

2

Animação com Harmônicos de Variedade

Hoje em dia, podemos encontrar vários métodos de visualização de música, porém muito poucos relacionam a música à deformações (ou até movimentos rígidos) de modelos tridimensionais. Neste capítulo introduzimos as ferramentas necessárias para correlacionar as deformações de uma malha às frequências da música. O passo inicial para representar uma deformação no domínio da frequência é a Transformada de Fourier.

2.1

Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier contínua expressa uma função real integrável definida no domínio do tempo $s(t)$ como uma função definida no domínio de frequências $\tilde{s}(\xi)$, pela fórmula:

$$\tilde{s}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2\pi i \xi t} dt, \quad (2-1)$$

Ela decompõe a função $s(t)$ na base das funções exponenciais complexas $e^{-2\pi i \xi t}$, que chamamos de *harmônicas*. A Transformada de Fourier é um operador linear inversível. A transformada inversa, isto é, a transformada que leva funções definidas no domínio da frequência de volta em funções definidas no domínio do tempo, é dada pela fórmula:

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{s}(-\xi) e^{2\pi i \xi t} dt, \quad (2-2)$$

De forma similar ao modo como pontos são descritos no espaço Euclidiano como combinação linear de vetores de uma base, a Transformada de Fourier descreve uma onda como combinação linear das harmônicas. A figura 2.1 ilustra a decomposição de um sinal em suas respectivas bases harmônicas.

De forma análoga, podemos definir uma Transformada de Fourier para funções definidas num intervalo fechado e limitado da reta. Estamos interessados em funções periódicas cuja transformada pode ser adequadamente representada por uma expressão mais simples que a equação (2-1). Para tais funções a Transformada de Fourier se representa como um vetor no \mathbb{R}^∞ , no qual cada entrada corresponde a uma frequência. Seja $\xi \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ uma frequência. A ξ -

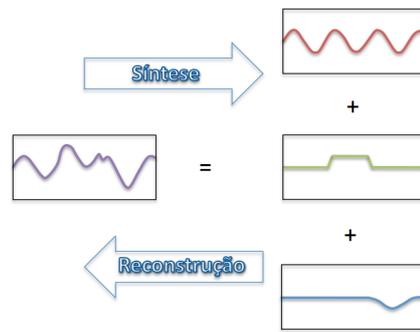


Figura 2.1: Decomposição e reconstrução de sinais.

ésima entrada da Transformada de Fourier da função $s(t)$, definida no intervalo $[0, 1]$ da reta por simplicidade, se escreve como:

$$\tilde{s}(\xi) = \int_0^1 s(t)e^{-2\pi i \xi t} dt. \tag{2-3}$$

A fórmula da transformada inversa se escreve, neste caso:

$$s(t) = \sum_{\xi=0}^{+\infty} \tilde{s}(\xi)e^{2\pi i \xi t} dt \tag{2-4}$$

Considere, por exemplo, um sinal de som como a função de entrada periódica $s(t)$, exibida na figura 2.2. O som pode ser representado como uma função do tempo, que a cada $t \in \mathbb{R}$ associa uma amplitude $s(t) \in \mathbb{R}$. A Transformada de Fourier aplicada a função de som $s(t)$ nos diz quanto de cada frequência está presente no som.

Muitas vezes os harmônicos são representados como:

$$H_{\xi}(t) = e^{2\pi i \xi t}. \tag{2-5}$$

Usando a equação (2-5), podemos reescrever a equação (2-3) na forma $\tilde{s}(\xi) =$

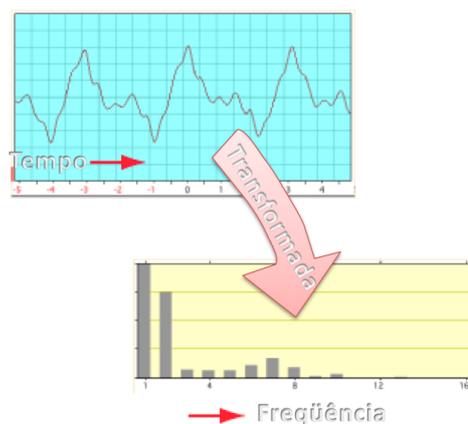


Figura 2.2: Conversão do domínio de tempo, no domínio de frequências pela Transformada de Fourier.

$\langle s, H_\xi \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno no espaço das funções periódicas. Nestas condições, as funções H_ξ são chamadas de *harmônicos do círculo*. Elas são uma base ortonormal para as funções periódicas do intervalo $[0, 1]$ (o círculo), pois satisfazem: $\langle H_\xi, H_\xi \rangle = 1$, $\langle H_l, H_m \rangle = 0$ para $l \neq m$ e, como é bem conhecido, qualquer função periódica do $[0, 1]$ se representa como combinação linear das H_ξ (série de Fourier). Na próxima seção discutiremos como essas noções se generalizam em malhas.

2.2

Harmônicos de Variedades

Nesta seção faremos a construção dos Harmônicos de Variedade seguindo Vallet e Lévy(29). Esta construção depende de resultados de cálculo exterior discreto que, por brevidade, apenas enunciaremos. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências Desbrun et al. (8) e Arnold et al. (4).

Usando as propriedades da Transformada de Fourier no círculo, enunciadas na seção 2.1, observamos que podemos sempre representar uma função periódica como combinação linear (superposição) dos harmônicos do círculo; explicitando assim a natureza da função considerada no que diz respeito as frequências que ela contém.

Infelizmente, não é conhecido processo capaz de adaptar a Transformada de Fourier diretamente para variedades gerais, ou malhas (que é o que nos interessa). Contudo, é conhecido que pode-se chegar aos harmônicos do círculo de maneiras distintas da Transformada de Fourier, e justamente é uma destas construções alternativas que se adapta bem a construção de harmônicos de malhas. A observação crucial é que os harmônicos do círculo satisfazem a seguinte igualdade:

$$-\frac{d^2}{dx^2}H_\xi(x) = \xi^2 H_\xi(x), \quad (2-6)$$

ou seja, eles são autofunções (autovetores) do operador Laplaciano no círculo. Da teoria de operadores lineares auto-adjuntos, sabemos que tais autovetores devem formar uma base ortonormal do espaço em questão (23). Além disso, os autovetores do operador Laplaciano fornecem, naturalmente, a informação de quanto uma função “está variando”. Estes, os autovetores, do operador Laplaciano são os candidatos naturais a substitutos para malhas dos harmônicos do círculo. É preciso, primeiro, construir um produto interno e, a partir deste, um operador Laplaciano generalizado que seja adequado para malhas. Neste ponto faz-se uso do cálculo exterior discreto.

2.2.1

Base Harmônica para variedades discretas

Uma malha pode ser mais formalmente definida como um complexo simplicial, o que faremos a seguir. Um k -simplexo que chamaremos de s_k é definido como o fecho convexo de $k + 1$ pontos no \mathbb{R}^m , para $m \geq k + 1$. Por exemplo: os simplexos de ordem 0, 1 e 2 são respectivamente: pontos, arestas e triângulos. Para nossos fins, estes serão os únicos simplexos considerados. Definimos uma malha como um complexo simplicial bidimensional S , isto é, uma coleção de n_k k -simplexos, com $k \in 0, 1, 2$ com condições que a tornem uma variedade topológica (no sentido usual). Uma k -forma discreta em S , que denotaremos por ψ^k , é definida pela atribuição de um valor real $\psi^k(s_k)$ a cada simplexo k -dimensional orientado. O conjunto das formas lineares alternadas discretas de grau k em S , é definido como $\Psi^k(S)$. Atribuindo uma numeração adequada aos k simplexos, qualquer k -forma ψ^k pode ser representada como um vetor no \mathbb{R}^{n_k} . Analogamente qualquer operador de $\Psi^k(S)$ para $\Psi^l(S)$ pode ser representado como uma matriz de dimensão $n_k \times n_l$.

Podemos definir em $\Psi^k(S)$ uma estrutura de produto interno usando a *estrela de Hodge*, \star_k . O produto interno se escreve, para $\psi_1^k, \psi_2^k \in \Psi^k(S)$ como:

$$\langle \psi_1^k, \psi_2^k \rangle = (\psi_1^k)^T \star_k (\psi_2^k). \quad (2-7)$$

A *derivada exterior* $d_k : \Psi^k(S) \rightarrow \Psi^{k+1}(S)$ é definida pela matriz de adjacência com sinal $(d_k)_{s_k, s_{k+1}} = \pm 1$ se s_k pertence a fronteira de s_{k+1} e o sinal depende das orientações.

A estrela de Hodge se representa como uma matriz diagonal cujos elementos são: $|s_K^*|/|s_K|$ onde s_K^* é o dual circuncêntrico do simplexo s_k e $|\cdot|$ é o volume do simplexo. Em particular, precisaremos da estrela de Hodge para vértices e arestas. Concretamente, temos para o i -ésimo vértice e a aresta ij :

$$(\star_0)_{ii} = |s_i^*| = area_i, \quad (\star_1)_{ee} = \frac{|ij^*|}{|ij|} = \cot(\beta_{ij}) + \cot(\beta'_{ij}); \quad (2-8)$$

Explicitamente, na equação (2-8), $area_i$ é área da região de Voronoi restrita ao vértice i , e β_{ij} e β'_{ij} correspondem aos ângulos em oposição a aresta entre os vértices i e j . (Veja a figura 2.3).

Podemos então definir para as 0-formas da malha (que são, na linguagem de formas, o análogo das funções escalares) o Laplaciano de de-Rham:

$$\bar{\Delta} = - \star_0 d_1^T \star_1 d_0; \quad (2-9)$$

onde seus coeficientes são:

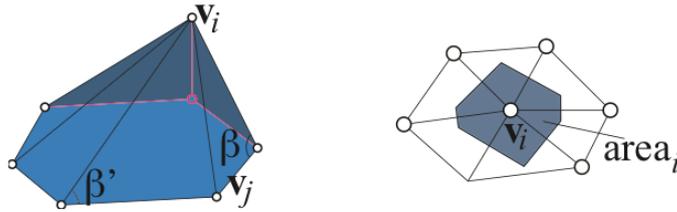


Figura 2.3: Elementos geométricos para os coeficientes do Laplaciano discreto.

$$\bar{\Delta}_{ij} = \frac{\cot(\beta_{ij}) + \cot(\beta'_{ij})}{area_i}, \quad \bar{\Delta}_{ii} = \sum_j \bar{\Delta}_{ij}, \quad (2-10)$$

e zero, se os vértices i e j não são adjacentes.

Isto implica que seus autovetores não mais são ortonormais, o que cria dificuldades, veja (29). Para recuperar a simetria, Vallet e Levy (29) sugerem escolher uma base de 0-formas, tal que, se ϕ_i é um vetor desta base então a equação (2-7) nos dá:

$$\langle \phi_i, \phi_i \rangle = (\phi_i)^T \star_0 (\phi_i) = 1. \quad (2-11)$$

Esta condição é satisfeita se escolhermos $\phi_i = \star_0^{-1/2} e_i$, onde e_i é um dos vetores da base canônica: é igual a um no vértice i e zero nos demais. Podemos sempre calcular $\star_0^{-1/2}$ pois \star_0 é uma matriz diagonal com entradas positivas, veja equação (2-8a). Reescrevendo o operador Laplaciano discreto definido na equação (2-9) na base de 0-formas que satisfaz a equação (2-11), obtêm-se o *operador Laplaciano discreto simétrico*, que se escreve:

$$\Delta = \star_0^{-1/2} \bar{\Delta} \star_0^{-1/2}, \quad \Delta_{ij} = \frac{\cot(\beta_{ij}) + \cot(\beta'_{ij})}{\sqrt{area_i \cdot area_j}}, \quad \Delta_{ii} = \sum_j \Delta_{ij}, \quad (2-12)$$

e zero, se os vértices i e j não são adjacentes.

Sendo um operador simétrico, o Laplaciano (2-12), possui uma base completa de autovetores ortonormais, que denotamos por H_ν : os *harmônicos de variedade*.

2.3 Transformações harmônicas em variedades

Ao reescalonar a área da região de Voronoi de um vértice i pela área do vértice adjacente, fazemos com que o operador Laplaciano discreto (2-10) se torne simétrico (2-12), e assim podemos obter uma base de autovetores ortonormais $H_\nu \in \mathbb{R}^n$ associados a autovalores $\Lambda_\nu \in \mathbb{R}$.

Podemos assumir que os autovalores estão ordenados de modo crescente $\Lambda_0 \leq \Lambda_1 \leq \dots \Lambda_{n-1}$. Usando analogia com a Análise de Fourier, a frequência ν associada ao autovetor H_ν é dada por $\sqrt{\Lambda_\nu}$.

Note que os autovetores consistem em uma base ortonormal do \mathbb{R}^n , e portanto podemos decompor qualquer função $F : i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \mapsto \mathbb{R}$ definida sobre os vértices da malha em:

$$F(i) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \tilde{F}(\nu) H_\nu, \tag{2-13}$$

com

$$\tilde{F}(\nu) = \sum_{i=0}^{n-1} F(i) H_\nu. \tag{2-14}$$

A função $F(i)$ então é expressa como uma combinação linear de harmônicos H_ν com respectivas amplitudes $\tilde{F}(\nu)$. Podemos amplificar tais harmônicos através de um filtro $\varphi(\nu)$, de tal forma que teremos então o sinal filtrado:

$$F_\varphi(i) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(\nu) \tilde{F}(\nu) H_\nu. \tag{2-15}$$

Ora, como nosso interesse está em deformar a malha, podemos tomar nossa função F como as funções de coordenadas $x(i)$, $y(i)$ e $z(i)$ do vértice i . Iremos filtrar as três coordenadas pelo mesmo fator de filtro φ .

Uma vez que as altas frequências correspondem a pequenas perturbações, aparentando como ruídos, iremos apenas filtrar as $\# \nu$ frequências mais baixas:

$$F_\varphi(i) = \sum_{\nu=0}^{\# \nu - 1} \varphi(\nu) \tilde{F}(\nu) H_\nu + d_i, \text{ onde } d_i = \sum_{\nu=\# \nu}^{n-1} \tilde{F}(\nu) H_\nu. \tag{2-16}$$

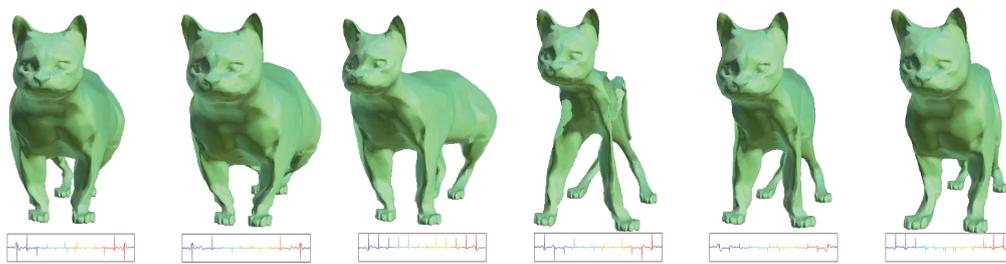


Figura 2.4: Deformação de um modelo 3D de acordo com as amplitudes da música.

Na figura 2.4 vemos um resultado das deformações obtidas sob a influência das frequências de uma música.