

3 Metodologia

3.1 Prêmio de Risco por Volatilidade

É fato conhecido na literatura que a razão de *hedge* do Modelo de Black-Scholes pode ser usado para construir um portfólio protegido sem risco quando a volatilidade é constante e o retorno deste portfólio deve ser igual ao retorno da taxa livre de risco para prevenir lucros provenientes de arbitragem. No entanto, conforme observado por Wiggins (1987), quando a volatilidade é estocástica e o risco de volatilidade está sistematicamente presente, o portfólio protegido não será ausente de risco e não terá retorno igual ao retorno da taxa livre de risco.

Esta parte do estudo tem como base o mesmo procedimento adotado em dois outros trabalhos nunca antes testado ao mercado brasileiro. Primeiro, ao apresentado por Sarwar (2002) que mede o prêmio de risco por volatilidade como o excesso de retorno do portfólio protegido, ou seja, a diferença entre o retorno do portfólio protegido e o retorno livre de risco. O portfólio protegido tem como base a razão de *hedge* do Modelo de Black-Scholes Modificado e é revisado dinamicamente em função de mudanças na volatilidade implícita. Segundo, ao apresentado por Bakshi & Kapadia (2003) que mede o prêmio como uma função direta do ganho (perda) de um portfólio de opção delta-neutro.

Entretanto, este trabalho difere dos originais em alguns pontos. Em relação ao trabalho de Sarwar (2002) a base de dados utilizada é maior. Cada dia de negociação pode haver mais de uma opção negociada com vencimentos e preços de exercícios distintos. Isso faz com que a confiabilidade nas estatísticas seja maior. São aplicados filtros extras nos dados de opção em função da peculiaridade do mercado brasileiro de câmbio em geral muito mais volátil que o mercado de câmbio britânico. E o tempo médio de rebalanceamento é de 1,30 dias já que o rebalanceamento é feito em função da disponibilidade dos dados de opções enquanto que no trabalho original o rebalanceamento é feito de 3 em 3 dias.

Já em relação ao trabalho de Bakshi & Kapadia (2003) foi utilizada a volatilidade implícita para o cálculo da razão de *hedge* no lugar do GARCH(1,1). De acordo com Jorion (1995) o uso da volatilidade implícita gera erros de

estimação viesados menores na razão do *hedge*. Utilizou-se a mesma adaptação proposta por Low & Zhang (2005) no caso aplicado a moeda, ou seja, existe um desconto aplicado ao modelo de Bakshi & Kapadia (2003) em função do rendimento em moeda estrangeira. As taxas de juros domésticas e estrangeiras não são ajustadas ao longo da vida da opção e o portfólio utilizado é composto por comprado em opção e vendido em moeda objeto (Low & Zhang, 2005 utilizam portfólio de *straddle*).

A escolha por estes modelos em vez de um modelo teórico mais explícito de volatilidade estocástica deve-se basicamente a quatro motivos: Primeiro os *market makers* e os *traders* regularmente utilizam variações do Modelo de Black-Scholes com atualizações diárias das volatilidades implícitas conforme sugerem Chestney & Scott (1989) e Nandi (1996). Segundo, a razão de *hedge* do Modelo de Black-Scholes, o delta da opção de moeda, leva a único portfólio protegido que é instantaneamente sem risco. Os modelos de volatilidade estocástica da classe apresentada por Heston (1993) não especificam um único portfólio protegido, embora seja possível determinar tal portfólio através dos modelos de volatilidade estocástica. Terceiro, Chesney & Scott (1989) mostram que o Modelo de Black-Scholes Modificado com revisão diária da volatilidade implícita performa melhor do que seus modelos de volatilidade estocástica em precificar opções de Franco Suíço. E finalmente, modelos de volatilidade estocástica envolvem simulações numéricas custosas do ponto de vista computacional, além de assumirem um processo específico para a série temporal da volatilidade o que pode adicionar mais uma fonte de erro.

A idéia central é que se os preços das opções incorporam um prêmio de risco de volatilidade diferente de zero, então podemos inferir sua existência a partir de retornos de um portfólio com opções dinamicamente protegido contra todos os riscos com exceção do risco de volatilidade.

De acordo com Sawar (2002), o valor do portfólio protegido² a partir do Modelo Black-Scholes modificado no tempo t , Ψ_t , é:

$$\Psi_t = H_t S_t - C_t \quad (03)$$

² Para uma explicação mais detalhada veja Hull (2012) p. 380-385 e Costa (1998) p. 48-50

Onde H_t é a razão de hedge (delta da opção), S_t é a taxa de câmbio a vista BRL/USD e C_t é o preço da opção. A razão de hedge é definida como:

$$H_t = \frac{\partial C}{\partial S} = e^{-r_f T} N(d) \quad (04)$$

Onde,

$$d = \{\ln(S / K) + (r - r_f + (\sigma / 2))T\} / \sqrt{\sigma T} \quad (05)$$

De modo que σ é a volatilidade implícita da taxa a vista de câmbio, K é o preço de exercício, r é a taxa doméstica livre de risco, r_f é a taxa estrangeira livre de risco, T é o tempo para o vencimento da opção e $N(d)$ é a função cumulativa da distribuição normal.

A volatilidade implícita é calculada recursivamente e extraída através da fórmula do Modelo de Black-Sholes Modificado desenvolvido por Garman & Kohlhagen (1983), Grabbe (1983) e Biger & Hull (1983) cuja fórmula para a *call* Européia é:

$$C(S, t) = S_t e^{-r_f(\tau-t)} N(d_1) - K e^{-r(\tau-t)} N(d_2), \quad (06)$$

Onde,
$$d_1 = \frac{\ln(S_t / K) + (r - r_f + 0,5\sigma^2)(\tau - t)}{\sigma\sqrt{\tau - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau - t}$$

$N(.)$ representa a função cumulativa da distribuição normal padrão, K é o preço de exercício e $(\tau - t)$ é o tempo para vencimento da opção.

Como a razão de *hedge* se modifica em função da variação do preço à vista do câmbio, do tempo para o vencimento da opção e da volatilidade, para se manter o portfolio protegido é necessário que se faça o rebalanceamento

frequentemente. Nesse caso, o valor do portfolio protegido em $t + i$ é estimado como:

$$\Psi_{t+i} = H_t S_{t+i} - C_{t+i} \quad (07)$$

O preço da opção C_{t+i} se refere a uma opção em particular no tempo $t + i$ que tem o mesmo preço de exercício e a mesma data de vencimento da opção em C_t , de tal modo que as duas opções serão diferentes apenas no tempo para vencimento por i dias. Tal estrutura mantém o mesmo portfolio em Ψ_t e Ψ_{t+i} e permite determinar mudanças no valor do portfolio protegido Ψ_t ao longo do tempo.

O retorno do portfolio protegido, R_t , é estimado como:

$$R_{t+i} = (\Psi_{t+i} - \Psi_t) / \Psi_t \quad (08)$$

O prêmio de risco por volatilidade, λ , é estimado então como:

$$\lambda_{t+i} = R_{t+i}^{anualizado} - r_{t+i}^{anualizado} \quad (09)$$

Onde r_{t+i} é a taxa de swap DlxPre da BM&F no período $t + i$ e representa uma *proxy* para a taxa doméstica livre de risco.

Apesar da teoria assumir *hedge* em tempo contínuo, na prática o rebalanceamento ocorre em tempo discreto. A posição do portfolio na eq. (07) é reajustada discretamente para estimar o retorno temporal do portfolio sendo o tempo de rebalanceamento realizado de acordo com a disponibilidade de dados para a opção. O tempo médio de rebalanceamento foi de 1,30 dias.

Em Bakshi & Kapadia (2003), se o risco de volatilidade está precificado, então o sinal e a magnitude dos ganhos médios do delta-hedge serão determinados pelo prêmio de risco de volatilidade. Para isso eles descrevem a distribuição dos ganhos em um portfolio comprado em opção, protegido por uma posição vendida na ação objeto, de modo que o ganho líquido do investimento seja a taxa livre de

risco, provando que a teoria vale tanto no mundo com volatilidade constante, quanto no mundo com volatilidade estocástica³. O ganho no portfolio protegido representa o ganho de delta-hedge que é objeto do estudo.

O ganho total do delta-hedge na versão discreta é dado por:

$$\pi_{t,t+\tau} = \max(S_{t+\tau} - k, 0) - C_t - \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_{t_n} (S_{t_{n+1}} - S_{t_n}) - \sum_{n=0}^{N-1} (r C_t - (r - r_f) \Delta_{t_n} S_{t_n}) \frac{\tau}{N} \quad (10)$$

N é o número de vezes que o portfolio de opção é protegido discretamente ao longo da vida da opção, e o *hedge* é rebalanceado nas datas $t_n, n=0,1,2,\dots,N-1$ (definido que $t=t_0$ e $t_n=t+\tau$) com $\tau/N = t_{n+1} - t_n$; $\Delta_{t_n} \equiv \partial C_{t_n} / \partial S_{t_n}$; r e r_f são respectivamente as taxas domésticas e estrangeiras livres de risco. O resultado do portfolio delta-hedge permite avaliar duas hipóteses: Primeiro, se, na média $\pi_{t,t+\tau}$ é diferente de zero, então o risco de volatilidade é precificado no mercado de opções de moeda; Segundo, se, na média $\pi_{t,t+\tau}$ é negativo (positivo), então o prêmio de risco de volatilidade imbutido no mercado de opções de moeda é negativo (positivo).

Low & Zhang (2005) determinam a equação diferencial parcial do preço do *straddle* (f_t) a partir do processo assumido para o preço a vista do câmbio, do preço de um *straddle* Européia de moeda e de argumentos padrões de arbitragem (Cox et al., 1985). Considerando um portfolio delta-hedge dinâmico formado por uma posição comprada de *straddle* e vendida a vista na moeda objeto. A posição a vista é ajustada ao longo da vida do *straddle* (t a $t+\tau$) para proteger contra todos os riscos com exceção do risco de volatilidade. O resultado deste portfolio delta-hedge dinâmico é dado por:

$$E(\Pi_{t,t+\tau}) = \int_t^{t+\tau} E(\lambda_u \frac{\partial f_u}{\partial \sigma_u}) du \quad (11)$$

³ Bakshi & Kapadia (2003) apresentam uma prova com rigor matemático maior do que Sarwar (2002).

A implicação da eq. (11) é que se o risco de volatilidade não está precificado, ou seja, $\lambda_u=0$, então o (a) ganho (perda) médio esperado do portfólio delta-hedge será zero. Se o risco de volatilidade está precificado, ou seja, $\lambda_u \neq 0$, então o (a) ganho (perda) médio esperado do portfólio será diferente de zero. Devido ao fato que o vega do portfólio, $\partial f_u / \partial \sigma_u$, é positivo, então o sinal do prêmio de risco de volatilidade, λ_u , determina se a posição média do portfólio delta-hedge é positivo ou negativo.

3.2

Prêmio de Risco Cambial pela Teoria de Paridade de Juros

Esta parte do trabalho é similar ao procedimento adotado por Li et al. (2012). A inovação aplicada aqui foi a adição do risco país na equação econométrica em função da adaptação para a CIP proposta por Garcia & Olivares (2001) uma vez que a premissa da CIP para o Brasil não se verifica, suposição considerada no trabalho de Li et al. (2012).

A CIP implica que o diferencial de taxas de juros doméstico e estrangeiro ($i_{t,k} - i_{t,k}^*$) deve ser igual ao prêmio a termo, já a UIP implica que o diferencial de taxas de juros deve ser igual a mudança esperada na taxa de câmbio:

$$E_t(s_{t+k} - s_t) = (f_{t+k} - s_t) = (i_{t,k} - i_{t,k}^*) \quad (12)$$

s_t é o logaritmo da taxa à vista de câmbio no tempo t e $f_{t,k}$ é o logaritmo do futuro do câmbio em t para entrega em $t+k$. $E_t(.)$ representa o operador matemático representativo de expectativa. Assim, a taxa esperada de apreciação (depreciação) deve ser igual ao prêmio a termo, $(f_{t,k} - s_t)$, ou ao diferencial de taxas de juros. Para que a UIP seja observado no mercado é necessário que a CIP também se verifique, ou seja, a CIP é condição necessária mas não suficiente para se verificar a UIP.

Conforme Domowitz & Hakkio (1985), considerando expectativas racionais, em geral modelos que procuram por evidências de prêmio de risco para a UIP são da forma:

$$s_{t+k} - s_t = \alpha + \beta(f_{t,k} - s_t) + RP_t + \varepsilon_{t,k} \quad (13)$$

Diversos modelos estimados sem o prêmio de risco RP encontram coeficientes negativos quando testam a hipótese de UIP de $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ implicando que $\text{cov}(E_t(s_{t+k} - s_t); RP_t) < 0$ e que $\text{Var}(RP_t) > \text{Var}(E_t(s_{t+k} - s_t))$.

De acordo com a metodologia proposta por Fama (1984) a taxa de câmbio no mercado a termo, f_t , pode ser decomposta em uma taxa esperada e um prêmio de risco:

$$f_t = E_t(s_{t+1}) + p_t \quad (14)$$

Todas as variáveis estão na forma de logaritmos, e o valor esperado da taxa spot futura, $E_t(s_{t+1})$, é a previsão racional, condicional a toda a informação disponível em t. A eq. (14) é uma definição particular da componente de prêmio da taxa a termo, porém não é a única possível.

A fórmula de apreçamento de um contrato futuro de moedas, pela teoria de não-arbitragem de acordo com Hull (2012, cap. 5) é:

$$F = S e^{(r-r^*)(T-t)} \quad (15)$$

Onde F é o preço futuro ($f_t = \log F_t$), S é a taxa à vista ($s_t = \log S_t$), r é a taxa de juros doméstica, r^* é a taxa de juros externa (ambas com capitalização contínua) e $(T-t)$ é o tempo para vencimento anualizado.

Aplicando logaritmos:

$$f_t = s_t + (r_t - r_t^*)(T - t) \quad (16)$$

A eq. (15) é usada em finanças e equivale a condição de paridade coberta da taxa de juros (CIP), usada em macroeconomia aberta. A evidência empírica internacional mostra que tal condição vale para economias desenvolvidas, isto é,

tanto faz para um investidor comprar títulos denominados em sua própria moeda no seu próprio país ou no país estrangeiro (Bansal & Dahlquist, 2000). A CIP é uma teoria de não-arbitragem e que facilmente verificada pelo mercado deveria ser ajustada ao longo do tempo não proporcionando lucros não usuais para o mercado.

Introduzindo o rendimento de conveniência (y), chamado de risco país conforme adaptação proposta por Garcia & Olivares (2001) a eq. (15) se transforma em:

$$F = S e^{(r-r^*-y)(T-t)} \quad (17)$$

Aplicando logaritmos:

$$f_t = s_t + (r_t - r_t^* - y_t)(T - t) \quad (18)$$

Com base na eq. (18) e na eq. (14) pode-se escrever:

$$s_t + (r_t - r_t^* - y_t)(T - t) = E_t(s_{t+1}) + p_t \quad (19)$$

Considerando expectativas racionais:

$$s_{t+1} = E_t(s_{t+1}) + \zeta_{t+1} \quad (20)$$

Onde ζ_{t+1} é ruído branco.

Com as eqs. (19) e (20) juntamente com a idéia proposta por Domowitz & Hakkio (1985) que investigam o prêmio de risco no mercado cambial com base na variância condicional dos erros de previsões do mercado, o teste empírico para o prêmio de risco cambial pode ser expresso como:

$$s_{t+1} - s_t = \alpha + \beta(r_t - r_t^* - y_t)(T - t) + \gamma\sigma_{t+1} + \varepsilon_{t+1} \quad (21)$$

Este modelo econométrico equivale incluir na teoria descoberta de taxa de juros (UIP) um prêmio de risco. A UIP introduz incerteza ao modelo macroeconômico e de finanças uma vez que trabalha com expectativas no lugar do futuro do dólar (CIP), porém a introdução da incerteza em modelos de investimentos adiciona certo grau de complexidade, mas também de realismo.

Assim como em Berk & Knot (2001) e Melander (2009) foi adicionado o desvio padrão condicional como prêmio de risco variante no tempo na equação da média para construir o modelo GARCH-M. Dessa forma a eq. (21) na versão GARCH-M pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} s_{t+1} - s_t &= \alpha + \beta(r_t - r_t^* - y_t)(T - t) + \gamma\sigma_{t+1} + \varepsilon_{t+1} \\ \sigma_{t+1}^2 &= \delta_0 + \phi_1\varepsilon_t^2 + \phi_2\sigma_t^2 \end{aligned} \quad (22)$$

A variável σ_{t+1} é componente condicional do desvio padrão do termo de erro e representa o prêmio de risco variante no tempo que afeta diretamente a taxa de câmbio. O prêmio de risco tem um componente constante (α) e um componente variante no tempo (σ_t^2), o que é bastante razoável já que se a aversão do risco do investidor se altera ao longo do tempo o mesmo comportamento deve ser previsto para o prêmio de risco. Se ambos α e γ são não significativos e portanto iguais a zero, então não há prêmio de risco. Se $\alpha \neq 0$ mas $\gamma = 0$, então existe um prêmio de risco constante. Somente quando $\gamma \neq 0$ não há prêmio de risco variante no tempo.

Entretanto, o modelo econométrico final a ser testado é uma combinação do modelo Componente GARCH-M com o modelo assimétrico TARCH⁴, que introduz efeitos assimétricos na equação transitória:

$$\begin{aligned} s_{t+1} - s_t &= \alpha + \beta(r_t - r_t^* - y_t)(T - t) + \gamma\sigma_{t+1} + \varepsilon_{t+1} \\ q_{t+1} &= \phi_1 + \phi_2(q_t - \phi_1) + \phi_3(\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2) \\ \sigma_{t+1}^2 &= q_{t+1} + \phi_4(\varepsilon_t^2 - q_t) + \phi_5 D_t(\varepsilon_t^2 - q_t) + \phi_6(\sigma_t^2 - q_t) \end{aligned} \quad (23)$$

⁴ Introduzidos independentemente por Glosten et al. (1993) e Zakoian (1994).

Onde D_t é uma variável *dummy* para capturar efeitos assimétricos. $D_t = 1$ para $\varepsilon_t < 0$ indicando a presença de efeito transitório alavancado na variância condicional (apreciação não esperada na taxa de câmbio) e $D_t = 0$ caso contrário.

q_{t+1} é o componente de longo prazo da variância condicional que reflete choques nos fundamentos econômicos e converge para o nível de volatilidade de longo prazo invariante no tempo ϕ_1 com uma magnitude ϕ_2 .

$\sigma_{t+1}^2 - q_{t+1}$ é o componente de curto prazo que é mais volátil e direcionado pelo sentimento de mercado. O coeficiente AR(1) ϕ_2 da volatilidade permanente no componente de longo prazo deve exceder os coeficientes ($\phi_4 + \phi_6$) no componente transitório o que implica num modelo estável e que a volatilidade de curto prazo converge mais rápido do que a de longo prazo.

A distribuição do erro é modelado como uma distribuição generalizada de erro (sigla em inglês GED⁵), $\varepsilon_{t+1}|\Phi_t \sim \text{GED}(0, h_{t+1}, \nu)$, que permite incluir a curtose - muito comum em dados financeiros inclusive em taxas de câmbio. Nelson (1991) utiliza essa distribuição para modelar os retornos no mercado de ações, e Hsieh (1989) para modelar a distribuição da taxa de câmbio.

O modelo CGARCH utilizado aqui é o mesmo que proposto por Engle & Lee (1999). Esse modelo garante que a volatilidade não é constante no longo prazo e decompõe a volatilidade do prêmio de risco em dois componentes, uma tendência de longo prazo e desvios de curto prazo em relação a essa tendência. Separar o prêmio de risco em permanente e transitório nos permite entender melhor as fontes de incerteza, uma vez que as decisões de investimentos dependem muito se esta incerteza é permanente ou transitória (Byrne & Davis, 2005).

⁵ GED é uma generalização da distribuição normal. Ela inclui a distribuição normal se o parâmetro ν tem valor 2. ν é uma medida de grossura de cauda. Se $\nu < 2$ resulta em uma distribuição de caudas grossas.

3.3 Dados

O trabalho possui duas análises na determinação do prêmio de risco no câmbio brasileiro. Cada parte da análise empírica é feita com dados e períodos distintos.

Na análise do prêmio de risco por volatilidade utiliza-se dados diários de opções de compra européia sobre disponível de dólar negociado na BM&F durante o período de Janeiro de 2000 até Setembro de 2012 totalizando 8.385 observações diárias.

Para determinar a volatilidade implícita, conforme eq. (06), das opções de compra e para construir o portfólio protegido são usados os parâmetros de *input* para o modelo Black-Scholes modificado tais como preço a vista da taxa de câmbio, preço de exercício da *call*, taxa doméstica e estrangeira livre de risco, tempo para o vencimento e o preço da opção (cotação média).

A *proxy* para a taxa doméstica livre risco utilizada foi a taxa implícita no mercado de Swap DIXPRE na BM&F para o período até o vencimento da opção anualizada. Essa taxa apresentou maior sensibilidade as expectativas de mercado do que a taxa Selic⁶. Já para a taxa estrangeira livre de risco utilizou-se a taxa do *Federal Funds Rate*.

Para excluir registros de opções não representativos do mercado, as opções de compra que caírem nas seguintes categorias são desconsideradas para o estudo:

1. Opções de compra que violam a condição de fronteira para *call* européia, ou seja, $C < Se^{-r_f T} - Ke^{-r T}$;
2. Opções cujo preço negociado seja menor que R\$ 0,001 (veja contrato de *call* de dólar na BM&F que estipula que o prêmio da opção deve ser expresso em reais por US\$1.000, com até três casas decimais.);
3. Opções com tempo para vencimento menor que 7 dias úteis e maior ou igual a 30 dias corridos⁷.

⁶ No dia 04/11/2002, período de turbulência devido a eleição presidencial (efeito Lula) o *swap* DIXPRE apontava uma taxa de juros de 30,06% a.a. enquanto a Selic se manteve em 21,00% a.a.;

⁷ Hull & White (1987) verificaram que frequentemente o modelo Black-Scholes sobreavalia os preços das opções e a magnitude dessa sobreavaliação aumenta com o aumento do tempo para vencimento. Já Costa (1998, p. 70) argumenta que para opções próximas do exercício os parâmetros do modelo Black-Scholes escoam por um “buraco negro” em que as quantidades

Já na análise do prêmio de risco cambial utilizou-se amostra com dados mensais da taxa a vista e futura de 1 mês de câmbio BRL/USD, do diferencial de taxa de juros básica brasileira e americana (respectivamente Selic e *Fed Funds*) e do risco país medido pelo EMBI+ Risco Brasil calculado pelo JP Morgan para o período de Julho/1994 até Agosto/2012 com um total de 218 observações mensais.

Alguns pesquisadores sugerem o uso de amostras de no mínimo 200 ou mais para obter parâmetros confiáveis nos modelos GARCH (veja, Bollerslev et al., 1994, p. 2983). Entretanto, não existe consenso quanto ao número mínimo sugerido. De modo geral espera-se inferências estatísticas mais confiáveis com o aumento do tamanho da amostra, uma vez que os testes estatísticos tendem a aproximações assintóticas.