entre os retornos dos mercados emergentes e desenvolvidos. Através do arcabouço utilizado pode-se verificar que as medidas de correlação e de dependência de cauda entre os mercados emergentes e desenvolvidos aumentaram significativamente no período da crise do subprime. Por fim, avaliou-se o ajuste das diversas cópulas aqui propostas via VaR (Value at Risk), verificando-se que a cópula normal GAS apresentou o melhor ajuste.

## Palavras-chave

Cópulas dinâmicas; Joe Clayton; GARCH; Generalized Autoregressive Score (GAS); Valor em Risco.

## Abstract

Coelho, Flávio Lúcio de Oliveira; Fernandes, Cristiano Augusto Coelho (Advisor); de Souza, Rafael Martins (Co-advisor). **VaR Evaluation of Emerging and Developed Markets via Dynamic Copula Models**. Rio de Janeiro, 2012. 81p. MSc. Dissertation - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The aim of this dissertation is to analyze how the subprime crisis impacted the dependence structure among the emerging and developed markets by using the MSCI (*Morgan Stanley Capital International*) market index as proxy for each of these markets. The proposed methodology is based on the construction of bivariate distributions via conditional copulas. The marginal distribution for each of the indexes makes use of univariate GARCH models and model dependence is captured via the following copulas: normal, normal GAS (Generalized Autoregressive Score) and Joe-Clayton symmetric considering both fixed parameters (static framework) and time varying parameters (dynamic framework). Our results show that the normal GAS copula with structural break was the most adequate to capture dependence between the returns of emerging and developed markets. Throughout the proposed framework it was possible to infer that correlation and tail dependence measures between these markets sharply increased during the subprime crisis. Finally VaR (Value at Risk) coverage was used as goodness of fit measure, and on this metric the normal GAS copula has also outperformed the others.

## Keywords

Dynamic Copulas; Joe Clayton; GARCH; Generalized Autoregressive Score (GAS); Value at Risk.

# Sumário

CAPITULO 1	13
1. Introdução	13
1.1. Organização dos capítulos	14
CAPITULO 2	16
2.1. Modelos de variância condicional	16
2.2. Modelos ARCH	16
2.3. Modelos GARCH	17
2.4. Modelos GARCH Multivariado	18
2.5. Estimação dos parâmetros	19
CAPITULO 3	21
3.1. Cópulas	21
3.2. Transformação integral de probabilidade	21
3.3. Cópula incondicional	22
3.4. Cópulas condicionais	23
3.5. Famílias de cópulas	24
3.5.1. Cópulas elípticas	25
3.5.2. Cópula Gaussiana	25
3.5.3. Cópula t-Student	26
3.6. Cópulas arquimedianas	27
3.6.1. Cópula de Clayton	28
3.6.2. Cópula de Gumbel	29
3.6.3. Cópula de Frank	30
3.6.4. Cópula de Joe-Clayton (BB7)	31
3.6.5. Cópula de Joe-Clayton simétrica	32
3.7. Cópulas variantes no tempo	33
3.7.1. Cópula normal variante no tempo	33
3.7.2. Cópula Joe Clayton simétrica variante no tempo	33
3.7.3. Cópula normal – <i>Generalized Autoregressive Score</i> (GAS)	34
3.7.4. Método de estimação	36
3.7.4.1 Máxima verossimilhança exata	37
3.7.4.2 Inferência das marginais	37
3.7.5. Quebra estrutural	38
CAPÍTULO 4	40
4.1. Medidas de dependência	40
4.2. Coeficiente de correlação linear	40
4.3. Tau de Kendall	42
4.4. Rho de Spearman	42
4.5. Dependência de cauda	43
CAPÍTULO 5	45
5.1. Valor em Risco via cópulas	45
5.2. Avaliação do Valor em Risco via cópulas	47
5.2.1. Teste de Kupiec	47
5.2.2. Teste de Christoffersen	48

CAPÍTULO 6	51
6.1. Aplicação	51
6.2. Descrição dos dados	52
6.3. Modelagem das distribuições marginais	56
6.4. Modelagem das cópulas	60
6.5. Estimando o Valor em Risco via cópulas	70
7. Conclusões	74
8. Referências bibliográficas	76
9. Apêndice	80
A.1. Distribuição assimétrica	80

## Lista de tabelas

Tabela 1: Estatísticas descritivas dos log-retornos dos índices MSCI dos mercados emergentes e desenvolvidos	55
Tabela 2: Resultados das distribuições marginais dos mercados emergentes	58
Tabela 3: Resultados das distribuições marginais dos mercados desenvolvidos	58
Tabela 4: Estimativas das cópulas normal e Joe-Clayton simétrica na constante	62
Tabela 5: Estimativa das cópulas normal, normal GAS (1,1) e Joe-Clayton simétrica variante no tempo para o período estabilidade	63
Tabela 6: Estimativas das cópulas normal, normal GAS (1,1) e Joe-Clayton simétrica variante no tempo para o período instabilidade	63
Tabela 7: Estimativas das cópulas normal, normal GAS (1,1) e Joe-Clayton simétrica variante no tempo para o período completo	64
Tabela 8: Proporção de falhas do VaR e teste de Kupiec e Christoffersen	70

## Lista de figuras

Figura 1: Contorno da densidade da cópula Gaussiana com marginais normal padrão e correlação linear 0.5.	26
Figura 2: Contorno da densidade da cópula t-Student com marginais normal padrão, correlação= 0.5 e m=3.	27
Figura 3: Contorno da densidade da cópula Clayton com marginais normal padrão e $\theta = 1$ .	28
Figura 4: Contorno da densidade da cópula Gumbel com marginais normal padrão e $\theta = 1.5$ .	29
Figura 5: Contorno da densidade da cópula Frank com marginais normal padrão e $\theta = 1$ .	30
Figura 6: Contorno da densidade da cópula Joe-Clayton simétrica com marginais normal padrão e $\theta = 1$ .	32
Figura 7: Fluxo da implementação do VaR via cópulas.	46
Figura 8: Série dos índices MSCI dos mercados emergentes e desenvolvidos.	53
Figura 9: Retornos dos mercados emergentes e desenvolvidos.	54
Figura 10: Diagrama de dispersão dos retornos dos mercados emergentes e desenvolvidos.	54
Figura 11: Volatilidade diária estimada do índice MSCI dos mercados emergentes.	59
Figura 12: Volatilidade diária estimada do índice MSCI dos mercados desenvolvidos.	59
Figura 13: Diagrama de dispersão dos resíduos padronizados transformados em uniformes (0,1) dos mercados emergentes e desenvolvidos.	61
Figura 14: Evolução da correlação condicional na cópula normal.	64
Figura 15: Evolução da correlação condicional na cópula normal GAS (1,1).	65
Figura 16: Histograma da correlação condicional da cópula normal	65
Figura 17: Histograma da correlação condicional da cópula normal GAS (1,1)	66

Figura 18: Dependência de cauda superior na copula Joe- Clayton Simétrica.	67
Figura 19: Dependência de cauda inferior na copula Joe- Clayton Simétrica.	67
Figura 20: Histograma da dependência de cauda superior na copula Joe-Clayton Simétrica.	68
Figura 21: Histograma da dependência de cauda inferior na copula Joe-Clayton simétrica.	68
Figura 22: Evolução das médias entre as dependências de cauda na copula Joe-Clayton Simétrica.	69
Figura 23: Evolução das diferenças entre as dependências de caudas na cópula Joe-Clayton Simétrica.	69
Figura 24: Retornos da carteira e VaR (5%) para a cópula normal.	71
Figura 25: Retornos da carteira e VaR (5%) para a cópula normal GAS.	72
Figura 26: Retornos da carteira e VaR (5%) para a cópula Joe-Clayton Simétrica.	72
Figura 27: Retornos da carteira e VaR (5%) para o modelo GARCH multivariado BEKK – normal.	73

# 1

## Introdução

A modelagem da estrutura de dependência é de importância fundamental em análise de séries econômicas e financeiras. Assumir que a distribuição conjunta dessas séries seja normal implica em limitar a interdependência dessas séries, na sua forma mais simples que é a de dependência linear. Diversas áreas como, alocação de capitais, preço de opções, gerenciamento de riscos financeiros, energia e seguros envolvem modelagem multivariada usando distribuições leptocúrticas e com interdependência complexas. Desta forma, surge a necessidade da utilização de modelos alternativos que levem em consideração outras distribuições conjuntas, diferentes da normal, e medidas de associações diferentes do coeficiente de correlação linear.

Cópuas têm se tornado uma alternativa flexível na modelagem da estrutura de dependência de séries financeiras, uma vez que, essas funções permitem construir a distribuição conjunta de variáveis aleatórias a partir das distribuições marginais e da estrutura de dependência implicada pela cópula em uso.

De acordo com Nelsen (2006), “cópula pode ser visto sob dois pontos de vista: primeiro são funções que juntam ou “acoplam” funções de distribuições marginais. Segundo que são funções de distribuições multivariadas, cujas marginais são uniformes no intervalo  $[0,1]^n$ ”.

Cópuas nos permitem uma maior flexibilidade em considerar a dependência entre duas variáveis aleatórias e também construir distribuições multivariadas paramétricas diferentes da normal como, por exemplo, a cópula de Clayton (1978) e Gumbel (1960) que, respectivamente, reproduzem dependência nas caudas inferior e superior.

Entre as várias aplicações utilizando a teoria de cópuas na modelagem da estrutura de dependência consideradas na literatura de gestão de riscos financeiros, cabem citar Cherubini e Luciano (2001), Mendes (2005) e Patton (2006). Bennet e Kennedy (2004) abordam o uso de cópuas em precificação de derivativos, enquanto Patton (2006) propõe um modelo econométrico que permite a evolução dos parâmetros na cópula Gaussiana e na Joe-Clayton Simétrica na análise da dependência entre taxas de câmbio da Alemanha e do Japão.

Por simplicidade e sem perda de generalidade, os conceitos descritos nesta dissertação serão apresentados para análises bivariadas, que considera apenas dois fatores de risco. Entretanto, eles também são válidos para análises multivariadas com mais de dois fatores de risco, conforme descrito por Nelsen (2006) e Cherubini, Vecchiato e Luciano (2004). Todos os modelos utilizados na dissertação foram implementados, utilizando-se os softwares R e Matlab.

## 1.1

### Organização dos capítulos

No Capítulo 2, Modelos de Volatilidade, são apresentados, resumidamente, os modelos de volatilidade univariados: ARCH, GARCH e os modelos de volatilidade GARCH multivariados. Entretanto, as definições restringem-se à parte da teoria que terá aplicação direta nos capítulos posteriores.

No Capítulo 3, Teoria de Cópulas é apresentada de forma sucinta com ênfase no caso bivariado. Na seção 3.2, é apresentada a teoria da transformação integral de probabilidade. Em seguida, são apresentadas as cópulas incondicionais, na seção 3.3, e as cópulas condicionais, na seção 3.4. Algumas famílias de cópulas são apresentadas na seção 3.5. As cópulas pertencentes às famílias elípticas na seção 3.5.1 e as cópulas pertencentes às famílias arquimediana na seção 3.6. Já na seção 3.7 são apresentados os temas principais desta dissertação que é a modelagem de cópulas multivariadas com parâmetros variando no tempo.

No Capítulo 4 é apresentado as principais medidas de dependência e associação propostas nas literaturas relacionadas às cópulas.

No Capítulo 5 é apresentado o Valor em Risco via cópulas e modelo de aderência do Valor em Risco via cópulas através dos testes de Kupiec e Christoffersen.

Já no Capítulo 6, metodologia de cópulas é aplicada e a análise da estrutura de dependência entre os retornos dos índices *MSCI* dos mercados emergentes e dos mercados desenvolvidos é feita. Na seção 6.2, é feita a apresentação e descrição dos dados utilizados na aplicação deste trabalho. Na seção 6.3, é apresentada a modelagem das distribuições marginais e os resultados de suas estimativas. Na seção 6.4, é apresentada a modelagem das cópulas e os resultados de suas estimativas. Na seção 6.5, avaliação do VaR

(*Value at Risk*) via cópulas e os seus resultados são apresentados. Por fim, o capítulo 7 é apresentado às conclusões.

## CAPÍTULO 2.

### 2.1

#### Modelos de Variância Condicional

Uma das características mais comuns em séries de retornos financeiros é a presença de aglomerados de volatilidade, ou seja, a alternância entre períodos de grande volatilidade, seguido de períodos de relativa tranquilidade (ver Cont, 2001). Esse fato estilizado pode ser capturado por modelos que permitem a variância condicional variar ao longo do tempo como, por exemplo, os modelos ARCH/GARCH, que serão apresentados a seguir.

### 2.2

#### Modelos ARCH

Os modelos ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) foram introduzidos na literatura através de Engle (1982) com o objetivo de estimar a variância da inflação. A ideia básica neste tipo de modelo é que os retornos  $r_t$  são não correlacionados serialmente, porém, a volatilidade (variância condicional) depende de retornos passados por meio de uma função quadrática.

*Definição 2.2.* Um modelo ARCH (p) é dado por:

$$r_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 \quad (2)$$

onde  $e_t = r_t - \mu$ ,  $\varepsilon_t$  é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e

identicamente distribuídas (i.i.d),  $E(\varepsilon_t) = 0$ ,  $E(\varepsilon_t^2) = 1$ ,  $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$

,  $\forall i=1,2,\dots,p$ ,  $\sigma_t^2 = Var(r_t / \mathbf{r}_{t-1})$ ,  $\mathbf{r}_{t-1} = (r_t, r_{t-1}, \dots, r_2, r_1)$ .

## 2.3

### Modelos GARCH

O modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic) é uma generalização dos modelos ARCH, proposto por Bollerslev (1986), onde a variância condicional não depende somente dos quadrados das inovações, mas também das variâncias condicionais anteriores.

*Definição 2.3.* O modelo GARCH (p, q) é dado por

$$r_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t \quad (3)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (4)$$

Onde  $e_t = r_t - \mu$ ,  $\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t / \mathbf{r}_{t-1})$ ,  $\mathbf{r}_{t-1} = (r_t, r_{t-1}, \dots, r_2, r_1)$ .

Nas equações 3 e 4,  $r_t$  representa os retornos dos ativos utilizados,  $\sigma_t$  a volatilidade desses retornos e,  $\varepsilon_t$  é definido com o uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com média 0 e variância 1. São impostas no modelo as seguintes restrições:  $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$  na qual garantem a positividade da

variância condicional dos retornos e  $\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_j) < 1$  para garantir variância incondicional dos retornos finita. Este modelo permite capturar movimentos persistentes na volatilidade dos ativos provocados por choques nos retornos sem ter que estimar um grande número de parâmetros. Segundo Lemgruber (2001), o modelo GARCH mais utilizado na literatura é o GARCH (1,1) que é dado por:

$$r_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t \quad (5)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (6)$$

onde  $e_t = r_t - \mu$ ;

$\sigma_{t-1}^2$  é a variância condicional no instante t-1;

$\alpha$ ,  $\alpha_0$  e  $\beta$  são parâmetros desconhecidos;

$\alpha_1 + \beta_1$  é chamado de persistência e não deve ser maior que 1, de forma a garantir a existência da variância condicional do processo  $Var(r_t) = \alpha_0 / (1 - (\alpha_1 + \beta_1))$ .

Apesar da popularidade do modelo GARCH, ele apresenta algumas deficiências, sendo a principal delas, o tratamento simétrico que é dado aos retornos, pois a volatilidade é uma função quadrática dos mesmos. Entretanto, é de conhecimento empírico que a volatilidade reage de forma assimétrica aos retornos, tendendo ser maior para os retornos negativos em relação aos retornos positivos de igual magnitude.

## 2.4

### Modelos GARCH Multivariado

Os modelos multivariados GARCH, que são generalizações do modelo GARCH univariado, incluem-se, entre outros, o modelo VECH de Bollerslev, Engle e Woodridge (1988), os modelos fatoriais como o de Engle, Ng e Rothschild (1990) e o modelo BEKK de Engle e Kroner (1995). Nesta dissertação focaremos no modelo BEKK como uma alternativa de comparação entre as metodologias tradicionais e as cópulas, conforme Patton (2006).

*Definição 2.4.* Um modelo GARCH Multivariado BEKK pode ser representado da seguinte forma:

$$X_t = \mu + \epsilon_t \quad (7)$$

$$\Sigma_t = C' C + \sum_{i=1}^p A_i' \epsilon_{t-i} \epsilon_{t-i}' A_i + \sum_{j=1}^q B_j' \sum_{t-j} B_j \quad (8)$$

onde  $C$ ,  $A_i$ ,  $B_j$  são matrizes de parâmetros  $(K \times K)$ . Para  $K = 2$ , segue o caso bivariado:

$$\Sigma_t \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{x,t} & \sigma_{xy,t} \\ \sigma_{xy,t} & \sigma_{y,t} \end{bmatrix}, \quad C \equiv \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}, \quad B \equiv \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad X_t \equiv \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

$\mu \equiv \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}$ ,  $\epsilon_t \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix} \sim N(0, \Sigma_t)$  e  $\sigma_{x,t}^2$  e  $\sigma_{y,t}^2$  são, respectivamente, a

variância condicional de X e Y no instante t e  $\sigma_{xy,t}$  é a correlação condicional entre X e Y no instante t.

## 2.5

### Estimação dos parâmetros

Os parâmetros de interesse dos modelos GARCH e suas variações são comumente estimados por meio da maximização da função *Log-likelihood* (verossimilhança logarítmica) conforme descrita abaixo

$$l(\theta) = \ln f(r_1, \dots, r_T; \theta) = \ln \left[ \left( \prod_{t=2}^T f(r_t / r_{t-1}; \theta) \right) \times f(r_1; \theta) \right] = \sum_{t=1}^T l(\theta) \quad (9)$$

onde  $\theta$  é o vetor paramétrico que contém todos os parâmetros desconhecidos do modelo. No caso do modelo GARCH(p,q) dado em (3) e (4),

$$\theta = (\mu, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p), \text{ e portanto } \theta \sim ((p+q+1) \times 1)$$

Assumindo que  $r_t$  seja o retorno dos ativos de interesse e supondo inovações ( $\varepsilon_t$ ) normalmente distribuídas com média nula e variância 1 tem-se que

$$l(\theta) = \ln f(r_1, \dots, r_T; \theta) = f(r_1; \theta) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left[ \ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) + \frac{r_t^2}{\sigma_t^2} \right] \quad (10)$$

As estimativas de máxima verossimilhança (EMV) do vetor  $\theta \sim ((p+q+1) \times 1)$ , denotada por  $\hat{\theta}_{MV}$  é aquela que maximiza a função de verossimilhança.

A estimativa de máxima verossimilhança para  $\theta$  deve resolver as condições de 1ª ordem (gradiente) e 2ª ordem (Hessiano) ilustradas, respectivamente, abaixo:

$$\sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial l_t(\theta)}{\partial \theta} \right) = \sum_{t=1}^T \left[ \frac{1}{2\sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta} \left( \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \right] = 0 \quad (11)$$

$$H_t = \sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right) = \sum_{t=1}^T \left[ \frac{1}{2\sigma_t^2} \frac{\partial^2 \sigma_t^2}{\partial \theta \partial \theta^T} \left( \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) + \frac{1}{\sigma_t^4} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta^T} \left( \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right) \right] \quad (12)$$

$Z_t' H_t Z_t < 0$  onde  $Z_t$  é um vetor arbitrário, não nulo, de dimensão  $((p+q+1) \times 1)$ .

É fácil de provar que não será possível obter soluções analíticas para os estimadores de máxima verossimilhança pela solução do sistema de equações implicado em (9). Assim sendo, procedimentos numéricos devem ser utilizados

como forma de obter as soluções do problema de otimização. Dentre os algoritmos mais utilizados na estimação de modelos de volatilidade que cabe citar são: BFGS e Marquat.

## CAPÍTULO 3.

### 3.1

#### Cópuas

O conceito de cópuas foi introduzido por Sklar, em 1959 e nos últimos 15 anos, tornou-se uma ferramenta muito importante por caracterizar dependência entre variáveis aleatórias em diversas áreas como finanças, energia e seguros. De acordo com Nelsen (2006), “cópula pode ser visto sob dois pontos de vista: primeiro que cópuas são funções que juntam ou “acoplam” funções de distribuições marginais. Segundo que são funções de distribuições multivariadas, cujas marginais são uniformes no intervalo  $[0,1]$ ”.

As cópuas fornecem uma maneira de isolar a estrutura de dependência e expressá-la em uma escala quantílica, que é útil para descrever a dependência dos resultados extremos e, naturalmente, para usar em um contexto de gestão de risco.

### 3.2

#### Transformação integral de probabilidade

Uma função cópula possui informações a respeito da distribuição conjunta que não pertencem às distribuições marginais. O isolamento das informações contidas nas distribuições marginais é obtido através da transformação integral de probabilidade que é definida como:

*Definição 3.2.* Seja  $X$  uma variável aleatória com função de distribuição  $F$  e  $F^{-1}$  a função inversa generalizada (ou “quase-inversa”) de  $F$  dada por:

$$F^{-1}(u) = \inf \{x : F(x) \geq u\}, \text{ para } u \in [0,1] \quad (13)$$

onde  $F^{-1}(u)$  é contínua e não decrescente sobre  $u \in [0,1]$ .

Com base na definição acima, podemos definir duas variáveis aleatórias  $U_1$  e  $U_2$  como  $U_1 \equiv F_1(X_1)$  e  $U_2 \equiv F_2(X_2)$ . Então  $U_i$ ,  $i=1,2$  distribui-se uniformemente no intervalo  $(0,1)$ . Reciprocamente, se  $U_i \sim \text{Uniforme}(0,1)$ , então

$X_i \equiv F_i^{-1}(U_i)$ , é uma realização de  $F(X)$ , ou seja,  $P(F(X) \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u$ .

### 3.3

#### Cópula incondicional

*Definição 3.3.* Uma cópula bidimensional é uma função  $C$  com domínio em  $I^2 = [0,1]^2$  e contradomínio em  $I = [0,1]$  com as seguintes propriedades:

1.  $C(u,0) = C(0,v) = 0$  para todo  $u, v \in [0,1]$ ;
2.  $C(1,u) = u$  e  $C(1,v) = v$  para todo  $u, v \in [0,1]$ ;
3.  $V_C = ([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) \equiv C(u_2, v_2) - C(u_1, u_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$

para todo  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$  tal que  $u_1 \leq u_2$  e  $v_1 \leq v_2$ .

*Teorema 3.3 (Limites de Fréchet-Hoeffding).* Seja  $C'$  uma subcópula. Então para todo  $(u, v) \in \text{Dom } C'$  temos,

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq \min(u, v) \text{ para todo } (u, v) \in \mathfrak{R}^2. \quad (14)$$

Uma vez que toda cópula é uma subcópula, o teorema acima é válido para cópulas. Com isso, para toda cópula  $C$  e todo  $(u, v) \in \mathfrak{R}^2$  temos,

$$\max(u + v - 1, 0) = W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v) = \min(u, v) \quad (15)$$

ou seja, a desigualdade acima é a versão cópula para os limites de Fréchet-Hoeffding.

*Teorema 3.3.1 (Teorema de Sklar).* Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias, respectivamente, com funções de distribuição marginais  $F$  e  $G$  contínuas e  $H$  uma função de distribuição conjunta de  $(X, Y)$ . Então existe uma única cópula  $C$  bidimensional tal que

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \text{ para todo } (x, y) \in \mathfrak{R}^2. \quad (16)$$

Reciprocamente, se  $F$  é uma função de distribuição de  $X$  contínua,  $G$  uma função de distribuição de  $Y$  contínua e  $C$  uma cópula, então a função  $H$  definida em (16) é uma função de distribuição conjunta bi-dimensional com distribuições marginais  $F$  e  $G$ .

*Corolário 3.3.* Seja  $H$  uma função de distribuição conjunta com distribuições marginais contínuas  $F$  e  $G$  e sejam  $F^{-1}$  e  $G^{-1}$  a “quase-inversa” de suas respectivas funções de distribuições. Então existe uma única cópula  $C$  bivariada tal que

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \text{ para todo } (u, v) \in I^2. \quad (17)$$

### 3.4

#### Cópuas condicionais

Modelos para séries financeiras e econômicas, geralmente, estão condicionados a outras variáveis. Portanto, a expansão do teorema de Sklar para o caso condicional é de grande utilidade. De acordo com Patton (2006), uma cópula condicional é definida da seguinte forma:

*Definição 3.4.* Uma cópula condicional bivariada é uma função  $C: [0,1] \times [0,1 \times W] \rightarrow [0,1]$  com as seguintes propriedades:

1.  $C(u, 0 | w) = C(0, v | w) = 0$  e  $C(u, 1 | w) = u$   $C(v, 1 | w) = v$  para todo  $u, v \in [0,1]$  e cada  $w \in W$ .
2.  $V_C = ([u_1, u_2] \times [v_1, v_2] | w) \equiv C(u_2, v_2 | w) - C(u_1, v_2 | w) - C(u_2, v_1 | w) + C(u_1, v_1 | w) \geq 0$  para todo  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$  tal que  $u_1 \leq u_2$  e  $v_1 \leq v_2$  e cada  $w \in W$ .

*Teorema 3.4. (Teorema de Sklar condicional).* Seja  $F$  a distribuição condicional de  $X | W$ ,  $G$  a distribuição condicional de  $Y | W$  e  $H$  a distribuição condicional conjunta de  $(X, Y) | W$ . Assuma que  $F$  e  $G$  são contínuas em  $X$  e  $Y$ . Então existe uma única cópula condicional  $C$  tal que:

$$H(x, y | w) = C(F(x | w), G(y | w)) \text{ para todo } (x, y) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \text{ e } w \in \Omega. \quad (18)$$

Se  $F$  é a distribuição condicional de  $X | W$ ,  $G$  a distribuição condicional de  $Y | W$  e  $C$  a cópula condicional, então  $H$  é a função de distribuição condicional bivariada com distribuições marginais  $F$  e  $G$ .

Na construção de modelos de densidade condicional usando cópulas, é muito importante que o conjunto de informações  $W$  deva ser o mesmo tanto para as distribuições marginais quanto para as cópulas em análise.

Garantindo que  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $C$  sejam  $n$  vezes diferenciáveis, podemos escrever a função de densidade dada em (18) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} h(x, y | w) &\equiv \frac{\partial^2 H(x, y | w)}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{\partial F(x | w)}{\partial x} \cdot \frac{\partial G(y | w)}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 C(F(x | w), G(y | w) | \mathbf{w})}{\partial u \partial v} \\ &= f(x | w) \cdot g(y | w) \cdot c(u, v | w) \quad (x, y, w) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times W, \end{aligned} \quad (19)$$

onde  $u \equiv F(x | w)$  e  $v \equiv G(y | w)$ .

*Definição 3.4.1.* Se  $F$  é uma função distribuição condicional, então a sua inversa é definida como:

$$F^{-1}(u | w) = \inf \{x : F(x | w) \geq u\}, \text{ para } u \in [0, 1] \text{ e cada } w \in W. \quad (20)$$

*Corolário 3.4.* Seja  $H$  qualquer distribuição condicional bivariada com distribuições marginais  $F$  e  $G$  contínuas nos dois primeiros argumentos e seja  $F^{-1}$  e  $G^{-1}$  suas respectivas quase-inversas nos primeiros argumentos. Então existe uma única cópula condicional  $C : [0, 1] \times [0, 1] \times W \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$C(u, v | w) = H(F^{-1}(u | w), G^{-1}(v | w)), \quad \forall (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \text{ e cada } w \in W \quad (21)$$

### 3.5

#### Famílias de cópulas

Nesta seção serão apresentadas algumas famílias de cópulas utilizadas com mais frequência e m modelagem de séries financeiras. Inicialmente, serão apresentadas a cópula normal (Gaussiana) e t-Student que pertencem às famílias de cópulas elípticas. Em seguida, serão apresentadas as cópulas pertencentes à família arquimediana.

### 3.5.1

#### Cópuas elípticas

Cópuas elípticas são simplesmente as cópuas de distribuições elípticamente contornadas (ou elíptico). A principal vantagem da cópula elíptica é que se podem especificar diferentes níveis de correlação entre as marginais e as desvantagens principais são que cópuas elípticas não têm expressões de forma fechada e estão restritos a ter simetria radial.

### 3.5.2

#### Cópula Gaussiana

A cópula normal (ou Gaussiana) é uma função de dependência associada a uma distribuição normal bivariada, e embora não possua uma fórmula funcional fechada, pode ser escrita como:

$$C_N(u, v; \rho) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \quad (22)$$

$$C_N(u, v; \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(r^2 - 2\rho rs + s^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dr ds \quad (23)$$

onde  $\rho \in (-1, 1)$ . Assim, à medida que o coeficiente de correlação se aproxima dos limites de seu domínio, a dispersão das variáveis uniformes  $u_1$  e  $u_2$  no quadrado unitário diminui.

A sua função de densidade é dada por:

$$c_N(u, v; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{\phi^{-1}(u)^2 + \phi^{-1}(v)^2 - 2\rho\phi^{-1}(u)\phi^{-1}(v)}{2(1-\rho^2)} + \frac{\phi^{-1}(u)^2 + \phi^{-1}(v)^2}{2}\right\} \quad (24)$$

onde  $\rho \in (-1, 1)$  e  $\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}w^2\right\}$ .

Os coeficientes de dependência de caudas da cópula Gaussiana são iguais a zero como pode ser verificado na figura 1.

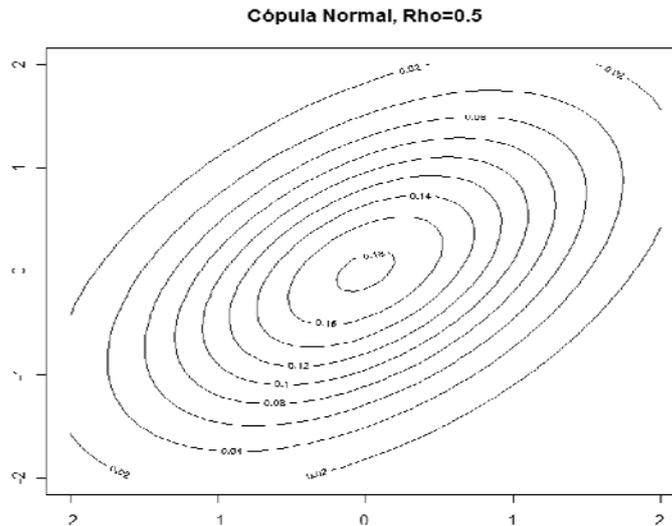


Figura 1: Contorno da densidade da cópula Gaussiana com marginais normal padrão e correlação linear 0.5.

### 3.5.3

#### Cópula t-Student

A cópula t-Student está associada a distribuição bivariada t-Student e possui dois parâmetros:  $\rho$  (coeficiente de correlação) e  $m$  (grau de liberdade). A sua função é dada da seguinte forma:

$$C_T(u, v; \rho, m) = T_{2,m}(T_m^{-1}(u), T_m^{-1}(v)) \quad (25)$$

$$C_T(u, v; \rho, m) = \int_{-\infty}^{T_m^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{T_m^{-1}(v)} \frac{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \sqrt{(\pi m)^2 (1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{(r^2 - 2\rho rs + s^2)}{m(1-\rho^2)}\right\}^{\frac{m+2}{2}} dr ds \quad (26)$$

onde  $T_{2,m}$  é a função de distribuição bivariada acumulada da t-Student. Os índices de caudas superior  $\tau^U$  e inferior  $\tau^L$  dados pela cópula t-Student reproduzem a dependência entre os valores extremos da distribuição, entretanto, uma limitação que essa cópula apresenta é a imposição que é dada pelo fato que a dependência em ambas as caudas sejam iguais, ou seja,  $\tau^U = \tau^L$  conforme,

$$\tau^U = \tau^L = 2T_{m+1}\left(-\sqrt{m+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\right) \quad (27)$$

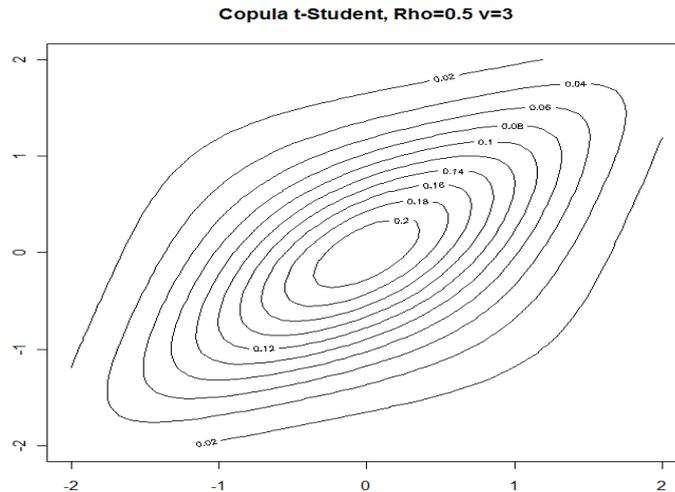


Figura 2: Contorno da densidade da cópula t-Student com marginais normal padrão, correlação= 0.5 e m=3.

### 3.6

#### Cópuas arquimedianas

Cópuas arquimedianas são importantes classes de cópuas por apresentarem uma variedade de estruturas de dependências diferentes e, em muitos casos apresentam funções fechadas. O termo cópula arquimediana foi mencionado pela primeira vez na literatura estatística em dois artigos de Genest & Mackay (1986ab).

Seja  $\varphi : [0,1] \rightarrow [0, \infty)$  uma função contínua e  $\varphi''(u) < 0$  para todo  $u \in [0,1]$  e  $\varphi(1) = 0$ . Definindo  $\varphi^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0,1]$  como a pseudo inversa de  $\varphi$  tal que:

$$\varphi^{-1}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1} \text{ para } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 \text{ para } \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (28)$$

Se  $\varphi$  for convexa, então a cópula arquimediana pode ser definida como:

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{-1}[\varphi(u_1) + \varphi(u_2)], \quad (29)$$

onde  $\varphi(\cdot)$  é denominada função geradora da cópula arquimediana.

As cópuas arquimediana apresentam as seguintes propriedades:

- a)  $C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$   
 b)  $C(u_1, C(u_2, u_3)) = C(C(u_1, u_2), u_3)$

A função de densidade da cópula arquimediana é dada por

$$c(u_2, u_1) = \frac{\varphi''(C(u_1, u_2))\varphi'(u_1)\varphi'(u_2)}{[\varphi'(C(u_1, u_2))]^3} \quad (30)$$

A seguir são apresentadas algumas das principais cópulas arquimedianas.

### 3.6.1

#### Cópula de Clayton

Seja  $\varphi(t) = (t^{-1} - 1)/\theta$  com  $\theta \geq 1$  e independência  $\theta = 1$ . Então a cópula de Clayton pode ser definida da seguinte forma:

$$C_C(u, v; \theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \text{ e a densidade cópula é dada por:} \quad (31)$$

$$c_C(u, v; \theta) = (1 + \theta)(uv)^{-\theta-1} (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-2-1/\theta} \quad (32)$$

onde  $\theta \in [-1, \infty)$ .

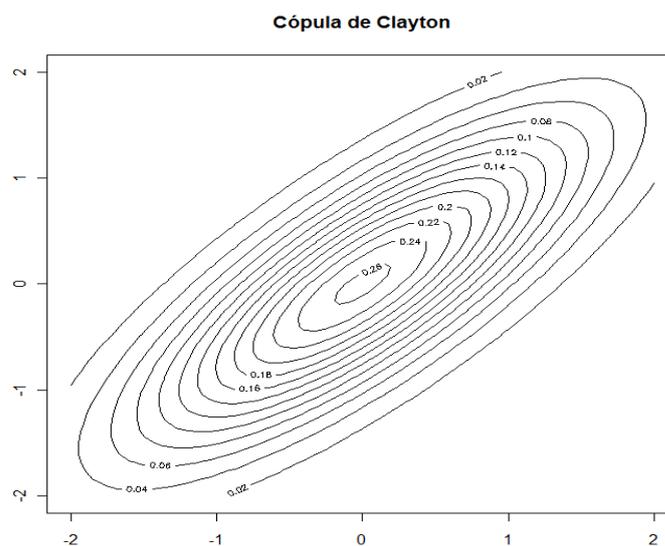


Figura 3: Contorno da densidade da cópula Clayton com marginais normal padrão e  $\theta = 1$ .

### 4.6.2

#### Cópula de Gumbel

A estrutura de dependência associada na cópula de Gumbel é apenas na cauda superior e sua definição pode ser dada da seguinte forma:

Seja  $\varphi(t) = (-\ln t)^\theta$  com  $\theta \geq 1$  e independência se  $\theta = 1$ . Então a cópula de Gumbel é dada por:

$$C_G(u, v | \theta) = \exp\left\{-\left[(-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta\right]^{1/\theta}\right\}, \quad (33)$$

e a densidade cópula dada por:

$$c_G(u, v | \theta) = \frac{C_G(u, v | \theta)(-\log u)(-\log v)^{\theta-1}}{uv[(-\log u) + (-\log v)]^{2-1/\theta}} \cdot \left[(-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta\right]^{1/\theta} + \theta - 1 \quad (34)$$

onde  $\theta \in [-1, \infty)$

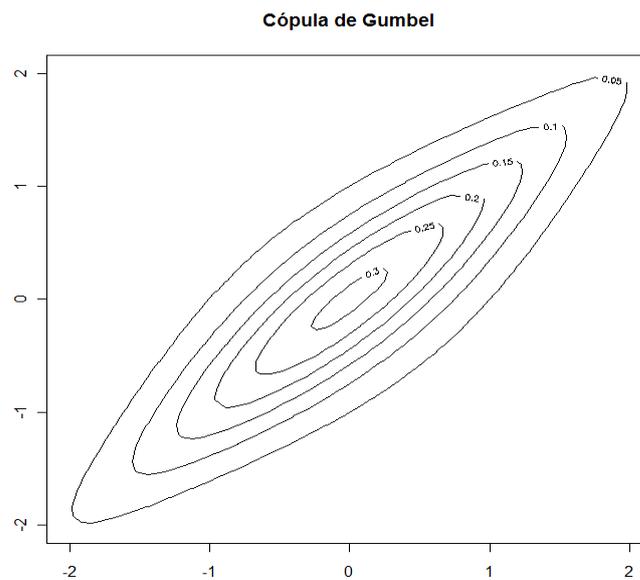


Figura 4: Contorno da densidade da cópula Gumbel com marginais padrão e  $\theta = 1.5$ .

### 3.6.3

#### Cópula de Frank

Seja  $\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$  com  $\theta \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}$  e independência  $\theta = 0$ . Então a

cópula de Frank é dada por:

$$C_F(u, v; \lambda) = \frac{-1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right) \quad \text{e a densidade cópula é} \quad (35)$$

dada por:

$$c_F(u, v; \lambda) = \frac{\lambda(1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(u+v)}}{\left( (1 - e^{-\lambda}) - (1 - e^{-\lambda u})(1 - e^{-\lambda v}) \right)^2} \quad (36)$$

onde  $\lambda \in (-\infty, \infty)$

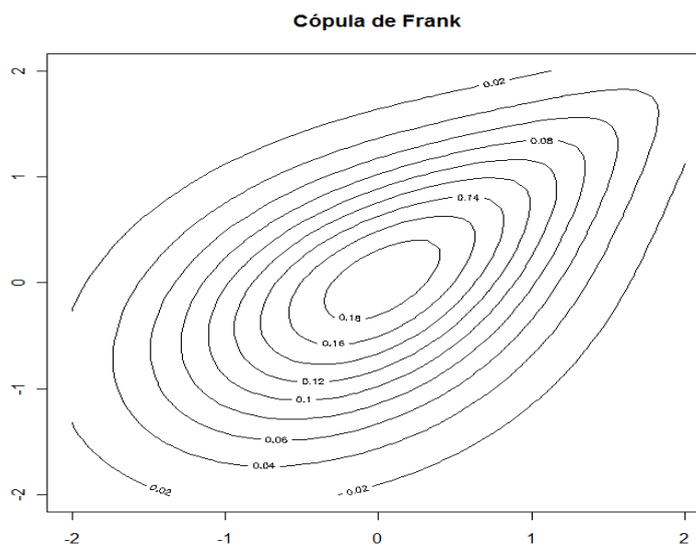


Figura 5: Contorno da densidade da cópula Frank com marginais normal padrão e  $\theta = 1$ .

A dependência de cauda e o coeficiente Tau d e Kendall para cópula das famílias arquimedianas podem ser expressos em termos de função geratriz<sup>1</sup>. Se o limite existe então as expressões são dadas como:

<sup>1</sup>See Galiani (2003) and Nelsen (1999).

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(u)}{\phi'(u)} \partial u \quad (37)$$

$$\tau^U = 2 - 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\phi'^{-1}(2u)}{\phi'^{-1}(u)} \quad (38)$$

$$\tau^L = 2 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\phi'^{-1}(2u)}{\phi'^{-1}(u)} \quad (39)$$

A cópula de Clayton tem dependência de cauda inferior ( $2^{-1/\theta}$ ), porém não possui dependência de cauda superior e  $\tau = \frac{\theta}{\theta+2}$ . Já a cópula de Gumbel só tem a dependência de cauda superior dada por  $(2 - 2^{-1/\theta})$  e  $\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$ . A cópula de Frank não possui dependência de cauda inferior e nem de dependência de cauda superior. O Tau de Kendall é dado por  $\tau = 1 + 4 \frac{D_1(\theta) - 1}{\theta}$  onde  $D_1(\theta)$  é função de primeira ordem de Debye definida como  $D_1(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} \partial t$ . Para esta cópula quanto maior o valor de  $\theta$  em módulo, maior a estrutura de dependência.

### 3.6.4

#### Cópula de Joe-Clayton (BB7)

A cópula de Joe-Clayton, também chamada de cópula BB7 de Joe (1997) é construída a partir da transformação de Laplace da cópula de Clayton e sua forma funcional é ser dada por:

$$C_{JC}(u, v | \tau^U, \tau^L) = 1 - \left( \left[ 1 - (1-u)^\kappa \right]^\gamma + \left[ 1 - (1-v)^\kappa \right]^\gamma - 1 \right)^{1/\gamma} \quad (40)$$

onde  $\kappa = 1/\log_2(2 - \tau^U)$  e  $\gamma = -1/\log_2(\tau^L)$  são funções dos coeficientes de dependência de cauda e  $\tau^U \in (0,1)$  e  $\tau^L \in (0,1)$ , respectivamente, são a dependência de cauda superior e inferior.

Segundo Patton (2006), as propriedades que mais se destacam para esta cópula é que, se  $\kappa = 1$  ela converge para a cópula de Clayton e quando  $\kappa \rightarrow 1$  e  $\gamma \rightarrow \infty$  a função  $C_{JC}$  atinge a fronteira superior de Fréchet Hoeffding<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>A fronteira superior de Fréchet Hoeffding é um limite superior onde o valor que a densidade conjunta pode ter em qualquer ponto dado. Este ponto corresponde a dependência positiva perfeita entre as duas variáveis.

Entretanto, uma desvantagem dessa cópula é o fato de que mesmo quando as medidas de dependência são iguais, ela apresenta uma leve assimetria.

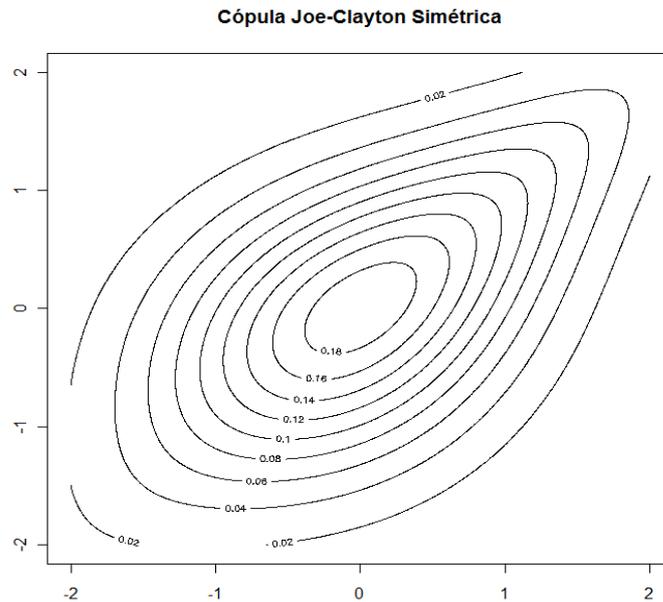


Figura 6: Contorno da densidade da cópula Joe-Clayton simétrica com marginais normal padrão e  $\theta = 1$ .

### 3.6.5

#### Cópula Joe-Clayton simétrica

Para corrigir o problema de assimetria apresentada na cópula Joe Clayton, Patton (2006) propõe a cópula Joe-Clayton simétrica que é dada por:

$$C_{SJC}(u, v; \tau^U, \tau^L) = 0.5 \times (C_{JC}(u, v; \tau^U, \tau^L) + C_{JC}(1-u, 1-v; \tau^L, \tau^U)) + u + v - 1 \quad (41)$$

A cópula de Joe-Clayton simétrica nada mais é do que uma leve modificação da cópula original de Joe-Clayton, porém por construção ela é simétrica mesmo quando  $\tau^U = \tau^L$ .

### 3.7

#### Cópuas variantes no tempo

Nesta seção serão apresentados de forma resumida os conceitos de cópuas dinâmicas. Avaliar a evolução das dinâmicas ao longo do tempo, tem se tornado de suma importância na abordagem das cópuas.

#### 3.7.1

##### Cópuła normal variante no tempo

Com objetivo de contornar o problema de assimetria apresentada na função dada em (35), Patton (2006) propôs uma forma funcional variante no tempo para a cópuła normal em que a evolução do coeficiente de correlação linear  $\rho_t$  é dada por:

$$\rho_t = \tilde{\Lambda} \left( \omega_\rho + \beta_\rho \rho_{t-1} + \alpha \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \Phi^{-1}(u_{t-j}) * \Phi^{-1}(v_{t-j}) \right) \quad (42)$$

onde  $\tilde{\Lambda}(x) \equiv \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$  é a transformação de forma a assegurar que  $\rho_t$  fique no intervalo  $(-1, 1)$  em todo instante de tempo.

#### 3.7.2

##### Cópuła Joe-Clayton simétrica variante no tempo

Para a cópuła Joe-Clayton Simétrica, Patton (2006) propôs também uma forma funcional variante no tempo para os coeficientes de dependência entre as caudas superior e inferior que são, respectivamente, dadas por

$$\tau_t^U = \tilde{\Lambda} \left( \omega_U + \beta_U \tau_{t-1}^U + \alpha_U \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{t-j} - v_{t-j}| \right) \quad (43)$$

$$\tau_t^L = \tilde{\Lambda} \left( \omega_L + \beta_L \tau_{t-1}^L + \alpha_L \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{t-j} - v_{t-j}| \right) \quad (44)$$

onde  $\tilde{\Lambda}(x) \equiv \frac{1}{1 + e^{-x}}$  é transformação usada para assegurar que  $\tau^U$  e  $\tau^L$  fiquem no intervalo  $(0, 1)$  em todo instante de tempo.

### 3.7.3

#### Cópula Normal – *Generalized Autoregressive Score (GAS)*

Creal et al. (2008) desenvolveu, uma estrutura unificada chamada *Generalized Autoregressive Score (GAS)*, para descrever processos de séries temporais com parâmetros variando no tempo, em que um vetor de escores escalados é usado como um meio de atualização dos parâmetros. Assim, seja  $y_t$  um vetor de variáveis desejadas,  $f_t$  o vetor de parâmetros variante no tempo,  $x_t$  um vetor de variáveis exógenas e  $\theta$  um vetor de parâmetros constante. Defina  $Y_t = \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$ ,  $F_t = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_t\}$  e  $X_t = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ . O conjunto de informações disponível no tempo  $t$  consiste de  $\mathbf{F}_t = \{Y_{t-1}, F_{t-1}, X_t\}$  para  $t=1, 2, \dots, T$ .

Assumindo que  $y_t$  seja gerado pela função de densidade

$$y_t \sim p(y_t | f_t, \mathbf{F}_t; \theta). \quad (45)$$

Assumindo que o mecanismo da atualização do parâmetro variando no tempo  $f_t$  é dado por:

$$f_t = \omega + \sum_{j=1}^q B_j f_{t-j} + \sum_{i=1}^p A_i s_{t-i} \quad (46)$$

onde  $\omega$  é um vetor constante,  $B_j$  e  $A_j$  são matrizes de coeficientes com dimensões apropriadas para  $i=1,2,\dots,p$  e  $j=1,2,\dots,q$  e  $s_t$  é uma função apropriada dos dados passados,  $s_t = (y_t, f_t, \mathbf{F}_t; \theta)$ . Os coeficientes em (46) são funções de  $\theta$ , isto é,  $\omega = \omega(\theta)$ ,  $B_j = B_j(\theta)$  e  $A_j = A_j(\theta)$  para  $i=1,2,\dots,p$  e  $j=1,2,\dots,q$ .

Quando uma observação  $y_t$  é realizada, a atualização de  $f_t$  variando no tempo para o próximo período  $t+1$ , é dada usando a equação (46) com

$$s_t = S_{t-1} \cdot \Delta_t, \quad \Delta_t = \frac{\partial \ln p(y_t | f_t, \mathbf{F}_t; \theta)}{\partial f_t} \quad \text{e} \quad S_t = S(t, f_t, \mathbf{F}_t; \theta) \quad (47)$$

onde  $S(\cdot)$  é uma função matriz. Dada a dependência do mecanismo em (46) sobre o vetor de escores escalados em (47), as equações (45)-(47) definem o *generalized autoregressive score model* com ordens  $p$  e  $q$ , ou seja, GAS ( $p, q$ ).

Dependendo da escolha da escala da matriz  $S_t$ , o modelo GAS permite uma flexibilidade adicional de como o escore é utilizado na atualização de  $f_t$ . É importante notar que para cada escala escolhida da matriz  $S_t$  gera diferentes modelos GAS.

Em muitas situações é natural considerar uma forma da escala que dependa da variância do escore. Por exemplo, podemos usar a escala da matriz como:

$$S_t = I_{t|t-1}^{-1} \quad I_{t|t-1} = E_{t-1} [\Delta_t \Delta_t'] \quad (48)$$

onde  $E_{t-1}$  denota a expectativa com respeito a  $p(y_t | f_t, \mathbf{F}_t; \theta)$ . Para a escolha de  $S_t$  dada em (48), o modelo GAS engloba os modelos já conhecidos GARCH de Engle (1982) e Bollerslev (1986), os modelos ACD of Engle e Russell (1998), os modelos ACI Russell (2001) bem como a maioria dos modelos de contagem Poisson considerado por Davis et al. (2003). Outras formas de escolhas para  $S_t$  pode ser vista em Drew Creal, Siem Jan Koopman, André Lucas (2011)

Para a cópula normal o modelo GAS sugere uma estrutura dinâmica alternativa em comparação com sugestões anteriores na literatura. O parâmetro de correlação  $\rho_t$  é modelado utilizando a transformação  $\rho_t = [1 - \exp(-f_t)] / [1 + \exp(-f_t)]$  e o mecanismo de direção para a cópula normal bivariada dada em (42).

Usando a função de densidade da cópula normal dada em (24), podemos derivar a especificação GAS para o parâmetro variando no tempo. O escore com respeito ao parâmetro de correlação é o mesmo para a cópula normal e para a distribuição normal bivariada. Para  $m=1$  a função (46) se reduz a

$$f_t = \omega + Bf_{t-1} + A \cdot y_t \quad (49)$$

onde  $y_t = \phi^{-1}(U_t) \cdot \phi^{-1}(V_t)$

O modelo GAS (1,1) para o coeficiente de correlação da cópula Gaussiana é dado por

$$f_t = \omega + Bf_{t-1} + A \frac{2 * \left( y_t - \rho_{t-1} - \rho_{t-1} (1 + \rho_{t-1}^2)^{-1} (x_t - 2) \right)}{(1 - \rho_{t-1}^2)}, \quad (50)$$

$$\rho_t = \tilde{\Lambda}(f_t), \quad (\tilde{\Lambda} \text{ dado como em 42}) \quad (51)$$

onde  $x_t = \varphi^{-1}(U_t)^2 + \varphi^{-1}(V_t)^2$ ,  $\omega \in \mathfrak{R}$ ,  $\beta \in \mathfrak{R}$  e  $\alpha \in \mathfrak{R}$ .

As semelhanças e diferenças entre as equações dadas em (50) e (51) são as seguintes: ambos os modelos são direcionados por  $y_t$  de modo que aglomerados positivos da marginal transformadas leva a um aumento do parâmetro de correlação. O fator de escala adicional,  $2/(1 - \rho_{t-1}^2)$  em (50) é uma consequência da modelagem do parâmetro de correlação transformado  $f_t$ , em vez de,  $\rho_t$  diretamente. A principal diferença entre os dois modelos é que o modelo GAS inclui o termo  $x_t$ , onde  $x_t - 2$  é uma diferença martingal. Para se entender o impacto deste termo, considera-se dois possíveis cenários. Pode-se observar  $\varphi^{-1}(U_t)=1$  e  $\varphi^{-1}(V_t)=1$  ou alternativamente,  $\varphi^{-1}(U_t)=0.25$  e  $\varphi^{-1}(V_t)=4$ . Em ambos os casos o produto dos termos resultam em  $y_t = 1$  e a recursão em (42) implicará em  $f_t$  ser o mesmo independentemente dos cenários observados. Por outro lado, a soma dos quadrados dos termos  $x_t$  no modelo GAS fornece informação para distinguir entre esses dois cenários. O comportamento de  $f_t$  dependerá dos valores correntes de  $\rho_t$ . Se a correlação é positiva, o impacto sobre os valores  $(x_t - 2)$  é negativo. Neste caso, parte do termo  $(x_t - 2)$  compensa parte do efeito  $(y_t - \rho_t)$  se este último tem valor positivo. Se  $(y_t - \rho_t)$  tem um valor negativo, no entanto, o termo  $(x_t - 2)$  reforça a magnitude do passo GAS para  $\rho_t$  negativo.

### 3.7.4

#### Método de estimação

A estimação dos parâmetros é baseada no método da máxima verossimilhança. A seguir serão apresentadas duas metodologias na estimação dos parâmetros de um modelo com cópulas. O primeiro é o método da máxima verossimilhança exata (MVE) e o segundo é o método de inferência para as marginais (IM).

### 3.7.4.1

#### Máxima verossimilhança exata

Dada uma amostra aleatória de duas variáveis de interesse, pelo Teorema de Sklar, a distribuição conjunta dessas variáveis é descrita por  $C = (F_1(y_{1t}), F_2(y_{2t}))$ . Com base na equação dada em (19), o log-verossimilhança é dado por

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \log c(F_1(y_{1t}), F_2(y_{2t}); \theta_c) + \sum_{t=1}^T \log f_{1t}(y_{1t}; \theta_1) + \sum_{t=1}^T \log f_{2t}(y_{2t}; \theta_2). \quad (52)$$

onde,  $\theta$  é um vetor  $[\theta_c, \theta_1, \theta_2]$  de para parâmetros que inclui, respectivamente, os parâmetros da cópula e das distribuições marginais. Então, pode-se definir o estimador por máxima verossimilhança como

$$\hat{\theta}_{MVE} = \arg \max_{\theta \in \Theta} l(\theta) \quad (53)$$

A estimação dos parâmetros através desse método pode ser computacionalmente muito intensiva. Portanto, será utilizado nesta dissertação o método a seguir.

### 3.7.4.2

#### Inferência das marginais

O método de inferência para marginais, proposto por Joe e Xu (1996), tem por finalidade estimar os parâmetros em dois estágios. Separando o vetor  $\theta$  em parâmetros específico para a cópula  $\theta_c$  e para as marginais  $[\theta_1, \theta_2]$  pode-se estimar os parâmetros da seguinte maneira:

- 1) estimar os parâmetros das marginais:  $\hat{\theta}_j = \text{Arg max}_{\theta_j} \sum_{t=1}^T \log f_j(y_{jt}; \theta_j),$

$j=1,2$

- 2) estimar os parâmetros das cópulas:

$$3) \hat{\theta}_2 = \text{Arg max}_{\theta_2} \sum_{t=1}^T \log c(F_1(y_{1t}), F_2(y_{2t}); \theta_2, \hat{\theta}_1)$$

### 3.7.5

#### Quebra Estrutural

Uma possibilidade de permitir a mudança de dependência ao longo do tempo é testar a quebra estrutural nos parâmetros das cópulas em um determinado ponto no tempo  $t^*$  conforme sugerido por Dias e Embrechts (2004).

Seja  $C(U_{1t}, U_{2t}, \delta_t)$  a distribuição de  $U_t = (U_{1t}, U_{2t})'$  onde  $t = 1, 2, \dots, T$ .

Formalmente, a hipótese nula de ausência de quebra estrutural no parâmetro da cópula torna-se:

$$H_0 : \delta_t = \delta \quad (54)$$

Considerando que a hipótese alternativa da presença de uma única quebra estrutural é dada como:

$$H_1 : \delta_t = \begin{cases} \delta_1 & 1 \leq t \leq t^* \\ \delta_2 & t^* < t \leq T \end{cases} \quad (55)$$

No caso em que o ponto de quebra estrutural  $t^*$  é conhecido, a estatística de teste pode ser derivada como o teste de razão de verossimilhança. Sejam  $L_1(\delta)$ ,  $L_2(\delta)$ , e  $L(\delta)$  serem as funções de log-verossimilhança da cópula usando as  $t^*$  primeiras observações, as observações de  $t^* + 1$  até T e todas as observações, respectivamente. Então a estatística da razão de verossimilhança pode ser dada como:

$$LR_{t^*} = 2 \left[ L_1(\hat{\delta}_1) + L_2(\hat{\delta}_2) - L(\hat{\delta}) \right] \quad (56)$$

onde  $\hat{\delta}$  corresponde o máximo da função verossimilhança. Nota-se que  $\hat{\delta}_1$  e  $\hat{\delta}_2$  são as estimativas de  $\delta$  antes e após a quebra estrutural e  $\hat{\delta}$  é o estimador de  $\delta$  usando a amostra completa. Para um  $t^*$  fixo a estatística de teste segue um distribuição  $\chi^2$  com números de graus de liberdade igual a

dimensão de  $\delta$ . No caso em que o período  $t^*$  da quebra estrutural é desconhecido, um procedimento similar proposto por Andrews (1993) pode ser aplicado. A estatística de teste proposto por Dias e Embrechts (2004) é o supremo das seqüências estatísticas para  $t^*$  conhecido

$$X_T = \max_{1 \leq t^* < T} LR_{t^*} \quad (57)$$

e os valores críticos assintóticos de Andrews (1993) podem ser usados. Candelson e Manner (2007) propuseram uma extensão deste procedimento permitindo uma quebra estrutural nos parâmetros da distribuição marginal em diferentes pontos no tempo através do processo de bootstrap para obter os valores críticos da estatística de teste.

## CAPÍTULO 4.

### 4.1

#### Medidas de dependência

Patton (2006) comenta que a importância principal nas tomadas de decisões financeiras envolvendo mais de um fator de risco está relacionada diretamente na dependência entre esses fatores. Como por exemplo, a variância dos retornos de uma carteira de investimento depende da variância da série de retornos de cada ativo que compõem esta carteira e também dos pares de correlação linear entre cada um dos ativos. Nesta seção, apresentaremos algumas medidas de associações, de concordância e de dependência, cujo objetivo é estender o conceito de dependência linear.

### 4.2

#### Coefficiente de correlação linear

O coeficiente de correlação linear é a medida de associação mais utilizada devido a sua simplicidade. Para duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  com segundo momento finito, o coeficiente de correlação é definido como:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)}\sqrt{\text{var}(Y)}} \quad (58)$$

Neste caso,  $\rho$  captura a penas o grau e o sinal da associação linear existente entre  $X$  e  $Y$ . O coeficiente de correlação amostral ou correlação de Pearson,  $r$  é obtido substituindo as variâncias e covariâncias em (58) pelas suas versões amostrais:

$$r(X, Y) = \frac{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}} \quad (59)$$

Apesar de ser uma medida muito utilizada na prática, segundo Mendes (2004),  $r$  não é robusto, uma vez, que o valor da correlação pode ser próximo de 0 (zero) ou de 1 (um) devido a presença de um único outlier. Além disso, uma característica de grande importância, que na maioria das vezes, é ignorada quando se utiliza o coeficiente de correlação linear é que o conjunto de valores que  $\rho$  podem assumir é determinado pelas distribuições marginais das variáveis em estudo. Embrechts, McNeil e Straumann (1999) ilustram essa característica baseada no seguinte exemplo: Seja  $(X, Y)$  um vetor aleatório com as respectivas distribuições marginais  $F$  e  $G$  e uma estrutura de dependência não especificada. Assumindo que  $0 < \text{Var}(X) < \text{Var}(Y) < \infty$ , então:

- 1) O conjunto de todos os valores possíveis para  $\rho$  pertencem ao intervalo  $[\rho^{\min}, \rho^{\max}]$  onde  $\rho^{\min} < \rho^{\max}$ .
- 2)  $\rho = \rho^{\min}$  se, e somente se,  $X$  e  $Y$  são comonotônicas. Analogamente,  $\rho = \rho^{\max}$  se, e somente se,  $X$  e  $Y$  são comonotônicas.
- 3)  $\rho^{\min} = -1$  se, e somente se,  $X$  e  $-Y$  são do mesmo tipo. Analogamente,  $\rho^{\max} = 1$  se, e somente se,  $X$  e  $Y$  são do mesmo tipo.

Se as distribuições não são do mesmo tipo, a determinação de  $\rho^{\min}$  e  $\rho^{\max}$  depende, fundamentalmente, das marginais da distribuição bivariada, principalmente das suas variâncias e do domínio de cada distribuição.

Segundo Embrechts, McNeil e Straumann (1999) o coeficiente de correlação  $\rho$  ainda exige que:

- as variâncias de  $X$  e  $Y$  sejam finitas;
- independência implica  $\rho = 0$  para qualquer distribuição, porém,  $\rho = 0$  implica independência somente para distribuições normais multivariadas.
- $\rho$  não é invariante para transformações crescentes afins.

Diante das deficiências apresentadas acima e os riscos do uso inadequado do coeficiente de correlação, a seguir serão apresentadas medidas de concordância que são capazes de capturar relações não-lineares entre as variáveis. Segundo Nelsen (2006), as medidas de concordância mais conhecidas são: Tau de Kendall e o Rho de Spearman.

### 4.3

#### Tau de Kendall

A medida de dependência Tau de Kendall é baseada nas probabilidades de concordância e discordância. Sua versão populacional é definida da seguinte maneira:

$$\tau = \tau_{X,Y} = P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\} \quad (60)$$

onde  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$  são vetores aleatórios i.i.d formados a partir das observações  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  do vetor de variáveis aleatórias  $(X, Y)$ . Já a sua versão amostral, pode ser definida da seguinte maneira: Seja  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$  uma amostra de variáveis aleatórias com  $n$  observações geradas a partir de um vetor  $(X, Y)$  de variáveis aleatórias contínuas. Então, existem  $\binom{n}{2}$  pares distintos  $(x_i, y_i)$  e  $(x_j, y_j)$ . Seja  $c$  o número de pares concordantes e  $d$  o número de pares discordantes, então podemos definir a versão amostral do Tau de Kendall da seguinte forma:

$$t = \frac{(c - d)}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}(c - d) \quad (61)$$

Se  $C$  é uma cópula associada com distribuição  $F$ , mostra-se que:

$$\tau = \iint_{I^2} C dC - 1 = 4 \iint_{I^2} C(u, v) c(u, v) du dv - 1 \quad (62)$$

onde  $c(u, v)$  é a densidade da cópula.

### 4.4

#### Rho de Spearman

A medida de dependência Rho de Spearman também é baseada nas probabilidades de concordância e discordância. Sua versão populacional é dada através da diferença entre as probabilidades de concordância e discordância dos vetores independentes  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_3)$  obtidos das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  que possuem as mesmas marginais, porém um vetor possui uma função de

distribuição conjunta  $H_{X,Y}$ , mas os componentes de cada vetor são independentes e definidos da seguinte maneira:

$$\rho_s = 3(P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0\}) \quad (63)$$

Cherubini, Vecchiato e Luciano (2004) mostram que a versão empírica do Rho de Spearman pode ser obtida utilizando o posto das observações extraídas da amostra aleatória de  $n$  pares de  $(X,Y)$  da seguinte forma:

$$r_s = 12 \frac{\sum_{i=1}^n (K_i - \bar{K})(W_i - \bar{W})}{n(n^2 - 1)} \quad (64)$$

onde  $K_i$  e  $W_i$  são postos das observações de  $X_i$  e  $Y_i$ , respectivamente.

A relação entre o Rho de Spearman e uma cópula  $C$  proposta por Nelsen (2006) é dada da seguinte forma:

$$\rho_s = 12 \iint_{I^2} C(u,v) du dv - 3. \quad (65)$$

## 4.5

### Dependência de Cauda

Um conceito muito importante quando se trata de valores extremos é o conceito de dependência de cauda. Este, por sua vez, mede a dependência assintótica existente no quadrante superior direito ou no quadrante inferior esquerdo de uma distribuição bivariada. Pode-se definir a dependência de cauda de cauda superior e inferior para duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , respectivamente da seguinte forma:

$$\tau^U = \lim_{u \rightarrow 1^-} P [Y > F_Y^{-1}(u) | X > F_X^{-1}(u)] \quad (66)$$

$$\tau^L = \lim_{u \rightarrow 1^-} P [Y < F_Y^{-1}(u) | X < F_X^{-1}(u)] \quad (67)$$

onde  $\tau^U$  e  $\tau^L$  representam, respectivamente, as dependências de cauda superior e inferior e  $F_Y^{-1}(\cdot)$  e  $F_X^{-1}(\cdot)$  representam as funções quantil de  $X$  e  $Y$ .

Se  $\tau^U$  e  $\tau^L$  pertencem ao intervalo  $(0,1)$ , o par de variáveis aleatórias é dito ser assintoticamente dependente, ou seja, existe um grau de dependência entre os

valores extremos das variáveis. No caso em que  $\tau^U = \tau^L = 0$ , então este par é dito assintoticamente independente.

Como pode visto em Joe (1997), p.33, podemos obter  $\tau^U$  e  $\tau^L$  a partir da função cópula  $C$  da seguinte forma:

$$\tau^U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad (68)$$

$$\tau^L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \quad (69)$$

Desta forma, se  $\tau^U \in (0, 1]$  então a cópula  $C$  possui dependência na cauda superior e se  $\tau^U = 0$  a cópula  $C$  não terá dependência na cauda superior. Similarmente, se  $\tau^L \in (0, 1]$  então a cópula  $C$  possui dependência na cauda inferior e se  $\tau^L = 0$  a cópula  $C$  não terá dependência na cauda inferior. No caso em que  $\tau^U = 0$  e  $\tau^L = 0$ , as variáveis são, assintoticamente, independentes nas caudas superiores e inferiores.

## CAPÍTULO 5.

### 5.1

#### Valor em Risco via cópulas

O Valor em Risco (VaR) de uma carteira no instante de tempo  $t$ , com nível de confiança  $\alpha \in (0,1)$ , é definido como:

$$VaR_\alpha = \inf\{x \in \mathfrak{R} \mid F_{p,t}(x) \geq \alpha\} = F_{p,t}^{-1}(\alpha) = q_\alpha(F_{p,t}) \quad (70)$$

onde  $F_{p,t}$  é a função de distribuição, e  $q_\alpha(F_{p,t})$  é o quantil da distribuição dado um  $\alpha$ .

A função distribuição da carteira  $F_{p,t}$  poderia ser calculada a partir da distribuição conjunta dada em (16), que por sua vez, pode ser obtida através da função cópula  $C$  e das distribuições marginais. Entretanto, não é muito trivial chegar a uma forma fechada (analítica) para a distribuição conjunta dos retornos da carteira. Então, será utilizado de simulação de Monte Carlo para estimar o quantil  $\alpha$  para a função de distribuição da carteira  $F_{p,t}$  conforme o seguinte procedimento:

- i) Simular os dados da distribuição conjunta dada pela cópula subjacente para cada instante de tempo. Obter o  $VaR(\alpha)_t$  para cada  $t$  definido como  $\widehat{VaR}(\alpha)_t$ ;
- ii) Calcular a proporção de valores de  $X_{p,t}$  que na amostra são inferiores a  $\widehat{VaR}(\alpha)_t$ . Se as distribuições marginais e a cópula foram bem ajustadas a proporção deve se aproximar de  $\alpha$ .

Para simular vetores aleatórios a partir das cópulas, utilizamos o método amostragem condicional que funciona como descrito a seguir.

Seja a distribuição condicional de  $U_2$  dado  $U_1$  então

$$\begin{aligned}
 C_{u_1}(u_2) &= P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = F_{U_2|U_1}(u_2 | u_1) = \\
 &= \lim_{\Delta u_1 \rightarrow 0} \frac{C(u_1 + \Delta u_1, u_2) - C(u_1, u_2)}{\Delta u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) = c_{u_1}(u_2)
 \end{aligned}
 \tag{71}$$

onde  $c_{u_1}(u_2)$  é a derivada parcial da função cópula. Isso nos permite gerar pares da seguinte forma:

1. Gerar duas variáveis Uniforme (0,1) independentes,  $u_1$  e  $t$ ;
2. Considerar  $u_2 = c_{u_1}^{-1}(t)$  onde  $c_{u_1}^{-1}$  é a inversa generalizada de  $c_{u_1}$ ;
3. Como  $c_{u_1}(t) = F_{U_2|U_1}(t | u_1)$  e  $t$  é uma observação de uma variável aleatória uniforme padrão, então  $u_2 = c_{u_1}^{-1}(t)$  é uma observação do vetor aleatório  $(U_1, U_2)$  que tem distribuição conjunta  $C$ .
4. Transformar o vetor uniforme  $(u_1, u_2)$  no vetor desejado  $(x_1, x_2)$  utilizando as inversas  $x_1 = F_1^{-1}(u_1)$  e  $x_2 = F_2^{-1}(u_2)$  onde  $F_1$  e  $F_2$  são as marginais estimadas.

A Figura 7 apresenta o fluxo utilizado para implementação do VaR via cópulas.

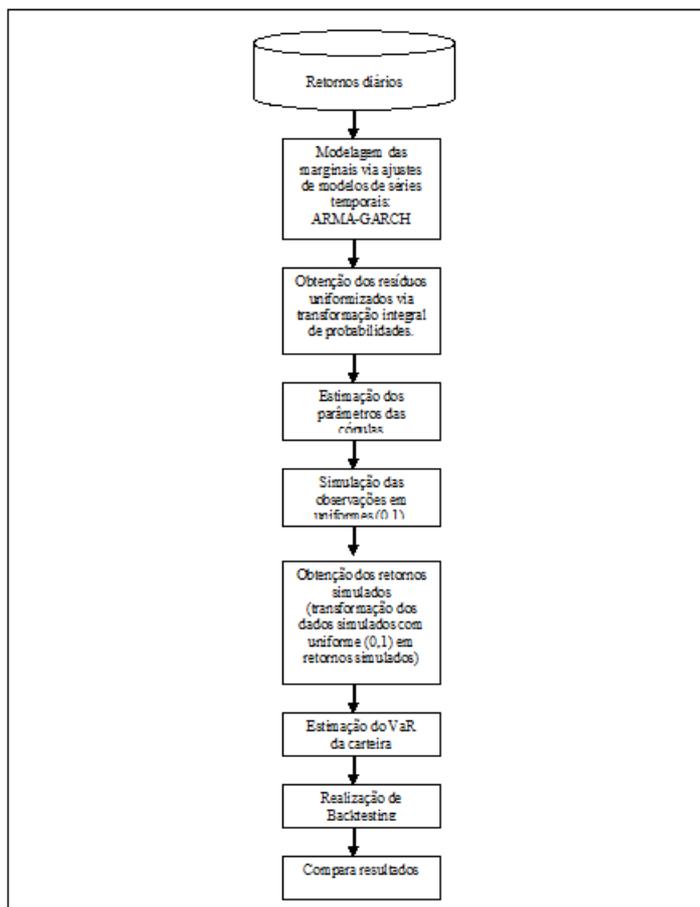


Figura 7: Fluxo da implementação do VaR via cópulas.

## 5.2

### Avaliação do Valor em Risco via cópulas

Avaliação de um modelo é o processo geral por meio do qual se verifica se uma metodologia é ou não adequada. Entre as ferramentas para tal análise, encontram-se os testes de aderência, ou backtesting. Jorion (2003) define backtesting como a ferramenta estatística formal para verificar a consistência entre as perdas observadas e as perdas previstas. Isto é, comparar o histórico das perdas estimadas pelo VaR com os retornos observados da carteira. Para testar o Valor em Risco (VaR) estimado, utilizou-se os testes de Kupiec (1995) e o teste de Christoffersen (1998). Ambos os testes seguem o mesmo princípio, porém o primeiro é um teste de cobertura incondicional e o segundo é um teste de cobertura condicional.

#### 5.2.1

##### Teste de Kupiec

O Teste de Kupiec é conhecido como teste de proporção de falhas e mede se o número de violações é consistente com o grau de confiança. Se a probabilidade de excessos sob o VaR é  $P^\alpha = \Pr(X_{p,t} < VaR(\alpha))$  o teste é conduzido sob as seguintes hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 : P^\alpha &= \alpha \\ H_a : P^\alpha &\neq \alpha \end{aligned} \quad (72)$$

O teste de Kupiec (1995), é um teste de razão de verossimilhança é construído da seguinte maneira:

$$LR_{uc} = -2 \cdot \ln \left[ (1-\alpha)^{T-N} \alpha^N \right] + 2 \cdot \ln \left[ (1-N/T)^{T-N} (N/T)^N \right] \sim \chi_1 \quad (73)$$

onde N é o número de vezes em que o VaR foi excedido, T é o tamanho da amostra e  $\alpha$  é o nível de significância. N/T é a proporção de excessos. A estatística utilizada foi  $\hat{P}^\alpha = N/T$ .

Se o valor da estatística LR exceder o valor crítico da distribuição qui-quadrado, a hipótese nula é rejeitada e o modelo é considerado inadequado.

Apesar do teste de Kupiec ser amplamente conhecido, ele é suscetível a dois tipos de deficiências. Primeiro, o teste é estatisticamente fraco em

tamanhos de amostra pequenos. Segundo, considera somente a frequência das violações e não o tempo em que elas ocorriam. Como resultado, pode-se cometer um erro ao rejeitar um modelo que produziu exceções agrupadas. Assim, a avaliação dos modelos não deve recair somente sobre testes de cobertura incondicional (CAMPBELL, 2005).

## 5.2.2

### Teste de Christoffersen

Em Christoffersen (1998) é desenvolvido um método de avaliação condicional para intervalos de previsão, o qual será resumido a seguir.

Seja  $(R_t)_{1 \leq t \leq T}$  uma realização da série temporal dos retornos de algum ativo financeiro e seja  $\{(L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p))\}_{1 \leq t \leq T}$  a correspondente seqüência de intervalos de previsão fora-da-amostra, onde  $L_{t|t-1}(p)$  e  $U_{t|t-1}(p)$  são os limites inferior e superior do intervalo de previsão *ex-ante* para o período  $t$  feito no período  $t-1$  ao nível de confiança  $p$ .

Define-se como variável indicadora,  $I_t$ , para um dado intervalo de confiança,  $(L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p))$ , como:

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{se } R_t \in [L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p)] \\ 0, & \text{se } R_t \notin [L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p)] \end{cases} \quad (74)$$

Diz-se que a seqüência de intervalos de previsão,  $\{(L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p))\}_{1 \leq t \leq T}$ , é eficiente com respeito ao conjunto de informação  $\Psi_{t-1}$ , se  $E(I_t / \Psi_{t-1}) = p$ , para todo  $t$ .

Dado que na definição de eficiência condicional, o conjunto condicional é geral então podemos realizar estes testes para os intervalos de previsão sem especificar a distribuição do processo investigado.

Christoffersen mostra que testar  $E(I_t / \Psi_{t-1}) = E(I_t / I_{t-1}, I_{t-2}, \dots, I_1) = p$ , para todo  $t$ , é equivalente a testar que a seqüência  $(I_t)_{1 \leq t \leq T}$  é idêntica e independentemente distribuída Bernoulli com parâmetro  $p$ , i.e.,  $\{I_t\} \stackrel{iid}{\sim} \text{Bern}(p)$ .

Logo, dizemos que uma seqüência de intervalos de previsão,  $\{(L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p))\}_{1 \leq t \leq T}$ , tem uma correta cobertura condicional se  $\{I_t\} \stackrel{iid}{\sim} Bern(p)$ ,  $\forall t$ .

No teste da razão de verossimilhança para Cobertura Incondicional temos as seguintes hipóteses, nula e alternativa, respectivamente:

$$\begin{aligned} H_0 : E(I_t) &= p \\ H_a : E(I_t) &\neq p \end{aligned} \quad (75)$$

A função de verossimilhança sob a hipótese nula é  $L(p; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1-p)^{n_0} p^{n_1}$  e sob a hipótese alternativa é  $L(\pi; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1-\pi)^{n_0} \pi^{n_1}$  onde  $n_1 = T - n_0$  e  $n_0$  é o número de observações para as quais  $I_t = 0$ .

A razão de verossimilhança para a cobertura incondicional é dada por:

$$LR_{UC} = -2 \log [L(p; I_1, I_2, \dots, I_T) / L(\hat{\pi}; I_1, I_2, \dots, I_T)] \stackrel{asy}{\sim} \chi^2(1) \quad (76)$$

onde  $\hat{\pi} = \frac{n_1}{n_0 + n_1}$ .

Neste teste, a ordem dos zeros e uns na seqüência da variável indicador não importa, isto é, que não testa independência, só a cobertura.

Já o teste da razão de verossimilhança para independência a hipótese nula é a independência da seqüência  $(I_t)_{1 \leq t \leq T}$  e a alternativa é que segue um processo markoviano de primeira ordem. Considere que  $\{I_t\}$  segue uma cadeia de Markov de primeira ordem com matriz de transição de probabilidade:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix} \quad (77)$$

onde  $\pi_{ij} = \Pr(I_t = j / I_{t-1} = i)$ .

A função de verossimilhança aproximada para este processo, condicionada à primeira observação, é:

$$L(\Pi_1; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}} \quad (78)$$

onde  $n_{ij}$  é o número de observações com valor  $i$  seguido por  $j$ . Maximizando a função de log-verossimilhança e resolvendo para os parâmetros temos:

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \frac{n_{00}}{n_{00} + n_{01}} & \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}} \\ \frac{n_{10}}{n_{10} + n_{11}} & \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}} \end{bmatrix} \quad (79)$$

Um processo markoviano de primeira ordem sob a hipótese de independência apresenta a seguinte matriz de transição de probabilidade:

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_2 & \pi_2 \\ 1 - \pi_2 & \pi_2 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Logo, a função de verossimilhança sob a hipótese nula é:

$$L(\Pi_2; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \pi_2)^{n_{00} + n_{10}} \pi_2^{n_{01} + n_{11}} \quad (81)$$

e o estimador de máxima verossimilhança é

$$\hat{\Pi}_2 = \hat{\pi}_2 = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{10} + n_{01} + n_{11}}. \quad (82)$$

O teste da razão de verossimilhança é dado por:

$$LR_{IND} = -2 \log \left[ \frac{L(\hat{\Pi}_2; I_1, I_2, \dots, I_T)}{L(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \dots, I_T)} \right]^{asy} \sim \chi^2(1) \quad (83)$$

Para obter o teste de cobertura condicional devemos juntar os testes de cobertura incondicional e de independência. Neste teste conjunto testaremos a hipótese nula do teste de cobertura incondicional contra a alternativa do teste de independência. Logo,

$$LR_{CC} = -2 \log \left[ \frac{L(p; I_1, I_2, \dots, I_T)}{L(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \dots, I_T)} \right]^{asy} \sim \chi^2(2) \quad (84)$$

Note-se que se condicionamos a primeira observação no teste de cobertura incondicional temos  $\hat{\pi} = \hat{\pi}_2 = \hat{\Pi}_2$ . Logo, os três testes estão numericamente relacionados a través da seguinte identidade:

$$LR_{CC} = LR_{UC} + LR_{IND}. \quad (85)$$

## CAPÍTULO 6.

### 6.1

#### Aplicação

A crise econômica do *subprime* é o acontecimento econômico mais marcante desde a grande depressão americana dos anos 1930 causada, segundo várias análises econômicas, por uma conjunção de fatores que incluem excesso de liquidez internacional, falta de regulamentação bancária e a proliferação de instrumentos de derivativos de crédito imobiliário. A atual crise internacional começou a dar sinais quando o Federal Reserve (Fed), que funciona como o banco central americano começou a aumentar a taxa de juros para combater o processo inflacionário que começava a se desenhar nos EUA por volta de 2005. Com aumento das taxas de juros, muitos mutuários que não tinham condições em suportar os seus compromissos fixados em taxas de juros pós-fixadas. Os famosos *NINJAs* (*No-income, No-Jobs, No-Assets*, ou sem-renda, sem-trabalho, sem-patrimônio), começaram a não pagar os seus empréstimos. Este processo de aumento de taxas de juros e da inadimplência reduziu a demanda por imóveis e aumentou a oferta, a partir do momento que os mutuários eram retirados de suas casas e estas colocadas à venda. Em meados de 2006 o preço dos imóveis atingiu o seu ponto máximo e a partir daí, a crise se agravou, uma vez que muitos mutuários ficaram *underwater* (com dívidas maiores do que o preço dos ativos que as geraram). A continuidade do processo de queda dos preços dos imóveis foi corrompendo o valor dos ativos de dívida imobiliária ou derivados deles (os *mortgage-backed securities*) e consequentemente, os balanços de seus possuidores. Embora alguns analistas estivessem bastante preocupados com o desenrolar do problema imobiliário americano, a crise só ficou clara aos olhos do mundo em 15 de setembro de 2008 com a quebra do Lehman Brothers.

Com o objetivo de investigar como a crise do subprime impactou os mercados emergentes e desenvolvidos, será utilizada uma modelagem bivariada de séries temporais em um par de séries representando os mercados emergentes e desenvolvidos. A metodologia proposta faz uso dos modelos GARCH univariados e modelagem de dependência por meio de cópulas, que

incluem as cópulas normal, normal GAS (*Generalised Autoregressive Score*) e a cópula de Joe-Calyton Simétrica nas formas estáticas e dinâmicas. Os retornos dos mercados emergentes e desenvolvidos foram divididos em dois períodos: o primeiro contendo 511 observações diárias, que correspondem dois anos antes da falência do *Lehman Brothers*, que será chamado de período de “estabilidade financeira” que cobrem o período de 29/09/2006 a 15/09/2008. O segundo período, contendo 814 observações diárias, que correspondem três anos após a falência do *Lehman Brothers*, que será chamado de período de “instabilidade financeira” que cobrem o período de 16/09/2008 a 28/10/2011.

## 6.2

### Descrição dos dados

Os dados utilizados neste trabalho foram os índices MSCI<sup>3</sup> (*Morgan Stanley Capital International*) diários dos mercados emergentes e dos mercados desenvolvidos compreendendo o período de 29 de setembro de 2006 a 28 de outubro de 2011, totalizando 1.325 observações. Os dados foram extraídos do banco de dados do site [www.msci.com](http://www.msci.com). O período de “estabilidade financeira” data de 29/09/2006 a 15/09/2008 com 511 observações diárias. O período de “instabilidade financeira” data de 16/09/2008 a 28/10/2011. A Figura 8 apresenta a evolução no tempo de cada índice no período mencionado anteriormente. É notório que a crise financeira iniciada em 2008 afeta, significativamente, os dois mercados, pois os seus respectivos valores decrescem fortemente.

---

<sup>3</sup> O índice MSCI dos mercados emergentes é um índice ajustado de capitalização de mercado livre de flutuação que é projetado para medir o desempenho do mercado de capital de mercados emergentes. Este índice consiste dos 21 índices do mercado dos países emergentes: Brasil, Chile, China, Colômbia, República Checa, Egito, Hungria, Índia, Indonésia, Coreia, Malásia, México, Marrocos, Peru, Filipinas, Polônia, Rússia, África do Sul, Taiwan, Tailândia e Turquia. Já o índice MSCI dos mercados desenvolvidos é um índice ajustado de capitalização de mercado livre de flutuação que é projetado para medir o desempenho do mercado de capital de mercados desenvolvidos. Este índice consiste dos 24 índices de mercado dos países desenvolvidos: Austrália, Áustria, Bélgica, Canadá, Dinamarca, Finlândia, França, Alemanha, Grécia, Hong Kong, Irlanda, Israel, Itália, Japão, Holanda, Nova Zelândia, Noruega, Portugal, Singapura, Espanha, Suécia, Suíça, Reino Unido e Estados Unidos.

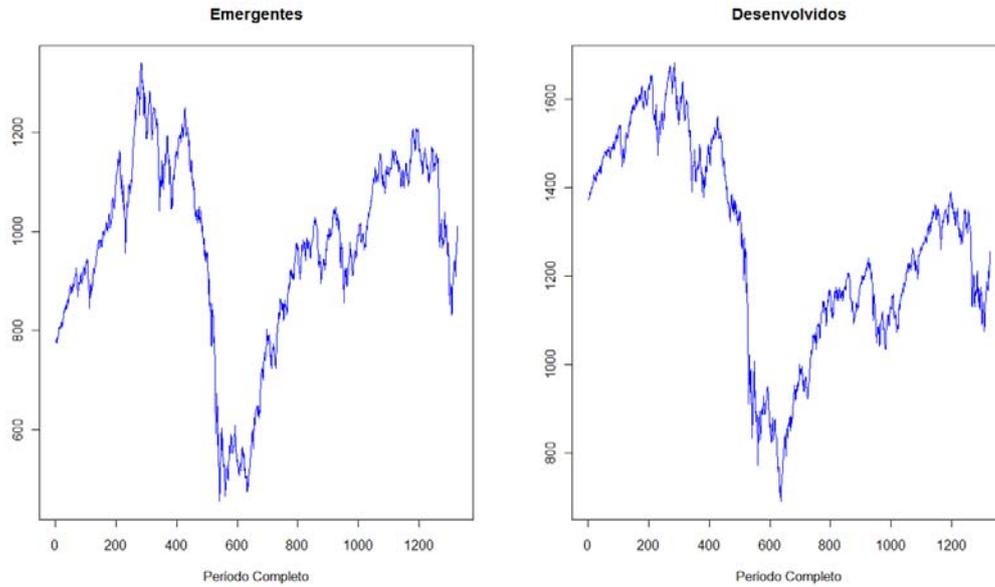


Figura 8: Série dos índices MSCI dos mercados emergentes e desenvolvidos.

Geralmente, análises de retornos financeiros são baseadas na forma logarítmica destes, ou seja, os log-retornos são calculados como segue:  $r_t = 100 * \ln(I_t / I_{t-1})$ , na qual  $I_t$  é o preço ou índice de preços no instante  $t$ . Na Figura 9, são apresentadas as evoluções dos log-retornos de cada índice. Verificam-se claramente evidências do fato estilizado conhecido como a formação de clusters de volatilidade, em que retornos absolutos altos tendem a serem seguidos por retornos absolutos altos e vice-versa. Verificar-se também que o mercado emergente parece ser mais volátil do que os mercados desenvolvidos.

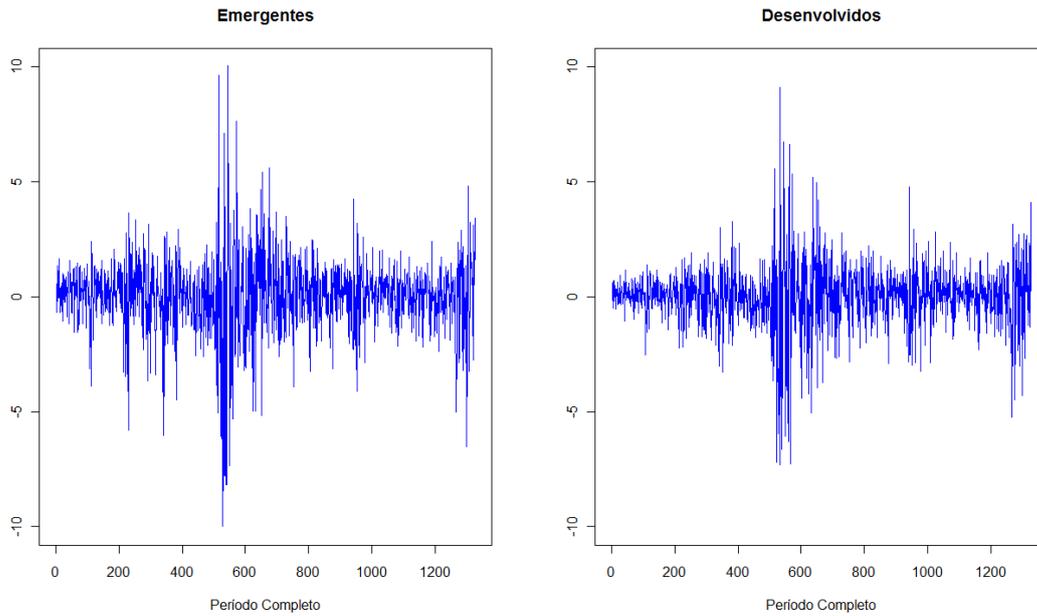


Figura 9: Retornos dos mercados emergentes e desenvolvidos.

A Figura 10 apresenta o diagrama de dispersão dos retornos dos mercados emergentes e desenvolvidos. Uma análise visual pode-se verificar que no período de instabilidade, os dois mercados apresentam uma maior dependência.

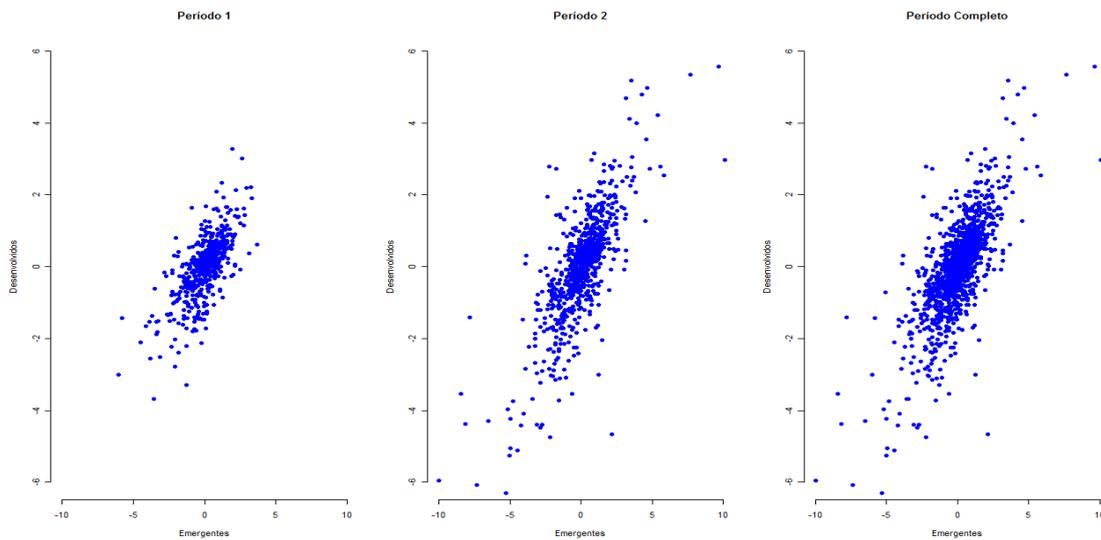


Figura 10: Diagrama de dispersão dos retornos dos mercados emergentes e desenvolvidos.

A Tabela 1 apresenta algumas estatísticas descritivas dos retornos para cada índice MSCI dos mercados emergentes e desenvolvidos. Observa-se que os retornos não apresentam tendência significativa em relação aos períodos em análise, pois as médias são muito pequenas em relação ao desvio padrão de cada retorno nos seus respectivos períodos.

Tabela 1: Estatísticas descritivas dos log-retornos dos índices MSCI dos mercados emergentes e desenvolvidos.

Estatísticas	Período de Estabilidade: 29/09/2006 a 15/09/2008		Período de Instabilidade: 16/09/2008 a 28/10/2011		Período Completo: 29/09/2006 a 28/10/2011	
	Emergentes	Desenvolvidos	Emergentes	Desenvolvidos	Emergentes	Desenvolvidos
Média	0,012	-0,020	0,025	0,002	0,020	-0,007
Mediana	0,111	0,073	0,121	0,112	0,118	0,092
Máximo	3,662	3,284	10,073	9,096	10,073	9,096
Mínimo	-6,023	-3,670	-9,995	-7,325	-9,995	-7,325
Desvio-Padrão	1,294	0,881	1,838	1,600	1,649	1,368
Assimetria	-0,726	-0,364	-0,367	-0,380	-0,444	-0,400
Curtose	4,991	4,518	8,998	7,866	9,260	9,334
Jarque-Bera	131,174	61,587	1247,553	828,952	2216,955	2260,392
p-valor	(0,000)	(0,000)	(0,000)	(0,000)	(0,000)	(0,000)
Num. de Obs		511		814		1325
Correlação Linear		0,704		0,780		0,761

Fonte: elaboração própria.

De acordo com a estatística de teste de Jarque-Bera e o seu p-valor=(0.000) apresentado em todos os períodos na Tabela 1, há evidências de que os retornos não são normalmente distribuídos, pois a hipótese nula de normalidade incondicional é rejeitada fortemente em todos os períodos. Esse resultado já era esperado, pois se trata de uma característica estilizada de retornos financeiros. Observa-se leve indicio de assimetria negativa e excesso de curtose. Comparando-se o excesso de curtose entre os mercados, nota-se que o período de instabilidade financeira possui mais que o dobro da medida de excesso de curtose do período de estabilidade financeira, evidenciando maior presença de eventos extremos no período de instabilidade financeira em ambos os retornos dos índices. Analisando a volatilidade, ou seja, o desvio-padrão dos retornos dos índices dos mercados emergentes no período de instabilidade financeira, a volatilidade é 41% maior quando comparado ao período de estabilidade financeira. Em contrapartida, a volatilidade dos retornos do índice dos mercados desenvolvidos, apresentou um aumento ainda maior, de 82% considerando os mesmos períodos. Em relação à correlação linear entre os dois mercados, o período de instabilidade financeira apresenta uma dependência linear maior em relação ao período de estabilidade, pois o coeficiente de correlação incondicional entre os retornos apresentou um incremento de 11%. Já

em relação à assimetria das distribuições, todas as séries de retornos apresentam leve assimetria negativa.

Como base nas informações verificadas acima, há evidências de que pode ser adequado propor uma modelagem estatística que leve em consideração características particulares de cada um dos períodos.

### 6.3

#### Modelagem das distribuições marginais

Séries de retornos financeiros, geralmente, apresentam fraca correlação serial e forte dependência não-linear associada à presença de heteroscedasticidade condicional. Para capturar essas características, faz-se necessário, ajustar os modelos ARMA para eliminar, ainda que fraca, a correlação serial e os modelos da família ARCH para eliminar a heteroscedasticidade condicional. Sendo assim, sejam  $X_{1t}$  e  $X_{2t}$  duas variáveis aleatórias que representam, respectivamente, os log-retornos dos índices MSCI dos mercados emergentes e dos mercados desenvolvidos. Para cada um desses retornos, foram ajustados modelos do tipo ARMA (m,n)-GARCH (1,1) apresentados no capítulo 2 considerando a distribuição t-Student assimétrica<sup>4</sup> para as inovações. Os modelos ARMA (m,n) foram selecionados através do critério de informação BIC. Utilizou-se adiante, o teste de Kolmogorov Smirnov, para testar se as marginais foram bem especificadas, ou seja, se as “marginais transformadas” dos resíduos via transformada integral de probabilidade dada em (13) tem distribuição uniforme (0,1). Note-se que é importante que as marginais “uniformizadas” fiquem bem ajustadas para a modelagem adequada da estrutura de dependência. As especificações escolhidas dos modelos condicionais para as marginais foram:

$$X_{i,t} = \mu_{x_{i,t}} + \phi_{1x_{i,t}} X_{i,t-1} + \eta_{i,t} \quad (86)$$

$$\sigma_{x_{i,t}}^2 = \omega_{x_{i,t}} + \beta_{x_{i,t}} \sigma_{x_{i,t-1}}^2 + \alpha_{x_{i,t}} \varepsilon_{i,t-1}^2 \quad (87)$$

$$\sqrt{\frac{m_{x_{i,t}}}{\sigma_{x_{i,t}}^2 (m_{x_{i,t}} - 2)}} \cdot \varepsilon_{i,t} \sim \text{i.i.d. } t_{(m_{x_{i,t}}, \lambda_{x_{i,t}})} \quad (88)$$

<sup>4</sup> A definição da densidade t-Student simétrica proposta por Fernandez e Steel [1998] e reparametrizada por Lambert e Laurent [2001] encontram-se no apêndice.

na qual  $i=1,2$  representa os mercados emergentes e desenvolvidos, respectivamente, e  $\varepsilon_{i,t} \sim t_{(m_{x_{i,t}}, \lambda_{x_{i,t}})}$ , têm distribuição t-Student assimétrica conforme apresentada no apêndice.

As Tabelas 2 e 3 mostram os resultados obtidos dos modelos ajustados das distribuições marginais para os retornos dos mercados emergentes e desenvolvidos nos períodos de instabilidade e estabilidade financeira, e também para o período completo, conforme as equações dadas em (86)-(88). Todas as distribuições marginais apresentaram alta persistência da variância, pois  $\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i$  são próximos de 1.

Os parâmetros  $AR(1)$  que captam a persistência dos retornos foram significativos para todas as séries de retornos nos respectivos períodos em análise. Sendo assim, existe uma persistência do retorno anterior sobre o retorno corrente. Podemos verificar que há evidências de que as marginais são levemente assimétricas, pois os parâmetros  $\lambda$  que medem o grau de assimetria foram, estatisticamente, significantes em todos os períodos. As estimativas da variância incondicional para os mercados emergentes foram 2.10 e 2.57, no período de estabilidade financeira e período de instabilidade financeira, respectivamente. Já para os mercados desenvolvidos, nos períodos de estabilidade financeira e instabilidade financeira foram 2.43 e 2.83, respectivamente. Nota-se que a variância do período instabilidade financeira é, em média 20% superior em relação ao período estabilidade financeira em ambos os mercados. Em comparação entre os dois mercados, a variância é superior em média 13% nos mercados desenvolvidos. O que sugere que os mercados desenvolvidos já estavam relativamente “estressados” nos dois anos anteriores à quebra do *Lehman Brothers*, pois é fato estilizado que índices de mercados emergentes, em geral, são mais voláteis que os seus pares de mercados desenvolvidos. Os graus de liberdade da distribuição que medem o peso da cauda foram bem inferiores para o período de instabilidade financeira em comparação ao período estabilidade financeira. O fato dos graus de liberdade serem diferentes nos dois índices mostra uma das vantagens da modelagem via cópulas, pois uma distribuição t-Student bivariada requer o mesmo número de graus de liberdade para as respectivas marginais.

Tabela 2: Resultados das distribuições marginais dos mercados emergentes.

Parâmetros	Mercados Emergentes Período de Estabilidade			Mercados Emergentes Período Instabilidade			Mercados Emergentes Período Completo		
	Coef.	Desv. Padrão	P.valor	Coef.	Desv. Padrão	P.valor	Coef.	Desv. Padrão	P.valor
Constante	0,1017	0,0462	0,0278*	0,0628	0,0411	0,1261	0,0759	0,0310	0,0145*
$AR(1)$	0,1310	0,0470	0,0053**	0,1958	0,0358	0,0000***	0,1788	0,0288	0,0000***
$\omega$	0,0798	0,0360	0,0266*	0,0237	0,0119	0,0471*	0,0375	0,0134	0,0051**
$\varepsilon_{t-1}^2$	0,1741	0,0449	0,0001***	0,0791	0,0182	0,0000***	0,1139	0,0195	0,0000***
$\sigma_{t-1}^2$	0,7879	0,0511	0,0000***	0,9117	0,0182	0,0000***	0,8713	0,0207	0,0000***
$\lambda$	0,8033	0,0719	0,0000***	0,9145	0,0478	0,0000***	0,8873	0,0379	0,0000***
$\nu$	10,0000	3,0187	0,0009***	7,8232	1,9845	0,0001***	9,9758	2,5289	0,0001***
	<b>Estatística</b>	<b>P.valor</b>		<b>Estatística</b>	<b>P.valor</b>		<b>Estatística</b>	<b>P.valor</b>	
Q(20)	17,5915	0,6143		28,0575	0,1080		27,8396	0,1133	
$Q^2(20)$	24,0301	0,2410		21,9872	0,3412		21,7544	0,3540	
K-S	0,0361	0,5194		0,0173	0,9686		0,0171	0,8335	

Fonte: elaboração própria.

Nota: (\*\*\*), (\*\*), (\*) – significativa a 1%, 5% e 10% respectivamente.

Q – p-valor da estatística de Ljung-Box (H0: autocorrelação até a vigésima defasagem).

(K-S) – p-valor do Kolmogorov-Smirnov teste (H0: distribuição uniforme (0,1)).

Tabela 3: Resultados das distribuições marginais dos mercados desenvolvidos.

Parâmetros	Mercados Desenvolvidos Período de Estabilidade			Mercados Desenvolvidos Período Instabilidade			Mercados Desenvolvidos Período Completo		
	Coef.	Desv. Padrão	P.valor	Coef.	Desv. Padrão	P.valor	Coef.	Desv. Padrão	P.valor
Constante	0,0283	0,0309	0,3609	0,0171	0,0376	0,6496	0,0418	0,0239	0,0800 .
$AR(1)$	0,0996	0,0456	0,0287*	0,1054	0,0349	0,0025**	0,1067	0,0277	0,0001 ***
$\omega$	0,0109	0,0079	0,1641	0,0189	0,0098	0,0551 .	0,0129	0,0058	0,0273 *
$\varepsilon_{t-1}^2$	0,1131	0,0306	0,0002***	0,0818	0,0196	0,0000***	0,1086	0,0176	0,0000 ***
$\sigma_{t-1}^2$	0,8824	0,0322	0,0000***	0,9115	0,0186	0,0000***	0,8912	0,0158	0,0000 ***
$\lambda$	0,8471	0,0518	0,0000***	0,8937	0,0411	0,0000***	0,8899	0,0329	0,0000 ***
$\nu$	9,2630	3,7750	0,0141*	6,1481	1,4285	0,0000***	6,5242	1,2905	0,0000 ***
	<b>Estatística</b>	<b>P.valor</b>		<b>Estatística</b>	<b>P.valor</b>		<b>Estatística</b>	<b>P.valor</b>	
Q(20)	20,9553	0,3998		11,7835	0,9233		17,3737	0,6286	
$Q^2(20)$	11,9548	0,9176		26,2654	0,1572		24,9526	0,2033	
K-S	0,0257	0,8872		0,0259	0,6911		0,0184	0,7634	

Fonte: elaboração própria.

Nota: (\*\*\*), (\*\*), (\*) – significativa a 1%, 5% e 10% respectivamente.

Q – p-valor da estatística de Ljung-Box (H0: autocorrelação até a vigésima defasagem).

(K-S) – p-valor do Kolmogorov-Smirnov teste (H0: distribuição uniforme (0,1)).

Os p-valores apresentados pelas estatísticas Q e  $Q^2$  de Ljung-Box para os resíduos e para os quadrados dos resíduos, respectivamente, nas tabelas acima indicam que não há presença de dependência linear ou não-linear nos resíduos. Conforme Patton (2006), uma condição necessária para se estimar as cópulas é que as distribuições das marginais transformadas sejam uniformes (0,1). Para testar se as marginais transformadas são uniformes (0,1), utilizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov. Com base nos resultados do teste (K-S) com os p-valores apresentados nas tabelas 2 e 3 pode-se afirmar que não há evidências de que as marginais transformadas não sejam uniformes (0,1).

As Figuras 11 e 12 mostram a evolução das volatilidades diárias estimadas para os mercados emergentes e para os mercados desenvolvidos em cada período. A volatilidade diária média estimada no período de instabilidade financeira é 25% maior em relação ao período de estabilidade financeira nos mercados emergentes. Já para os mercados desenvolvidos, o aumento da volatilidade no período de instabilidade financeira é de 67% maior quando comparado com o período de estabilidade. Fica evidente nas Figuras abaixo que nas datas próximas à falência do Lehman Brothers a tensão em ambos os mercados foram significativas, pois a volatilidade nos dois mercados cresce abruptamente logo após o período da falência do Lehman Brothers.



Figura 11: Volatilidade diária estimada do índice MSCI dos mercados emergentes.



Figura 12: Volatilidade diária estimada do índice MSCI dos mercados desenvolvidos.

## 6.4

### Modelagem das cópulas

A partir dos resultados obtidos na modelagem da média condicional e da variância condicional para as distribuições marginais através do processo ARMA (m,n)-GARCH (1,1) e especificado em (86)-(88), obtivemos os resíduos padronizados. Estes, por sua vez, foram transformados em variáveis aleatórias uniformes (0,1) através da transformação integral de probabilidade conforme a equação (13) dada no capítulo 3. Com estes resíduos uniformizados foram ajustadas as cópulas normal dada em (24) com dinâmica dada em (42), a cópula normal GAS (1,1) (*Generalized Autoregressive Score*) propostas por Creal et al. (2008) com dinâmica dada em (50) e a cópula Joe-Clayton simétrica proposta por Patton(2006) dada em (41) com dinâmica dada em (43)-(44). As cópulas mencionadas acima foram ajustadas com parâmetros constantes e variando no tempo. A proposta de utilizarmos a cópula normal é porque ela é referência no mercado financeiro. Já a cópula de Joe-Clayton Simétrica, pelo fato de que ela não impõe condições de dependência simétrica nas variáveis conforme a cópula normal. Já a cópula normal GAS (1,1), como uma alternativa de comparação, entre as dinâmicas de evolução propostas por Patton (2006) e Creal et al. (2008) para a normal dadas em (42) e (50), respectivamente. A partir das cópulas ajustadas, analisou-se a dependência entre os retornos dos índices MSCI dos mercados emergentes e dos mercados desenvolvidos.

A Figura 13 apresenta o diagrama de dispersão dos resíduos padronizados, transformados em variáveis aleatórias uniformes (0,1) para as séries de retornos dos índices dos mercados emergentes e desenvolvidos. Podem-se verificar clusters mais acentuados nas extremidades superiores e inferiores da Figura 13 evidenciando presença de dependência de cauda. Esta dependência é mais visível no período de instabilidade financeira em virtude do desdobramento da crise.

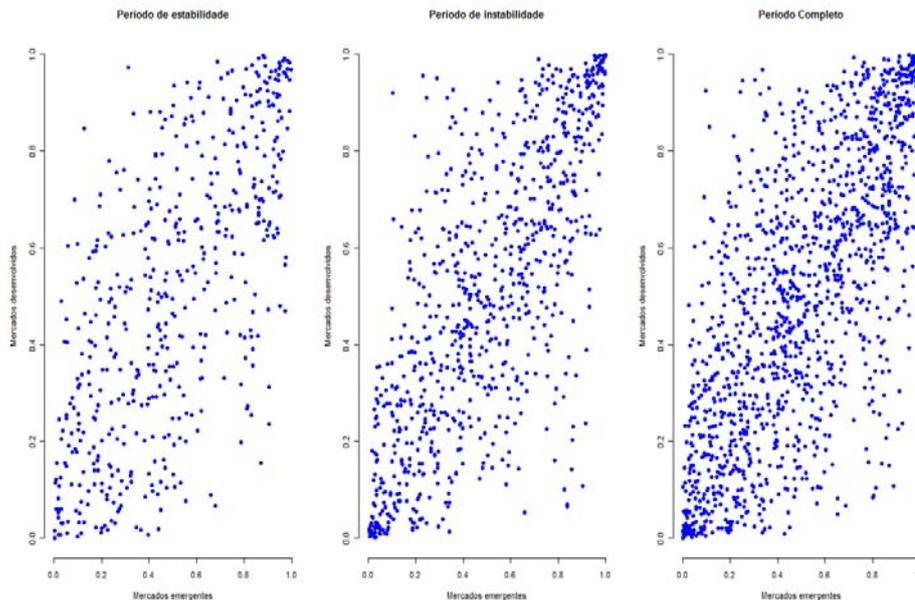


Figura 13: Diagrama de dispersão dos resíduos padronizados transformados em uniformes (0,1) dos mercados emergentes e desenvolvidos.

A Tabela 4 apresenta as estimativas do coeficiente de correlação linear, capturadas através do modelo da cópula normal e as estimativas das dependências de cauda inferior e superior, capturadas através do modelo da cópula Joe-Clayton simétrica. Ambos os modelos com parâmetros constantes.

O valor estimado do coeficiente de correlação da cópula normal incondicional no período de estabilidade financeira foi de 0.6808. Para o período de instabilidade financeira foi de 0.7581, ou seja, 11.4% superior em relação ao período de estabilidade financeira. O valor estimado do coeficiente de dependência de cauda superior, capturado através da cópula Joe-Clayton simétrica incondicional no período de estabilidade financeira foi de 0.4866 e no período de instabilidade financeira foi de 0.5159, ou seja, no período de instabilidade a dependência de cauda superior é 6% maior quando comparado com o período de estabilidade financeira. Já o valor estimado para o coeficiente de dependência de cauda inferior capturado através da cópula Joe-Clayton incondicional no período de estabilidade financeira foi de 0.3940 e para o período de instabilidade financeira foi de 0.5195, ou seja, no período de instabilidade financeira a dependência de cauda inferior é 41% maior em relação ao período de estabilidade financeira. Este resultado mostra uma das vantagens ao se utilizar cópulas. É possível utilizar parâmetros diferentes para a dependência em cada uma das caudas. É amplamente aceito que em crises

financeiras o aumento de dependência mais forte se dê justamente na cauda dos retornos negativos.

Tabela 4: Estimativas das cópulas normal e Joe-Clayton simétrica constante.

Cópulas		Param	Coef	Desv.Pad	Z	AIC	BIC	(-1)*LL
Período de Estabilidade	Normal Constante	$\rho$	0,6808	0,0197	34,5584	-318,6533	-318,6450	-159,3286
	Joe Clayton Simétrica Constante	$\tau^U$	0,4866	0,0027	180,2222	-287,1117	-287,103396	-143,5578
		$\tau^L$	0,3793	0,0444	8,5428			
Período de Instabilidade	Normal Constante	$\rho$	0,7581	0,0119	63,7059	-699,4913	-699,4856	-349,7469
	Joe Clayton Simétrica Constante	$\tau^U$	0,5159	0,0116	44,4741	-668,8619	-668,8627	-334,4334
		$\tau^L$	0,5351	0,0017	314,7647			
Período Completo	Normal Constante	$\rho$	0,7289	0,0105	69,4190	-1.010,5813	-1.010,5781	-505,2914
	Joe Clayton Simétrica Constante	$\tau^U$	0,5192	0,0119	43,6303	-944,7488	-944,7491	-472,3759
		$\tau^L$	0,4612	0,0331	13,9335			

Nota. A estimação dos parâmetros foram feitas através dos códigos em MATLAB disponibilizados por Andrew Patton. AIC – Akaike Information Criteria; BIC – Bayesian Information Criteria. LL – Log-verossimilhança. (sinal negativo, pois na rotina computacional minimizamos o negativo do log-verossimilhança).

Nas Tabelas 5, 6 e 7 são apresentadas as estimativas dos modelos das cópulas normal e Joe-Clayton Simétrica condicionais com os parâmetros variantes no tempo de acordo com a dinâmica proposta por Patton (2006) dada em (42) e a cópula normal GAS (1,1), com os parâmetros variantes no tempo de acordo com a dinâmica proposta por Creal et al. (2008) dada em (50). Os períodos considerados foram: o período de “estabilidade financeira”, o período de “instabilidade financeira” e o período completo. Com base no teste de quebra estrutural apresentado no Capítulo 3 não se deve rejeitar a hipótese da presença de quebra estrutural destas cópulas com p-valor=(0.000).

Os parâmetros estimados de todas as cópulas em análise foram estatisticamente, significativos ao nível de 5% em todos os períodos.

Tabela 5: Estimativa das cópulas normal, normal GAS (1,1) e Joe-Clayton simétrica variante no tempo para o período estabilidade.

Cópulas	Período de Estabilidade						
	Param	Coef	Desv.Pad	Z	AIC	BIC	(-1)*LL
Normal Variando no Tempo	$\omega$	2,6267	0,0944	27,8252			
	$\alpha$	-0,0628	0,1293	-0,4857	-318,6957	-318,7039	-159,3537
	$\beta$	-1,3560	0,1437	-9,4363			
Normal GAS Variando no Tempo	$\omega$	2,4075	0,1130	21,3053			
	a	0,2873	0,0385	7,4623	-356,0805	-356,0887	-178,0461
	b	-1,5135	0,1632	-9,2739			
Simmetrized Joe-Clayton Variando no tempo	$\omega^U$	2,5978	0,0043	604,1395			
	$\alpha^U$	-6,6529	0,0333	-199,7868			
	$\beta^U$	-3,0747	0,0078	-394,1923	-290,0661	-290,0878	-145,0448
	$\omega^L$	-1,8123	0,1830	-9,9033			
	$\alpha^L$	8,6247	0,8265	10,4352			
	$\beta^L$	-0,9190	0,4274	-2,1501			

Nota. A estimação dos parâmetros foram feitas através dos códigos em MATLAB disponibilizados por Andrew Patton. AIC – Akaike Information Criteria; BIC – Bayesian Information Criteria. LL – Log-verossimilhança. (sinal negativo, pois na rotina computacional minimizamos o negativo do log-verossimilhança).

Tabela 6: Estimativa das cópulas normal, normal GAS (1,1) e Joe-Clayton Simétrica variante no tempo para o período de instabilidade.

Cópulas	Período de Instabilidade						
	Param	Coef.	Desv.Pad	Z	AIC	BIC	(-1)*LL
Normal Variando no Tempo	$\omega$	3,5482	0,0719	49,3491			
	$\alpha$	-0,1921	0,0865	-2,2208	-700,6630	-700,6680	-350,3352
	$\beta$	-1,8724	0,0790	-23,7013			
Normal GAS Variando no Tempo	$\omega$	2,2640	0,0512	44,2188			
	a	0,2233	0,0207	10,7874	-769,7906	-769,7956	-384,8990
	b	-0,5898	0,0581	-10,1515			
Simmetrized Joe-Clayton Variando no tempo	$\omega^U$	1,2515	0,0197	63,5279			
	$\alpha^U$	-3,6641	0,1172	-31,2637			
	$\beta^U$	-0,9258	0,0395	-23,4390	-673,2067	-673,2202	-336,6107
	$\omega^L$	0,3997	0,0074	54,0081			
	$\alpha^L$	-3,0616	0,0745	-41,0953			
	$\beta^L$	0,1568	0,0135	11,6141			

Nota. A estimação dos parâmetros foram feitas através dos códigos em MATLAB disponibilizados por Andrew Patton. AIC – Akaike Information Criteria; BIC – Bayesian Information Criteria. LL – Log-verossimilhança. (sinal negativo, pois na rotina computacional minimizamos o negativo do log-verossimilhança).

Tabela 7: Estimativa das Cópulas normal, normal GAS (1,1) e Joe-Clayton Simétrica variante no tempo para o período completo.

Cópulas	Período Completo						
	Param	Coef.	Desv.Pad	Z	AIC	BIC	(-1)*LL
Normal Variando no Tempo	$\omega$	2,0116	0,0329	61,1429			
	$\alpha$	-0,0682	0,0363	-1,8788	-1010,8913	-1010,8942	-505,4479
	$\beta$	-0,1459	0,0346	-4,2168			
Normal GAS Variando no Tempo	$\omega$	2,0426	0,0547	37,3419			
	a	0,2764	0,0197	14,0305	-1123,8097	-1123,8126	-561,9071
	b	-0,5860	0,0765	-7,6601			
Simmetrized Joe-Clayton Variando no tempo	$\omega^J$	1,7159	0,0091	188,5604			
	$\alpha^U$	-5,1286	0,0567	-90,4515			
	$\beta^U$	-1,4545	0,0199	-73,0905	-954,2993	-954,3076	-477,1542
	$\omega^L$	2,4589	0,0268	91,7500			
	$\alpha^L$	-4,9971	0,1286	-38,8577			
	$\beta^L$	-3,9303	0,0664	-59,1913			

Nota. A estimação dos parâmetros foram feitas através dos códigos em MATLAB disponibilizados por Andrew Patton. AIC – Akaike Information Criteria; BIC – Bayesian Information Criteria. LL – Log-verossimilhança. (sinal negativo, pois na rotina computacional minimizamos o negativo do log-verossimilhança).

A Figura 14 apresenta a evolução do coeficiente de correlação linear para a cópula normal condicional. O valor do coeficiente de correlação da cópula constante foi de 0,7289. No período de estabilidade seu valor oscilou a baixo deste valor durante o período de estabilidade financeira. Somente a partir do período de instabilidade financeira seu valor supera este valor ficando 60% das vezes acima deste valor.

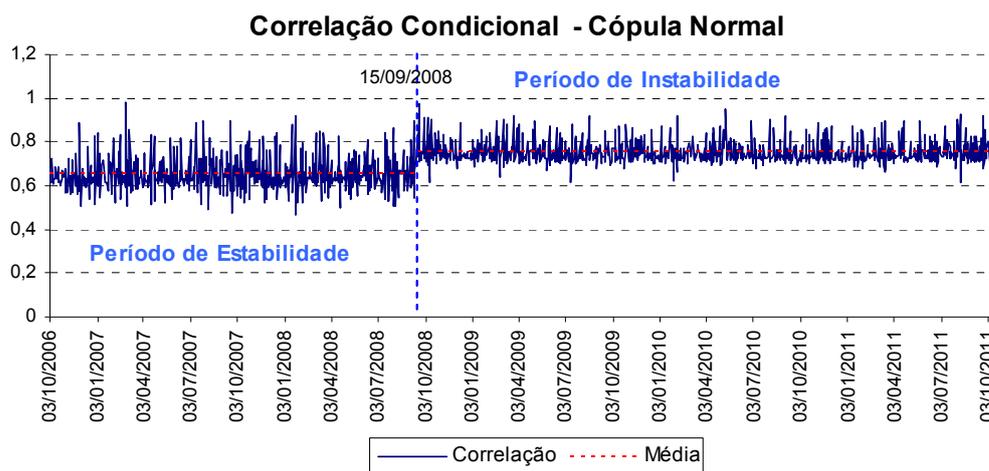


Figura 14: Evolução da correlação condicional na cópula normal.

A Figura 15 apresenta a evolução temporal do coeficiente de correlação linear para a cópula normal GAS (1,1). Comparando com o valor da cópula constante 0.7289, a evolução temporal se deu em média 10% abaixo desse valor no período de estabilidade financeira. Já no período de instabilidade seu valor ficou 40% das vezes acima deste valor.

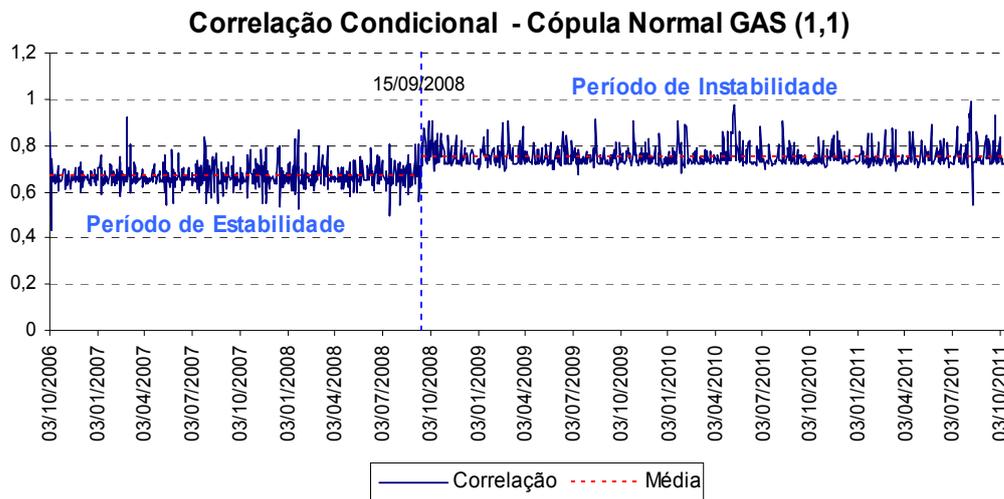


Figura 15: Evolução da correlação condicional na cópula normal GAS (1,1).

As Figuras 16 e 17 mostram, respectivamente, o histograma da correlação condicional para a cópula normal considerando a dinâmica proposta por Patton (2006) e a cópula normal GAS considerando a dinâmica proposta por Creal et al. (2008). Os histogramas sugerem que a correlação linear tende a aumentar significativamente no período de crise em ambas as cópulas.

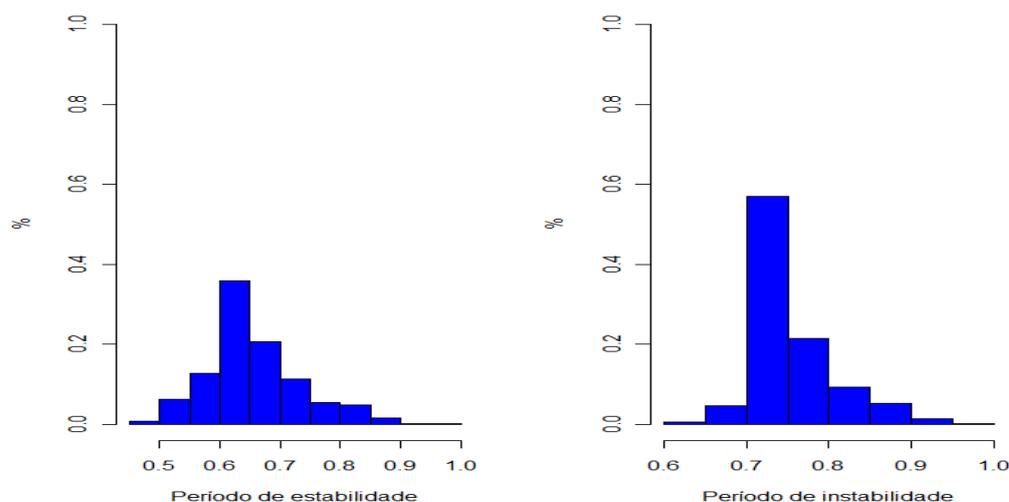


Figura 16: Histograma da correlação condicional da cópula normal

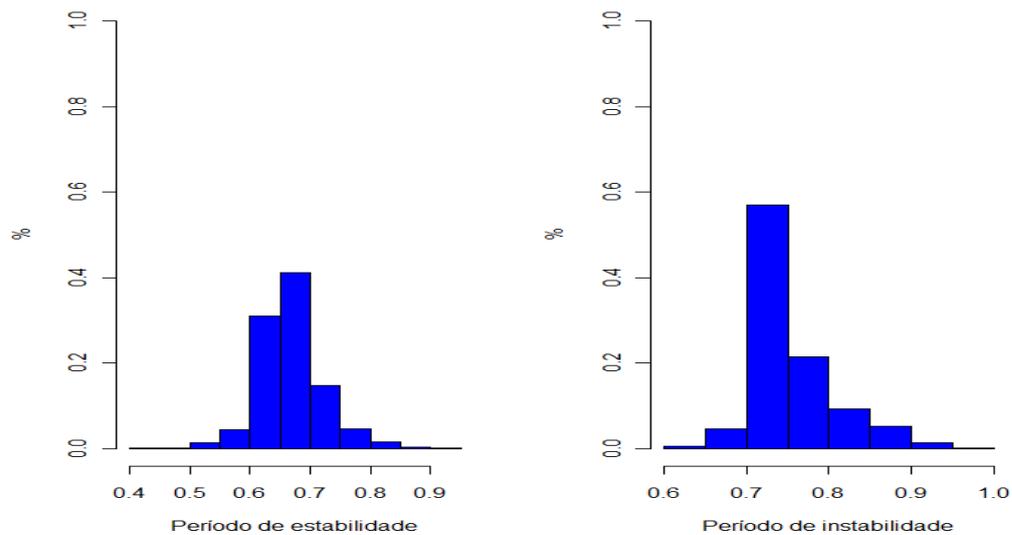


Figura 17: Histograma da correlação condicional da cópula normal GAS (1,1)

As Figuras 18 e 19 mostram, respectivamente, a evolução no tempo das dependências de cauda condicional superior e inferior para a cópula Joe-Clayton Simétrica. O coeficiente de dependência de cauda superior para a cópula SJ C constante foi de 0.5192. No período de estabilidade financeira esse coeficiente oscilou em torno desse valor com leve incremento a partir de 2007 ficando acima desse valor em média 21% das vezes e saltando para 58% acima deste valor a partir do período de instabilidade financeira. Já o coeficiente de dependência de cauda inferior para a cópula SJC constante foi de 0.4612. No período de estabilidade financeira esse coeficiente oscilou em torno desse valor com leve incremento a partir de 2007 e saltando para 59% acima deste valor no período de instabilidade financeira.

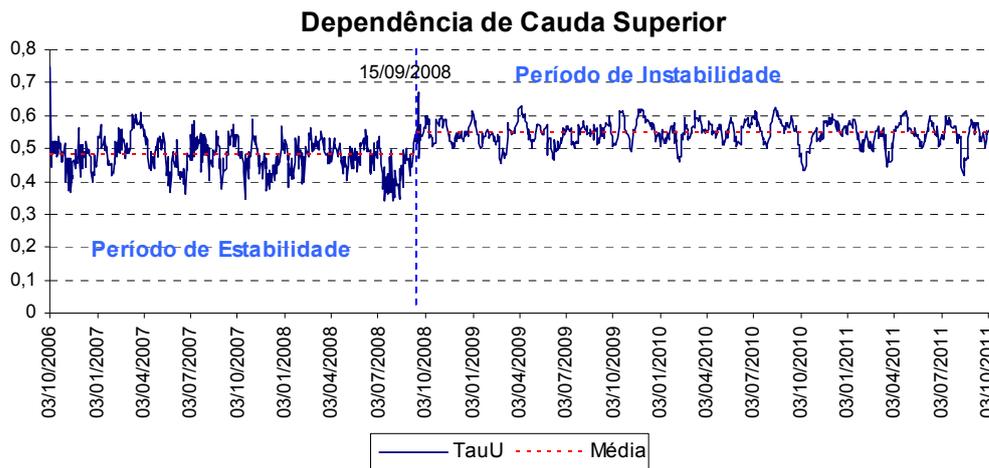


Figura 18: Dependência de cauda superior na copula Joe- Clayton Simétrica.

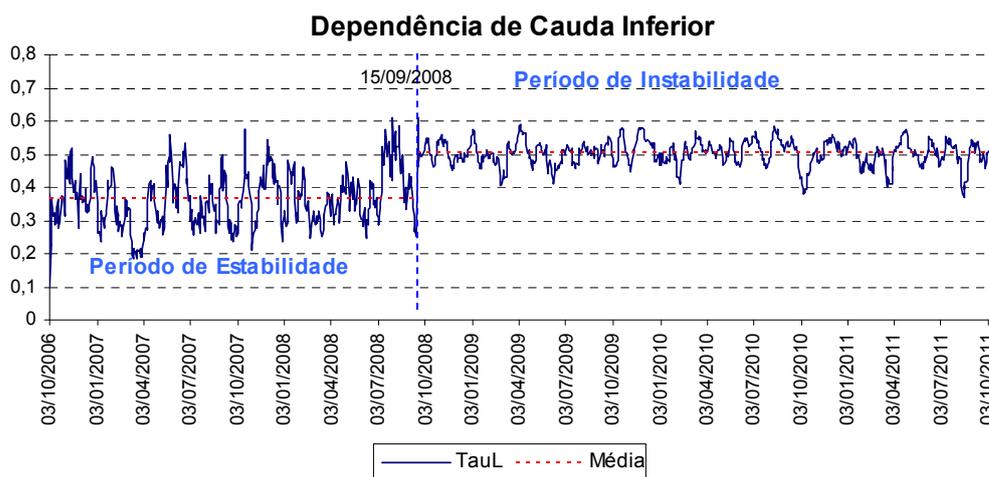


Figura 19: Dependência de cauda inferior na copula Joe- Clayton Simétrica.

As Figuras 20 e 21 mostram, respectivamente, o histograma da dependência de cauda superior e inferior na cópula Joe-Clayton simétrica, Verifica-se que no período de instabilidade, o aumento médio da dependência de cauda superior foi de 14% comparado ao período de estabilidade. Entretanto, para a dependência de cauda inferior o aumento foi de 39% quando comparado ao período de estabilidade.

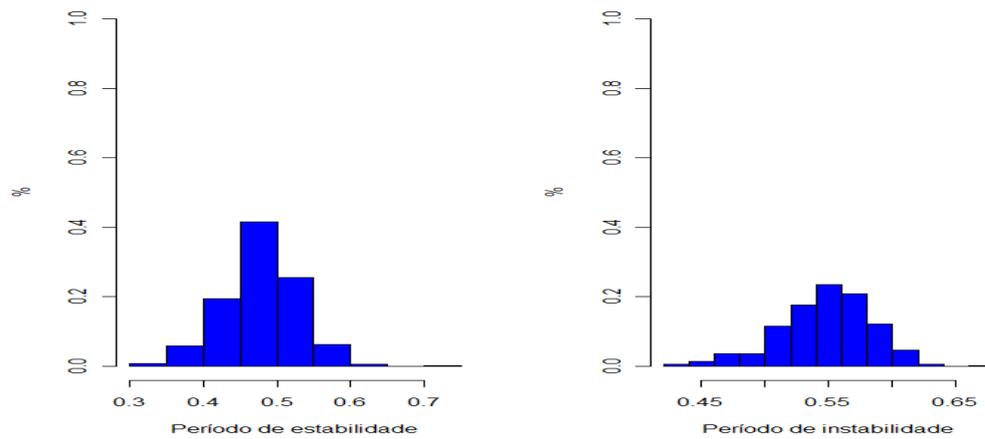


Figura 20: Histograma da dependência de cauda superior na copula Joe-Clayton Simétrica.

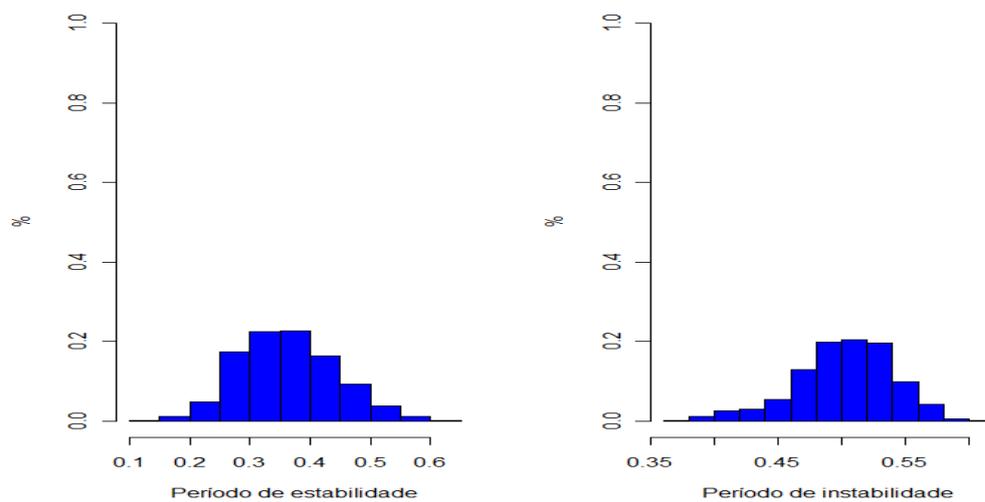


Figura 21: Histograma da dependência de cauda inferior na copula Joe-Clayton simétrica.

A Figura 22 mostra a evolução da média entre a dependência de cauda inferior e superior. Com isso, pode-se confirmar que mudança na dependência linear também leva a mudança na dependência de cauda, com a média saltando de 0.42 para 0.52 a partir do período de instabilidade financeira.

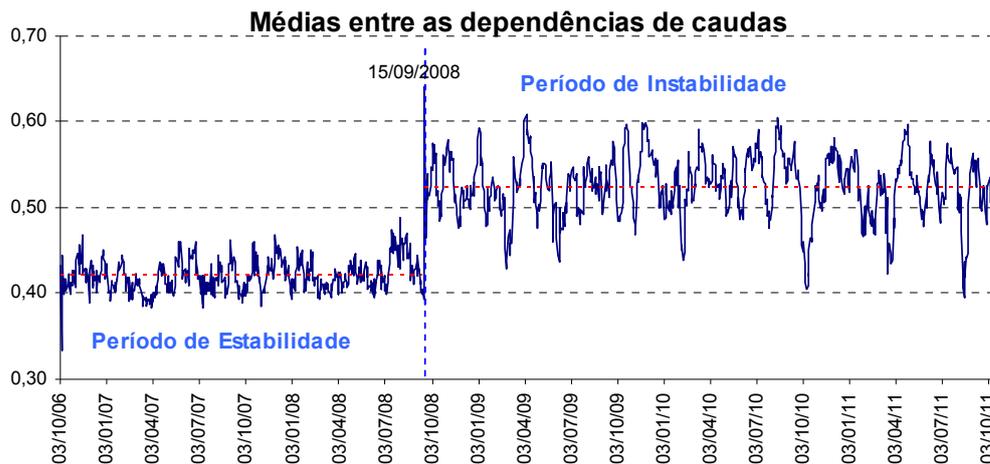


Figura 22: Evolução das médias entre as dependências de cauda na cópula Joe-Clayton Simétrica.

A Figura 23 mostra a evolução da diferença entre a dependência de cauda superior e inferior. Assim, verifica-se o grau de assimetria na cópula condicional. Pode-se verificar também que após período de instabilidade financeira a dependência de cauda superior foi na maioria das 99% das vezes superior a dependência de cauda inferior.

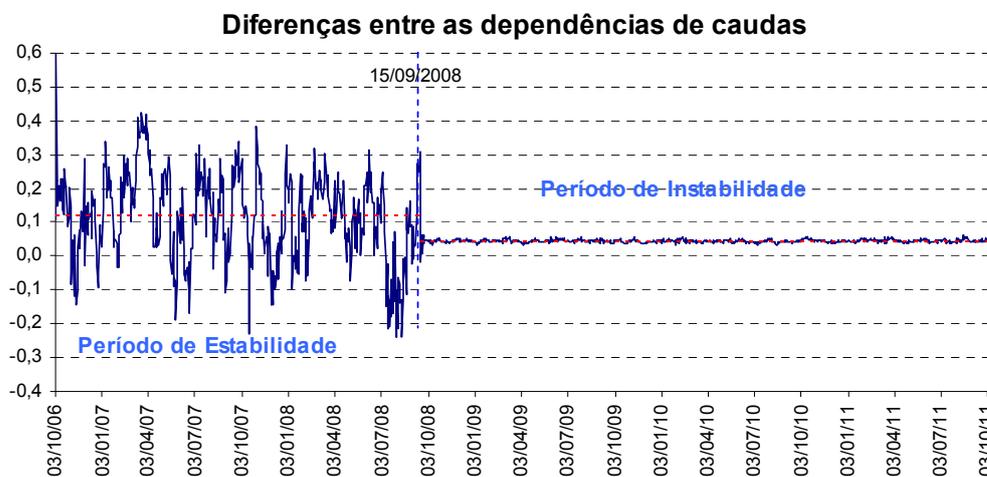


Figura 23: Evolução das diferenças entre as dependências de caudas na cópula Joe-Clayton Simétrica.

## 6.5

### Estimando o Valor em Risco via cópulas

Para avaliar o desempenho dos ajustes das cópulas tratadas neste trabalho utilizou-se o VaR (*Value at Risk*). Desta forma, para estimar o Valor em Risco criou-se uma carteira arbitrária, distribuída **igualmente proporcional**, ou seja,  $X_{p,t} = 0.5X_{1,t} + 0.5X_{2,t}$  onde  $X_{1,t}$  e  $X_{2,t}$  são, respectivamente, os retornos dos índices dos mercados emergentes e desenvolvidos utilizados anteriormente e  $X_{p,t} \sim F_{p,t}$ . Uma vez que, não é muito trivial chegar a uma forma analítica para distribuição conjunta dessa carteira, utilizou-se o método de simulação de Monte Carlo para estimar o quantil  $\alpha$  para a função de distribuição da carteira  $F_{p,t}$  conforme o procedimento descrito no capítulo 5. Sendo assim, foi simulado 1.000 realizações da carteira para cada instante de tempo  $t$  de cada cópula em estudo. Para exemplificação, apresentamos o VaR calculado para  $\alpha = 5\%$  nas figuras abaixo.

A fim de avaliar a precisão das estimativas do VaR calculado a partir das simulações, apresentamos os resultados do **backtesting** baseados nos testes de Kupiec (1995) e Christoffersen (1998) conforme descrito no capítulo 5. Para efeito de comparação, calculou-se o VaR através do modelo GARCH multivariado normal BEKK. Na Tabela 8 são apresentadas as proporções de falhas do VaR e o p-valor para os respectivos testes mencionados acima.

Tabela 8: Proporção de falhas do VaR e teste de Kupiec e Christoffersen

Modelo	Alpha	Proporção Falhas	P.Valor	
			Kupiec	Christoffersen
Cópula Normal	5,0%	5,360%	0,554	0,758
	2,5%	2,940%	0,314	0,457
	1,0%	1,060%	0,837	0,979
Cópula Normal GAS	5,0%	5,060%	0,925	0,691
	2,5%	2,790%	0,503	0,799
	1,0%	0,980%	0,945	0,998
Cópula Joe-Clayton Simetrizada	5,0%	5,360%	0,554	0,758
	2,5%	3,090%	0,181	0,338
	1,0%	0,980%	0,945	0,998
GARCH Bivariado BEKK - normal	5,0%	5,060%	0,920	0,281
	2,5%	3,470%	0,032	0,087
	1,0%	1,810%	0,008	0,028

Fonte: Elaboração Própria

Com base nos resultados apresentados na Tabela 8, pode-se considerar que todas as cópulas são boas aproximações da distribuição conjunta na estimação do VaR, pois a hipótese nula não pôde ser rejeitada aos níveis de significância de [5%, 2, 5%, 1%]. Entretanto, ao nível de significância de 1% os testes de Kupiec e Christoffersen mostram que a hipótese nula é rejeitada para o modelo GARCH multivariado normal BEKK. Dentre todos os modelos, o que apresentou menores proporções de falhas foi o modelo cópula normal GAS (1,1) proposto por Creal et al.(2008) Para os níveis de significância de 1% a cópula de Joe-Clayton simétrica foi a que apresentou a menor proporção de falhas e a única que a hipótese nula não pôde ser rejeitada. .

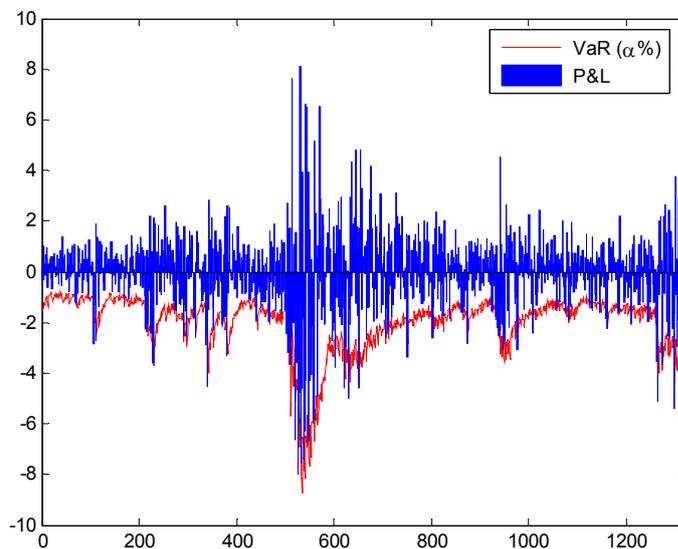


Figura 24: Retornos da carteira e VaR (5%) para a cópula normal.

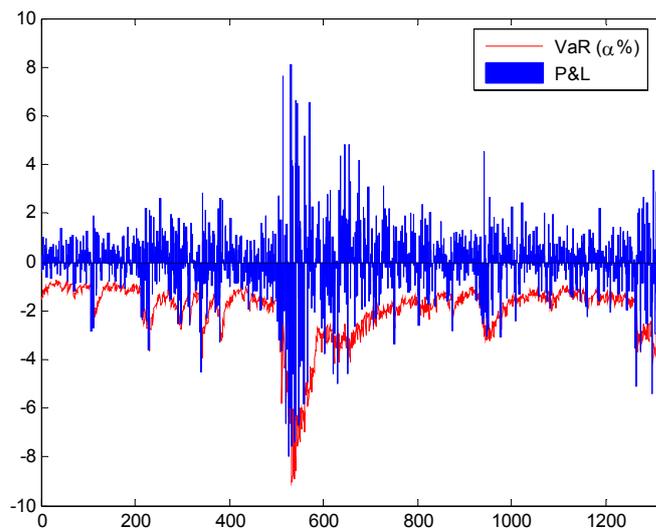


Figura 25: Retornos da carteira e VaR (5%) para a cópula normal GAS.

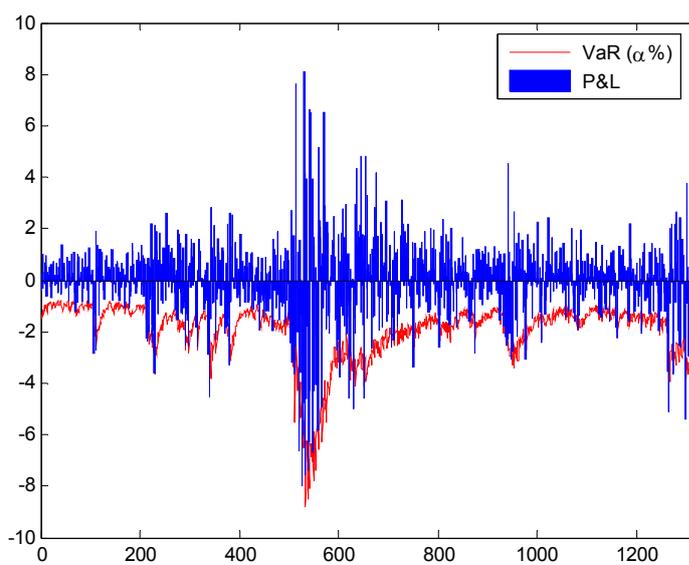


Figura 26: Retornos da carteira e VaR (5%) para a cópula Joe-Clayton Simétrica.

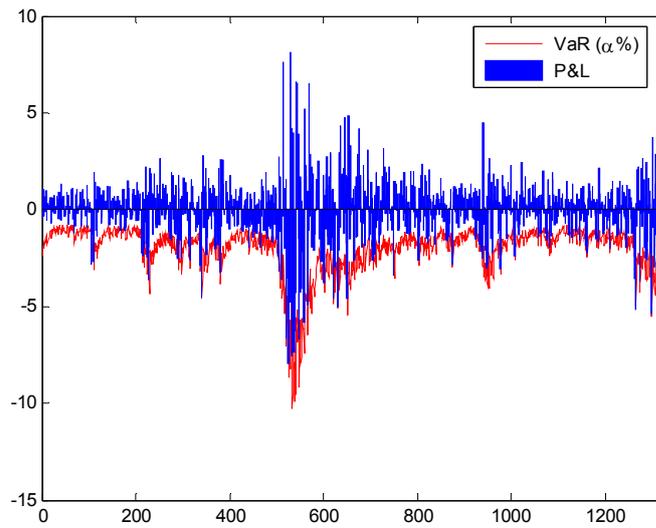


Figura 27: Retornos da carteira e VaR (5%) para o modelo GARCH multivariado BEKK – normal.

## CAPÍTULO 7.

### Conclusão

O objetivo desse trabalho foi investigar como a crise do subprime deflagrada com a falência do banco Lehman Brothers ocorrida em 2008, impactou a estrutura de dependência entre os índices MSCI dos mercados emergentes e desenvolvidos. Para isso, foram utilizados dados diários observados durante as datas 29/09/2006 e 28/10/2011. Para capturar a estrutura de dependência entre as séries de retornos, utilizou-se, as cópulas condicionais normal e Joe-Clayton simétrica com parâmetros variando no tempo propostas, respectivamente, por Patton (2006) e a cópula normal GAS (1,1) com parâmetros variando no tempo proposta por Creal et al. (2008).

Para verificar a presença de quebra estrutural, as séries de retornos dos índices MSCI foram divididas em dois períodos: o primeiro período contendo 511 retornos diários localizados antes da falência do Lehman Brothers, e é chamado de período de “estabilidade financeira”. O segundo período, contém 814 retornos diários localizados após a falência do Lehman Brothers, e é chamado de período de “instabilidade financeira”.

A modelagem da estrutura de dependência foi realizada em duas etapas. Na primeira, ajustou-se um modelo ARMA (m,n)-GARCH (1,1) univariado para as marginais, cujas inovações mostraram ter distribuição *t-Student* assimétrica. Na segunda etapa, os resíduos padronizados obtidos na modelagem das marginais foram transformados em observações de variáveis aleatórias uniformes (0,1). Com estas observações, foram ajustadas as cópulas normal e Joe-Clayton simétrica constante e as cópulas normal, normal GAS (1,1) e Joe-Clayton simétrica variantes no tempo para buscar a melhor forma da distribuição conjunta dos retornos.

Os resultados mostram que há evidências de que a dependência entre os mercados emergentes e desenvolvidos aumenta, significativamente, após a quebra do Lehman Brothers. Este aumento foi capturado tanto pelas cópulas com parâmetros constantes, quanto pelas cópulas com parâmetro variando no tempo. A cópula Joe-Clayton simétrica que permite modelar grandes estresses e grandes euforias nos mercados financeiros é útil para capturar a dependência no período de estresse quando há grandes quedas nos índices. O parâmetro de

cauda superior aumentou em média 13% no período de instabilidade. Em contrapartida, o parâmetro de cauda inferior aumentou em média 41% no mesmo período. Levando-se em consideração os critérios de informação AIC e BIC, constatou-se a cópula normal GAS (variantes no tempo) com quebra estrutural se mostrou a mais adequada para capturar a dependência entre os retornos dos mercados emergentes e desenvolvidos.

Por fim, avaliou-se o desempenho das cópulas para estimar o VaR (*Value at Risk*). Para efeito de comparação, utilizou-se como *benchmark* o modelo GARCH multivariado normal BEKK. Verificou-se que todas as cópulas são boas aproximações da distribuição conjunta na estimação do VaR (*Value at Risk*), pois a hipótese nula não pôde ser rejeitada aos níveis de significância de [5%, 2,5%, 1%] com exceção do modelo GARCH multivariado normal BEKK ao nível de significância de 1% o que mostra que nos extremos a utilização de cópulas para estimar o VaR (*Value at Risk*) mostrou-se mais eficiente.

A partir da teoria de cópulas apresentada neste trabalho, verificou-se que a utilização de cópulas é de suma importância em analisar a dependência entre variáveis aleatórias. Entretanto, outra questão que motiva o aprofundamento do estudo de cópulas apresentados neste trabalho e suas aplicações em finanças seria obter volatilidades univariadas a partir das cópulas.

## Referências bibliográficas

BENNETT, M. and KENNEDY, J. (2004), 'Quanto pricing with copulas', *Journal of Derivatives*, Vol. 12, No. 1, pages 26-5.

BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31 (3), 307-327.

BOLLERSLEV, T. (1987). A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *The Review of Economics and Statistics* 69 (3), 542-547.

BOLLERSLEV, T.; ENGLE, R.F. and WOOLDRIDGE, J.M. (1988), A capital asset pricing model with time varying covariances, *Journal of Political Economy* 96, 116-131.

CANDELON, B. and MANNER, H. (2007) Testing for asset market linkages: A new approach based on time-varying copulas. METEOR Research Memorandum RM/07/052, Maastricht University.

CHERUBINI, U. and LUCIANO, E. (2001). Value at risk trade-off and capital allocation with copulas. *Economic Notes*, vol. 30.

CHERUBINI, U.; VECCHIATO, W. and LUCIANO (2004). *Copula Methods in Finance*. Wiley. 24.

CHRISTOFFERSEN, P. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*, v. 39.

CHRISTOFFERSEN, P. (2006). Value-at-Risk models. Desautels Faculty of Management. McGill University.

CLAYTON, D.G. (1978). A Model for Association in Bivariate Life Tables and Its Application in Epidemiological Studies of Familial Tendency in Chronic Disease Incidence. *Biometrika*, vol. 65.

CONT, R. Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues. *Quantitative Finance* 1, 2001: 223-236.

CREAL, D., KOOPMAN S.J. and LUCAS, A (2008). A General Framework for Observation Driven Time-Varying Parameter Models

CREAL, D.; KOOPMAN S.J. and LUCAS, A (2011). Generalized Autoregressive Score Models with Applications.

CREAL, D.; KOOPMAN, S.J. and LUCAS, A. (2011). A dynamic multivariate heavy-tailed model for time-varying volatilities and correlations. *Journal of Business & Economic Statistics*. forthcoming.

DAVIS, R.A.; DUNSMUIR, W.T.M. and STREETT, S. (2003). Observation driven models for Poisson counts. *Biometrika* 90 (4), 777-790.

DAVIS, R.A.; DUNSMUIR, W.T.M. and STREETT, S. (2005). Maximum likelihood estimation for an observation driven model for Poisson counts. *Methodology and Computing in Applied Probability* 7, 149-159.

DIAS, A. and EMBRECHTSY. (2004). Dynamic copula models for multivariate high-frequency data in finance.

DUARTE, C.C.A. (2010). Cópulas and defaults within a crisis – Universidade Técnica de Lisboa.

ENGLE, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica* 50 (4), 987-1007.

ENGLE, R.F. (2002A). Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics* 20 (3), 339-350.

ENGLE, R.F.; LILIEN, D. and ROBINS, R. (1987). Estimating time-varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model. *Econometrica*, 55: 251-276.

ENGLE, R.F.; NG, V. and ROTHSCCHILD, M. (1989), Asset pricing with a factor ARCH covariance structure: Empirical estimates for Treasury bills, Revised manuscript, April.

ENGLE, R.F. and KRONER, K.F. (1995). Multivariate simultaneous GARCH. *Econometric Theory*, 11:122-150.

EMBRECHTS, P.; HOEING, A. and JURI, A. (2003). Using copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risk. *Finance Stochastic*, 7(2), 145-167.

EMBRECHTS, P.; LINDSKOG, F. and MCNEIL, A. (2003). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. In: RACHEV, S. (ed). *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*. Elsevier.

EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A. and STRAUMAN, D. (2002) Correlation and dependency in risk management. In: DEMPSTER, M. A. H. e MOFFATT, H. K. *Risk Management: Value at Risk and Beyond*. Cambridge.

FERNANDEZ, C. and STEEL, M.F.J. (1998). On Bayesian modeling of fat tails and skewness, *J. Am. Statist. Assoc.* 93, 359-371.

GALIANI, S.S. (2003), Copula functions and their application in pricing and risk managing multivariate credit derivative products. Report submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of MSc in Financial Mathematics in the University of London.

GENEST, C. and MACKAY, J. (1986a) Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. *Canad. J. Statist.* 14, 145-159.

- GENEST, C. and MACKAY, J. (1986b) The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals. *Amer. Statist.* 40, 280-285.
- GUMBEL, E.J. (1960). Distributions des valeurs extrêmes en plusieurs dimensions. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris.
- JORION, P. (1997). Value at Risk. New York: McGraw-Hill.
- JOE, H. and XU, J. The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. Vancouver: University of British Columbia, Department of Statistics. 1996. (Technical Report no. 166).
- KOOPMAN, S.J.; LUCAS, A. and MONTEIRO, A. (2008). The multi-state latent factor intensity model for credit rating transitions. *Journal of Econometrics* 142 (1), 399–424.
- KOOPMAN, S.J.; LUCAS, A. and SCHWAAB, B. (2011). Modeling frailty-correlated defaults using many macroeconomic covariates. *Journal of Econometrics*, 162 (2), 312-325.
- KOOPMAN, S.J.; LUCAS, A. and MARCEL, S. (2012). Predicting time-varying parameters with parameter-driven and observation-driven models.
- KUPIEC, P. (1995) Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, v. 2.
- MENDES, B.V. de M. (2005). Computing conditional VaR using time-varying copulas. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 3, n. 2.
- MENDES, B.V. de M. e SOUZA, R.M. (2004) de. Measuring financial risks with copulas. *International Review of Financial Analysis*, Elsevier, v. 13..
- MENDES, B.V.M. e MORETTI, A. (2002). Improving financial risk assessment through dependency. *Statistical Modelling*, v. 2, n. 2.
- MANNER, H. and REZNIKOVA, O. (2009). Time-varying copulas: a Survey
- LAMBERT, P. and LAURENT, S. (2001). Modelling financial time series using GARCH-type models with a skewed Student distribution for the innovations'. *Discussion Paper 01-25*, Institut de Statistique, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium.
- NELSEN, R.B. (1999), An Introduction to Copulas: Lecture Notes in Statistics, vol. 139, Springer-Verlag, New York.
- NELSEN, R.B. (2006) An introduction to copulas. New York: Springer-Verlag.
- NELSON, D.B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica* 59, 347-370.
- NELSON, D.B. (1990), 'Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model', *Econometric Theory* 6, 318-334.

OSVALDO, C.S.F. e FLAVIO A.Z. (2010). Dependência e Cálculo do Valor em Risco (VaR) entre Índices de Mercados Financeiros usando Cópulas Condicionais Tempo-Variantes.

PALARO, H.P. and HOTTA, L.K. (2006), Using conditional copula to estimate value at risk, *Journal of Data Science* 4, 93: 115.

PATTON, A. (2002), Applications of Copula Theory in Financial Econometrics.

PATTON, A. (2004). On the out-of-Sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation. *Journal of Financial Econometrics*, v. 2, n. 1.

PATTON, A.J. (2006). Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review*, v. 47, n. 2.

PATTON, A. (2008), Copula toolbox for Matlab, Department of Economics, University of Oxford, available for download at <http://www.economics.ox.ac.uk/members/andrew.patton/>

RICARDO P.S.S. e PEDRO L.V. P. (2010). Modelando Contágio financeiro através de Cópulas.

SHEPHARD, N. (2005). *Stochastic Volatility: Selected Readings*. Oxford: Oxford University Press. Shephard, N. and M. K. Pitt (1997). Likelihood analysis of non-Gaussian measurement time series. *Biometrika*, 84 (3), 653-67.

SKLAR, A. (1959). Fonctions de répartition et leurs marges. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 8, 229-231.

STRAUMANN, D. and MIKOSCH, T. (2006). Quasi-Maximum-Likelihood Estimation in Conditionally Heteroscedastic Time Series: A Stochastic Recurrence Equations Approach. *Annals of Statistics*, 34 (5), 2449-2495.

## 9

### Apêndice

#### A.1

#### Distribuição Assimétrica

Fernandez e Steel (1998) propôs uma abordagem bastante geral que permite a introdução de assimetria em qualquer distribuição contínua unimodal e simétrica, alterando a escala em cada lado do modelo. A forma geral da função de densidade assimétrica construída a partir de uma distribuição contínua  $H(\cdot)$ .

$$f(z|\xi) = \frac{2}{\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} \left[ f(\xi z)H(-z) + f\left(\frac{z}{\xi}\right)H(z) \right] \quad (88)$$

onde  $0 < \xi < \infty$  é um parâmetro que descreve o grau de assimetria.  $\xi = 1$  produz a distribuição simétrica com  $f(z|\xi = 1) = f(z)$ .  $H(z) = (1 + \text{sen}(z))/2$  é a função peso de passo unitário. A média  $\mu_\xi$  e a variância  $\sigma_\xi$  de  $f(z|\xi)$  depende de  $\xi$  e são obtidas da seguinte forma:

$$\mu_\xi = M_1 \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) \quad (89)$$

$$\sigma_\xi = (M_2 - M_1^2) \left( \xi^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) + 2M_1^2 - M_2 \quad (85)$$

$$M_r = 2 \int_0^\infty x^r \cdot f(x) dx \quad (90)$$

onde  $M_r$  é o  $r$ -ésimo momento de  $f(x)$  nos reais positivos. Se  $f(x)$  é uma distribuição padronizada, então,  $M_2 \equiv 1$ .

Lambert e Laurent [2001], reparametrizaram a densidade de Fernandez e Steel [1998] em função da média e da variância condicional de tal modo que novamente as inovações do processo tenham média e variância unitária. Então, podemos definir a função de densidade assimétrica com média e variância unitária da seguinte forma:

$$f^*(z | \xi\theta) = \frac{2\sigma}{\xi + \frac{1}{\xi}} f^*(z_{\mu_\xi\sigma_\xi} | \theta) \quad (91)$$

$$z_{\mu_\xi\sigma_\xi} = \xi^{\sin(\sigma_\xi z + \mu_\xi)} (\sigma_\xi z + \mu_\xi) \quad (92)$$

onde  $f^*(z | \theta)$  pode ser qualquer função de distribuição simétrica padrão unimodal. Transformando  $z = \frac{z - \mu}{\sigma}$  decorre a distribuição assimétrica, onde os parâmetros tem as seguintes interpretações:

- a)  $\mu$  é a média ou o parâmetro de localização;
- b)  $\sigma$  é o desvio padrão ou o parâmetro de dispersão;
- c)  $0 < \xi < \infty$  é o parâmetro de forma que modela a assimetria;
- d)  $\theta$  é um conjunto opcional de parâmetros que modela ordens de momento mais altos como o  $\nu$  da GED e da t-Student.