

27/06/2013

MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE UMA SUSPENSÃO INTERCONNECTADA

Leo Herszenhaut



MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE UMA SUSPENSÃO INTERCONNECTADA

Aluno: Leo Herszenhaut

Orientador: Mauro Speranza Neto

Trabalho apresentado com requisito parcial à conclusão do curso de Engenharia de Controle e Automação na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil



Agradecimentos

Agradeço a minha família por tudo que fizeram para mim e por mim durante todos esses anos.

Ao Professor Mauro Speranza Neto, orientador do projeto, pela orientação e apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

À Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro pelo apoio institucional.

Resumo

Este trabalho apresenta a modelagem e simulação de uma suspensão veicular do tipo interconectada empregando um modelo plano não linear de veículo com quatro graus de liberdade ("roll" - ou "pitch" - e "heave" da massa suspensa e deslocamentos verticais das duas massas não suspensas), incluindo o mecanismo da suspensão e amortecedores com reações de "bump" e "rebound" diferenciadas. Apresenta também a análise da influência deste tipo de suspensão no controle do ângulo de rolagem (ou arfagem) do veículo. Inclui-se uma comparação do comportamento com o do modelo linear do tipo "massa-mola-amortecedor" convencional.

Palavras-chave: suspensão; modelagem; simulação

Modeling and Simulation of an Interconnected Suspension

Abstract

This work presents the modeling and simulation of an interconnected vehicle suspension utilizing a non-linear planar vehicle with four degrees of freedom (roll – or pitch – body and wheels heave), including the suspension mechanism and bumpers with different bump and rebound reactions. It also presents an analysis of this type of suspension on the control of the roll (pitch) angle of the vehicle. It includes a comparison of this model and the conventional “mass-spring-bumper” linear model.

Keywords: suspension; modeling; simulation

Sumário

1. Introdução	1
2. Suspensões	2
A. Suspensão Passiva	4
B. Suspensão Ativa	5
C. Suspensão Semi-ativa	6
D. Suspensão Interconectada	7
3. Metodologia	9
4. Resultados	17
5. Conclusões	29
6. Referências	30
7. Anexo Maple	32
8. Anexo Equações Diferenciais	37
9. Anexo MATLAB/Simulink	42

Lista de Figuras, Tabelas e Gráficos

Figura 1 - Objetivos e tarefas do sistema de suspensão veicular	2
Figura 2 - Nível de conforto x aceleração	3
Figura 3 - Sistema de suspensão passivo	4
Figura 4 - Representação simplificada da suspensão ativa	5
Figura 5 - Suspensão semi-ativa	6
Figura 6 - Sistemas de interconexão desenvolvidos por Hawley J, B.....	7
Figura 7 - Sistema de suspensão do Citroën 2CV	7
Figura 8 - Sistema da barra anti-rolagem	8
Figura 9 - Modelo simplificado de meio carro.....	9
Figura 10 - Modelo simplificado de meio carro com o sistema de interconexão	9
Figura 11 - Sistema de interconexão	10
Figura 12 - Lado esquerdo do sistema de interconexão	11
Figura 13 - Lado direito do sistema de interconexão	11
Figura 14 - Parte superior do sistema de interconexão	11
Figura 15 - Grafo de ligação do sistema de interconexão	12
Figura 16 - Grafo de ligação do sistema	13
Tabela 1 - Parâmetros de simulação	17
Tabela 2 - Auto-valores dos sistemas.....	18
Gráfico 1 - Diagrama de Bode do sistema passivo.....	18
Gráfico 2 - Diagrama de Bode do sistema interconectado (50%)	19
Gráfico 3 - Diagrama de Bode do sistema interconectado (10%)	19
Gráfico 4 - Diagrama de Bode do sistema interconectado (100%).....	19
Gráfico 5 - Diagrama de Bode do sistema interconectado (200%).....	20
Gráfico 6 - Aceleração da roda esquerda para simulação 1.....	20
Gráfico 7 - Aceleração da roda direita para simulação 1.....	21
Gráfico 8 - Aceleração do centro de massa do veículo para simulação 1	21
Gráfico 9 - Aceleração angular do centro de massa do veículo para simulação 1	22
Gráfico 10 - Aceleração da roda esquerda para simulação 2.....	22
Gráfico 11 - Aceleração da roda direita para simulação 2.....	23
Gráfico 12 - Aceleração do centro de massa do veículo para simulação 2.....	23
Gráfico 13 - Aceleração angular do centro de massa do veículo para simulação 2	24
Gráfico 14 - Aceleração da roda esquerda para simulação 3.....	24
Gráfico 15 - Aceleração da roda direita para simulação 3.....	25
Gráfico 16 - Aceleração do centro de massa do veículo para simulação 3.....	25
Gráfico 17 - Aceleração angular do centro de massa do veículo para simulação 3	26
Gráfico 18 - Aceleração da roda esquerda para simulação 4.....	26
Gráfico 19 - Aceleração da roda direita para simulação 4.....	27
Gráfico 20 - Aceleração do centro de massa do veículo para simulação 4.....	27
Gráfico 21 - Aceleração angular do centro de massa do veículo para simulação 4	28

1. Introdução

Veículos tais como carros, trens, aviões e navios têm a função de transportar pessoas e cargas de um lugar para outro de forma segura e eficiente. Certos aspectos do movimento de veículos podem ser descritos por meio de modelos matemáticos.

Se o modelo matemático representar adequadamente o veículo real, o resultado da análise deve revelar problemas reais que os veículos podem apresentar, e no melhor dos casos, pode mostrar soluções para esses problemas através da mudança de alguns aspectos físicos.

Veículos são sistemas dinâmicos complexos e interessantes, que requerem análise e desenvolvimento cuidadosos para assegurar que se comportem como projetado. A estabilidade do movimento de um veículo diz respeito à capacidade do veículo de manter a trajetória desejada, sem divergir espontaneamente (por exemplo, manter a trajetória durante uma curva). É necessário saber como os parâmetros físicos influenciam as características dinâmicas e a estabilidade.

Os sistemas que descrevem a dinâmica de um veículo geralmente usam equações diferenciais linearizadas, baseadas em equações não-lineares. Embora o modelo não-linear seja mais preciso, as equações linearizadas revelam mais semelhanças entre os diferentes tipos de veículos. Dessa maneira é possível analisar as semelhanças entre os veículos sem a complexidade das equações não-lineares.

Caso uma pessoa esteja controlando o sistema, as propriedades dinâmicas devem ser adaptadas para permitir que o controle seja realizado com razoável precisão e facilidade. Um veículo que exija uma grande intensidade de atenção para mantê-lo na trajetória desejada, não é considerado satisfatório.

Para veículos com controle automático, as propriedades dinâmicas devem ser consideradas no projeto do controlador, de modo a assegurar que o veículo seja estável. Dessa maneira é possível que o operador apenas supervisione o sistema. Em alguns casos o controlador pode estabilizar o veículo, facilitando o controle do operador (por exemplo, piloto automático em aviões, freios ABS em carros).

Em alguns casos, o veículo pode apresentar um comportamento instável em certas condições. Para muitos veículos, esse comportamento instável pode ocorrer após certo patamar de velocidade. Esse tipo de comportamento é muito problemático uma vez que o sistema funciona perfeitamente até que essa condição seja alcançada.

A seguir apresenta-se um exemplo de sistema de controle presente na maioria dos veículos terrestres sobre rodas.

2. Suspensões

Sistemas de suspensões têm uma vasta área de aplicação no dia-a-dia. Geralmente as pessoas não têm conhecimento sobre esses sistemas. Por exemplo, uma pessoa que tenha andado de bicicleta com baixa pressão no pneu, pode lembrar o quão macio e trêmulo o comportamento da mesma era sobre uma superfície lisa e quão mal a bicicleta se comportou em uma superfície irregular - um comportamento inseguro e desconfortável. Nesse caso, o coeficiente de rigidez da mola (pneu) e o deslocamento disponível eram pequenos. Por outro lado, caso a pressão do pneu fosse muito alta, o perfil da superfície seria transferido diretamente para a bicicleta e o usuário. É necessário encontrar uma pressão adequada para garantir o conforto (e a segurança) do usuário.

O objetivo principal de um sistema de suspensão é separar os componentes da parte suspensa (chassis e condutor) das acelerações da parte não suspensa (pneus). Esse isolamento protege os componentes do lado suspenso dos danos causados por forças inerciais. Se o sistema conseguir realizar essa função, outra vantagem é obtida: é possível deslocar-se mais rápido em uma trajetória com menos vibração do que em um veículo sem o sistema de suspensão.

Outro objetivo principal de um sistema de suspensão é assegurar que as forças verticais nas rodas sejam as mais suaves possíveis para garantir a transferência de forças para a superfície. Picos de força podem levar a uma situação em que a força normal é mais baixa que o necessário para criar atrito suficiente para transferir as forças verticais e longitudinais. Isso causa uma transição de atrito estático para atrito deslizante, levando a um comportamento inesperado (imprevisível) e inseguro.

Outros objetivos dos sistemas de suspensão envolvem a prevenção de danos e a geração de ângulos de rolagem e arfagem aceitáveis. Também é importante combinar o comportamento dinâmico a classe de veículos - carros de passeio a carros esportivos. A figura abaixo ilustra a relação entre os principais objetivos e as tarefas que devem ser realizadas pelo sistema de suspensão.

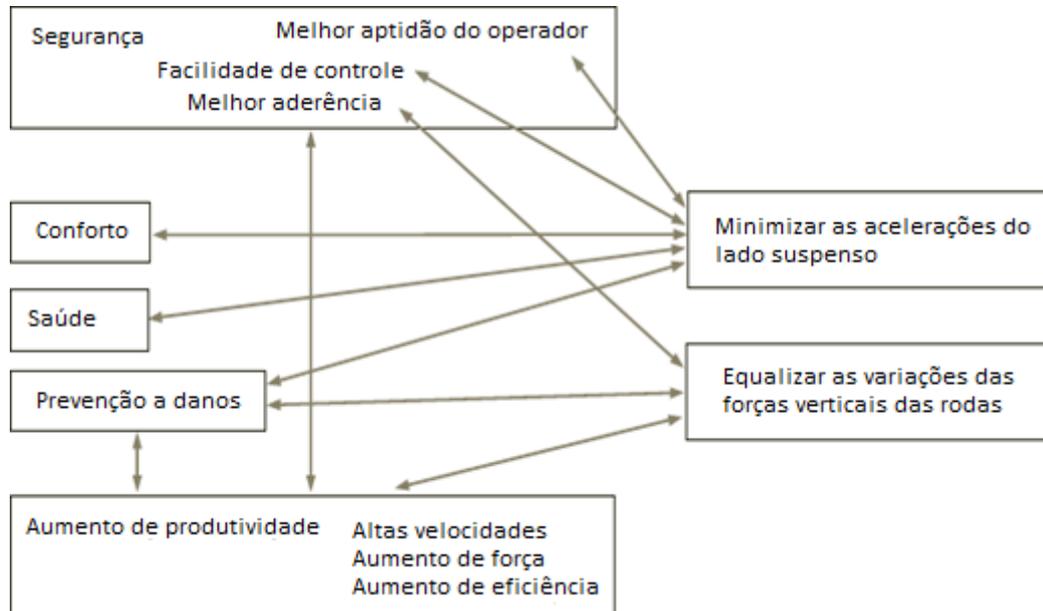


Figura 1 - Objetivos e tarefas do sistema de suspensão veicular

Na maioria das vezes é possível escolher componentes mecânicos que aguentem as vibrações impostas ao sistema. O "componente humano" também deve ser escolhido de modo a suportar certos níveis de vibração, porém essa "escolha" não é possível. Vibrações de diferentes frequências são sentidas em diferentes partes do corpo humano. Acelerações e deslocamentos são detectados na faixa de 1 a 100 [Hz], na faixa de 20 a 20000 [Hz] essas vibrações são percebidas acusticamente, a faixa de 1 a 4 [Hz] determina o que é chamado de "nível de conforto da suspensão", de 4 a 80 [Hz] é possível determinar o "nível de aspereza" - baixa amplitude e aceleração rápida, como em uma rua de paralelepípedos. Em adição, a Norma ISO2631-1 indica que vibrações na faixa entre 0.1 e 0.5 [Hz] são

responsáveis pelo enjôo. A partir de certa amplitude, as vibrações são consideradas desconfortáveis. De forma moderada isso causa desconforto e fadiga ao operador; em casos extremos, altas acelerações podem causar danos ao esqueleto (discos da coluna lombar). É possível que partes do operador sejam excitadas com sua frequência natural, agravando o problema.

O nível de conforto fornecido pela suspensão pode ser determinado a partir da qualidade do isolamento entre o lado suspenso e a superfície. Quanto menor a transferência de energia, melhor é o desempenho do sistema de suspensão. A relação entre a vibração no sistema e a avaliação do operador é descrita na Norma ISO2631-1 e na figura abaixo.

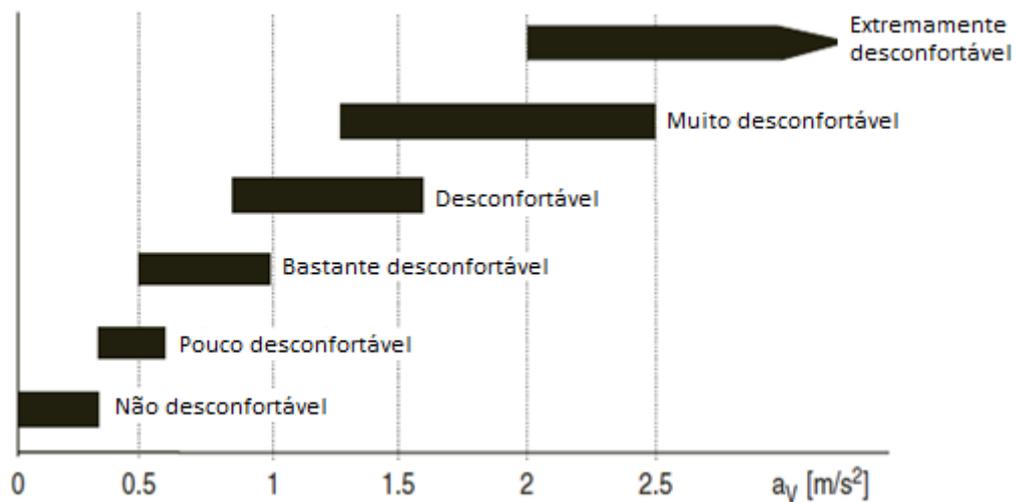


Figura 2 - Nível de conforto x aceleração

Outros objetivos devem ser considerados no projeto de uma suspensão. Alguns limites são o custo do sistema, o espaço necessário/disponível para o componente, nível de confiança e fator de segurança, entre outros. É necessário mencionar que numa suspensão real há limites para o deslocamento. Caso todo o curso da suspensão seja usado, a suspensão é bloqueada. Sem deslocamento, não há equalização das forças, sem falar no impacto no conforto. É extremamente importante selecionar a combinação certa de parâmetros.

A. Suspensão Passiva

Um sistema de suspensão geralmente consiste de uma mola e um amortecedor.

A mola seria suficiente para possibilitar o desacoplamento da superfície e o lado suspenso devido a suas propriedades elásticas e compensaria a aceleração/deslocamento da superfície. Porém, a mola acumularia energia e o sistema oscilaria permanentemente. No caso de uma excitação em uma frequência específica o sistema poderia entrar em ressonância, acumulando mais energia, levando o sistema a uma maior instabilidade.

Por esse motivo, quase sempre, se usa um amortecedor em combinação com uma mola. A energia acumulada pela mola é dissipada através do amortecedor, e a amplitude do movimento decresce. Quanto maior o coeficiente de dissipação, menor o tempo de estabilização e, em compensação, maior o acoplamento não-elástico.

São necessários experiência e testes para alcançar o melhor resultado. Os amortecedores mais utilizados são componentes hidráulicos que usam o deslocamento de um fluido interno e sua viscosidade para gerar as forças de dissipação.

Esses amortecedores apresentam atrito, que tem um efeito negativo no sistema. Esse atrito representa uma ligação direta entre o lado suspenso e o lado não-suspenso. A figura abaixo ilustra um sistema de suspensão passivo simplificado. Um método simples e eficiente para compensar esse atrito é a adição de outro elemento mola-amortecedor (por exemplo, uma bucha de borracha) em série com o sistema. Em alguns casos, múltiplos sistemas de desacoplamento são utilizados.

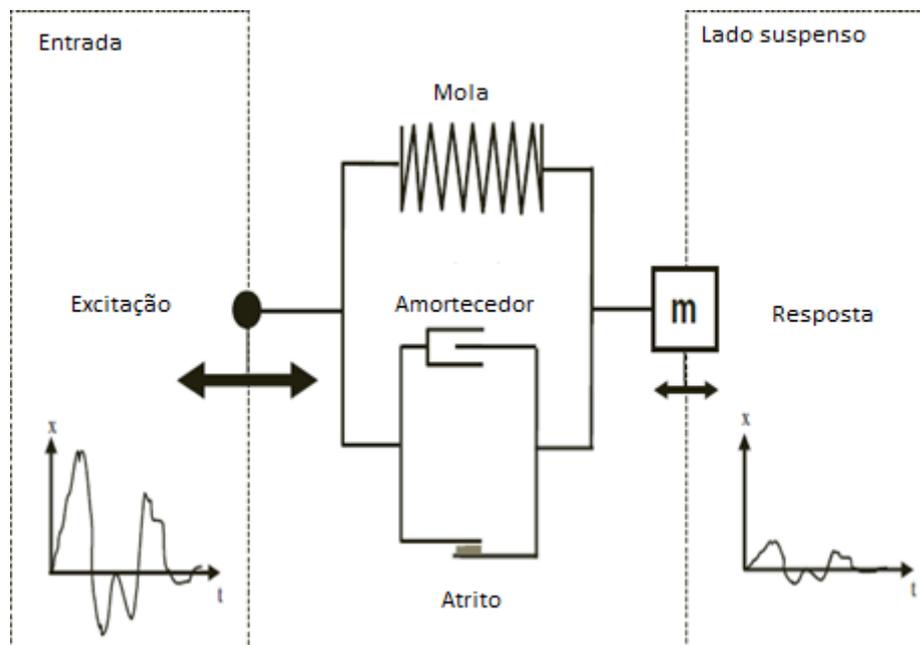


Figura 3 - Sistema de suspensão passivo

B. Suspensão Ativa

Um sistema ideal de suspensão deve ser capaz de cumprir varias funções, sendo algumas listadas abaixo.

- Absorver os solavancos impostos pela superfície.
- Controlar o ângulo de rolagem durante uma curva.
- Manter a altura do centro de gravidade.
- Controlar o ângulo de arfagem durante a aceleração e desaceleração.
- Proporcionar conforto aos passageiros.
- Isolar o lado suspenso do lado não-suspenso.

Em uma suspensão passiva essas funções são parcialmente alcançadas. Todavia, para satisfazer uma condição pode ser necessário comprometer outra condição.

Para que o controle opere eficientemente, vários sensores são colocados no carro para monitorar as variações do veículo. Os sinais elétricos são enviados a uma unidade central de processamento. A central processa os dados fornecidos, e toma as devidas ações de acordo com a situação. As instruções são convertidas em sinais elétricos e enviadas aos atuadores, que por sua vez controlam o veículo.

Esse tipo de suspensão apresenta um nível de dificuldade bastante elevado para os projetistas. O problema principal é a identificação dos parâmetros do veículo. Erros no cálculo desses parâmetros podem comprometer o desempenho da suspensão. Há também as variações nas condições de direção e da estrada.

Técnicas atuais de otimização ajudam a melhorar o desempenho do sistema mesmo sem o conhecimento total (usando Lógica Fuzzy).

Uma suspensão ativa deve cumprir todas as funções acima mencionadas, porém seu uso pode não ser possível devido a limitações físicas ou a seu custo. Mesmo sem limitações ainda é possível que o sistema não funcione como esperado devido às características do veículo.

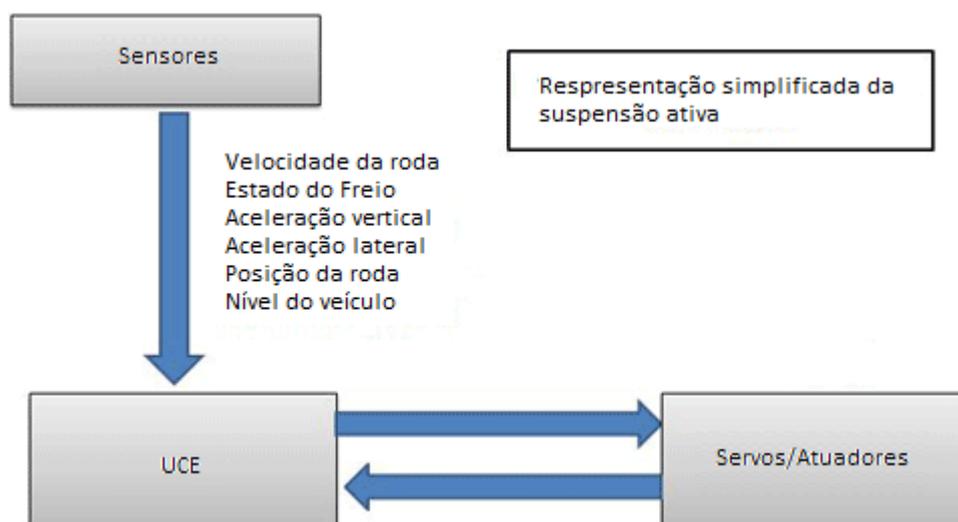


Figura 4 – Representação simplificada da suspensão ativa

C. Suspensão Semi-ativa

Suspensões semi-ativas foram introduzidas nos anos 1970 como uma alternativa às suspensões ativas, mais caras e complexas. A maior vantagem das suspensões semi-ativa é o fato de o sistema de controle utilizar o deslocamento e velocidade relativa.

No lugar de um atuador, a suspensão semi-ativa muda o valor dos coeficientes de amortecimento do sistema. Na figura abaixo um componente da suspensão semi-ativa desenvolvida pela Audi. Nesse caso há um fluido magnético que é influenciado pelo campo magnético, mudando assim suas características.

A maioria das suspensões automáticas são projetadas para ser semi-ativas, pois pode não ser vantajoso projetar um controle perfeito, uma vez que pode haver algumas deficiências resultantes do projeto da suspensão, chassis ou transmissão.

Um esquema de controle conhecido por "skyhook damping", baseado na medida da velocidade vertical absoluta do veículo, foi proposto nos anos 1970 por Karnopp, D. Sua idéia era obter a mesma força de amortecimento produzido por um amortecedor conectado a um sistema inercial ideal no céu.

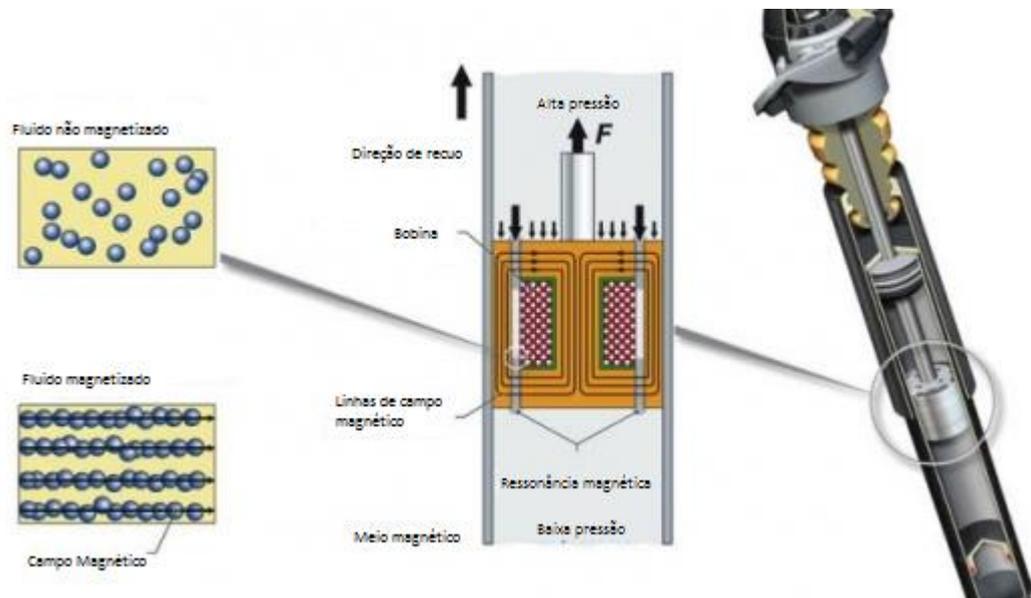


Figura 5 – Suspensão semi-ativa

D. Suspensão Interconectada

Uma suspensão interconectada é um sistema no qual cada conjunto de roda pode produzir forças nos outros conjuntos.

Em 1920, Hawley J. B. desenvolveu sistemas de interconexão para os ângulos de rolagem e arfagem, mostrados na figura abaixo. O sistema usava cilindros hidráulicos de dupla ação.

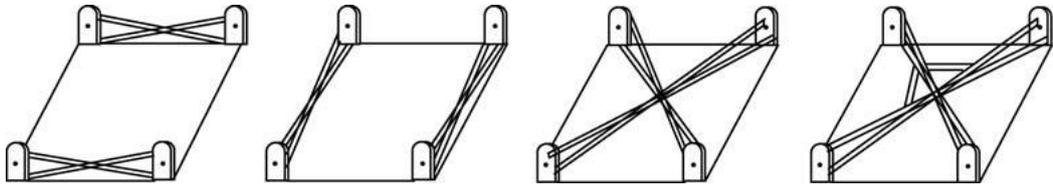


Figura 6 – Sistemas de interconexão desenvolvidos por Hawley J, B

Os primeiros usos da suspensão interconectada na indústria automobilística foram: a suspensão mecânica do Citroën 2CV de 1949 e hidro-pneumática Hydragas de Alex Moulton de 1962. Esses sistemas anti-síncronos ajustavam o modo de arfagem em relação ao modo de rolagem e elasticidade, melhorando seu desempenho.

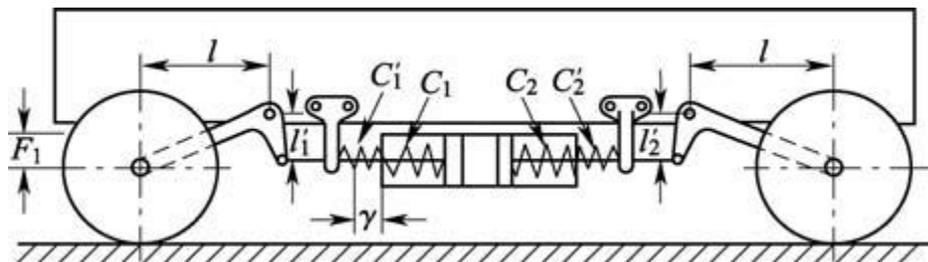


Figura 7 – Sistema de suspensão do Citroën 2CV

Alguns anos mais tarde, foi desenvolvido um modelo matemático composto por um sistema linear e bilinear representando as matrizes de rigidez e amortecimento. Essas matrizes foram determinadas empiricamente. Com isso foi descoberto que o modelo bilinear mais sofisticado estava limitado a uma precisão para uma excitação na faixa de frequências de 1 a 8 [Hz]

Durante as décadas de 1980 e 1990, a Toyota e a Nissan desenvolveram suspensões ativas interconectadas usando sistemas hidráulicos e pneumáticos.

Em meados de 1990, foi proposto um sistema hidráulico passivo de interconexão para o ângulo de rolagem. Baseado em simulações, o sistema tinha o potencial de aumentar a rigidez de rolagem e melhorar o conforto. O resultado da simulação mostrou uma melhora no sistema em relação à não utilização do sistema de interconexão.

O sistema de interconexão mais simples e usado atualmente é a barra anti-rolagem. Esse mecanismo de interconexão causa um aumento de rigidez do modo de rolagem através da conexão entre as rodas. Esse aumento de rigidez é benéfico para a direcionabilidade do veículo, porém o aumento de rigidez de articulação associado ao aumento de rigidez individual das rodas, compromete o desempenho do veículo.

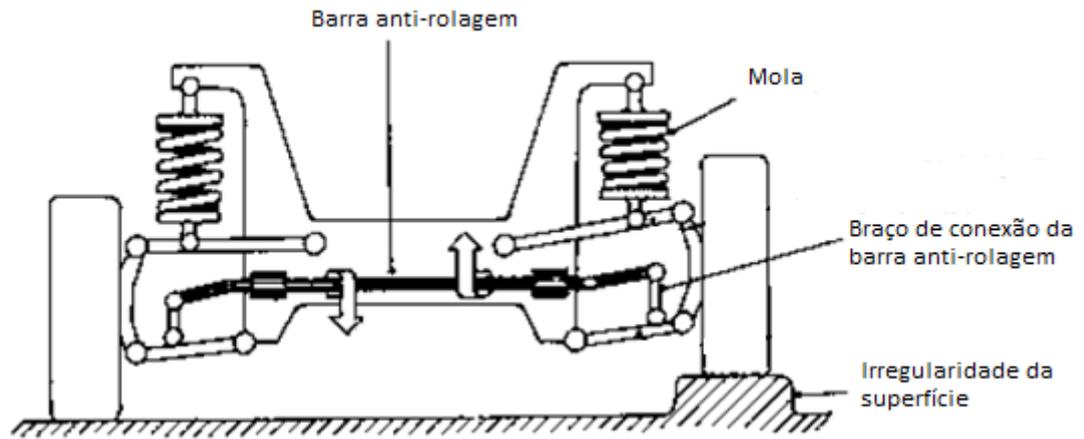


Figura 8 – Sistema da barra anti-rolagem

Se uma roda sofre um deslocamento vertical, é criado um torque na barra anti-rolagem que é proporcional ao ângulo de rotação. Esse torque é transferido para o braço oposto que aplica uma força para baixo no eixo e na roda. Como a roda não pode ficar no chão, essa reação ocorre no braço do mancal de borracha que tende a levantar o lado do chassi oposto à roda deslocada. Dessa maneira o chassi permanece nivelado.

A principal idéia da suspensão interconectada é distribuir a carga entre as rodas. O modelo proposto à seguir tem como objetivo amortecer e transferir as excitações da superfície de uma roda para a outra. A mola armazena parte dessa energia para corrigir o ângulo e o deslocamento do chassi.

A maior vantagem da suspensão inteconectada é o fato de ser possível projetar cada modo de suspensão separadamente do modo de cada roda, ou seja, é possível ajustar os parâmetros da suspensão sem mudar os parâmetros de cada sistema de roda.

3. Metodologia

Para simular o sistema é necessário obter as equações de movimento que o descrevem. O sistema a ser analisado será o modelo de meio carro passivo linear. Esse modelo (figura abaixo) é bastante utilizado no meio acadêmico.

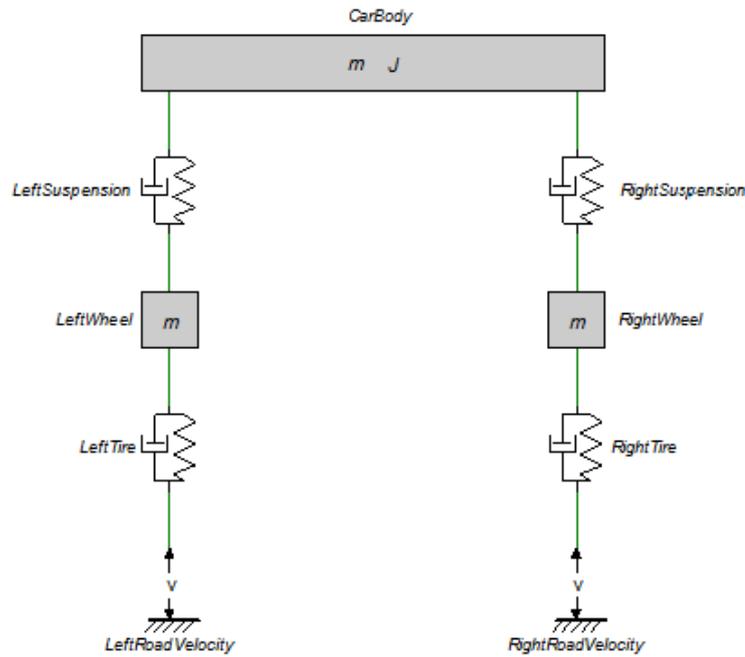


Figura 9 – Modelo simplificado de meio carro

As equações serão obtidas a partir do grafo de ligação do sistema. O sistema acima será usado como base para a análise comparativa.

O sistema abaixo representa uma suspensão interconectada.

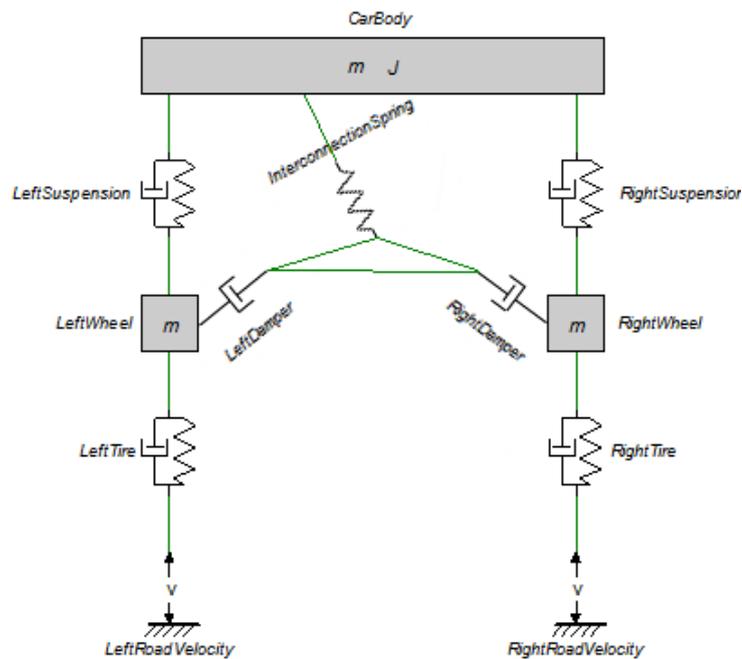


Figura 10 – Modelo simplificado de meio carro com o sistema de interconexão

Devido à sua complexidade, o sistema de interconexão será modelado a partir de sua geometria, depois será adicionado ao grafo de ligação do modelo passivo.

Abaixo estão as equações do sistema de interconexão. O vetor X está empilhado da seguinte maneira: $\bar{X} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$.

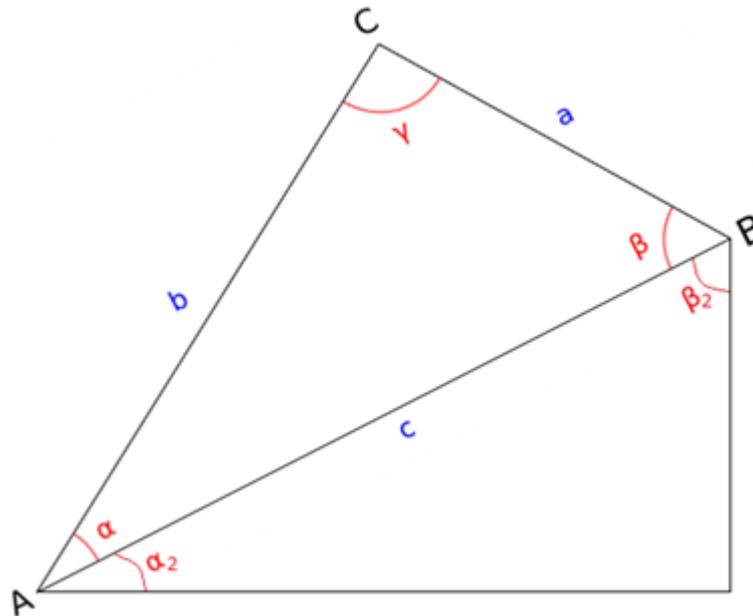


Figura 11 – Sistema de interconexão

Através da geometria do sistema é possível obter as equações abaixo.

$$\bar{X}_c = \begin{bmatrix} b \cdot \cos(\alpha + \alpha_2) \\ b \cdot \sin(\alpha + \alpha_2) \end{bmatrix} + \bar{X}_a = \begin{bmatrix} c \cdot \cos(\alpha_2) + a \cdot \cos\left(\pi - \beta - \beta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \\ c \cdot \sin(\alpha_2) + a \cdot \cos\left(\pi - \beta - \beta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} + \bar{X}_a \quad (1)$$

Usando a Lei dos Cossenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \quad (2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

Usando as propriedades geométricas do triângulo.

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{z_b - z_a}{c}, \frac{x_b - x_a}{c}\right) \quad (3)$$

$$\beta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$$

A seguir, as equações do amortecedores.

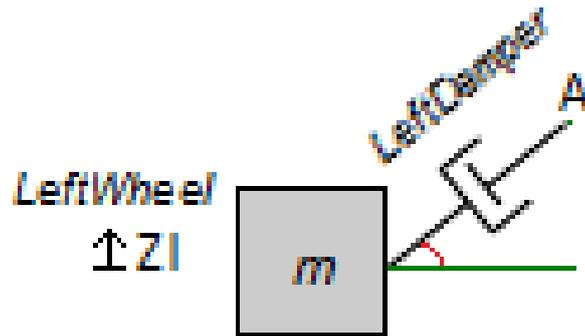


Figura 12 – Lado esquerdo do sistema de interconexão

$$\bar{x}_a = \begin{bmatrix} l_{b_l} \cdot \cos(\theta_l) \\ l_{b_l} \cdot \sin(\theta_l) \end{bmatrix} + \bar{x}_l \quad (4)$$

Analogamente para o lado direito.

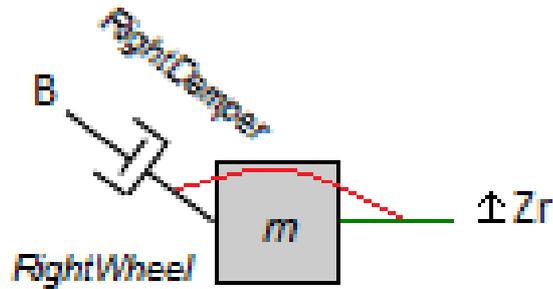


Figura 13 – Lado direito do sistema de interconexão

$$\bar{x}_b = \begin{bmatrix} l_{b_r} \cdot \cos(\theta_r) \\ l_{b_r} \cdot \sin(\theta_r) \end{bmatrix} + \bar{x}_r \quad (5)$$

Abaixo as equações para a mola do sistema de interconexão.

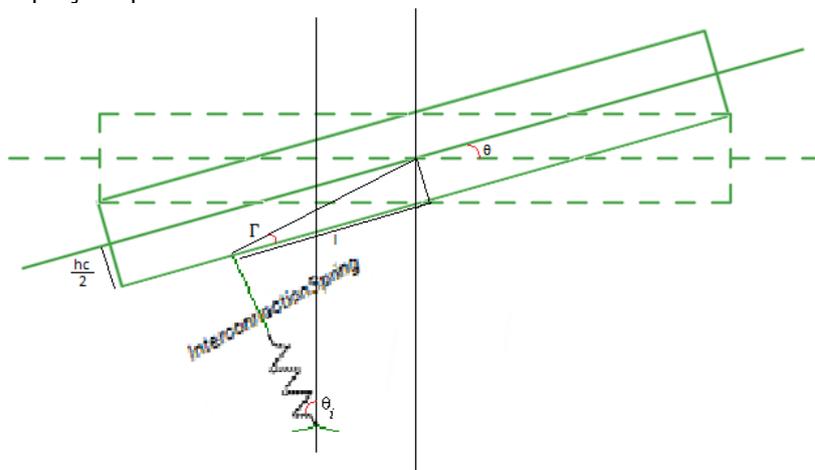


Figura 14 – Parte superior do sistema de interconexão

$$\bar{X}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{l^2 + \frac{h_c^2}{4} \cos(\Gamma + \theta)} \\ \sqrt{l^2 + \frac{h_c^2}{4} \sin(\Gamma + \theta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{ki} \cdot \cos\left(\theta_i + \frac{\pi}{2}\right) \\ l_{ki} \cdot \sin\left(\theta_i + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} + \bar{X}_c \quad (6)$$

$$\Gamma = \tan^{-1}\left(\frac{h_c}{2l}\right) \quad (7)$$

Abaixo a matriz Jacobiana do sistema de interconexão. Os cálculos que levaram a esse resultado encontram-se no Anexo Maple.

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cos(\theta)l - \sin(\theta)h_c}{\cos(\theta_i)} & \frac{1}{\cos(\theta_i)} & \frac{\sin(\theta_r + \theta_l) - \sin(\theta_l - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_l - \theta_r) - \sin(\theta_i + \theta_r - \theta_l)} & \frac{-\sin(\theta_r + \theta_l) - \sin(\theta_l - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_l - \theta_r) - \sin(\theta_i + \theta_r - \theta_l)} \\ 0 & 0 & -\frac{\cos(\theta_r)}{\sin(\theta_l - \theta_r)} & \frac{\cos(\theta_r)}{\sin(\theta_l - \theta_r)} \\ 0 & 0 & -\frac{\cos(\theta_l)}{\sin(\theta_l - \theta_r)} & \frac{\cos(\theta_l)}{\sin(\theta_l - \theta_r)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Como o sistema proposto supõe que o ângulo é pequeno, é necessário fazer uma linearização no elemento J_{11} para $-\frac{1}{2} \cdot \frac{2l - \theta h_c}{\cos(\theta_i)}$. Supondo que $h_c = 0$, $J_{11} = -\frac{l}{\cos(\theta_i)}$.

A partir da matriz Jacobiana do sistema de interconexão foi desenvolvido o grafo de ligação abaixo.

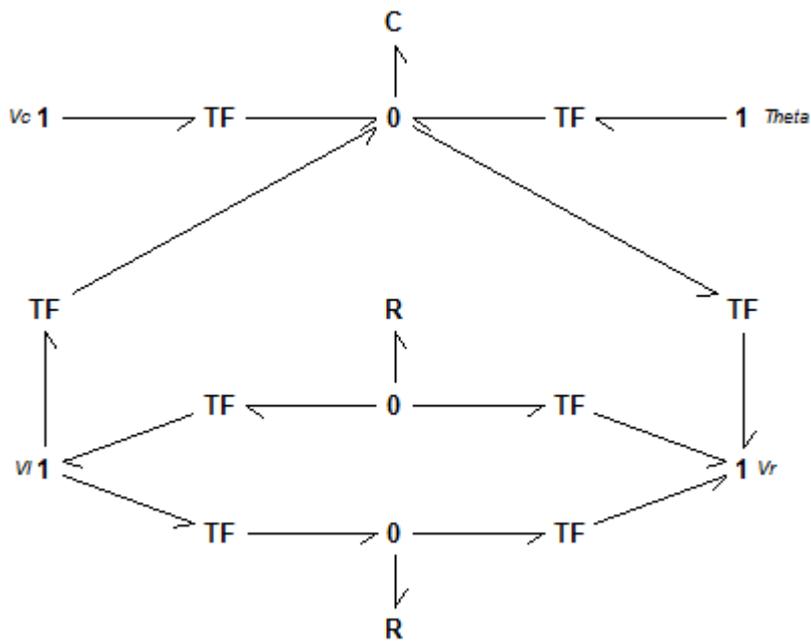


Figura 15 – Grafo de ligação do sistema de interconexão

Neste grafo, cada elemento transformador é um elemento da Matrix Jacobiana. Após seu desenvolvimento, é necessário incorporar esse grafo no modelo passivo.

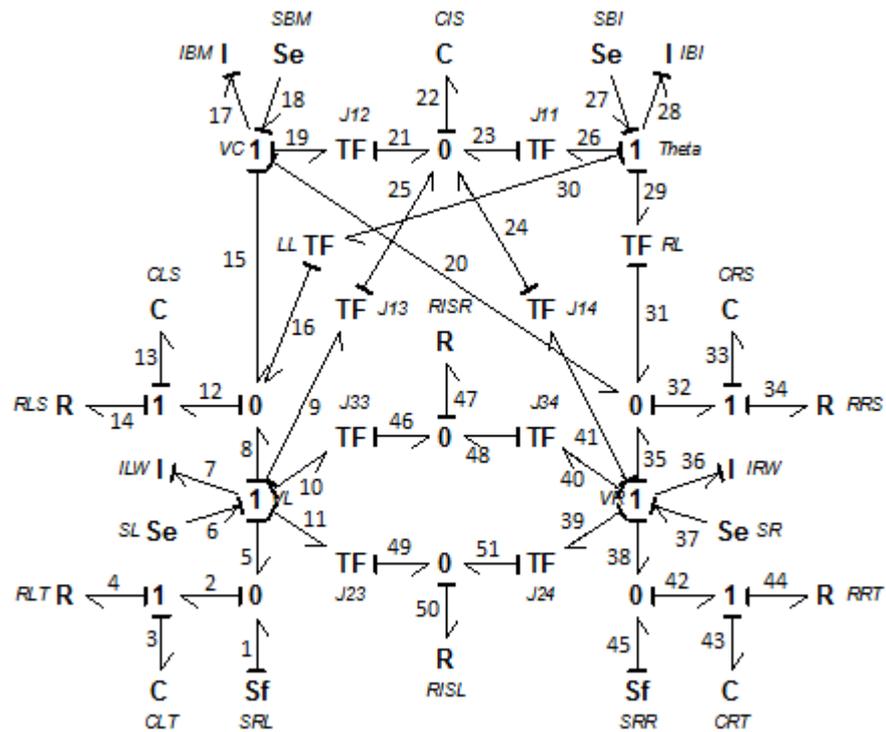


Figura 16 – Grafo de ligação do sistema

Abaixo as equações de cada elemento do grafo.

Fontes

$$\begin{aligned}
 S_f &\rightarrow \begin{cases} e_1; f_1 \\ e_{45}; f_{45} \end{cases} \\
 S_e &\rightarrow \begin{cases} e_6; f_6 \\ e_{18}; f_{18} \\ e_{27}; f_{27} \\ e_{37}; f_{37} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Resistores (R:b)

$$R \rightarrow \begin{cases} e_4 = R_4 f_4 \\ e_{14} = R_{14} f_{14} \\ e_{34} = R_{34} f_{34} \\ e_{44} = R_{44} f_{44} \\ e_{47} = R_{47} f_{47} \\ e_{50} = R_{50} f_{50} \end{cases} \tag{10}$$

Capacitores (C:1/k)

$$C \rightarrow \begin{cases} e_3 = \frac{1}{C_3} q_3; \dot{q}_3 = f_3 \\ e_{13} = \frac{1}{C_{13}} q_{13}; \dot{q}_{13} = f_{13} \\ e_{22} = \frac{1}{C_{22}} q_{22}; \dot{q}_{22} = f_{22} \\ e_{33} = \frac{1}{C_{33}} q_{33}; \dot{q}_{33} = f_{33} \\ e_{43} = \frac{1}{C_{43}} q_{43}; \dot{q}_{43} = f_{43} \end{cases} \tag{11}$$

Inércias (I:m)

$$I \rightarrow \begin{cases} f_7 = \frac{1}{I_7} p_7; \dot{p}_7 = e_7 \\ f_{17} = \frac{1}{I_{17}} p_{17}; \dot{p}_{17} = e_{17} \\ f_{28} = \frac{1}{I_{28}} p_{28}; \dot{p}_{28} = e_{28} \\ f_{36} = \frac{1}{I_{36}} p_{36}; \dot{p}_{36} = e_{36} \end{cases} \quad (12)$$

Transformadores

$$TF \rightarrow \begin{cases} f_{11} = J_{23}^{-1} f_{49}; e_{49} = J_{23}^{-1} e_{11} \\ f_{10} = J_{33}^{-1} f_{46}; e_{46} = J_{33}^{-1} e_{10} \\ f_9 = J_{13}^{-1} f_{25}; e_{25} = J_{13}^{-1} e_9 \\ f_{30} = L_l^{-1} f_{16}; e_{16} = L_l^{-1} e_{30} \\ f_{19} = J_{12}^{-1} f_{21}; e_{21} = J_{12}^{-1} e_{19} \\ f_{26} = J_{11}^{-1} f_{23}; e_{23} = J_{11}^{-1} e_{26} \\ f_{41} = J_{14}^{-1} f_{24}; e_{24} = J_{14}^{-1} e_{41} \\ f_{29} = R_l^{-1} f_{31}; e_{31} = R_l^{-1} e_{29} \\ f_{40} = J_{34}^{-1} f_{48}; e_{48} = J_{34}^{-1} e_{40} \\ f_{39} = J_{24}^{-1} f_{51}; e_{51} = J_{24}^{-1} e_{39} \end{cases} \quad (13)$$

Junções 1

$$1 \rightarrow \begin{cases} f_3 = f_2; f_4 = f_2; e_2 = e_4 + e_3 \\ \begin{cases} f_5 = f_7; f_6 = f_7; f_8 = f_7; f_9 = f_7; f_{10} = f_7; f_{11} = f_7 \\ e_7 = (e_6) - (e_5 + e_8 + e_9 + e_{10} + e_{11}) \end{cases} \\ f_{13} = f_{12}; f_{14} = f_{12}; e_{12} = e_{14} + e_{13} \\ f_{15} = f_{17}; f_{18} = f_{17}; f_{19} = f_{17}; f_{20} = f_{17}; e_{17} = (e_{18}) - (e_{15} + e_{19} + e_{20}) \\ f_{26} = f_{28}; f_{27} = f_{28}; f_{29} = f_{28}; f_{30} = f_{28}; e_{28} = (e_{27}) - (e_{26} + e_{29} + e_{30}) \\ f_{34} = f_{32}; f_{33} = f_{32}; e_{32} = e_{34} + e_{33} \\ \begin{cases} f_{35} = f_{36}; f_{37} = f_{36}; f_{38} = f_{36}; f_{39} = f_{36}; f_{40} = f_{36}; f_{41} = f_{36} \\ e_{36} = (e_{37}) - (e_{35} + e_{38} + e_{39} + e_{40} + e_{41}) \end{cases} \\ f_{43} = f_{42}; f_{44} = f_{42}; e_{42} = e_{44} + e_{43} \end{cases} \quad (14)$$

Junções 0

$$0 \rightarrow \begin{cases} e_1 = e_2; e_5 = e_2; f_2 = f_1 + f_5 \\ e_{49} = e_{50}; e_{51} = e_{50}; f_{50} = f_{49} + f_{51} \\ e_8 = e_{12}; e_{15} = e_{12}; e_{16} = e_{12}; f_{12} = f_8 + f_{15} + f_{16} \\ e_{21} = e_{22}; e_{23} = e_{22}; e_{24} = e_{22}; e_{25} = e_{22}; f_{22} = f_{21} + f_{23} + f_{24} + f_{25} \\ e_{20} = e_{32}; e_{31} = e_{32}; e_{35} = e_{32}; f_{32} = f_{20} + f_{31} + f_{35} \\ e_{46} = e_{47}; e_{48} = e_{47}; f_{47} = f_{46} + f_{48} \\ e_{38} = e_{42}; e_{45} = e_{42}; f_{42} = f_{38} + f_{45} \end{cases} \quad (15)$$

As equações diferenciais que encontram-se no anexo podem ser obtidas a partir das equações acima. Uma vez obtidas, basta montar a matriz do sistema.

Matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_7} & \frac{1}{I_{17}} & \frac{1}{L_1^{-1} \cdot I_{28}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_{13}^{-1} \cdot I_7} & \frac{1}{J_{12}^{-1} \cdot I_{17}} & \frac{1}{J_{11}^{-1} \cdot I_{28}} & \frac{1}{J_{14}^{-1} \cdot I_{36}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{17}} & \frac{1}{R_1^{-1} \cdot I_{28}} & \frac{1}{I_{36}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{36}} \\ \frac{1}{C_3} & -\frac{1}{C_{13}} & -\frac{1}{J_{13}^{-1} \cdot C_{22}} & \frac{1}{C_{22}} & 0 & 0 & -\frac{1}{I_7} \cdot \left(R_4 + R_{14} + \frac{R_{47}}{J_{33}^{-2}} + \frac{R_{50}}{J_{23}^{-2}} \right) & -\frac{R_{14}}{I_{17}} & -\frac{1}{L_1^{-1} \cdot I_{28}} \cdot R_{14} & -\frac{1}{I_{36}} \cdot \left(\frac{R_{47}}{J_{33}^{-1}} \cdot \frac{1}{J_{34}^{-1}} + \frac{R_{50}}{J_{23}^{-1}} \cdot \frac{1}{J_{24}^{-1}} \right) \\ 0 & -\frac{1}{C_{13}} & -\frac{1}{J_{12}^{-1} \cdot C_{22}} & \frac{1}{C_{22}} & 0 & 0 & -\frac{R_{14}}{I_7} & -\frac{R_{14} + R_{34}}{I_{17}} & -\frac{1}{I_{28}} \cdot \left(\frac{R_{14}}{L_1^{-1}} + \frac{R_{34}}{R_1^{-1}} \right) & -\frac{1}{I_{36}} \\ 0 & -\frac{1}{L_1^{-1} \cdot C_{13}} & -\frac{1}{J_{11}^{-1} \cdot C_{22}} & \frac{1}{C_{22}} & 0 & 0 & -\frac{R_{14}}{L_1^{-1} \cdot I_7} & -\frac{1}{I_{17}} \cdot \left(\frac{R_{34}}{R_1^{-1}} + \frac{R_{14}}{L_1^{-1}} \right) & -\frac{1}{I_{28}} \cdot \left(\frac{R_{34}}{R_1^{-1}} + \frac{R_{14}}{L_1^{-1}} \right) & -\frac{R_{34}}{I_{36}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{J_{14}^{-1} \cdot C_{22}} & \frac{1}{C_{22}} & -\frac{1}{C_{33}} & -\frac{1}{C_{43}} & -\frac{1}{I_7} \cdot \left(\frac{1}{J_{24}^{-1}} \cdot \frac{R_{50}}{J_{23}^{-1}} + \frac{1}{J_{34}^{-1}} \cdot \frac{R_{47}}{J_{33}^{-1}} \right) & -\frac{R_{34}}{I_{17}} & -\frac{R_{34}}{R_1^{-1} \cdot I_{28}} & -\frac{1}{I_{36}} \cdot \left(R_{34} + R_{44} + \frac{R_{50}}{J_{24}^{-2}} + \frac{R_{47}}{J_{34}^{-2}} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_3 \\ q_{13} \\ q_{22} \\ q_{33} \\ q_{43} \\ p_7 \\ p_{17} \\ p_{28} \\ p_{36} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Matriz B

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -R_{44} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_{45} \\ e_{18} \\ e_6 \\ e_{37} \\ e_{27} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Para usar o sistema em variáveis de potência é necessário multiplicar o vetor de variáveis pela matriz de transformação.

$$\begin{bmatrix} F_{lt} \\ F_{ls} \\ F_{ki} \\ F_{rs} \\ F_{rt} \\ V_L \\ V_C \\ \omega \\ V_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{13}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{33}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{43}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{17}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{28}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{36}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_3 \\ q_{13} \\ q_{22} \\ q_{33} \\ q_{43} \\ p_7 \\ p_{17} \\ p_{28} \\ p_{36} \end{bmatrix} \quad (18)$$

A seguir a equação de estado em variáveis de potência.
Matriz A.

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{13}} & \frac{1}{C_{13}} & \frac{L_l}{C_{13}} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_{13}}{C_{22}} & \frac{J_{12}}{C_{22}} & \frac{J_{11}}{C_{22}} & \frac{J_{14}}{C_{22}} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{33}} & \frac{R_l}{C_{33}} & \frac{1}{C_{33}} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{43}} \\
 -\frac{1}{m_7} & -\frac{1}{m_7} & -\frac{J_{13}}{m_7} & 0 & 0 & -\frac{R_4 + R_{14} + R_{47} J_{33}^2 + R_{50} J_{23}^2}{m_7} & -\frac{R_{14}}{m_7} & -\frac{L_l R_{14}}{m_7} & -\frac{R_{47} J_{33} J_{34} + R_{50} J_{23} J_{24}}{m_7} \\
 0 & -\frac{1}{m_{17}} & -\frac{J_{12}}{m_{17}} & -\frac{1}{m_{17}} & 0 & -\frac{R_{14}}{m_{17}} & -\frac{R_{14} + R_{34}}{m_{17}} & -\frac{L_l R_{14} + R_{34} R_l}{m_{17}} & -\frac{R_{34}}{m_{17}} \\
 0 & -\frac{L_l}{m_{28}} & -\frac{J_{11}}{m_{28}} & -\frac{R_l}{m_{28}} & 0 & -\frac{L_l R_{14}}{m_{28}} & -\frac{L_l R_{14} + R_{34} R_l}{m_{28}} & -\frac{R_{34} R_l^2 + R_{14} L_l^2}{m_{28}} & -\frac{R_l R_{34}}{m_{28}} \\
 0 & 0 & -\frac{J_{14}}{m_{36}} & -\frac{1}{m_{36}} & -\frac{1}{m_{36}} & -\frac{R_{47} J_{33} J_{34} + R_{50} J_{23} J_{24}}{m_{36}} & -\frac{R_{34}}{m_{36}} & -\frac{R_l R_{34}}{m_{36}} & -\frac{R_{34} + R_{44} + R_{50} J_{24}^2 + R_{47} J_{34}^2}{m_{36}}
 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Matriz B.

$$\begin{bmatrix}
 \frac{1}{C_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{C_{43}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{R_4}{m_7} & 0 & 0 & \frac{1}{m_7} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{m_{17}} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_{28}} \\
 0 & -\frac{R_{44}}{m_{36}} & 0 & 0 & \frac{1}{m_{36}} & 0
 \end{bmatrix} \quad (20)$$

4. Resultados

A seguir os resultados da simulação com os seguintes parâmetros de um veículo médio real. Os resultados apresentados abaixo foram simulados usando-se o programa MATLAB/Simulink. O roteiro da simulação e o diagrama em blocos encontram-se nos Anexos MATLAB e Simulink. Os parâmetros de simulação para o sistema de interconexão são: 50%, 10%, 100% e 200% dos respectivos parâmetros do sistema de suspensão convencional.

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Massa de meio veículo	M_C	450	Kg
Massa da roda esquerda	M_{LW}	40	Kg
Massa da roda direita	M_{RW}	40	Kg
Momento de inércia do veículo	J_C	900	Kg m ²
Rigidez do pneu esquerdo	K_{LT}	150000	N/m
Rigidez do pneu direito	K_{RT}	150000	N/m
Dissipação do pneu esquerdo	B_{LT}	200	N/m/s
Dissipação do pneu direito	B_{RT}	200	N/m/s
Rigidez da suspensão esquerda	K_{LS}	15000	N/m
Rigidez da suspensão direita	K_{RS}	15000	N/m
Dissipação da suspensão esquerda	B_{LS}	2000	N/m/s
Dissipação da suspensão direita	B_{RS}	2000	N/m/s
Rigidez da suspensão interconectada	K_I	7500	N/m
		1500	
		15000	
		30000	
Dissipação da suspensão interconectada esquerda	B_{LI}	1000	N/m/s
		200	
		2000	
		4000	
Dissipação da suspensão interconectada direita	B_{RI}	1000	N/m/s
		200	
		2000	
		4000	
Ângulo de interconexão central	θ_i	0	rad
Ângulo de interconexão esquerdo	θ_L	$\frac{\pi}{4}$	rad
Ângulo de interconexão direito	θ_R	$\frac{3\pi}{4}$	rad
Distância entre o CG e a mola de interconexão	l	0	m
Distância entre o CG e a suspensão esquerda	L_l	0.6	m
Distância entre o CG e a suspensão direita	L_r	0.6	m

Tabela 1 – Parâmetros de simulação

Os pólos do sistema são determinados achando os auto-valores da matriz A.

Passivo	Interconectado (50%)	Interconectado (10%)	Interconectado (100%)	Interconectado (200%)
$-27.50 + 58.04i$	$-52.50 + 36.99i$	$-37.50 + 52.14i$	-120.87	-237.64
$-27.50 - 58.04i$	$-52.50 - 36.99i$	$-37.50 - 52.14i$	$-27.62 + 54.45i$	$-27.34 + 55.46i$
$-27.90 + 53.44i$	$-27.76 + 53.94i$	$-27.85 + 53.64i$	$-27.62 - 54.45i$	$-27.34 - 55.46i$
$-27.90 - 53.44i$	$-27.76 - 53.94i$	$-27.85 - 53.64i$	-34.13	-17.36
$-4.84 + 7.60i$	$-4.96 + 8.19i$	$-4.89 + 7.84i$	$-5.04 + 8.76i$	$-5.19 + 9.81i$
$-4.84 - 7.60i$	$-4.96 - 8.19i$	$-4.89 - 7.84i$	$-5.04 - 8.76i$	$-5.19 - 9.81i$
0	$-0.02 + 2.03i$	$-0.00 + 1.33i$	$-0.08 + 2.70i$	$-0.21 + 3.43i$
0	$-0.02 - 2.03i$	$-0.00 - 1.33i$	$-0.08 - 2.70i$	$-0.21 - 3.43i$
-	0	0	0	0

Tabela 2 – Auto-valores dos sistemas

A diferença principal entre os sistemas, é a presença de um auto-valor extra no sistema interconectado devido à mola de interconexão.

Os gráficos 1 a 3 mostram o diagrama de Bode de cada sistema.

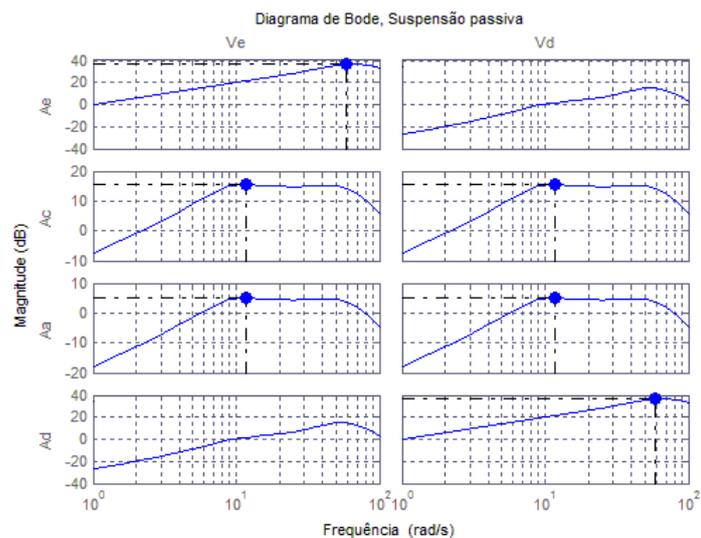


Gráfico 1 – Diagrama de Bode do sistema passivo

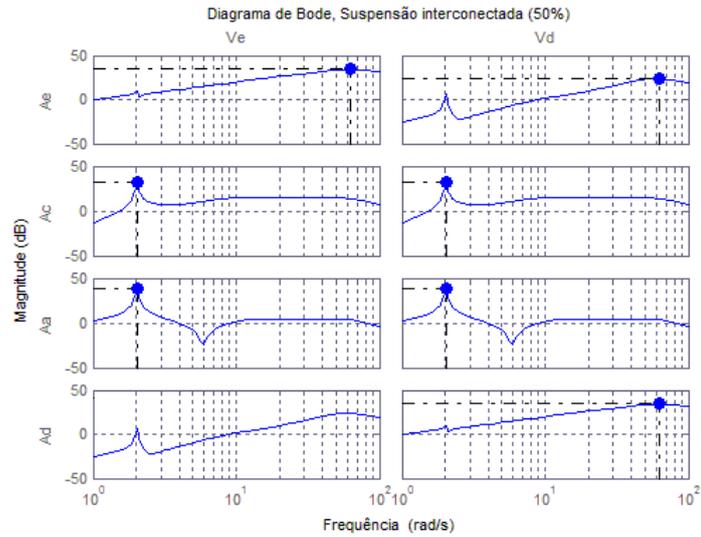


Gráfico 2 – Diagrama de Bode do sistema interconectado (50%)

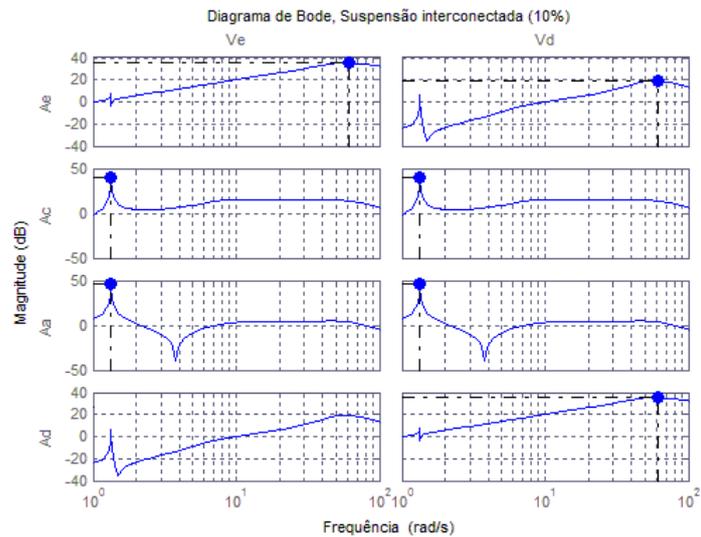


Gráfico 3 – Diagrama de Bode do sistema interconectado (10%)

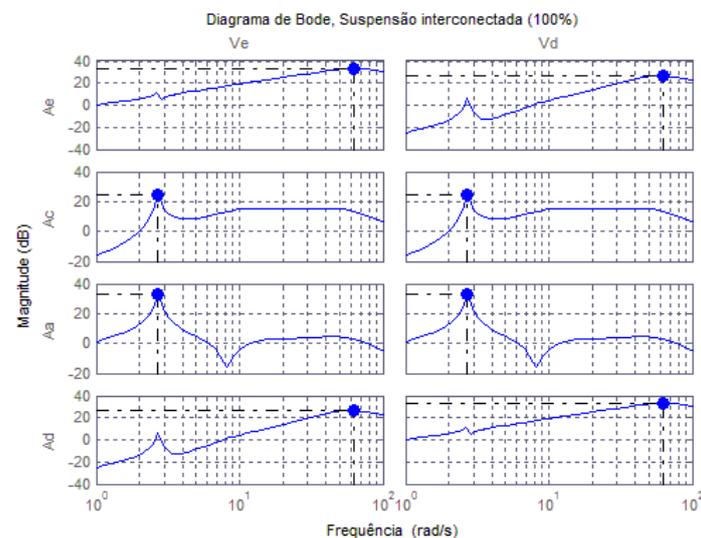


Gráfico 4 – Diagrama de Bode do sistema interconectado (100%)

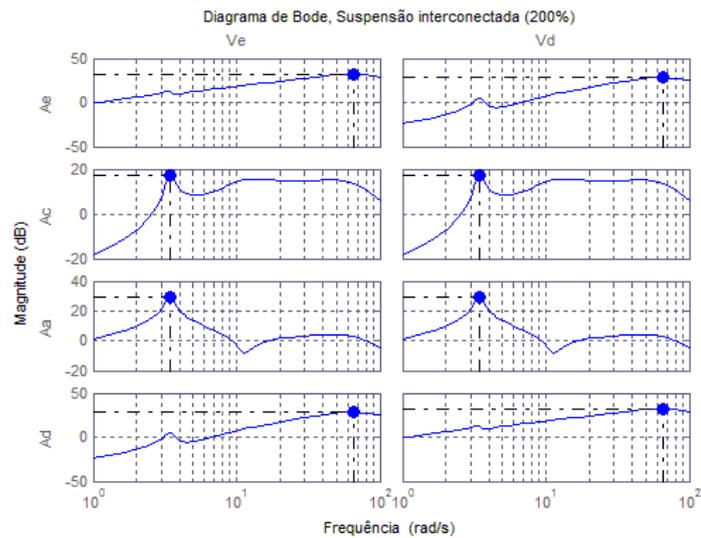


Gráfico 5 – Diagrama de Bode do sistema interconectado (200%)

Os gráficos acima revelam que para certas condições de superfície, um sistema atenua as excitações de entrada enquanto o outro sistema amplifica essas excitações. O ponto em azul representa o valor máximo de amplificação de um sistema para uma certa superfície.

Os gráficos a seguir mostram o resultado das simulações dos sistemas desprezando os efeitos da gravidade. Foram feitas quatro simulações com entradas diferentes e observando as acelerações lineares das massas não suspensas e a aceleração linear e angular da massa suspensa.

Os gráficos abaixo mostram o resultado das simulações para a entrada zero para um lado do veículo e um pulso de velocidade com amplitude 1000 [m/s] durante 1/1000 [s]. Isto é equivalente a uma roda subir sobre um objeto (meio-fio, por exemplo) e a outra roda permanecer no chão.

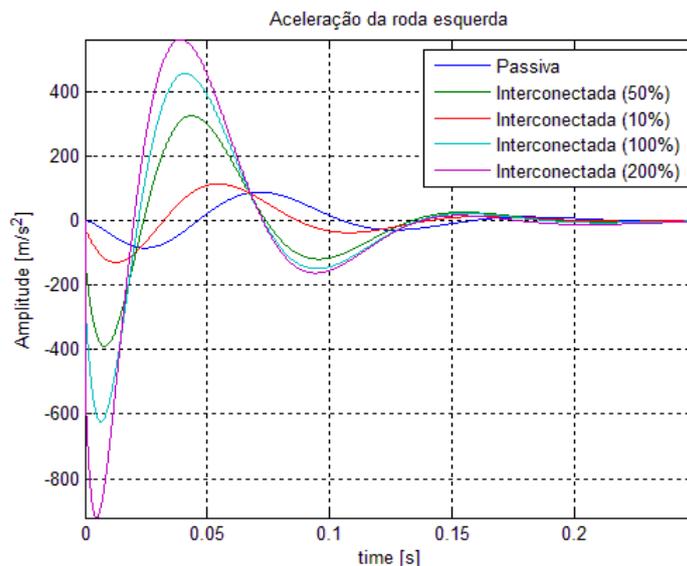


Gráfico 6 – Aceleração da roda esquerda para simulação 1

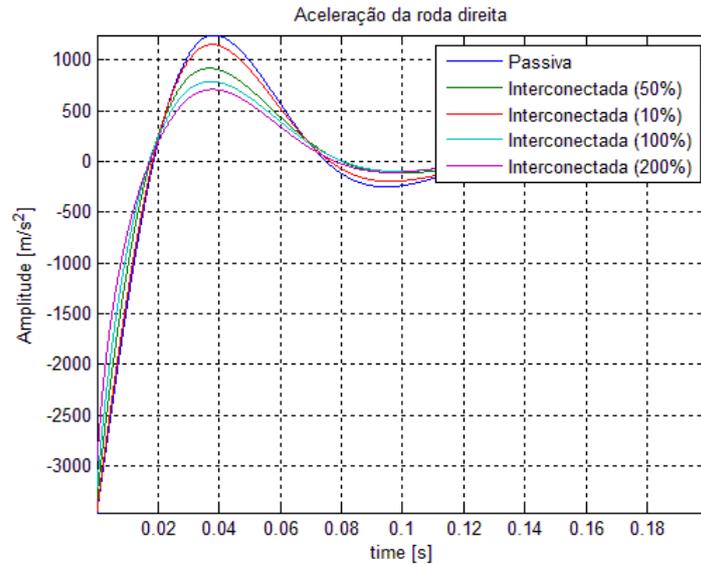


Gráfico 7 – Aceleração da roda direita para simulação 1

O gráfico mostra que o sistema consegue distribuir a aceleração de um conjunto de roda para o outro.

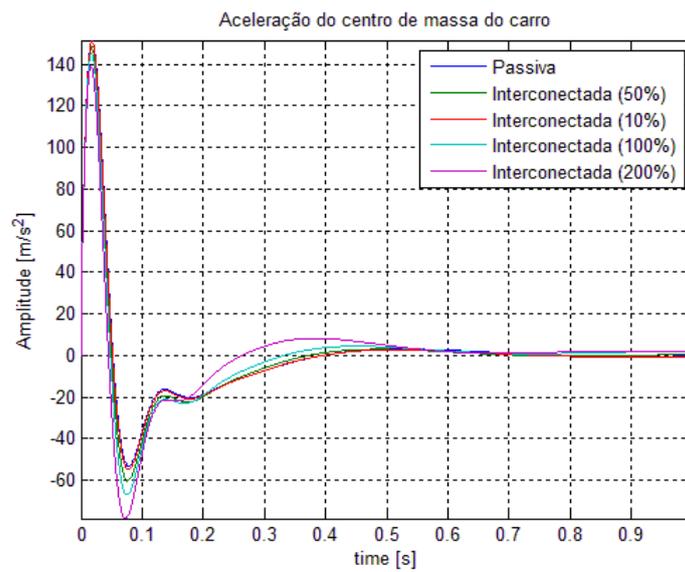


Gráfico 8 – Aceleração do centro de massa do veículo para simulação 1

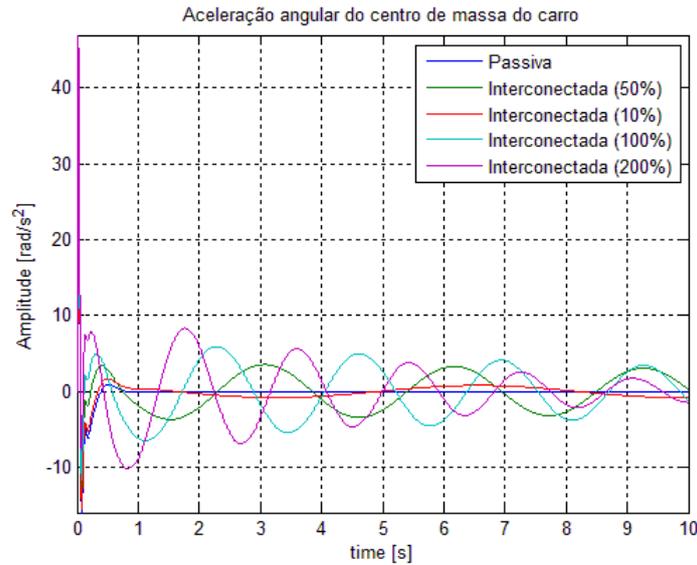


Gráfico 9 – Aceleração angular do centro de massa do veículo para simulação 1

Essa transferência de aceleração causa um efeito de oscilação no chassi. Os valores para os componentes devem ser ajustados para melhorar o resultado.

Os gráficos abaixo mostram o resultado das simulações para um pulso de velocidade com amplitude 2000 [m/s] durante 1/1000 [s], para um lado do veículo e um pulso de velocidade com amplitude 1000 [m/s] durante 1/1000 [s] para o outro lado. Este caso é similar à simulação 1, porém as duas rodas sofrem deslocamentos verticais com amplitudes diferentes.

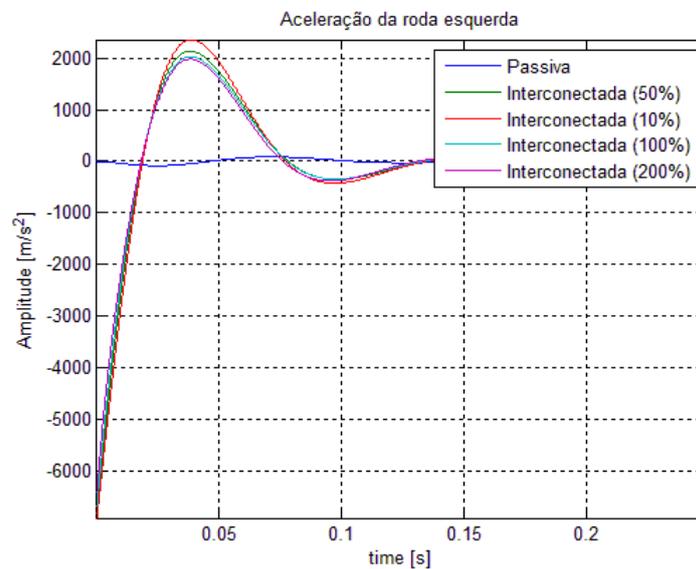


Gráfico 10 – Aceleração da roda esquerda para simulação 2

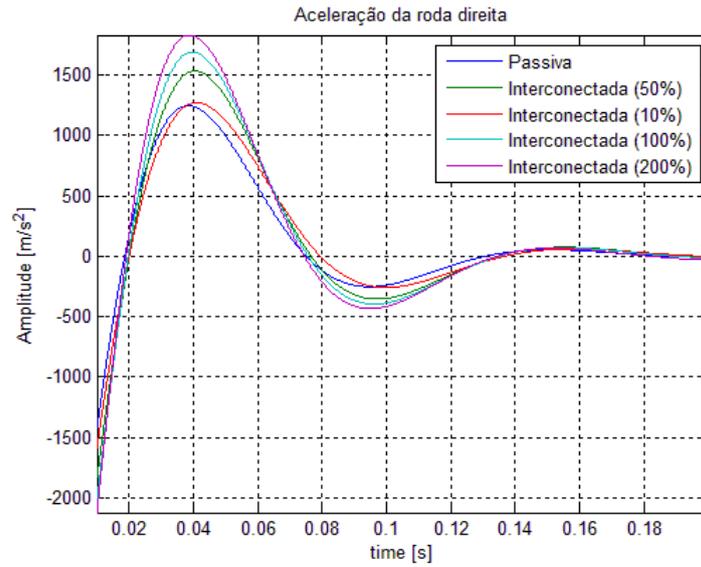


Gráfico 11 – Aceleração da roda direita para simulação 2

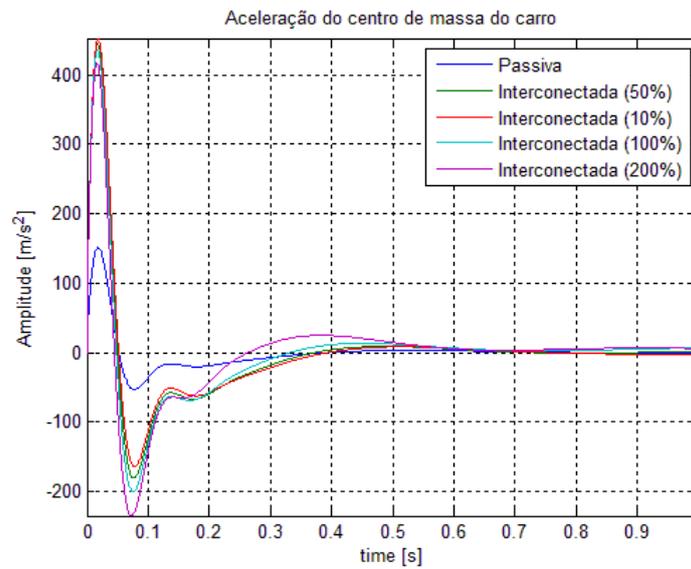


Gráfico 12 – Aceleração do centro de massa do veículo para simulação 2

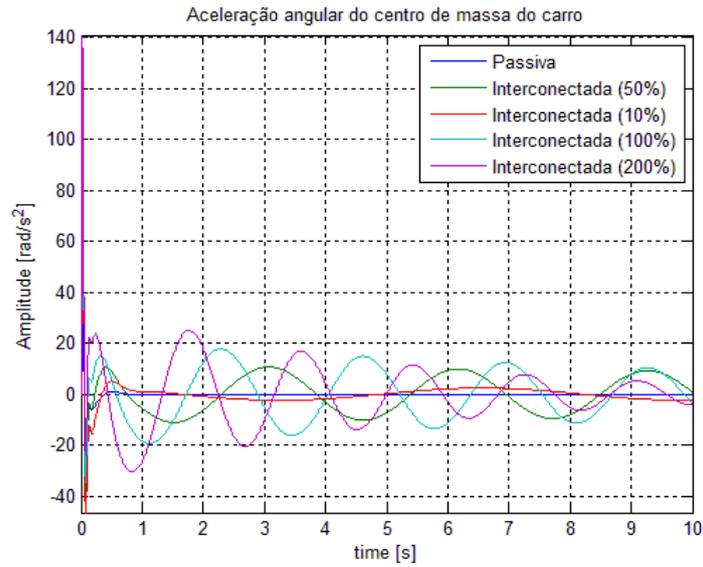


Gráfico 13 – Aceleração angular do centro de massa do veículo para simulação 2

Os gráficos abaixo mostram o resultado das simulações para um sinal oscilatório de amplitude 1 [m/s] e frequência de 1 [Hz] para um lado do veículo e o mesmo sinal defasado de $\pi/2$ para o outro lado. Este caso é equivalente a trafegar sobre uma superfície ondulada.

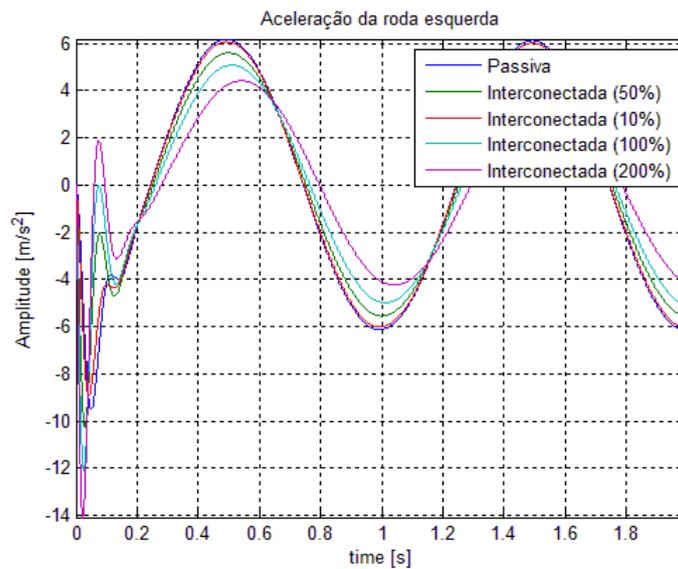


Gráfico 14 – Aceleração da roda esquerda para simulação 3

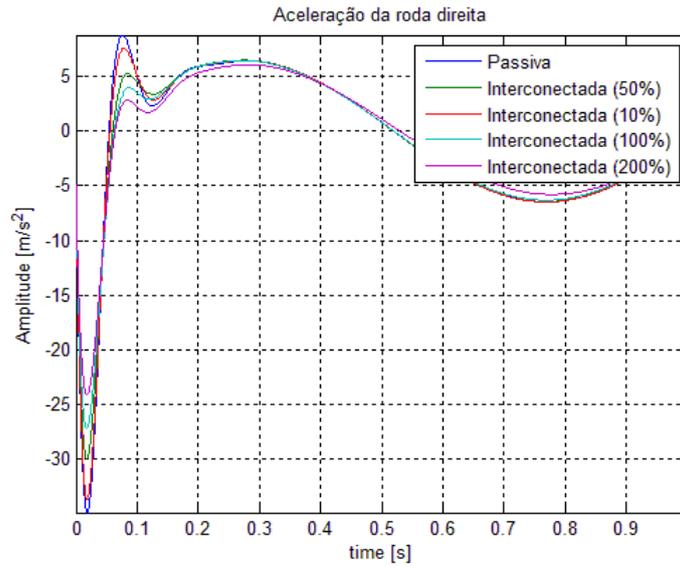


Gráfico 15 – Aceleração da roda direita para simulação 3

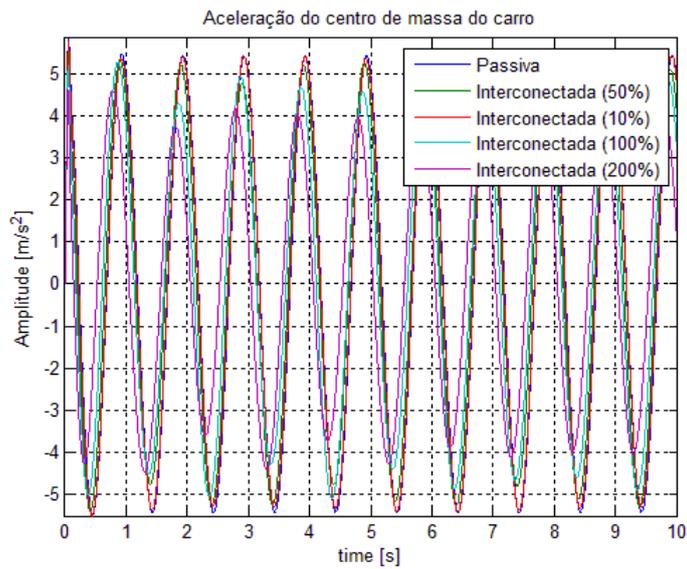


Gráfico 16 – Aceleração do centro de massa do veículo para simulação 3

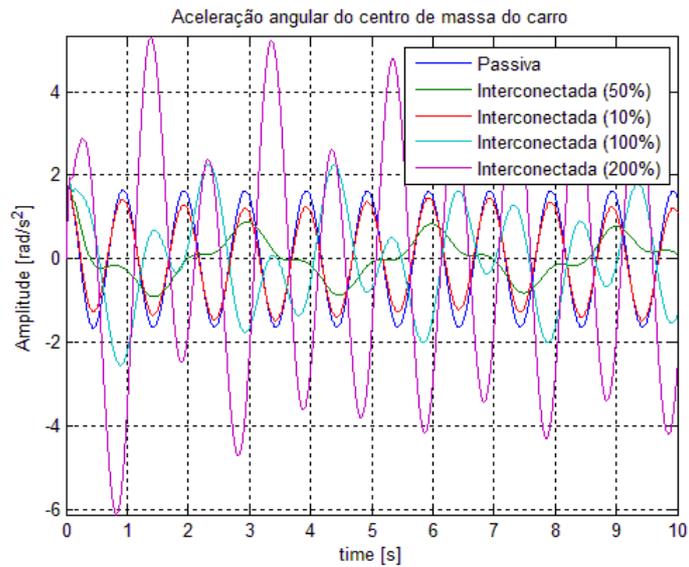


Gráfico 17 – Aceleração angular do centro de massa do veículo para simulação 3

O mesmo efeito de transferência acontece na simulação acima, o que pode explicar a melhora na aceleração angular do chassi do veículo.

Os gráficos abaixo mostram o resultado das simulações para um sinal oscilatório de amplitude 1 [m/s] e frequência de 10 [Hz] para um lado do veículo e o mesmo sinal defasado de $\pi/2$ para o outro lado. Esta é similar à simulação 3, porém o veículo se desloca a uma velocidade maior.

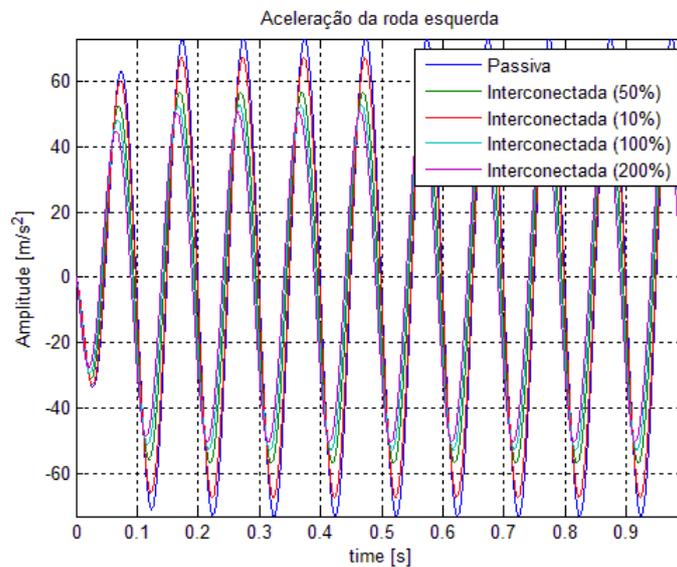


Gráfico 18 – Aceleração da roda esquerda para simulação 4

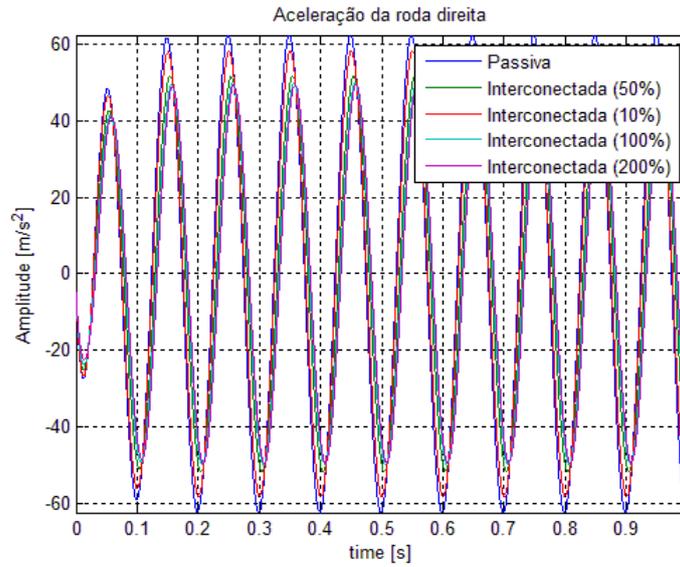


Gráfico 19 – Aceleração da roda direita para simulação 4

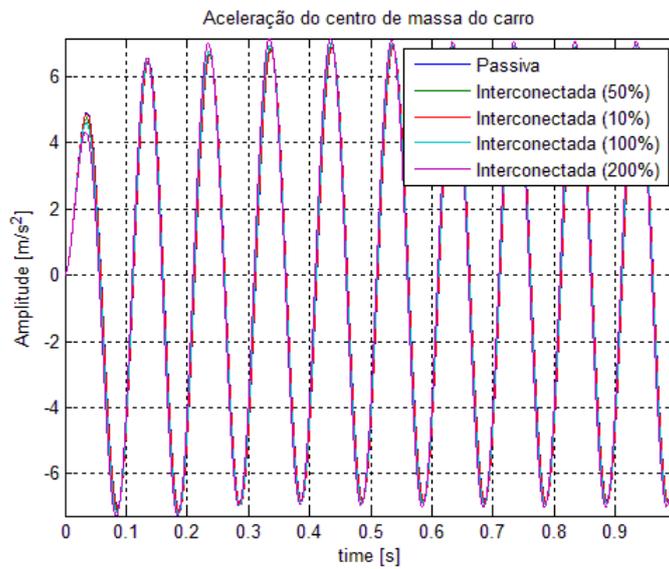


Gráfico 20 – Aceleração do centro de massa do veículo para simulação 4

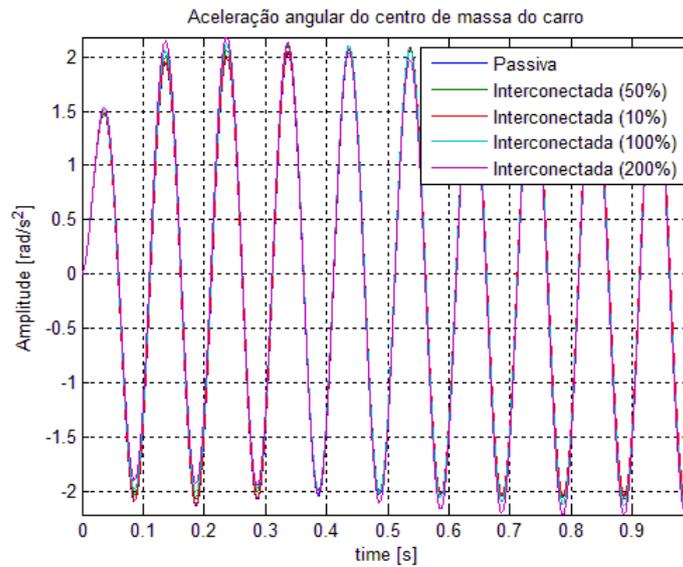


Gráfico 21 – Aceleração angular do centro de massa do veículo para simulação 4

Os gráficos acima não mostram uma diferença relevante para a análise da eficiência do sistema, e indicam uma leve melhora para o sistema interconectado.

5. Conclusões

A aplicação da técnica de grafos de ligação mostrou-se uma boa escolha para análise do projeto, devido à facilidade de se obter as equações do sistema, principalmente as equações do sistema de interconexão, previamente desconhecido.

Os resultados mostrados acima revelam que é necessário fazer uma análise mais detalhada de como as variáveis do sistema de interconexão influenciam o comportamento do sistema. Os valores usados para o sistema de interconexão não foram otimizados, eles foram idealizados como uma possível solução para o sistema.

Através da incorporação do sistema uma vantagem imediata pode ser observada: a adição de outro pólo. Com a devida escolha dos valores para os coeficientes é possível mudar a localização dos pólos do sistema.

Apesar de os resultados serem muito diferentes, as primeiras simulações revelam que um dos objetivos principais do sistema é realizado: a transferência de carga entre os módulos de roda.

Para a simulação de uma superfície ondulada é necessário um estudo mais cuidadoso; os resultados foram ainda mais diferentes que aqueles das primeiras simulações. O aumento de rigidez e de amortecimento pareciam mostrar uma melhora para esse tipo de superfície, porém verificou-se que para coeficientes do sistema de interconexão maiores que o sistema de suspensão, há uma piora na resposta do sistema.

Para o veículo deslocando-se a uma velocidade mais elevada sobre uma superfície ondulada, não há uma diferença muito grande entre os sistemas.

6. Referências

- [1] D. Alexander, "Handling the ride," *Automotive Engineering International*, pp. 44-48, July 2005.
- [2] C. Armstrong-Wilson, "The end of Spring," *Racecar Engineering*, pp. 30-34, October 2005.
- [3] W. Bauer, *Hydropneumatic Suspension Systems*, Springer, 2011.
- [4] P. Breedveld, "Bond Graphs," University of Twente, 2003.
- [5] J. F. Broenink, "Introduction to Physical Systems Modelling with Bond Graphs," University of Twente, 1999.
- [6] D. A. Crolla, *Automotive Engineering Powertrain, Chassis System and Vehicle Body*, Elsevier, 2009.
- [7] R. Fagnan, "Auto1234," 26 March 2013. [Online]. Available: http://www.auto123.com/en/racing-news/f1-technique-mercedes-amgs-fric-suspension-system?artid=153997&utm_medium=feeds&utm_source=feed-RACE&utm_campaign=feeds. [Accessed 17 May 2013].
- [8] J. Fontdecaba, "Integral Suspension System for Motor Vehicles Based on Passive Components," Society of Automotive Engineers Inc., 2002.
- [9] C. Garcia, "Dinamismo Imparable," *Técnica Q&J*, pp. 84-89.
- [10] P. Gay, "The stress test," *Design Engineering*, pp. 31-32, August 2005.
- [11] T. D. Gillespie, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, Society of Automotive Engineers Inc., 1992.
- [12] E. Guglielmino, T. Sireteanu, C. W. Stammers, G. Ghita and M. Giuclea, *Semi-active Suspension Control Improved Vehicle Ride and Road Friendliness*, Springer, 2008.
- [13] H. Heisler, *Advanced Vehicle Technology*, Butterworth Heinemann, 2002.
- [14] D. Jaume, M. Vergé, M. Delhom and P. Royer, "Bond Graph Modelling: a good communication tool between University and Industry," Laboratoire d'automatique des Arts et Métiers.
- [15] R. N. Jazar, *Vehicle Dynamics: Theory and Application*, Springer, 2008.
- [16] D. Karnopp, *Vehicle Stability*, Marcel Dekker Inc., 2004.
- [17] J. Lammers, "New suspension is run at Le Mans test," *Race Tech*, August/September 2005.
- [18] Y. Liu, "Recent Innovations in Vehicle Suspension Systems," University of Louisville, Louisville, 2008.
- [19] B. Mavroudakos and P. Eberhard, "Mode Decoupling in Vehicle Suspensions," in *III European Conference on Computational Mechanics*, Lisbon, Portugal, 2006.

- [20] T. Nath, "Quarter/Half/Full Car Models for Active Suspension (with PID controller)," in *International Conference on Recent Trends in Engineering & Technology (ICRTET2012)*, 2012.
- [21] G. Piazzi, "L'ultimo Segreto," *Quattro Route*, pp. 226-233, September 1998.
- [22] M. Scarlett, "Best of both?," *Vehicle Dynamics International*, pp. 38-42, March 2002.
- [23] M. Sharp, "French KISS," *Racecar Engineering*, pp. 30-36, June 2003.
- [24] M. C. Smith and G. W. Walker, "Interconnected vehicle suspension," *Automobile Engineering*, vol. 219, pp. 295-307, 2005.
- [25] W. A. Smith and N. Zhang, "Recent developments in passive interconnected vehicle suspension," Higher Education Press and Springer-Verlag, 2009.
- [26] L. Wu, "Analysis of hydro-pneumatic interconnected suspension struts in the roll plane vehicle model," Concordia University, Montreal, 2003.

7. Anexo Maple

restart : *with(linalg)* : *with(LinearAlgebra)* : *with(Physics)* :

$$\text{alpha} := \arccos\left(\frac{1}{2} \frac{l[1]^2 + l[3]^2 - l[2]^2}{l[3] \cdot l[1]}\right);$$

$$\text{beta} := \arccos\left(\frac{1}{2} \frac{l[1]^2 + l[2]^2 - l[3]^2}{l[1] \cdot l[2]}\right);$$

$$\text{Gamma} := \arctan\left(\frac{\frac{h[c]}{2}}{l}\right);$$

A

$$:= \arctan\left(\frac{1}{l[1]}((l[b[r]] \cdot \sin(\text{theta}[r]) + z[r]) - (l[b[l]] \cdot \sin(\text{theta}[l]) + z[l]))\right),$$

$$\frac{1}{l[1]}((l[b[r]] \cdot \cos(\text{theta}[r]) + x[r]) - (l[b[l]] \cdot \cos(\text{theta}[l]) + x[l]))\right);$$

B

$$:= \arctan\left(\frac{1}{l[1]}((l[b[r]] \cdot \cos(\text{theta}[r]) + x[r]) - (l[b[l]] \cdot \cos(\text{theta}[l]) + x[l]))\right),$$

$$\frac{1}{l[1]}((l[b[r]] \cdot \sin(\text{theta}[r]) + z[r]) - (l[b[l]] \cdot \sin(\text{theta}[l]) + z[l]))\right);$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2} \frac{l_1^2 + l_3^2 - l_2^2}{l_3 l_1}\right)$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2} \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_3^2}{l_1 l_2}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{1}{2} \frac{h_c}{l}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{l_b \sin(\theta_r) + z_r - l_b \sin(\theta_l) - z_l}{l_1}, \frac{l_b \cos(\theta_r) + x_r - l_b \cos(\theta_l) - x_l}{l_1}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{l_b \cos(\theta_r) + x_r - l_b \cos(\theta_l) - x_l}{l_1}, \frac{l_b \sin(\theta_r) + z_r - l_b \sin(\theta_l) - z_l}{l_1}\right)$$

$$e[1] := l[3] \cdot \sin(\alpha + A) = l[1] \cdot \sin(A) + l[2] \cdot \sin\left(\text{Pi} - \beta - B + \frac{\text{Pi}}{2}\right);$$

$$e[2] := l[3] \cdot \cos(\alpha + A) = l[1] \cdot \cos(A) + l[2] \cdot \cos\left(\text{Pi} - \beta - B + \frac{\text{Pi}}{2}\right);$$

$$\begin{aligned}
 & l_3 \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{2} \frac{l_1^2 + l_3^2 - l_2^2}{l_3 l_1}\right) + \arctan\left(\frac{l_b \sin(\theta_r) + z_r - l_b \sin(\theta_l) - z_l}{l_1}, \frac{l_b \cos(\theta_r) + x_r - l_b \cos(\theta_l) - x_l}{l_1}\right)\right) \\
 & \quad - l_b \sin(\theta_l) - z_l \Bigg) = (l_b \sin(\theta_r) + z_r \\
 & \quad - l_b \sin(\theta_l) - z_l) \Bigg/ \\
 & \quad \left(\frac{(l_b \sin(\theta_r) + z_r - l_b \sin(\theta_l) - z_l)^2}{l_1^2} + \frac{(l_b \cos(\theta_r) + x_r - l_b \cos(\theta_l) - x_l)^2}{l_1^2} \right)^{1/2} \\
 & \quad - l_2 \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{2} \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_3^2}{l_1 l_2}\right) + \arctan\left(\frac{l_b \cos(\theta_r) + x_r - l_b \cos(\theta_l) - x_l}{l_1}, \frac{l_b \sin(\theta_r) + z_r - l_b \sin(\theta_l) - z_l}{l_1}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & l_3 \cos \left(\arccos \left(\frac{1}{2} \frac{l_1^2 + l_3^2 - l_2^2}{l_3 l_1} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \arctan \left(\frac{l_b \sin(\theta_r) + z_r - l_b \sin(\theta_l) - z_l}{l_1} \right), \right. \\
 & \quad \left. \frac{l_b \cos(\theta_r) + x_r - l_b \cos(\theta_l) - x_l}{l_1} \right) = (l_b \cos(\theta_r) + x_r \\
 & \quad - l_b \cos(\theta_l) - x_l) / \\
 & \quad \left(\frac{(l_b \sin(\theta_r) + z_r - l_b \sin(\theta_l) - z_l)^2}{l_1^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(l_b \cos(\theta_r) + x_r - l_b \cos(\theta_l) - x_l)^2}{l_1^2} \right)^{1/2} \\
 & \quad - l_2 \sin \left(\arccos \left(\frac{1}{2} \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_3^2}{l_1 l_2} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \arctan \left(\frac{l_b \cos(\theta_r) + x_r - l_b \cos(\theta_l) - x_l}{l_1} \right), \right. \\
 & \quad \left. \frac{l_b \sin(\theta_r) + z_r - l_b \sin(\theta_l) - z_l}{l_1} \right)
 \end{aligned}$$

$S := \text{solve}(\text{simplify}(\text{expand}(e[1]), \text{size}), l[b[l]]):$
 $R := \text{solve}(\text{simplify}(\text{simplify}(\text{simplify}(\text{expand}(\text{subs}(l[b[l]] = S,$
 $e[2])), \text{size}), \text{symbolic}), \text{size}), l[b[r]]);$
 $L := \text{subs}(l[b[r]] = R, S);$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\cos(\theta_l) \sin(\theta_r) - \sin(\theta_l) \cos(\theta_r)} (-z_r \cos(\theta_l) + z_l \cos(\theta_r) \\
 & \quad - \sin(\theta_l) x_l + \sin(\theta_r) x_r + \text{RootOf}(-\text{csgn}(_Z) \pi \\
 & \quad + 2 \text{RootOf}(2 \\
 & \quad \sqrt{-(l_2 + l_1 + l_3)(l_1 - l_2 - l_3)(l_2 + l_1 - l_3)(l_1 - l_2 + l_3)} \\
 & \quad _Z \\
 & \quad - \pi \\
 & \quad \sqrt{-(l_2 + l_1 + l_3)(l_1 - l_2 - l_3)(l_2 + l_1 - l_3)(l_1 - l_2 + l_3)} \\
 & \quad + \pi \cos(_Z) l_1^2 + \pi \cos(_Z) l_2^2 - \pi \cos(_Z) l_3^2)) l_1 \cos(\theta_l))
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\cos(\theta_l)} \left(\frac{1}{\cos(\theta_l) \sin(\theta_r) - \sin(\theta_l) \cos(\theta_r)} \left((-z_r \cos(\theta_l) + z_l \cos(\theta_l) - \sin(\theta_l) x_l + \sin(\theta_l) x_r + \text{RootOf}(-\text{csgn}(_Z) \pi + 2 \text{RootOf}(2 \sqrt{-(l_2 + l_1 + l_3) (l_1 - l_2 - l_3) (l_2 + l_1 - l_3) (l_1 - l_2 + l_3)} _Z - \pi \sqrt{-(l_2 + l_1 + l_3) (l_1 - l_2 - l_3) (l_2 + l_1 - l_3) (l_1 - l_2 + l_3)} + \pi \cos(_Z) l_1^2 + \pi \cos(_Z) l_2^2 - \pi \cos(_Z) l_3^2)) l_1 \cos(\theta_l) \right) \cos(\theta_r) \right) + x_r - x_l$$

diff(L, z[c]);
diff(L, theta);
combine(*diff*(L, z[l]));
combine(*diff*(L, z[r]));

$$\frac{0}{0} - \frac{\cos(\theta_r)}{\sin(-\theta_r + \theta_l)} \frac{\cos(\theta_r)}{\sin(-\theta_r + \theta_l)}$$

diff(R, z[c]);
diff(R, theta);
combine(*diff*(R, z[l]));
combine(*diff*(R, z[r]));

$$\frac{0}{0} - \frac{\cos(\theta_l)}{\sin(-\theta_r + \theta_l)} \frac{\cos(\theta_l)}{\sin(-\theta_r + \theta_l)}$$

$e[3] := z[c] = \text{sqrt}\left(l^2 + \left(\frac{h[c]}{2}\right)^2\right) \cdot \sin(\text{Gamma} + \text{theta}) + l[k[i]]$
 $\cdot \sin\left(\frac{\text{Pi}}{2} + \text{theta}[i]\right) + l[3] \cdot \sin(\text{alpha} + A) + l[b[l]]$
 $\cdot \sin(\text{theta}[l]) + z[l];$
 $K := \text{solve}(\text{subs}(l[b[r]] = R, l[b[l]] = L, e[3]), l[k[i]]) :$

$$\begin{aligned}
 z_c = & \frac{1}{2} \sqrt{4l^2 + h_c^2} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2} \frac{h_c}{l}\right) + \theta\right) + l_{k_i} \cos(\theta_i) \\
 & + l_3 \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{2} \frac{l_1^2 + l_3^2 - l_2^2}{l_3 l_1}\right)\right. \\
 & \left. + \arctan\left(\frac{l_b \sin(\theta_r) + z_r - l_b \sin(\theta_l) - z_l}{l_1},\right.\right. \\
 & \left.\left.\frac{l_b \cos(\theta_r) + x_r - l_b \cos(\theta_l) - x_l}{l_1}\right)\right) + l_{b_l} \sin(\theta_l) + z_l
 \end{aligned}$$

`combine(diff(K, z[c]));`
`simplify(simplify(expand(diff(K, theta)), size), symbolic);`
`combine(diff(K, z[l]));`
`combine(diff(K, z[r]));`

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\cos(\theta_i)} \\
 & - \frac{1}{2} \frac{2 \cos(\theta) l - h_c \sin(\theta)}{\cos(\theta_i)} \\
 & \frac{\sin(\theta_r + \theta_l) - \sin(-\theta_r + \theta_l)}{\sin(\theta_i - \theta_r + \theta_l) - \sin(\theta_i + \theta_r - \theta_l)} \\
 & \frac{-\sin(\theta_r + \theta_l) - \sin(-\theta_r + \theta_l)}{\sin(\theta_i - \theta_r + \theta_l) - \sin(\theta_i + \theta_r - \theta_l)}
 \end{aligned}$$

8. Anexo Equações Diferenciais

$$\dot{q}_3 = f_3 = f_2 = f_1 + f_5 = f_1 + f_7 = f_1 + \frac{1}{I_7} p_7$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{13} = f_{13} = f_{12} = f_8 + f_{15} + f_{16} = f_7 + f_{17} + \frac{1}{L_l} f_{30} &= \frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{L_l} f_{28} \\ &= \frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{L_l} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{22} = f_{22} = f_{21} + f_{23} + f_{24} + f_{25} &= \frac{1}{J_{12}} f_{19} + \frac{1}{J_{11}} f_{26} + \frac{1}{J_{14}} f_{41} + \frac{1}{J_{13}} f_9 \\ &= \frac{1}{J_{12}} f_{17} + \frac{1}{J_{11}} f_{28} + \frac{1}{J_{14}} f_{36} + \frac{1}{J_{13}} f_7 = \\ \dot{q}_{22} = \frac{1}{J_{12}} \cdot \frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{J_{11}} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} + \frac{1}{J_{14}} \cdot \frac{1}{I_{36}} p_{36} + \frac{1}{J_{13}} \cdot \frac{1}{I_7} p_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{33} = f_{33} = f_{32} = f_{20} + f_{31} + f_{35} = f_{17} + \frac{1}{R_l} f_{29} + f_{36} &= \frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{R_l} f_{28} + \frac{1}{I_{36}} p_{36} \\ &= \frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{R_l} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} + \frac{1}{I_{36}} p_{36} \end{aligned}$$

$$\dot{q}_{43} = f_{43} = f_{42} = f_{38} + f_{45} = f_{36} + f_{45} = \frac{1}{I_{36}} p_{36} + f_{45}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_7 &= e_7 = (e_6) - (e_5 + e_8 + e_9 + e_{10} + e_{11}) \\
 &= (e_6) - \left(e_2 + e_{12} + \frac{1}{J_{13}} e_{25} + \frac{1}{J_{33}} e_{46} + \frac{1}{J_{23}} e_{49} \right) \\
 &= (e_6) - \left(e_4 + e_3 + e_{14} + e_{13} + \frac{1}{J_{13}} e_{22} + \frac{1}{J_{33}} e_{47} + \frac{1}{J_{23}} e_{50} \right) = \\
 &= (e_6) - \left(R_4 f_4 + \frac{1}{C_3} q_3 + R_{14} f_{14} + \frac{1}{C_{13}} q_{13} + \frac{1}{J_{13}} \cdot \frac{1}{C_{22}} q_{22} + \frac{1}{J_{33}} R_{47} f_{47} + \frac{1}{J_{23}} R_{50} f_{50} \right) = \\
 &= (e_6) - \left(R_4 f_2 + \frac{1}{C_3} q_3 + R_{14} f_{12} + \frac{1}{C_{13}} q_{13} + \frac{1}{J_{13}} \cdot \frac{1}{C_{22}} q_{22} + \frac{1}{J_{33}} R_{47} (f_{46} + f_{48}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{J_{23}} R_{50} (f_{49} + f_{51}) \right) = \\
 &= (e_6) - \left(R_4 \left(f_1 + \frac{1}{I_7} p_7 \right) + \frac{1}{C_3} q_3 + R_{14} \left(\frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{L_l} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} \right) + \frac{1}{C_{13}} q_{13} + \frac{1}{J_{13}} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{C_{22}} q_{22} + \frac{1}{J_{33}} R_{47} \left(\frac{1}{J_{33}} f_{10} + \frac{1}{J_{34}} f_{40} \right) + \frac{1}{J_{23}} R_{50} \left(\frac{1}{J_{23}} f_{11} + \frac{1}{J_{24}} f_{39} \right) \right) = \\
 &= (e_6) - \left(R_4 \left(f_1 + \frac{1}{I_7} p_7 \right) + \frac{1}{C_3} q_3 + R_{14} \left(\frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{L_l} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} \right) + \frac{1}{C_{13}} q_{13} + \frac{1}{J_{13}} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{C_{22}} q_{22} + \frac{1}{J_{33}} R_{47} \left(\frac{1}{J_{33}} f_7 + \frac{1}{J_{34}} f_{36} \right) + \frac{1}{J_{23}} R_{50} \left(\frac{1}{J_{23}} f_7 + \frac{1}{J_{24}} f_{36} \right) \right) = \\
 \dot{p}_7 &= (e_6) - \left(R_4 \left(f_1 + \frac{1}{I_7} p_7 \right) + \frac{1}{C_3} q_3 + R_{14} \left(\frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{L_l} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} \right) + \frac{1}{C_{13}} q_{13} + \frac{1}{J_{13}} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{C_{22}} q_{22} + \frac{1}{J_{33}} R_{47} \left(\frac{1}{J_{33}} \cdot \frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{J_{34}} \cdot \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{J_{23}} R_{50} \left(\frac{1}{J_{23}} \cdot \frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{J_{24}} \cdot \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_{17} = e_{17} &= (e_{18}) - (e_{15} + e_{19} + e_{20}) = (e_{18}) - \left(e_{12} + \frac{1}{J_{12}} e_{21} + e_{32} \right) \\
&= (e_{18}) - \left(e_{14} + e_{13} + \frac{1}{J_{12}} e_{22} + e_{34} + e_{33} \right) \\
&= (e_{18}) - \left(R_{14} f_{14} + \frac{1}{C_{13}} q_{13} + \frac{1}{J_{12}} e_{22} + R_{34} f_{34} + \frac{1}{C_{33}} q_{33} \right) = \\
&= (e_{18}) - \left(R_{14} f_{12} + \frac{1}{C_{13}} q_{13} + \frac{1}{J_{12}} \cdot \frac{1}{C_{22}} q_{22} + R_{34} f_{32} + \frac{1}{C_{33}} q_{33} \right) = \\
\dot{p}_{17} &= (e_{18}) \\
&\quad - \left(R_{14} \left(\frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{L_l} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} \right) + \frac{1}{C_{13}} q_{13} + \frac{1}{J_{12}} \cdot \frac{1}{C_{22}} q_{22} \right. \\
&\quad \left. + R_{34} \left(\frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{R_l} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} + \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) + \frac{1}{C_{33}} q_{33} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_{28} = e_{28} &= (e_{27}) - (e_{26} + e_{29} + e_{30}) = (e_{27}) - \left(\frac{1}{J_{11}} e_{23} + \frac{1}{R_l} e_{31} + \frac{1}{L_l} e_{16} \right) \\
 &= (e_{27}) - \left(\frac{1}{J_{11}} e_{22} + \frac{1}{R_l} e_{32} + \frac{1}{L_l} e_{12} \right) \\
 &= (e_{27}) - \left(\frac{1}{J_{11}} e_{22} + \frac{1}{R_l} (e_{34} + e_{33}) + \frac{1}{L_l} (e_{14} + e_{13}) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_{28} &= (e_{27}) \\
 &- \left(\frac{1}{J_{11}} \cdot \frac{1}{C_{22}} q_{22} + \frac{1}{R_l} \left(R_{34} \left(\frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{R_l} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} + \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) + \frac{1}{C_{33}} q_{33} \right) \right. \\
 &\left. + \frac{1}{L_l} \left(R_{14} \left(\frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{L_l} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} \right) + \frac{1}{C_{13}} q_{13} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_{36} = e_{36} &= (e_{37}) - (e_{35} + e_{38} + e_{39} + e_{40} + e_{41}) \\
 &= (e_{37}) - \left(e_{32} + e_{42} + \frac{1}{J_{24}} e_{51} + \frac{1}{J_{34}} e_{48} + \frac{1}{J_{14}} e_{24} \right) = \\
 &= (e_{37}) - \left((e_{34} + e_{33}) + (e_{44} + e_{43}) + \frac{1}{J_{24}} e_{50} + \frac{1}{J_{34}} e_{47} + \frac{1}{J_{14}} e_{22} \right) = \\
 &= (e_{37}) - \left(\left(R_{34} \left(\frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{R_l} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} + \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) + \frac{1}{C_{33}} q_{33} \right) + \left(R_{44} f_{44} + \frac{1}{C_{43}} q_{43} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{J_{24}} R_{50} f_{50} + \frac{1}{J_{34}} R_{47} f_{47} + \frac{1}{J_{14}} \frac{1}{C_{22}} q_{22} \right) = \\
 &= (e_{37}) - \left(\left(R_{34} \left(\frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{R_l} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} + \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) + \frac{1}{C_{33}} q_{33} \right) + \left(R_{44} f_{42} + \frac{1}{C_{43}} q_{43} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{J_{24}} R_{50} \left(\frac{1}{J_{23}} \cdot \frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{J_{24}} \cdot \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) + \frac{1}{J_{34}} R_{47} \left(\frac{1}{J_{33}} \cdot \frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{J_{34}} \cdot \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{J_{14}} \frac{1}{C_{22}} q_{22} \right) = \\
 &= (e_{37}) - \left(\left(R_{34} \left(\frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{R_l} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} + \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) + \frac{1}{C_{33}} q_{33} \right) + \left(R_{44} (f_{38} + f_{45}) + \frac{1}{C_{43}} q_{43} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{J_{24}} R_{50} \left(\frac{1}{J_{23}} \cdot \frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{J_{24}} \cdot \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) + \frac{1}{J_{34}} R_{47} \left(\frac{1}{J_{33}} \cdot \frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{J_{34}} \cdot \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{J_{14}} \frac{1}{C_{22}} q_{22} \right) = \\
 &= (e_{37}) - \left(\left(R_{34} \left(\frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{R_l} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} + \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) + \frac{1}{C_{33}} q_{33} \right) + \left(R_{44} (f_{36} + f_{45}) + \frac{1}{C_{43}} q_{43} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{J_{24}} R_{50} \left(\frac{1}{J_{23}} \cdot \frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{J_{24}} \cdot \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) + \frac{1}{J_{34}} R_{47} \left(\frac{1}{J_{33}} \cdot \frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{J_{34}} \cdot \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{J_{14}} \frac{1}{C_{22}} q_{22} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_{36} &= (e_{37}) \\
 &- \left(\left(R_{34} \left(\frac{1}{I_{17}} p_{17} + \frac{1}{R_l} \cdot \frac{1}{I_{28}} p_{28} + \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) + \frac{1}{C_{33}} q_{33} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(R_{44} \left(\frac{1}{I_{36}} p_{36} + f_{45} \right) + \frac{1}{C_{43}} q_{43} \right) + \frac{1}{J_{24}} R_{50} \left(\frac{1}{J_{23}} \cdot \frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{J_{24}} \cdot \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{J_{34}} R_{47} \left(\frac{1}{J_{33}} \cdot \frac{1}{I_7} p_7 + \frac{1}{J_{34}} \cdot \frac{1}{I_{36}} p_{36} \right) + \frac{1}{J_{14}} \frac{1}{C_{22}} q_{22} \right)
 \end{aligned}$$

9. Anexo MATLAB/Simulink

```

clear all
clc

% % %Constantes
Mcb = 450; % Massa suspensa de 1/2 veículo
Mrw = 40; % Massa não suspensa direita
Mlw = 40; % Massa não suspensa esquerda
Jcb = 900; % Inércia do carro
ksl = 15000; % Rigidez da mola da suspensão esquerda
ksr = 15000; % Rigidez da mola da suspensão direita
bsl = 2000; % Coeficiente do amortecedor da suspensão esquerda
bsr = 2000; % Coeficiente do amortecedor da suspensão direita
ktl = 150000; % Rigidez do pneu esquerda
ktr = 150000; % Rigidez do pneu direita
btl = 200; % Coeficiente de dissipação do pneu esquerda
btr = 200; % Coeficiente de dissipação do pneu direita
Rl = 0.6; % Distância do lado direito ao CM
Ll = 0.6; % Distância do lado esquerdo ao CM
% % %Matrizes do sistema passivo
A(1,:) = ktl*[0,0,0,0,1,0,0,0];
A(2,:) = ksl*[0,0,0,0,1,1,Ll,0];
A(3,:) = ksr*[0,0,0,0,0,1,Rl,1];
A(4,:) = ktr*[0,0,0,0,0,0,0,1];
A(5,:) = -(1/Mlw)*[1,1,0,0,btl+bsl,bsl,Ll*bsl,0];
A(6,:) = -(1/Mcb)*[0,1,1,0,bsl,bsl+bsr,(Ll*bsl)+(Rl*bsr),bsr];
A(7,:) = -
(1/Jcb)*[0,Ll,Rl,0,Ll*bsl,(Ll*bsl)+(Rl*bsr),(Rl*Rl*bsr)+(Ll*Ll*bsl),Rl*bsr]
;
A(8,:) = -(1/Mrw)*[0,0,1,1,0,bsr,Rl*bsr,bsr+btr]
autoval1 = eig(A)
B(1,:) = [ktl,0,0,0,0,0,0];
B(4,:) = [0,ktr,0,0,0,0];
B(5,:) = (1/Mlw)*[-btl,0,0,1,0,0];
B(6,:) = (1/Mcb)*[0,0,1,0,0,0];
B(7,:) = (1/Jcb)*[0,0,0,0,0,1];
B(8,:) = (1/Mrw)*[0,-btr,0,0,1,0]
C = A(5:8,:)
D = B(5:8,:)
figure
pzmap(A,B,C,D)
saveas(gcf, 'Grafico001', 'bmp')
figure
bode(A,B(:,1:2),C,D(:,1:2))
% saveas(gcf, 'Grafico002', 'bmp')
% % %Variaveis de simulação
g = 0; % Aceleração da gravidade, será desprezada
m = 0; % Momento de inércia
VSR = 1; % Seletor de velocidade direito
Dr = 1; % Atraso direito
Ar = 1; % Amplitude direita
fr = 2*pi; % Frequencia direita
VSL = 1; % Seletor de velocidade esquerdo
Dl = 1; % Atraso esquerdo
Al = 0; % Amplitude esquerda
fl = 2*pi; % Frequencia esquerda
% % %Simulações do sistema passivo
% % %Simulação 01 - Pulso de velocidade em uma das rodas
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s01=simout;

```

```

%% %Simulação 02 - Pulso de velocidade nas duas rodas com amplitudes
diferentes
Al = 2;
% sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s02=simout;
%% %Simulação 03 - Senóide de velocidade nas duas rodas de 1Hz
VSL = 2;
VSR = 2;
Al = 1;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s03=simout;
%Simulação 04 - Senóide de velocidade nas duas rodas de 10Hz
fr = 2*pi*10;
fl = 2*pi*10;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s04=simout;
%% %Simulações do sistema interconectado
clear A B
bil = 2000/2; % Coeficiente do amortecedor da suspensão interconectada
esquerda
bir = 2000/2; % Coeficiente do amortecedor da suspensão interconectada
direita
ki = 10000/2; % Rigidez da mola da suspensão interconectada
thetal = pi/4;
thetar = pi-pi/4;
thetai = 0;
l = 0.4;
J11 = -l/cos(thetai);
J12 = l/cos(thetai);
J13 = (sin(thetar + thetal) - sin(-thetar + thetal))/(sin(thetai - thetar +
thetal) - sin(thetai + thetar - thetal));
J14 = (-sin(thetar + thetal) - sin(-thetar + thetal))/(sin(thetai - thetar
+ thetal) - sin(thetai + thetar - thetal));
J23 = -cos(thetar)/sin(-thetar + thetal);
J24 = -J23;
J33 = -cos(thetal)/sin(-thetar + thetal);
J34 = -J33;
j = [J11,J12,J13,J14;0,0,J23,J24;0,0,J33,J34]
A(1,:) = ktl*[0,0,0,0,0,1,0,0,0];
A(2,:) = ksl*[0,0,0,0,0,1,1,Ll,0];
A(3,:) = ki*[0,0,0,0,0,J13,J12,J11,J14];
A(4,:) = ksr*[0,0,0,0,0,0,1,Rl,1];
A(5,:) = ktr*[0,0,0,0,0,0,0,0,1];
A(6,:) = -
(1/Mlw)*[1,1,J13,0,0,bt1+bsl+(bir*J33*J33)+(bil*J23*J23),bsl,Ll*bsl,(bir*J3
3*J34)+(bil*J23*J24)];
A(7,:) = -(1/Mcb)*[0,1,J12,1,0,bsl,bsl+bsr,(Ll*bsl)+(Rl*bsr),bsr];
A(8,:) = -
(1/Jcb)*[0,Ll,J11,Rl,0,Ll*bsl,(Ll*bsl)+(Rl*bsr),(Rl*Rl*bsr)+(Ll*Ll*bsl),Rl*
bsr];
A(9,:) = -
(1/Mrw)*[0,0,J14,1,1,(bir*J33*J34)+(bil*J23*J24),bsr,Rl*bsr,bsr+btr+(bir*J3
4*J34)+(bil*J24*J24)]
autoval2 = eig(A)
B(1,:) = [ktl,0,0,0,0,0,0];
B(5,:) = [0,ktr,0,0,0,0,0];
B(6,:) = (1/Mlw)*[-bt1,0,0,1,0,0];
B(7,:) = (1/Mcb)*[0,0,1,0,0,0];
B(8,:) = (1/Jcb)*[0,0,0,0,0,1];
B(9,:) = (1/Mrw)*[0,-btr,0,0,1,0]
C = A(6:9,:);
D = B(6:9,:);

```

```

figure
pzmap(A,B,C,D)
saveas(gcf, 'Grafico003', 'bmp')
figure
bode(A,B(:,1:2),C,D(:,1:2))
% saveas(gcf, 'Grafico004', 'bmp')
% % %Com os coeficientes do sistema em 50%
% % %Simulação 05 - Pulso de velocidade em uma das rodas
VSL = 1;
VSR = 1;
Al = 0;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s05=simout;
% % %Simulação 06 - Pulso de velocidade nas duas rodas com amplitudes
diferentes
Al = 2;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s06=simout;
% % %Simulação 07 - Senóide de velocidade nas duas rodas de 1Hz
VSL = 2;
VSR = 2;
Al = 1;
fr = 2*pi;
fl = 2*pi;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s07=simout;
% % %Simulação 08 - Senóide de velocidade nas duas rodas de 10Hz
fr = 2*pi*10;
fl = 2*pi*10;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s08=simout;
% % %Com os coeficientes do sistema em 10%
clear A B
bil = 2000/10;
bir = 2000/10;
ki = 10000/10;
A(1,:) = ktl*[0,0,0,0,0,1,0,0,0];
A(2,:) = ksl*[0,0,0,0,0,1,1,Ll,0];
A(3,:) = ki*[0,0,0,0,0,J13,J12,J11,J14];
A(4,:) = ksr*[0,0,0,0,0,0,1,Rl,1];
A(5,:) = ktr*[0,0,0,0,0,0,0,0,1];
A(6,:) = -
(1/Mlw)*[1,1,J13,0,0,bt1+bsl+bir*J33*J33+bil*J23*J23,bsl,Ll*bsl,bir*J33*J34
+bil*J23*J24];
A(7,:) = -(1/Mcb)*[0,1,J12,1,0,bsl,bsl+bsr,Ll*bsl+Rl*bsr,bsr];
A(8,:) = -
(1/Jcb)*[0,Ll,J11,Rl,0,Ll*bsl,Ll*bsl+Rl*bsr,Rl*Rl*bsr+Ll*Ll*bsl,Rl*bsr];
A(9,:) = -
(1/Mrw)*[0,0,J14,1,1,bir*J33*J34+bil*J23*J24,bsr,Rl*bsr,bsr+btr+bir*J34*J34
+bil*J24*J24]
autoval3 = eig(A)
B(1,:) = [ktl,0,0,0,0,0];
B(5,:) = [0,ktr,0,0,0,0];
B(6,:) = (1/Mlw)*[-bt1,0,0,1,0,0];
B(7,:) = (1/Mcb)*[0,0,1,0,0,0];
B(8,:) = (1/Jcb)*[0,0,0,0,0,1];
B(9,:) = (1/Mrw)*[0,-btr,0,0,1,0]
C = A(6:9,:)
D = B(6:9,:)
figure
pzmap(A,B,C,D)
saveas(gcf, 'Grafico005', 'bmp')

```

```

figure
bode(A,B(:,1:2),C,D(:,1:2))
% saveas(gcf, 'Grafico006', 'bmp')
% % %Simulação 09 - Pulso de velocidade em uma das rodas
VSL = 1;
VSR = 1;
Al = 0;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s09=simout;
% % %Simulação 10 - Pulso de velocidade nas duas rodas com amplitudes
diferentes
Al = 2;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s10=simout;
% % %Simulação 11 - Senóide de velocidade nas duas rodas de 1Hz
Al = 1;
VSL = 2;
VSR = 2;
fr = 2*pi;
fl = 2*pi;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s11=simout;
% % %Simulação 12 - Senóide de velocidade nas duas rodas de 10Hz
fr = 2*pi*10;
fl = 2*pi*10;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s12=simout;
% % %Com os coeficientes do sistema em 100%
clear A B
bil = 2000;
bir = 2000;
ki = 10000;
A(1,:) = kt1*[0,0,0,0,0,1,0,0,0];
A(2,:) = ksl*[0,0,0,0,0,1,1,L1,0];
A(3,:) = ki*[0,0,0,0,0,J13,J12,J11,J14];
A(4,:) = ksr*[0,0,0,0,0,0,1,R1,1];
A(5,:) = ktr*[0,0,0,0,0,0,0,0,1];
A(6,:) = -
(1/Mlw)*[1,1,J13,0,0,bt1+bsl+bir*J33*J33+bil*J23*J23,bsl,L1*bsl,bir*J33*J34
+bil*J23*J24];
A(7,:) = -(1/Mcb)*[0,1,J12,1,0,bsl,bsl+bsr,L1*bsl+R1*bsr,bsr];
A(8,:) = -
(1/Jcb)*[0,L1,J11,R1,0,L1*bsl,L1*bsl+R1*bsr,R1*R1*bsr+L1*L1*bsl,R1*bsr];
A(9,:) = -
(1/Mrw)*[0,0,J14,1,1,bir*J33*J34+bil*J23*J24,bsr,R1*bsr,bsr+btr+bir*J34*J34
+bil*J24*J24]
autoval4 = eig(A)
B(1,:) = [kt1,0,0,0,0,0];
B(5,:) = [0,ktr,0,0,0,0];
B(6,:) = (1/Mlw)*[-bt1,0,0,1,0,0];
B(7,:) = (1/Mcb)*[0,0,1,0,0,0];
B(8,:) = (1/Jcb)*[0,0,0,0,0,1];
B(9,:) = (1/Mrw)*[0,-btr,0,0,1,0]
C = A(6:9,:)
D = B(6:9,:)
figure
pzmap(A,B,C,D)
saveas(gcf, 'Grafico023', 'bmp')
figure
bode(A,B(:,1:2),C,D(:,1:2))
% saveas(gcf, 'Grafico024', 'bmp')
% % %Simulação 13 - Pulso de velocidade em uma das rodas

```

```

VSL = 1;
VSR = 1;
Al = 0;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s13=simout;
%% %Simulação 14 - Pulso de velocidade nas duas rodas com amplitudes
diferentes
Al = 2;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s14=simout;
%% %Simulação 15 - Senóide de velocidade nas duas rodas de 1Hz
Al = 1;
VSL = 2;
VSR = 2;
fr = 2*pi;
fl = 2*pi;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s15=simout;
%% %Simulação 16 - Senóide de velocidade nas duas rodas de 10Hz
fr = 2*pi*10;
fl = 2*pi*10;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s16=simout;
%% %Com os coeficientes do sistema em 200%
clear A B
bil = 2000*2;
bir = 2000*2;
ki = 10000*2;
A(1,:) = kt1*[0,0,0,0,0,1,0,0,0];
A(2,:) = ksl*[0,0,0,0,0,1,1,Ll,0];
A(3,:) = ki*[0,0,0,0,0,J13,J12,J11,J14];
A(4,:) = ksr*[0,0,0,0,0,0,1,Rl,1];
A(5,:) = ktr*[0,0,0,0,0,0,0,0,1];
A(6,:) = -
(1/Mlw)*[1,1,J13,0,0,bt1+bsl+bir*J33*J33+bil*J23*J23,bsl,Ll*bsl,bir*J33*J34
+bil*J23*J24];
A(7,:) = -(1/Mcb)*[0,1,J12,1,0,bsl,bsl+bsr,Ll*bsl+Rl*bsr,bsr];
A(8,:) = -
(1/Jcb)*[0,Ll,J11,Rl,0,Ll*bsl,Ll*bsl+Rl*bsr,Rl*Rl*bsr+Ll*Ll*bsl,Rl*bsr];
A(9,:) = -
(1/Mrw)*[0,0,J14,1,1,bir*J33*J34+bil*J23*J24,bsr,Rl*bsr,bsr+btr+bir*J34*J34
+bil*J24*J24]
autoval5 = eig(A)
B(1,:) = [kt1,0,0,0,0,0,0];
B(5,:) = [0,ktr,0,0,0,0];
B(6,:) = (1/Mlw)*[-bt1,0,0,1,0,0];
B(7,:) = (1/Mcb)*[0,0,1,0,0,0];
B(8,:) = (1/Jcb)*[0,0,0,0,0,1];
B(9,:) = (1/Mrw)*[0,-btr,0,0,1,0]
C = A(6:9,:)
D = B(6:9,:)
figure
pzmap(A,B,C,D)
saveas(gcf, 'Grafico025', 'bmp')
figure
bode(A,B(:,1:2),C,D(:,1:2))
% saveas(gcf, 'Grafico026', 'bmp')
%% %Simulação 17 - Pulso de velocidade em uma das rodas
VSL = 1;
VSR = 1;
Al = 0;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')

```

```

s17=simout;
%% %Simulação 18 - Pulso de velocidade nas duas rodas com amplitudes
diferentes
Al = 2;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s18=simout;
%% %Simulação 19 - Senóide de velocidade nas duas rodas de 1Hz
Al = 1;
VSL = 2;
VSR = 2;
fr = 2*pi;
fl = 2*pi;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s19=simout;
%% %Simulação 20 - Senóide de velocidade nas duas rodas de 10Hz
fr = 2*pi*10;
fl = 2*pi*10;
sim('Projeto_de_Graduacao_Simulink_4.mdl')
s20=simout;
    
```

Diagrama em blocos do Simulink

