Projeto de Graduação

DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA
ELÉTRICA

30 de Junho de 2013

PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES FINANCEIRAS VIA TRANSFORMADA DE ESSCHER NÃO-PARAMÉTRICA

Pedro Henrique Cunningham Amorim

PUC
RIO

www.ele.puc-rio.br

Projeto de Graduação

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES FINANCEIRAS VIA TRANSFORMADA DE ESSCHER NÃO-PARAMÉTRICA

Aluno: Pedro Henrique Cunningham Amorim

Orientador(es): Álvaro de Lima Veiga Filho

Co-orientador(es): Manoel Francisco de Souza Pereira

Trabalho apresentado com requisito parcial à conclusão do curso de Engenharia Elétrica na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos os amigos que me apoiaram durante todo o curso de Engenharia Elétrica, auxiliando com as minhas escolhas, compartilhando todos os momentos, e que estão comemorando por mim, assim como eu a conclusão desta fase muito importante na minha vida.

Agradeço também à Pontifícia Universidade Católica – RJ pela bolsa oferecida a mim durante o curso e aos professores do departamento de Engenharia Elétrica pela dedicação e empenho sem iguais.

“A excelência não é um dom, mas um hábito.” Aristóteles

Resumo

Este estudo tem como objetivo avaliar uma versão não paramétrica da transformada de Esscher para precificação neutra à risco de opções financeiras negociadas no mercado brasileiro. Ao Contrário dos métodos paramétricos usuais, esta metodologia não requer a formulação de um modelo neutro ao risco para o processo estocástico gerador dos retornos. Isto é, o método se ajusta aos dados de forma que não seja necessário o conhecimento da sua distribuição de probabilidade. Na utilização do método, primeiro são sorteados via *“Bootstrap”* 50,000 caminhos para os retornos sob a distribuição histórica P. Então, baseado na transformada de Esscher a amostra é reponderada tornando-a neutra ao risco, para qual os preços do derivativo podem ser obtidos pela média aritmética dos retornos da opção para cada caminho.

Para os testes, foram utilizados dados reais de uma série financeira de preços diários de opções de compra e venda das ações VALE5 negociadas na BM&F Bovespa durante o ano de 2012. A partir destes dados, são obtidos os preços através do método não paramétrico da transformada de Esscher, do método Black-Scholes, e comparados junto aos preços negociados no pregão.

Palavras-chave: Transformada de Esscher; Precificação de Derivativos Fincanceiros; Opções Financeiras de Ações.

Option pricing via nonparametric Esscher Transform

Abstract

This work aims to introduce a nonparametric version of the Esscher Transform for risk neutral option pricing for the Brazilian market. Usual parametric methods require the formulation of explicit risk-neutral models and are operational for a few probability density functions for the returns of the underlying. This proposal makes only mild assumptions on the price kernel and there is no need for the formulation of the risk-neutral model for the returns.

For the tests, have been used real data from the financial series of daily call and put option prices of the asset VALE5, traded at BM&F Bovespa during the year of 2012. Then, the prices obtained via an Esscher transform based model are compared with the Black and Scholes model and the real data.

Keywords: Esscher transform; Financial derivatives pricing; Black and Scholes

Sumário

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

1. Introdução

Atualmente, os Derivativos correspondem por grande parcela no volume diário negociado no mercado financeiro mundial. Seu uso destina-se em atender *players* que buscam a proteção dos seus portfólios através do hedge das posições, para especuladores de tendência ou até que queiram buscar oportunidades por meio da arbitragem. Contudo, nesse cenário ainda procuram-se formas de identificar o preço mais justo para os contratos, inclusive para os de opções financeiras.

2. Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é estudar a aplicação do método não paramétrico da Transformada de Esscher (Epprecht, Pereira e Veiga [1]) no mercado de opções Brasileiro, destacando semelhanças e diferenças e identificando desvios na comparação com o modelo de Black e Scholes, utilizado como *benchmark* pelo mercado por ser o método mais aplicado atualmente.

CAPÍTULO 2: Mercado de Opções

3. O Mercado de Opções

Opções são derivativos financeiros que conferem ao seu detentor o direito, mas não a obrigação de comprar ou vender qualquer ativo no mercado financeiro (Ações, Índices, Taxas de Juros etc.) à um preço pré-determinado (Preço *Strike*), durante um prazo estabelecido. Quando a opção garante o direito de compra, ela denomina-se opção de Compra (ou *Call*), da mesma forma, quando ela garante o direito de venda, denomina-se opção de venda (ou *Put*). Opções podem ser do tipo Europeias ou Americanas. Opções Europeias podem ser exercidas somente na data de vencimento da opção, quando opções Americanas podem ser exercidas em qualquer momento durante sua existência. Na BM&F Bovespa são negociadas diariamente opções de compra e de venda de ações, sendo essas últimas com menor volume, e portanto, liquidez bastante reduzida.

No Brasil e no mundo, o volume total de contratos futuros e de opções tem aumentado consideravelmente. Conforme levantamento realizado pela FIA (2011), no ano de 2010, o total de contratos negociados em bolsas de derivativos no mundo atingiu recordes históricos. O crescimento do mercado em relação ao ano de 2009 atingiu 25,6%. A BM&FBOVESPA apresentou no mesmo ano um crescimento de 54,5%.

a. Precificação de Opções

Com o início do processo de globalização do mercado financeiro, na década de 60, a internacionalização bancária e o crescimento dos investidores institucionais deram origem a profundas mudanças no cenário financeiro mundial, destacando-se principalmente o surgimento de inovações financeiras como a securitização de dívidas, e ferramentas de redução de risco como opções, swaps de crédito e futuros. Desde então, precificar de forma correta esses novos ativos disponíveis na economia tornou-se uma prioridade.

No caso das opções, há seis fatores que afetam seu preço, são eles:

1. O preço atual do ativo-objeto (Preço *Spot*), S.
2. O Preço *Strike*, K.
3. O tempo até a maturidade, τ.
4. A volatilidade do preço do ativo-objeto, σ.
5. A taxa livre de risco, r.
6. Os dividendos esperados durante a vida da opção (No caso de opções de ações).

Se uma opção é exercida em alguma data futura, o *payoff* será a quantidade pela qual o preço do ativo-objeto difere do preço *Strike*. O preço de uma opção de compra tende a crescer com o aumento do preço do ativo-objeto e diminuir com o aumento do preço *Strike*, enquanto o preço de uma opção de venda varia da forma inversa.

A relação entre *Strike* e *Spot* é conhecida como *Moneyness*. Essa medida está associada com a probabilidade de a opção apresentar um *payoff* positivo ao ser exercida. Existem três classes que determinam o nível de *moneyness* de uma opção, elas são classificadas como: *out-of-the-money* (fora do dinheiro), *in-the-money* (dentro do dinheiro) e *at-the-money* (no dinheiro). Quanto mais fora do dinheiro uma opção estiver, menor sua probabilidade de apresentar um *payoff* positivo no exercício, e a probabilidade aumenta conforme a opção fica dentro do dinheiro.

Tabela 1: Classificação das Opções a partir do *moneyness*.

Classificação	Opção de Compra	Opção de Venda
Fora do Dinheiro	$S<K$	$S>K$
No Dinheiro	$S=K$	$S=K$
Dentro do Dinheiro	$S>K$	$S<K$

O *moneyness* pode ser definido de várias formas: S-K, S/K, $S/K^{e\text{-}rt}$. Onde r representa a taxa de juros livre de risco e t o prazo de vencimento da opção.

No caso de opções Americanas, de compra ou venda, o detentor de uma opção de maturidade maior possui mais oportunidades de exercício do que o detentor de uma mesma opção com menor maturidade. Por esta razão, opções com mais tempo até a maturidade devem valer sempre mais do que opções com menos tempo para assim comportar a componente do risco. Para opções Europeias, seu preço tende a aumentar conjuntamente com o tempo até a maturidade, entretanto, para um mercado onde dividendos são esperados, esta tendência pode ser não satisfeita.

Conforme a volatilidade de um ativo aumenta, as chances de os retornos positivos e negativos serem mais significativos também aumentam. O detentor de uma opção de compra se beneficia com um retorno muito positivo enquanto o detentor de uma opção de venda se beneficia com um retorno muito negativo do ativo-objeto. Por este motivo, o valor de ambas as opções, de compra ou de venda, aumentam de acordo com a volatilidade do mercado.

Com o aumento da taxa de juros na economia, o retorno esperado pelos investidores de uma ação tende a aumentar. Além disso, o valor presente de qualquer fluxo de caixa futuro recebido pelo possuidor de uma opção é reduzido. A combinação destes fatores aumentam o preço de uma opção de compra e reduzem o preço de uma opção de venda. No Brasil, a decisão pelo aumento ou pela diminuição da taxa de juros pode ou não ocorrer a cada reunião do COPOM – Comitê de Política Monetária.

Quando uma empresa paga dividendos, tende a haver uma redução no preço da ação. Conforme visto anteriormente, a variação no preço da ação possui relação com a variação no preço da opção.

No mercado brasileiro, caso haja ajuste do preço do ativo subjacente em decorrência do anúncio do pagamento de proventos, (diz-se que a ação é negociada *ex-dividendos*) seu valor é subtraído do preço de exercício de forma com que a queda no preço não torne a ação menos atrativa.

CAPÍTULO 3: Avaliação Neutra ao Risco e Modelos de Precificação

4. Avaliação Neutra ao Risco

O Princípio de avaliação neutra ao risco afirma que quaisquer títulos que possuam alguma relação de dependência com outros títulos, como é o caso das opções, podem ser avaliados segundo a suposição de que os investidores são indiferentes ao risco. Por exemplo, na criação de uma carteira livre de risco, se dois ativos apresentarem o mesmo *payoff*, para evitar arbitragem eles devem possuir o mesmo preço. Com isso, a preferencia dos investidores não exerce influência sobre o preço da opção e o retorno esperado será a taxa livre de risco, assim a taxa de retorno esperada do ativo subjacente não aparece nos resultados finais, criando um mercado neutro ao risco.

5. Modelos de Precificação de opções

a. Modelo Black-Scholes

Desde sua publicação em 1973 o modelo de precificação de opções Black-Scholes (ou Black-Scholes-Merton), apresentado por Black e Scholes, e estendido por Merton no mesmo ano, tem sido amplamente utilizado, tanto pelo seu pioneirismo quanto pela sua simplicidade. Este modelo determina o valor justo de uma opção europeia e segue algumas premissas, são elas:

1. O preço do ativo subjacente segue um processo estocástico estacionário.

2. A distribuição de probabilidade dos preços do ativo-objeto é uma log-normal com média e variância constantes.

3. Não há custos de transação ou impostos.

4. Todos os papéis são perfeitamente divisíveis (por exemplo, é possível comprar um centésimo de uma ação).

5. Não há oportunidades de arbitragem.

6. As negociações dos papéis é contínua.

7. A Ação não paga dividendos durante o período de existência da opção.

8. A Taxa livre de risco, r, é constante e a mesma durante o período de existência da opção.

Para obter-se o preço de uma opção europeia de venda através do preço de uma opção de compra também europeia e vice-versa, utiliza-se a paridade entre as opções.

É importante ressaltar que o modelo Black-Scholes apesar do seu destaque, não é perfeito, pois baseia-se em suposições que não correspondem à realidade. Estudos empíricos demonstram que séries de retornos financeiros em geral possuem características que não são respeitados pelo modelo Black-Scholes, tais como excesso de curtose e variação da volatilidade no tempo, incluindo a presença de *clusters* em alguns períodos.

b. Transformada de Esscher

A Transformada de Esscher, bastante utilizada pela ciência atuarial, foi desenvolvida para aproximar uma distribuição em torno de um ponto de interesse, tal que, a nova média seja este ponto. Em 1994, Gerber e Shiu publicaram um trabalho sobre o uso dessa eficiente ferramenta, para precificar opções e outros derivativos financeiros. Supondo a hipótese de neutralidade ao risco, se o logaritmo dos preços do ativo-objeto seguirem um conjunto de processos estocásticos com incrementos estacionários e independentes, é possível calcular as probabilidades neutras ao risco. Esta família de processos estocásticos inclui os processos Wiener, Poisson, Gamma e a gaussiana inversa.

Assim, Através de suposições sobre a dinâmica do processo estocástico seguido pelo preço do ativo, é possível obter, dentre outras, as fórmulas de precificação de opções de Black e Scholes, a Binomial e as fórmulas no máximo e no mínimo de ativos de risco múltiplo.

6. Versão não-paramétrica da Transformada de Esscher

De acordo com Epprecht, Pereira e Veiga [1], este método tem como objetivo determinar uma distribuição de probabilidade neutra ao risco sem realizar quaisquer suposições sobre as dinâmicas seguidas pelo ativo subjacente. Ou seja, as metodologias usuais de precificação de opções faz uso de modelos neutros ao risco explícito, determinando distribuições de probabilidades específicas para o ativo. Consequentemente, as suposições sobre a componente estocástica do modelo são relaxadas, e o modelo da Transformada de Esscher é adaptado. Em razão disso, o método utiliza uma versão não paramétrica da transformada de Esscher, eliminando a necessidade da formulação de um modelo neutro ao risco. O método propõe também uma metodologia que comporta os dados seja a distribuição de probabilidade conhecida ou não. A principal restrição imposta pelo método é de que o processo que gerou os dados admite o cálculo da função geradora de momento.

CAPÍTULO 3: Análise dos Dados e Metodologia

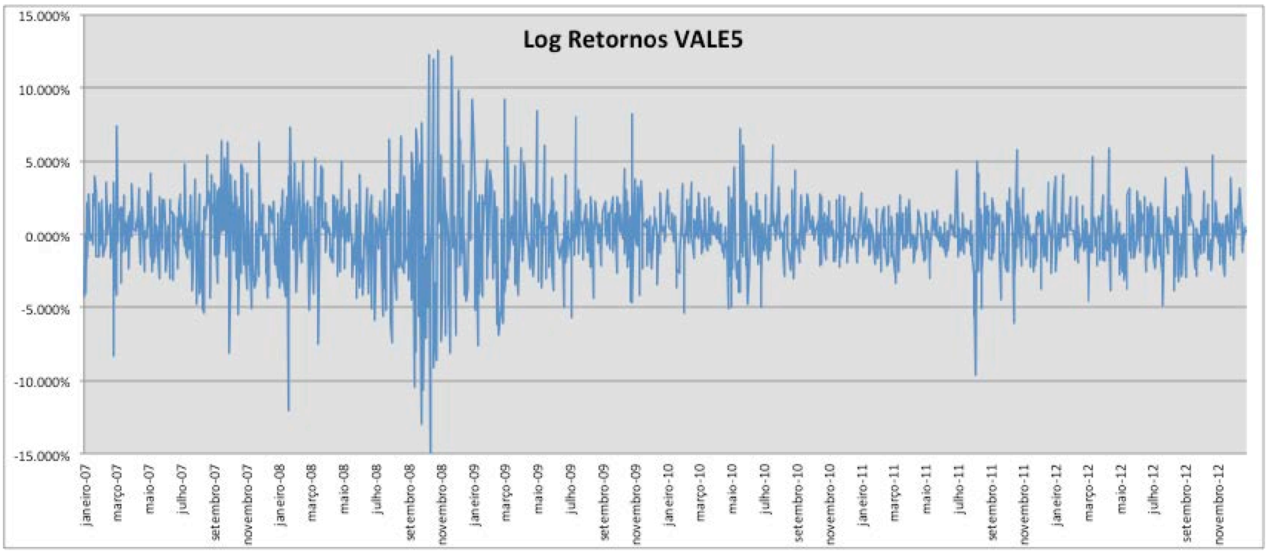
7. Base de Dados

A base de dados utilizada para os testes foram as séries de preços de opções de compra e de venda negociadas no mercado brasileiro durante o ano de 2012 sobre as ações preferenciais da mineradora Vale. A série de retornos foi extraída da série de preços de fechamento das ações da Vale no período que compreende o último trimestre de 2011 e todo o ano de 2012, totalizando 309 amostras. Dessa série calculou-se os retornos diários na forma $R_t = \ln\left(P_t/P_{t-1}\right)$, onde no dia t, R_t é o retorno e P_t é a cotação.

As ações da Vale foram escolhidas como ativo subjacente por possuir contratos de opções entre as de maior liquidez no mercado Brasileiro.

Como taxa livre de risco, calculou-se pela interpolação linear da estrutura a termo da taxa de juros, a taxa DI-Cetip estimada para cada vencimento de opção no dia em que esta era negociada, metodologia bastante praticada no mercado para prever taxas de juros futuras.

Gráfico 1. Log dos Retornos históricos das ações preferenciais da Vale entre 2007 e 2012.



8. Metodologia

Primeiramente, mediante a hipótese de que qualquer um dos retornos passados possa se repetir no futuro, foram sorteados com reposição (técnica estatística conhecida como *Bootstrap*), os retornos históricos das ações preferenciais da Vale dos últimos três meses que antecedem cada dia de negociação das opções da série. Assim, foi possível criar 50.000 caminhos sob medida de probabilidade P. A partir do método ENP, obteve-se a medida neutra ao risco e em seguida o preço da opção. Utilizando a mesma medida de probabilidade calculou-se então os preços pelo método Black-Scholes.

Buscando evidenciar características do modelo, gerou-se 50.000 novos caminhos utilizando o processo estocástico através do Movimento Geométrico Browninano (MGB), com choques gaussianos. Os parâmetros utilizados neste processo, calculado a partir dos retornos históricos, são o desvio padrão exponencialmente ponderados e a média da série de retornos, na janela de três meses que antecedem cada dia de negociação de opção.

A partir dos preços de mercado procurou-se, através de técnicas de otimização, encontrar valores para o parâmetro *theta*. Isto é, seguindo uma abordagem inversa à da obtenção dos preços teóricos. Sendo o parâmetro *theta*, responsável por tornar uma distribuição de probabilidade neutra ao risco, ele foi considerado como o *theta* implícito, quando a diferença entre os preços teóricos (via boostrap) e os calculados se aproximassem com erro pequeno. Todas as simulações foram realizadas através do software *Matlab*.

Finalmente, através do modelo inverso de Black-Scholes, pôde-se obter a volatilidade implícita da série dos preços de mercado e dos preços calculados pelo método ENP (usando como distribuições de probabilidade tanto o *Bootstrap* dos retornos quanto a do Movimento Geométrico Browniano).

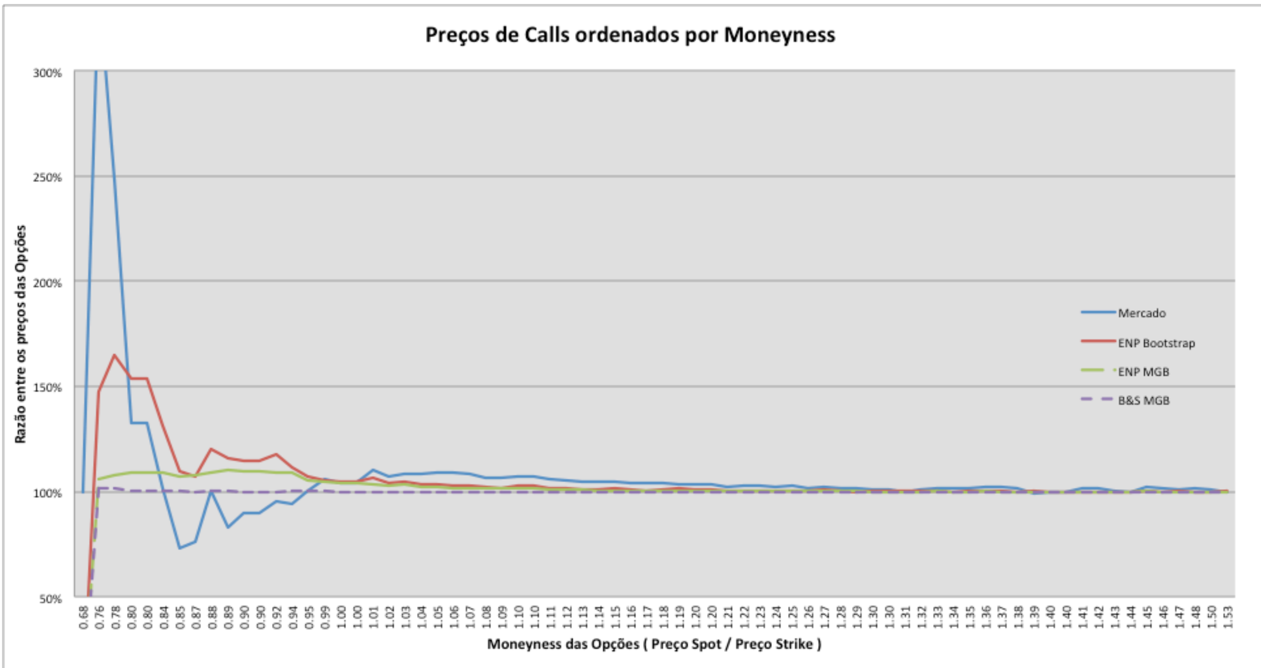
Para facilitar a compreensão dos cenários testados adotou-se uma sigla para cada preço, volatilidade implícita e *theta* implícito do método ENP, de acordo com a forma com que foram obtidos. Por exemplo, os preços obtidos pelo método ENP quando calculados técnica de *Bootstrap* serão chamados de ENP (*Bootstrap*), ou de ENP (MGB) quando simulados pelo Movimento Geométrico Browniano para obter a distribuição de probabilidade na maturidade. Os preços das observações do mercado serão chamados de Mercado, enquanto que os calculados pelo método Black-Scholes, serão chamados de BS (MGB).

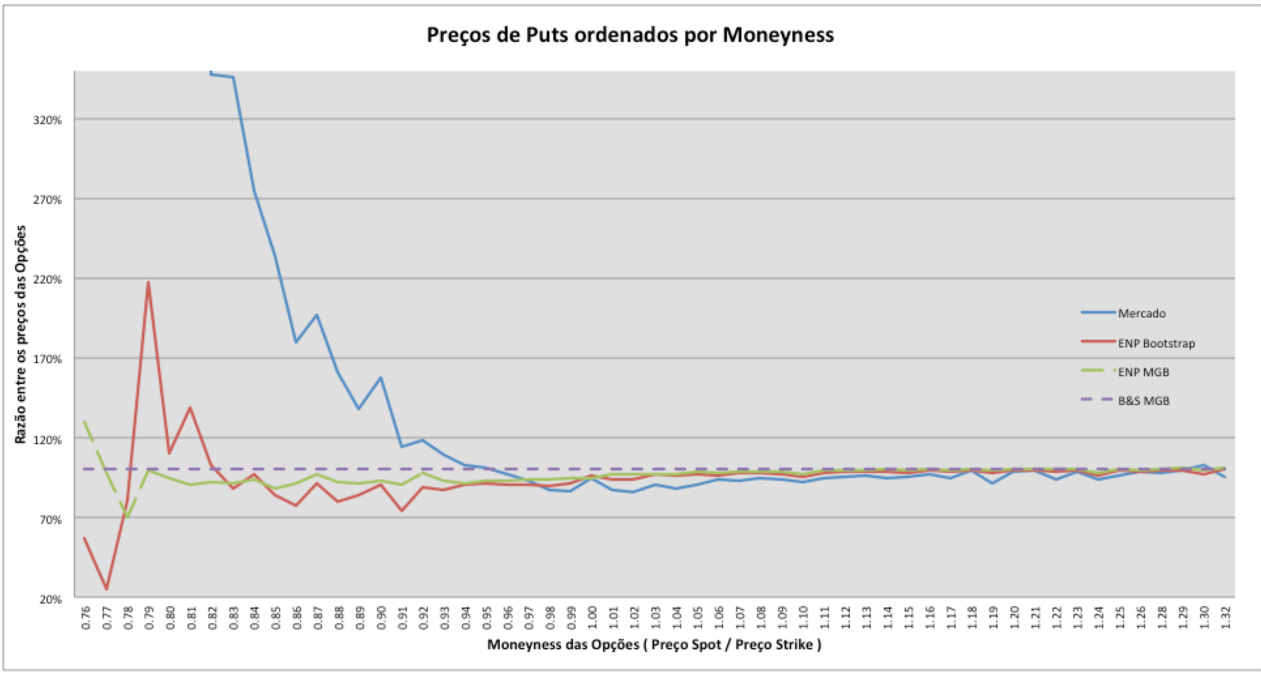
CAPÍTULO 4: Resultados e Conclusão

9. Resultados

De acordo com Epprecht, Pereira e Veiga [1], não são esperadas diferenças relevantes de preços entre os modelos ENP e Black-Scholes quando são utilizados dados sintéticos, baseados no Movimento Geométrico Browniano. Nos gráficos 2 e 3, abaixo compara-se a diferença entre os preços de mercado, ENP (*Bootstrap*) e ENP (MGB), realizando a razão desses preços pelos do BS (MGB). Pode-se observar que as menores diferenças de preços estão naquelas entre os do BS (MGB) e ENP (MGB), como era esperado. Para as opções fora do dinheiro (*moneyness* menor do que um), o comportamento do método sobre dados reais difere do método sobre dados sintéticos, se aproximando mais dos preços de mercado. Conforme as opções entram no dinheiro (*moneyness* maior ou igual a 1) os dados começam a comportar-se de maneira parecida.

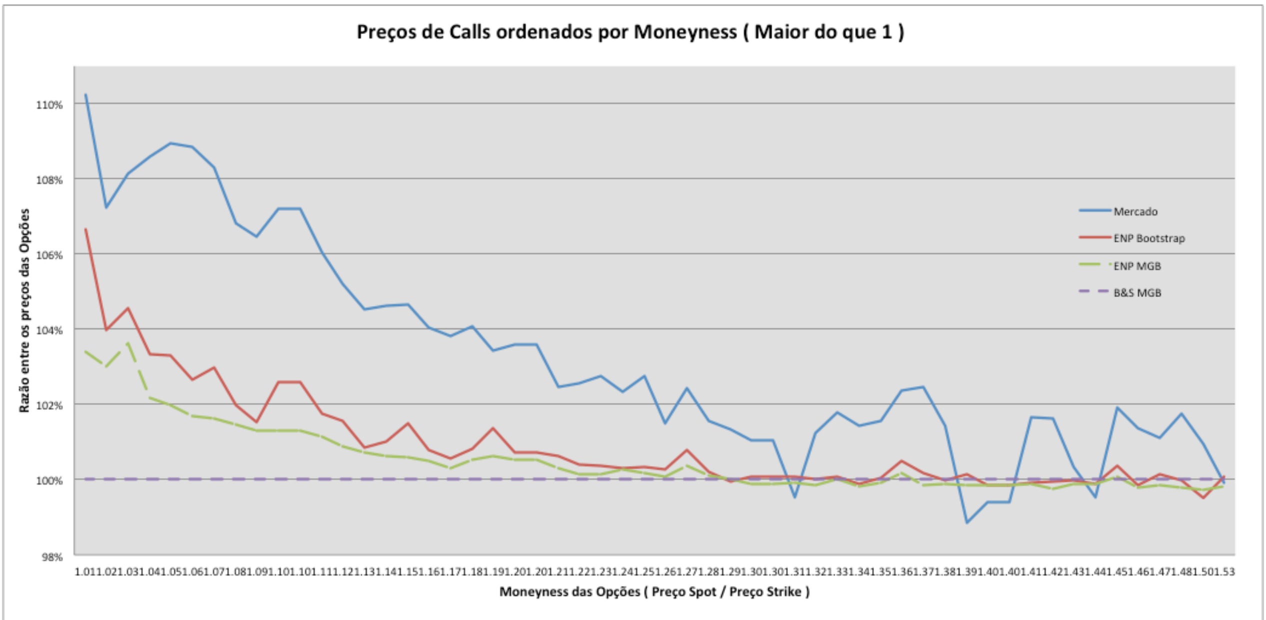
Gráfico 2 e 3: Razão entre os Preços ENP (Bootstrap) e ENP (MGB) pelos preços BS (MGB) para opções de compra (*Calls*) e de venda (*Puts*)





Analisando mais de perto os dados para opções negociadas dentro do dinheiro, pode-se observar que existem pequenas diferenças entre os preços dado pelo mercado e os preços teóricos.

Gráficos 4 e 5: Razão entre os Preços ENP (Bootstrap) e ENP (MGB) pelos preços BS (MGB) apenas para opções dentro do dinheiro (Moneyness maior do que 1) de compra (*Calls*) e de venda (*Puts*).



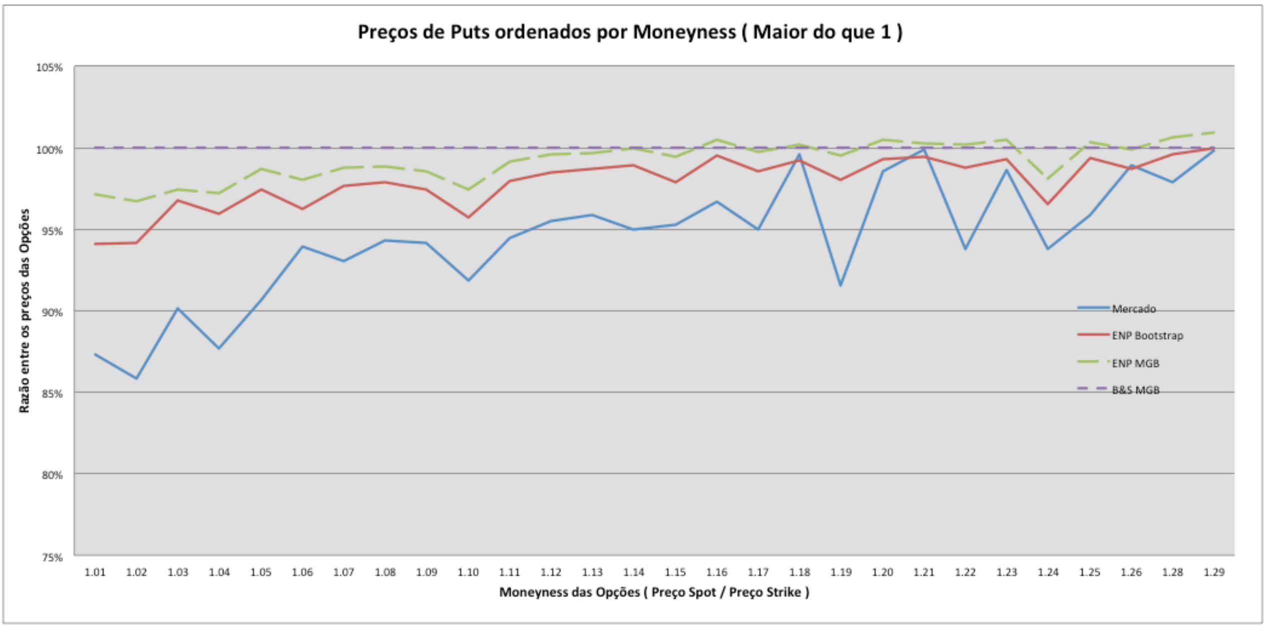
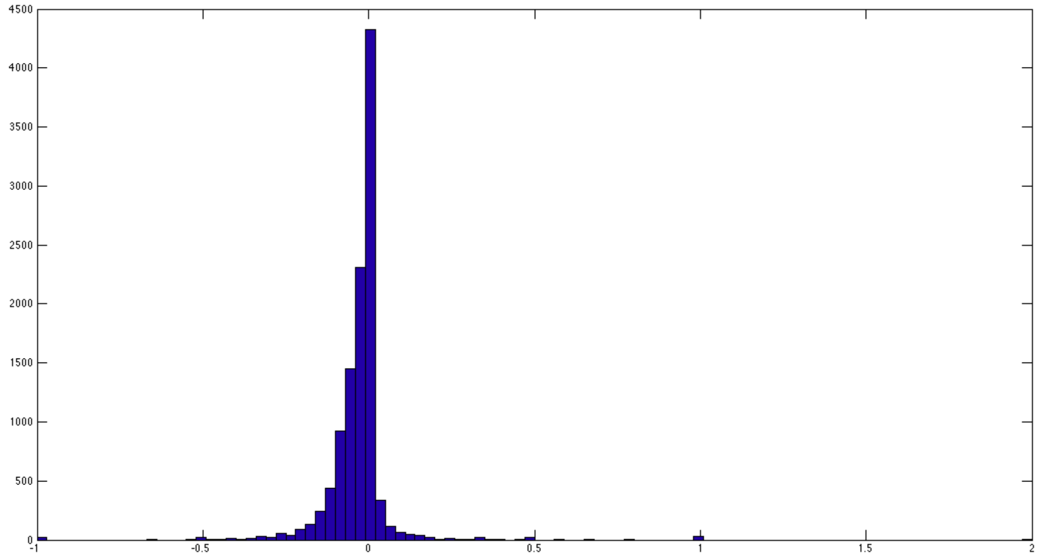


Gráfico 6: Histograma dos Erros entre o preços BS (MGB) e ENP (MGB) para opções de Compra.



Na Literatura, é conhecido que o modelo de Black e Scholes tende a subprecificar opções fora do dinheiro (*Moneyness* menor do que um) e que tenham vencimento de curta duração. De acordo com os preços médios calculados, demonstrados na tabela 2 abaixo, podemos constatar que nessas condições os preços do método ENP foi superior aos preços do Black and Scholes, indicando que há mais risco do que este modelo pode capturar.

Tabela 2: Preços médios de opções de compra separadas entre faixas de *Moneyness* (Colunas) e prazos de vencimento (Linhas).

Mercado	m < 0.8	0.8 < m < 1.0	1.0 < m < 1.2	1.2 < m < 1.4	1.4 < m
30	0.02	0.23	3.33	8.29	12.20
60	0.02	0.61	3.73	8.55	13.60
90	0.07	1.19	4.05	7.89	-
120	0.17	1.91	5.19	9.60	-
150	-	2.18	6.20	-	-
180	-	2.30	5.03	-	-
210	-	3.33	6.38	-	-

ENP (Bstrap)	m < 0.8	0.8 < m < 1.0	1.0 < m < 1.2	1.2 < m < 1.4	1.4 < m
30	0.00	0.23	3.20	8.20	12.07
60	0.03	0.67	3.56	8.32	13.43
90	0.06	1.25	3.88	7.66	-
120	0.25	2.21	5.50	9.38	-
150	-	3.34	7.13	-	-
180	-	3.37	6.22	-	-
210	-	4.31	7.69	-	-

ENP (MGB)	m < 0.8	0.8 < m < 1.0	1.0 < m < 1.2	1.2 < m < 1.4	1.4 < m
30	0.00	0.23	3.20	8.19	12.07
60	0.02	0.65	3.52	8.27	13.38
90	0.04	1.16	3.68	7.60	-
120	0.10	2.01	5.01	9.49	-
150	-	2.56	6.01	-	-
180	-	2.83	5.57	-	-
210	-	4.20	7.51	-	-

BS (MGB)	m < 0.8	0.8 < m < 1.0	1.0 < m < 1.2	1.2 < m < 1.4	1.4 < m
30	0.00	0.23	3.19	8.21	12.09
60	0.02	0.58	3.43	8.22	13.35
90	0.05	1.03	3.45	7.50	-
120	0.07	2.00	4.95	9.40	-
150	-	2.45	5.98	-	-
180	-	2.71	5.51	-	-
210	-	4.02	7.50	-	-

Foi estudado o comportamento dos valores do *theta* implícito gerados pelo método ENP, a partir dos preços praticados no mercado. Obtemos esse parâmetro através da diferença entre os preços de mercado e os preços teóricos sob a amostra *Bootstrap* dos retornos históricos. O *theta* era considerado implícito quando havia um erro muito pequeno entre ambos os preços. Calculando a média dos *thetas* encontrados e ordenando pelo *Moneyness* da opção podemos observar, pelos gráficos 7 e 8 abaixo, que o seu valor tende a ser maior em valores absolutos quando a opção está muito fora do dinheiro e, também possui menores probabilidades de exercício sobre um cenário de vencimentos mais curtos.

Gráfico 7: Séries de *Thetas* do ENP implícitos nos preços de mercado separadas por maturidade

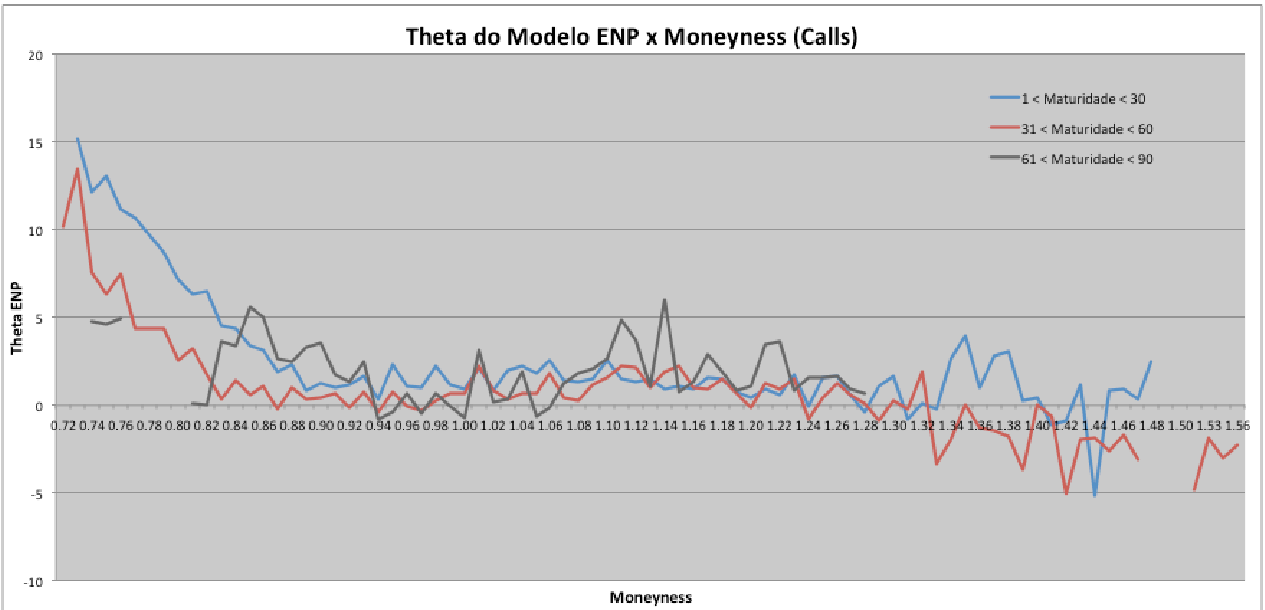
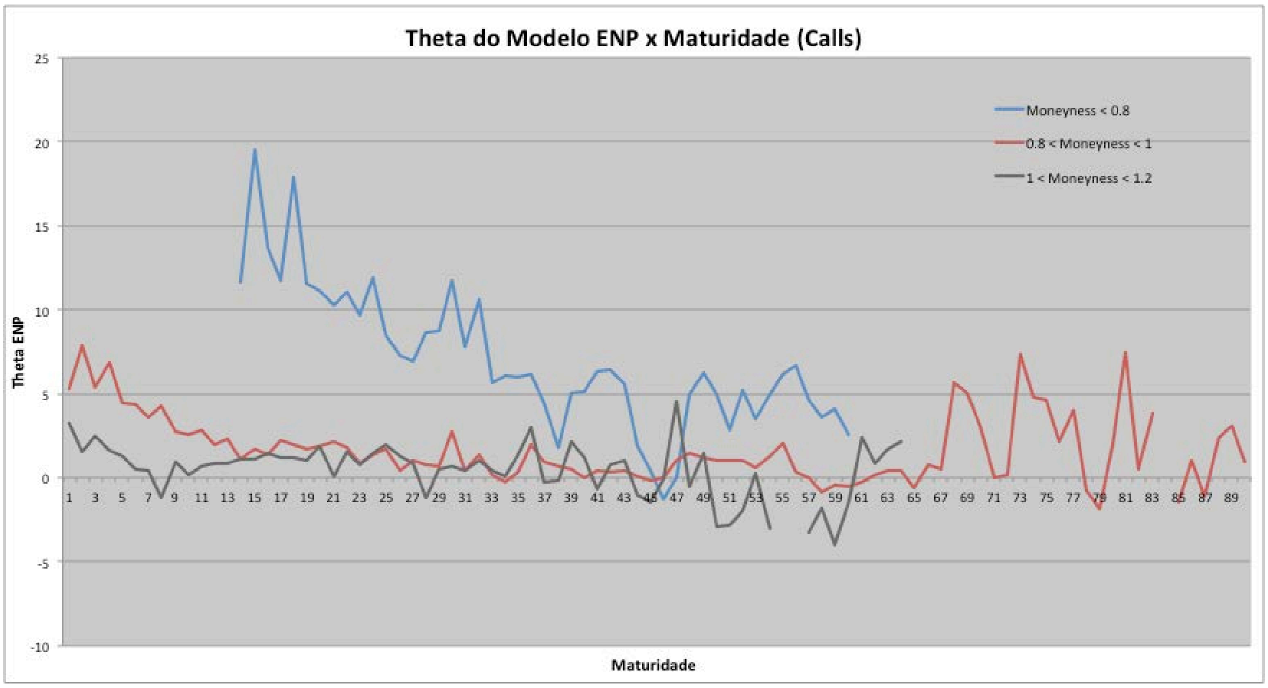


Gráfico 8: Séries de *Thetas* do ENP implícitos nos preços de mercado separadas por *Moneyness*



Através da fórmula de Black-Scholes inversa foi possível calcular a volatilidade implícita nos preços de mercado e nos preços ENP (Bootstrap). É conhecido na literatura que as expectativas dos *Players* com relação à variabilidade do preço do ativo subjacente são refletidas na volatilidade implícita. Pelo gráfico 9 abaixo é possível observar sobre os preços de mercado um padrão conhecido como o *"sorriso da volatilidade"*, onde a volatilidade das opções no dinheiro tende a ser menor do que a volatilidade das opções dentro e fora do dinheiro.

Para os preços ENP (Bootstrap) pode-se observar a variação na volatilidade quando a opção está dentro e fora do dinheiro.

Gráfico 9: Volatilidade implícita calculada sobre os preços de mercado

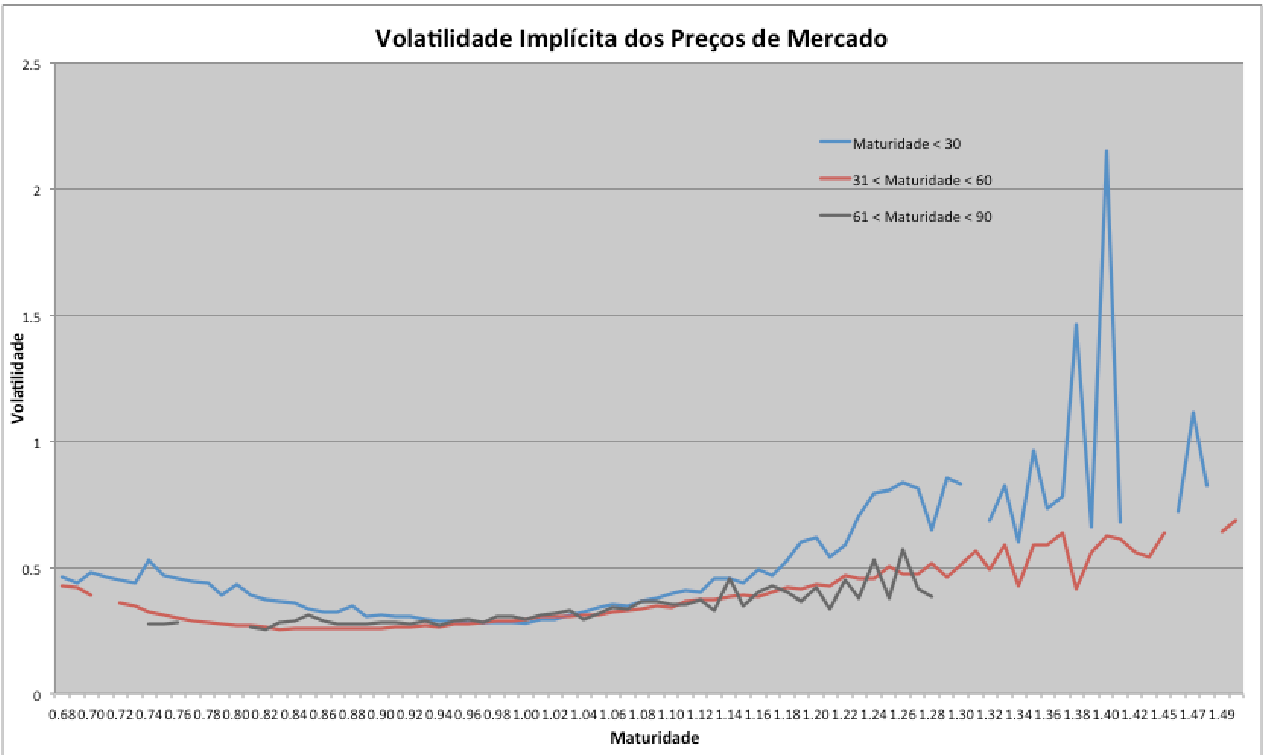
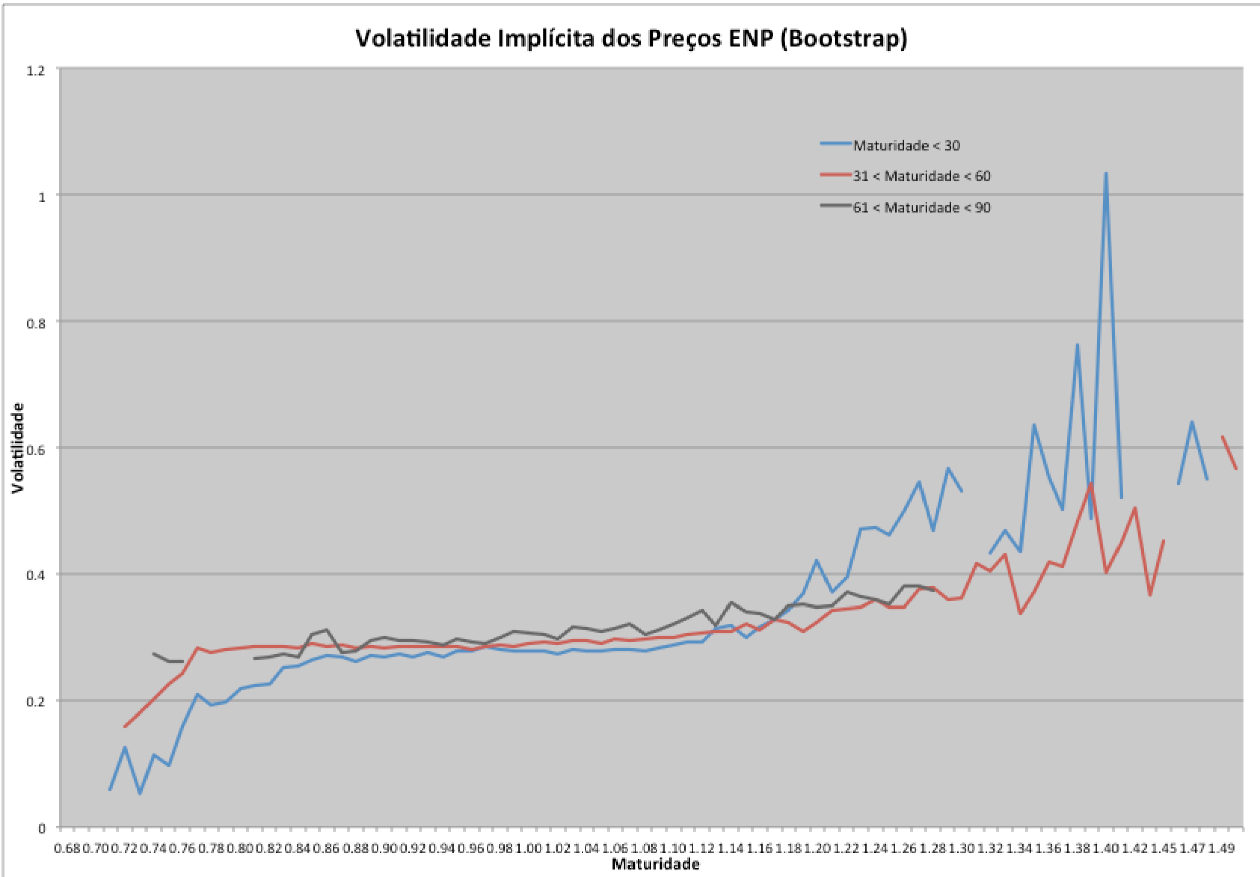


Gráfico 10. Volatilidade Implícita dos preços ENP (Bootstrap)



10. Conclusão

Concluímos através desse trabalho que quando aplicado sobre os parâmetros oriundos do mercado Brasileiro, o método não paramétrico da Transformada de Esscher se comporta de acordo com os resultados observados em Epprecht, Pereira e Veiga [1].

Pode ser realizado também um estudo mais aprofundado sobre o comportamento do parâmetro *theta* do método ENP implícito aos preços de mercado.

11. Bibliografia

[1] Epprecht, C., Pereira, M., Veiga. A. Option pricing via nonparametric Esscher transform. 2011. 18f.

[2] Pereira, M. Apreçamento de opções via transformada de Esscher não paramétrica. 2012. 69f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC - RIO. Rio de Janeiro. 2012.

[3] Gomes, N. Modelo Garch de apreçamento de opções via simulação histórica filtrada: uma aplicação para o mercado Brasileiro. 2012. 63f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC – RIO. Rio de Janeiro. 2012.

[4] Hull, J.C. (2006). Options, Futures & Other Derivatives. 6th. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall International.

[5] Esscher, F. (1932). On the Probability Function in the Collective Theory of Risk. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 15: 175-195.

[6] Black, Fischer, and Myron Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, 81: 637-659.