

2 Revisão da Literatura

2.1. Volatilidade Estocástica em Opções

De modo geral, se a função densidade de probabilidade neutra a risco do preço futuro de um ativo é $f(S_T)$, o preço de exercício é K , o tempo para vencimento é T , então o preço de uma opção de compra Européia pode ser escrito como:

$$c = e^{-rT} \int_K^{\text{inf}} (S_T - K) f(S_T) dS_T \quad (01)$$

O desafio está na derivação de $f(S_T)$ que para ser devidamente caracterizada precisa-se da média e da variância da distribuição futura do ativo objeto do derivativo. Daí surgem os principais problemas como suposições simplistas de volatilidade constante, contrapondo-se a suposições mais realistas mas de difícil solução como volatilidade estocástica.

Na literatura existem diversos trabalhos que documentam a presença de anomalias tanto no modelo Black-Scholes (1973) quanto no modelo Black-Scholes modificado. Estes modelos geram vieses nos preços ao longo da proximidade do dinheiro das opções (*moneyness*) e do tempo para vencimento, e apresentam volatilidade implícita com *smiles*. Alguns destes vieses incluem subavaliação de opções fora-do-dinheiro (veja Black, 1975; Gultekin et al., 1982), subavaliação de opções próximas do vencimento (veja Black, 1975; Whaley, 1982), e a curva da volatilidade implícita em forma de U em relação ao preço de exercício (veja Rubinstein, 1985; Sheikh, 1991).

Alguns pesquisadores argumentam que estes vieses nos preços de opções de moeda e de ações têm origem na suposição de lognormalidade na distribuição dos retornos e de variância constante do Modelo de Black-Scholes (1973). Dessa maneira o problema de volatilidade estocástica na precificação de opções tem sido objeto de estudo de muitos participantes de mercado e de acadêmicos.

Entre eles, Merton (1976) que examina o caso em que o preço segue um processo com saltos randômicos; Johnson & Shanno (1987) obtêm alguns

resultados numéricos usando simulação e produz argumentos para explicar os vieses observados por Rubinstein (1985); Hull & White (1987), Scott(1987) e Wiggins (1987) que consideram o preço de risco de volatilidade igual a zero para simplificar a precificação de opções em modelos de volatilidade estocástica; e Melino & Turnbull (1990) que argumentam que modelos com preços não positivos para o risco de volatilidade explicam melhor os preços das opções de moeda do que modelos com volatilidade constante.

Merville & Piepstra (1989) sugerem um prêmio de risco não-zero para o risco de volatilidade pois descobrem que as volatilidades implícitas de ações individuais são correlacionadas com as ações e com a volatilidade do mercado ao longo do tempo.

Lamoureux & Lastrapes (1993) sugerem que o prêmio de risco da variância seja variante no tempo e que modelos de volatilidade estocástica, que falham em modelar explicitamente o prêmio de risco do processo da variância, devem conduzir a rejeição da hipótese nula conjunta de eficiência de mercado e da validade do modelo de volatilidade estocástica.

Entretanto, os trabalhos anteriores possuem a desvantagem de que seus modelos não fornecem soluções fechadas e demandam extensivo uso de técnicas numéricas para solucionar equações diferenciais parciais de duas dimensões. Heston (1993) apresenta um modelo de volatilidade estocástica que não tem como base a fórmula de Black-Scholes. Este modelo permite precificar opção de compra Européia através de uma solução fechada quando o ativo objeto possui correlação com a volatilidade, e permite incorporar taxas de juros estocástica. Dessa forma pode ser aplicado em opções de títulos e de moedas.

Guo (1998) determina o prêmio de risco da volatilidade usando os preços de opções de dólar/marco e o modelo de volatilidade estocástica proposto por Heston (1993). O autor encontra evidências de um prêmio de risco negativo que é consistente com a idéia de que investidores avessos ao risco pagariam prêmio positivo por risco de volatilidade, causando dessa forma preço de opções maiores.

Bakshi & Kapadia (2003) propõem um método de investigação não-paramétrico do prêmio de risco de volatilidade no mercado de opções de índice de ações. Sob o ponto de vista de precificação no mundo estocástico, eles provam que se o risco de volatilidade está precificado no mercado de opções, então o

retorno de uma opção de compra de índice de ações em um portfolio delta-hedge dinâmico está matematicamente relacionado ao prêmio de risco de volatilidade. Este método permite uma investigação sem impor restrições ao núcleo do preço ou alguma suposição acerca do processo da volatilidade. Eles mostram que o risco de volatilidade está precificado no mercado de opções de índice S&P 500 e que este prêmio tem sinal negativo.

Low & Zhang (2005) investigam o prêmio de risco de volatilidade no mercado de opções de moeda de balcão. Eles aplicam a metodologia proposta por Bakshi & Kapadia (2003) e aplicam para opções no-dinheiro em um portfolio contendo *straddle* delta-neutros que consiste na combinação de uma *call* Européia com uma *put* Européia com mesmo tempo para vencimento e preço de exercício na mesma moeda. Eles descobrem prêmio de risco negativo para a Libra, Euro, Iene e Franco Suíço e mais importante, eles descobrem a existência nestes mercados de uma estrutura a termo de prêmio de risco de volatilidade.

2.2.

Teoria de Paridade de Juros e Modelos da Família GARCH

A visão dominante surgida através de pesquisas a partir da década de 80 foi de que o câmbio seja um ativo financeiro. No contexto de precificação de ativos, taxas de câmbio refletem valores esperados futuros de variáveis exógenas descontadas a valor presente. Esta visão é similar a idéia de que o preço de um ativo reflete o valor presente do fluxo de caixa futuro esperado. Uma segunda conclusão é que o preço de uma moeda é determinado por sua demanda como ativo financeiro em relação a outras moedas. Desse modo estudos que unem teoria de mercado de capitais com macroeconomia foram desenvolvidos na década de 80 na tentativa de explicar os complexos movimentos das taxas de câmbio.

Os primeiros estudos têm como base modelos de otimização de equilíbrio dinâmico (Lucas, 1982). Nestes modelos o prêmio de risco depende da covariância condicional das taxas intertemporais marginais de substituição, e portanto implicitamente da concavidade da função utilidade e da função densidade de probabilidade de processos exôgenos. Isto faz com que testes empíricos sejam

bastante complexos. Por isso, Hodrick & Srivastava (1984) testa modelos mais simples do ponto de vista teórico.

Lucas (1982) propõe um modelo de equilíbrio dinâmico para determinar preços, taxa de juros e câmbio em um mundo com dois países sujeitos a choques estocásticos de dotação e instabilidade monetária. Seu trabalho é de suma importância pois dá início a integração entre teoria monetária e teoria geral de equilíbrio financeiro.

Os trabalhos seminais de Hansen & Hodrick (1980), Bilson (1981) e Fama (1984) fornecem evidências de que a taxa a termo de câmbio é um estimador viesado do futuro da taxa a vista de câmbio, observando que moedas com alta taxa de juros tendem não a depreciar como previsto pela Teoria de Paridade Descoberta de Juros (daqui para frente referida pela sua sigla em inglês – UIP), mas apreciar. Isto é inconsistente com a teoria de não-arbitragem e tem sido confirmado por extensiva literatura para diferentes países e períodos (*forward premium puzzle*). Portanto, modelos de apereçamentos de ativos com prêmio de risco variante no tempo são propostos com o objetivo de explicar esse comportamento na teoria macroeconômica.

Segundo Levich (1983) o processo de formação de expectativas pode contribuir para a volatilidade da taxa de câmbio. De acordo com a visão de precificação de ativos, se os participantes de mercado classificam a inovação recente como permanente e extrapola seus impactos para o futuro, isso acaba afetando seus preços. Este processo de extrapolação pode ser irracional e, portanto, não uma característica permanente do processo da taxa de câmbio.

Ainda em Levich (1983) o autor cita alguns modelos de determinação da taxa de câmbio propostos ao longo dos anos. Entre eles: paridade do poder de compra (PPP), teoria monetária, substituição de moeda, abordagem de portfolio balanceado, dinâmicas de taxa de câmbio e abordagem de ativos e o papel das notícias. Na abordagem de ativos e o papel das notícias, a taxa a vista do câmbio hoje depende de nossa expectativa atual de todas variáveis (z_{t+k}) que influenciam a taxa de câmbio (demanda por moeda doméstica e estrangeira, renda doméstica e estrangeira entre outras) de hoje até o futuro assumindo que a paridade coberta de taxas de juros (daqui para frente referida pela sua sigla em inglês – CIP) se

sustenta e que a taxa futura do câmbio é igual a expectativa da taxa a vista de câmbio sem o prêmio descontada a valor presente, conforme a eq. (02).

$$s_t = \frac{1}{1 + \varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^k E(z_{t+k}) \quad (02)$$

Duas implicações diretas da eq. (02): primeiro a taxa de câmbio atual reflete o que se sabe ou se espera do futuro. Sem um modelo para z 's, esta relação não tem muito utilidade para previsão; segundo a taxa de câmbio se altera somente em resposta a eventos não antecipados.

De modo geral não há consenso em explicar o *forward premium puzzle*. Explicações possíveis do desvio da teoria em relação a UIP incluem falha na expectativa racional (Frankel & Froot, 1990) e prêmio de risco variável em função do tempo, sendo o prêmio de risco, excluindo problemas de má especificação de modelos, uma das mais frequentes razões citadas em diversos estudos (veja, Froot & Thaler, 1990; McCallum, 1994; Chinn & Meredith, 2004).

Fama (1984) argumenta que prêmio de risco variante no tempo pode explicar esta falha somente se (1) prêmio de risco for mais volátil do que mudanças esperadas na taxa futura de câmbio, e (2) prêmio de risco for negativamente correlacionado com o tamanho da depreciação esperada.

Hodrick & Srivastava (1984) examinam a determinação do prêmio de risco no mercado futuro de câmbio. Eles encontram evidência de heterocedasticidade e que a expectativa condicional do prêmio de risco é uma função não-linear do prêmio a termo.

Domowitz & Hakkio (1985) investigam a existência do prêmio de risco no mercado de taxa de câmbio com base na variância condicional dos erros de previsão de mercado. Eles encontram evidência de prêmio de risco constante diferente de zero no mercado de câmbio, para algumas, mas não todas moedas e pouco suporte de que a variância condicional dos erros de previsão de mercado seja o único determinante do prêmio de risco. De certo modo a modelagem de prêmio de risco variante no tempo no mercado futuro de câmbio usando ARCH-M univariado não teve muito sucesso.

Frankel & Chinn (1993) a partir de dados de pesquisas para 17 diferentes moedas acham evidência de rejeição da hipótese de que toda variação no desconto a termo deve-se a variação do prêmio de risco. Entretanto, eles acham mais evidência em favor da presença de prêmio de risco do que em testes anteriores para cinco maiores moedas.

Segundo Engel (1996) e Flood & Rose (1996) a anomalia do prêmio a termo pode ser definido como a apreciação de moeda do país com taxa de juros maior em vez de depreciação conforme previsto pela teoria. A anomalia é frequentemente expressa em termos de regressão do retornos a vista sobre o diferencial de taxa de juros tendo coeficiente de inclinação negativa. Froot & Thaler (1990) chegam a um valor médio estimado da inclinação de -0,88. Esta anomalia é considerada um dos mais importantes paradoxos em finanças internacionais.

Ekvall et al. (1997) determinam uma fórmula generalizada para o modelo de Garman-Kohlhagen (GK) no qual considera que o processo que regula a taxa de câmbio possui reversão à média, e que a UIP se verifica. A idéia básica de reversão à média é suportada por diversos pontos de vistas, entre eles por teorias de determinação de taxa de câmbio entre elas a de *overshooting*. De acordo com essa teoria, proposta inicialmente por Dornbush (1976), os mercados financeiros se ajustam instantaneamente, e a UIP se verifica. No longo prazo o equilíbrio no mercado de câmbio é determinado pelo estoque doméstico de moeda, pelo nível da taxa de juros, e pela renda nacional relativa as mesmas quantidades na economia externa. Porém no curto prazo ela pode desviar do equilíbrio, devido a morosidade no qual os preços dos bens reagem as perturbações.

Garcia & Olivares (2001) mostram que não somente a CIP mas também a UIP não se verificam no mercado brasileiro no período do Plano Real. Eles identificaram prêmio de risco cambial variável no tempo altamente correlacionado com medidas de risco país (Brasil) e sugerem que ambos riscos (cambial e país) devem apresentar fatores causais relacionados aos fundamentos macroeconômicos.

Sarno et al. (2012) aplicam modelo bayesiano e extraem prêmio de risco endogeneamente da condição de não-arbitragem relacionando as estruturas a termo de taxas de juros e de taxas de câmbio. Os prêmios de risco gerados

fornecem previsões não-viesadas para o excesso de retorno de moeda e estão relacionados a aversão global ao risco, ao ciclo de negócio e a variáveis fundamentais da taxa de câmbio.

Ito et al. (2012) com o uso de dados de alta frequência encontram presença de oportunidade de arbitragem livre de risco (*free lunch*) no mercado de câmbio em um pequeno intervalo de tempo, geralmente duram apenas alguns segundos, indo contra a idéia de eficiência de mercado. Tais oportunidades tendem a ocorrer quando os mercados são ativos e voláteis na forma de arbitragem triangular de moedas e *spreads* negativos em pares de moedas.

O trabalho seminal de Engle (1982) e em seguida de Bollerslev (1986) introduzem, respectivamente, uma nova classe de processo estocástico chamado autoregressivo heterocedástico condicional (ARCH) e sua forma generalizada (GARCH) na qual a variância ao longo do tempo depende do passado e que possuem propriedades estatísticas¹ interessantes para modelar risco e incerteza em economias.

Engle et al. (1987) propõem modelo ARCH-M onde a variância condicional é uma determinante do prêmio de risco, e assim são incluídas na equação de previsão do retorno médio. Os autores concluem que o prêmio de risco não é invariante no tempo; ao contrário ele varia sistematicamente com a percepção dos agentes a incerteza associada.

O modelo GARCH-M introduzido por Bollerslev et al. (1988) foi desenvolvido para capturar a relação retorno e risco, tal como o CAPM. As aplicações dos modelos GARCH-M para ações, taxas de juros e câmbio pode ser encontrada em Bollerslev et al. (1992).

Hsieh (1989) estima modelos ARCH e GARCH para cinco diferentes moedas e conclui que estes modelos podem remover toda heterocedasticidade na mudança do preço em todas moedas da amostra.

Berk & Knot (2001) seguem o trabalho seminal de Engle et al. (1987) introduzindo o prêmio de risco na UIP com o uso de um modelo ARCH.

¹ Modelos GARCH capturam certas características comuns a séries temporais financeiras tais como caudas gordas, *clustering* de volatilidade (grandes mudanças são seguidas por grandes mudanças. Grandes choques persistem.) e efeito alavancagem (volatilidade aumenta em resposta a retornos menores que o esperado muito comum em ações mas não tanto em câmbio).

Bansal & Dahlquist (2000) acham que a correlação negativa entre a taxa de depreciação esperada e o prêmio de risco está presente somente em países desenvolvidos (uma das conclusões das equações fundamentais de Fama (1984), isto é, $\beta_2 < 0$), enquanto em economias emergentes o comum é obter estimativas positivas. Garcia & Olivares (2001) também encontram correlação positiva para o caso do Brasil do Plano Real. Evidências de Bansal & Dahlquist (2000) indicam que países com baixa renda per capita, alta volatilidade da inflação e baixa classificação de crédito são os que têm as maiores estimativas para β_2 .

Pramor & Tamirisa (2006) analisam a volatilidade da taxa de câmbio através do uso do modelo CGARCH e concluem que os dois componentes da volatilidade são influenciados por diferentes fatores: a tendência de longo prazo da volatilidade como reflexo de choques aos fundamentos econômicos, e a volatilidade transitória pelo sentimento do mercado e posições tomadas no curto prazo.

Guo & Neely (2008) utilizam o modelo CGARCH para distinguir os efeitos dos componentes da volatilidade de curto prazo e de longo prazo nos preços de ações e os resultados são melhores do que o modelo GARCH padrão, e concluem que a volatilidade de longo prazo é uma determinante mais importante do prêmio do que a de curto prazo na maioria dos mercados internacionais.

Melander (2009) testa o prêmio de risco na condição do UIP através de um modelo GARCH-M para dados da Bolívia e fornece evidências de que UIP não se verifica, porém os desvios em relação a UIP foram menores quando se introduziu o prêmio de risco.

Li et al.(2012) utilizam o modelo CGARCH-M aplicada em diferentes países tanto para países desenvolvidos como para países emergentes, inclusive para o Brasil. De modo geral eles defendem que adicionando prêmio de risco na equação de UIP os resultados encontrados são mais significativos do que considerando modelo original básico de mínimo quadrado ordinário (MQO),e que adicionando somente o prêmio de risco na equação não resolve completamente o UIP *puzzle*.