# Referências bibliográficas

ASSIS, A.P. **A Method for Evaluating the Transient Creep of Potash.** Tese de doutorado, 459 pp. Universidade de Alberta. 1990.

BAAR, C.A. **Applied Salt-Rock Mechanics I, The In-Situ Behavior of Salt Rocks: Developments in Geotechnical Engineering.** Elsvier, Amsterdam, 294 pp. 1977.

BARKER, J.W.; MEEKS. **Estimating Fracture Gradient in Gulf of Mexico Deepwater, Shallow, Massive Salt Sections.** Paper SPE 84552 Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, U.S.A., 5-8 October.

BOTELHO, F.V.C. **Análise Numérica do Comportamento Mecânico do Sal em Poços de Petróleo.** Dissertação de Mestrado, 211 pp. PUC-Rio. 2008.

BRADLEY, W.B. **Failure of Inclined Boreholes.** J. of Energy Resources Tech., 232-239. 1979.

BOURGOYNE JR., A.T.; CHENEVERT, M.; MILLHEIM, K.K.; YOUNG JR., F.S. 1986. **Casing Design.** In Applied Drilling Engineering, SPE, ed. J. Evers and D. Pye, p. 300–350.

CARTER, N.L.; HORSEMAN, S.T.; RUSSELL, J.E.; HANDIN, J. **Rheology of Rocksalt.** Journal of Structural Geology. Vol. 15, No. 9/10, 1993. p. 1257-1271.

CHANG, H.K.; KOWSMANN, R. O.; FIGUEIREDO, A. M. F.; BENDER, A. A. **Tectonics and stratigraphy of the East Brazil Rift system: an overview.** Tectonophysics (213): 97-138. 1992.

COSTA, A.M. **Uma aplicação de Métodos Computacionais e Princípios de Mecânica das Rochas no Projeto e Análise de Escavações Destinadas a Mineração Subterrânea.** Tese de Doutorado, 1488 pp. UFRJ. 1984.

COSTA, A.M.; POIATE Jr., E.; FALCÃO, J.L.; COELHO L.F.M. **Triaxial Creep Tests in Salt Applied in Drilling Through Thick Salt Layers in Campos Basin – Brazil.** Paper SPE 92629 presented at the SPE/IADC Drilling Conference, Amsterdam, The Netherlands, 23-25 February 2005.

COSTA, A.M.; POIATE Jr. **Rocha Salina na Indústria do Petróleo: aspectos relacionados a reologia e a perfuração de rochas salinas.** Do livro Sal: Geologia e Tectonica, 2009, p. 362-385. 2a Edição. Editora Beca.

COSTA, A.M.; POIATE JR, E.; AMARAL, C.S.; GONÇALVES, C.J.C; FALCÃO, J.L.; PEREIRA, A. **Geomechanics applied to the well design through salt layers in Brazil: A History of success.** 44th US Rock Mechanics Symposium and 5th U.S.-Canada Rock Mechanics Symposium, held in Salt Lake City, UT June 27–30, 2010, ARMA 10-239.

DAWSON, P.R.; MUNSON, D.E. **Numerical Simulation of Creep Deformations Around a Room in a Deep Potash Mine.** Int. J. Rock. Mech. Sci. & Geomech. Vol.20, No. 1, pp. 33-42. 1983.

DESAI, C.S.; SIRIWARDANE, H.J. 1984. **Constitutive laws for engineering materials with emphasis on geologic materials.** 468 pp. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

DASSAULT SYSTÈMES. **ABAQUS Version 6.9. Documentation.**

DOWLING, N.E. **Mechanical Behavior of Materials.** Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue, second edition, 830. 1999. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall.

DUSSEAULT, M.B. **Alaska Rocks Course on Earth Stresses and Drilling Rock Mechanics - Module H - Stresses and Drilling in and Around Salt Structures.** University of Waterloo and Geomec a.s. 2005.

FINDLEY, W.N.; LAI, J.S.; ONARAN, K. **Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials.** North-Holland Publishing Company. 1976.

FOSSUM, A. F.; FREDERICH, J.T. **Salt Mechanics Primer for Near-Salt and Sub-Salt Deepwater Gulf of Mexico Field Developments.** Sandia Report SAND2002-2063. Sandia National Laboratories. 2002.

FREDRICH, J.T.; COBLENTZ, D.; FOSSUM, A.F.; THOME, B.J. **Stress Perturbations Adjacent to Salt Bodies in the Deepwater Gulf of Mexico.** Paper SPE 84554 presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, U.S.A., 5-8 October 2003.

GNIRK, P.F.; JOHNSON, R.E. **The Deformational Behavior of a Circular Mine Shaft Situated in a Viscoelastic Medium under Hydrostatic Stress.** Proc. 6th Rock Mechanics Symposium, p. 233-259, 1964.

GOODMAN, R.E. **Introduction to Rock Mechanics.** John Wiley & Sons. p. 202-217, p. 250-256. Second Edition. 1989.

GRAY, K.E.; PODNOS, E.; BECKER, E. **Finite Element Studies of Near-Wellbore Region during Cementing Operations: Part I.** Paper SPE 106998 presented at the 2007 SPE Production and Operations Symposium held in Oklahoma City, Oklahoma, U.S.A., 31 March-3 April 2007.

HAAS, J.L. JR.; LORENZ, J.; CLYNNE, M.A.; POTTER, II R.W.; SCHAFER, C.M. **Chapter 1: Geology, Mineralogy, and Some Geophysical and Geomechanical Properties of Salt Deposits.** Physical Properties Data for Rock Salt. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards. L.H. Gevantman, Editor. Janeiro 1981.

JAEGER, J.C.; COOK, N.G.W. **Fundamentals of Rock Mechanics.** Chapman and Hall Ltd and Science Paperbacks, p. 292-309. 1971.

JEREMIC, M.L. **Rock Mechanics in salt mining.** A.A. Balkema, Rotterdam 1994, p. 166-198. ISBN 90-5410-103-2.

JO, H. 2008. **Mechanical Behavior of Concentric and Eccentric Casing, Cement, and Formation Using Analytical and Numerical Methods.** PhD thesis, The University of Texas at Austin.

KUPFER, D.H. **Boundary shear zones in salt rocks.** In IV Symp. Salt, Houston, USA, p. 215-225. 1974.

LAMA, R.D.; VUTUKURI, V.S. **Handbook on Mechanical Properties of Rocks – Testing Techniques and Results**. Trans Tech Publications, p. 209-311. 1978.

MACKAY, F.; INOUE, N.; FONTOURA, S.A.B. **Geomechanical Effects of a 3D Vertical Salt Well Drilling by FEA.** San Francisco 2008, the 42nd US Rock Mechanics Symposium and 2nd U.S.-Canada Rock Mechanics Symposium, held in San Francisco, June 29-July 2, 2008, ARMA 08-041.

MEDEIROS, F.A.S. **Análise do Comportamento de Colunas de Revestimento Frente à Movimentação do Sal em Poços de Petróleo.** Dissertação de Mestrado, 155 pp. PUC-Rio. 1999.

MUNSON, D.E. **Constitutive Model of Creep in Rock Salt Applied to Underground Room Closure.** Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Vol. 34, No. 2, , Elsevier Science Ltd.1997. p. 233-247.

MUNSON, D.E. **Constitutive Model of Creep in Polycrystalline Halite Based on Workhardening and Recovery.** Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM 87185.

MUNSON, D.E.; P.R. DAWSON. **Salt Constitutive Modeling using Mechanism Maps.** 1st International Conference on the Mechanical Behavior of Salt, Trans Tech Publications, 1981. p. 717-737.

MUNSON, D.E.; DEVRIES K.L. **Development and Validation of a Predictive Technology for Creep Closure of Underground Rooms in Salt.** In Seventh International Congress on Rock Mechanics. Vol 1, p. 127-134, Aachen/Deutschland. 1991.

MUNSON, D.E.; FOSSUM, A.F.; SENSENY P.E. **Approach to First Principles Model Prediction of Measured WIPP (Waste Isolation Pilot Plant) In-Situ Room Closure in Salt.** Tunnelling and Underground Space Technology. Vol. 5, No. 1/2, p. 135-139, 1990.

NELSON, E.B. 1990. **Well Cementing.** 2nd ed. Schlumberger Educational Services. Sugar Land, Texas (1990).

OLIVEIRA, J.E.; IDAGAWA, L.S.; NOGUEIRA, E.C. **Evaporitos na Bacia de Campos, Aspectos Geológicos e Problemas de Perfuração**, PETROBRAS/CENPES-475, 1985.

ODQVIST, F.K.G. **Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture.** 2. ed. Oxford at the Clarendon Press., 200 pp., 1974.

PATTILLO, P.D.; KRISTIANSEN, T.G. Analysis of Horizontal Casing Integrity in the Valhall Field. SPE 78204. SPE/ISRM Rock Mechanics Conference, held in Irving, Texas, 20-23 October 2002.

PFEIFLE, T.W.; MELLEGARD, K.D.; SKAUG, N.T.; BRUNO, M.S. 2001. **An Investigation of the Integrity of Cemented Casing Seals with Application to Salt Cavern Sealing and Abandonment**. DOE/FEW 3392-2, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico.

POIATE JR. E.; COSTA A.M.; FALCÃO J.L. **Well Design for Drilling Through Thick Evaporite Layers in Santos Basin – Brazil.** Paper IADC/SPE 99161 presented at the IADC/SPE Drilling Conference held in Miami, Florida, U.S.A. February. 2006.

POIATE JR. E.; COSTA A. M.; FALCÃO J.L. **Drilling Brazilian Salt-1, Petrobras Studies Salt Creep and Well Closure.** Oil & Gas Journal; Jun 5, 2006; 104,21; ABI/INFORM Global p. 36-45.

SHAKOOR, A.; HUME, H.R. **Chapter 3: Mechanical Properties.** Physical Properties Data for Rock Salt. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards. L.H. Gevantman, Editor. Janeiro 1981.

SOBOLIK, S. R.; BEAN, J. E.; EHGARTNER, B. L. **Application of the Multi-Mechanism Deformation Model for Three-Dimensional Simulations of Salt Behavior for the Strategic Petroleum Reserve.** 44th US Rock Mechanics Symposium and 5th U.S.-Canada Rock Mechanics Symposium, held in Salt Lake City, UT June 27–30, 2010, ARMA 10-403.

TOMKINS R.P.T. **Chapter 2: Physical and Chemical Properties of Components in Salt Deposits.** Physical Properties Data for Rock Salt. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards. L.H. Gevantman, Editor. Janeiro 1981.

URAI, J.L.; SPIERS C.J. **The effect of grain boundary water on deformation mechanisms and rheology of rocksalt during long-term deformation.** In Proceedings of the 6th Conference on the Mechanical Behavior of Salt, 'SALTMECH6', Hannover, Germany, 22-25 May 2007, eds. M. Wallner et al., p. 149-158. 2007.

VÁZQUEZ, M.; LÓPEZ E. **El Método de los Elementos Finitos aplicado al análisis estructural.** Editorial Noela – Madrid, España. 499 pp. ISBN 84-88012-06-3.

WILLSON, S.M.; FREDRICH J.T. **Geomechanics Considerations for Through and Near Salt Well Design.** Paper IADC/SPE 95621 presented at the 2005 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, U.S.A. 9-12 October. 2005.

ZIENKIEWICZ, O.C. **El Método de los Elementos Finitos.** Editorial Reverté. S.A.-Barcelona, España. 903 pp. ISBN 978-84-291-4894-7.

# Apêndice

## A. Algoritmo explícito de Euler

Este material foi reproduzido a partir da tese de doutorado de Alvaro Costa (Costa, 1984). A aplicação deste algoritmo no presente trabalho é restrito ao tratamento de materiais com lei constitutiva visco-elástica. A título de desenvolvimento do algoritmo será utilizada a lei de fluência empírica da equação A.1, normalmente empregada na simulação do comportamento quase-estático dos evaporitos.

A integração das deformações por fluência, quando mantidos constantes a temperatura e a tensão diferencial, é dada por:

$$\varepsilon^f = A \cdot t^a \cdot \sigma_o^b \cdot \theta_o^c \qquad \text{(A.1)}$$

Onde $\varepsilon^f$ é a deformação axial de fluência, ou equivalente, no caso triaxial de tensões; $t$ é o tempo; $\sigma_o$ é a tensão diferencial; $\theta_o$ é a temperatura e $A, a, b, c$ são constantes obtidas a partir de ensaios de laboratório.

Para o caso em que a tensão diferencial e a temperatura são variáveis com o tempo, a integração das deformações por fluência pode ser conduzida pelo procedimento adotado pela Science Applications Inc.

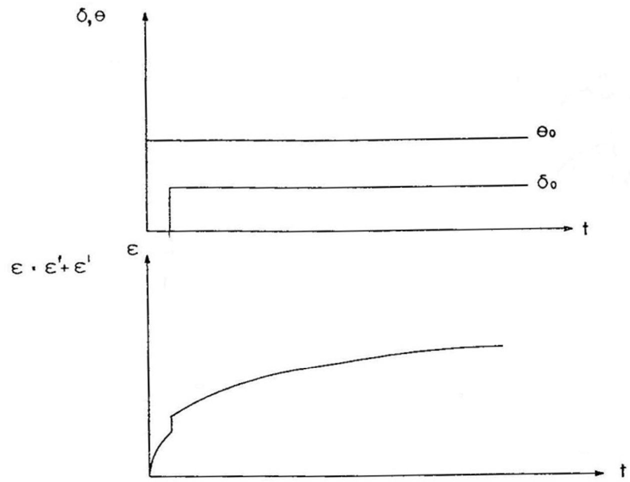


Figura A.1: Gráfico tensão, temperatura vs tempo, e deformação vs tempo (modificado – Costa, 1984).

### A.1. Procedimento da Science Applications, Inc. (SAI)

Adotando-se o procedimento da SAI, a continuidade da curva de fluência é garantida pela determinação de um parâmetro $\lambda$ correspondente à translação na variável tempo, responsável pela geração de uma nova curva de fluência com os novos valores das variáveis de estado, temperatura e tensão diferencial. Admitindo-se intervalos finitos de tempo e a representação *step wise* da evolução com o tempo da temperatura e tensão diferencial, tem-se:

Para:

$$t_o \leq t \leq t_1 \rightarrow \varepsilon^f = A \cdot (t - t_o)^a \cdot \sigma_o^c \cdot \theta_o^b \quad \text{(A.2)}$$

Para:

$$t_1 \leq t \leq t_2 \rightarrow \varepsilon^f = A \cdot (t - \lambda_1)^a \cdot \sigma_1^c \cdot \theta_1^b \quad \text{(A.3)}$$

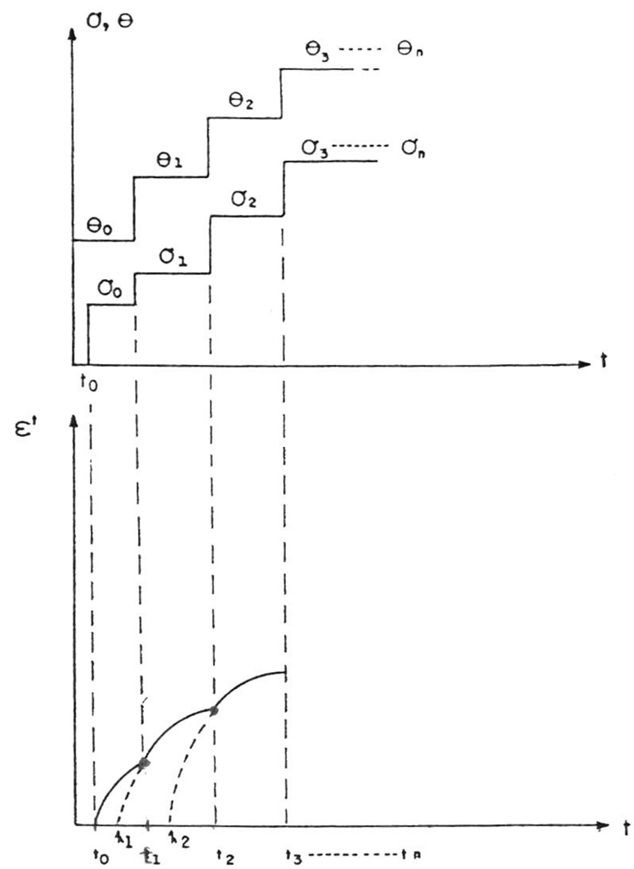


Figura A.2: Parâmetro $\lambda$, para tensão e temperatura variáveis (modificado – Costa, 1984).

O parâmetro $\lambda$ é obtido por intermédio da exigência da continuidade da deformação por fluência em $t = t_1$:

$$\rightarrow A \cdot (t_1 - t_o)^a \cdot \sigma_o^c \cdot \theta_o^b = A \cdot (t_1 - \lambda_1)^a \cdot \sigma_1^c \cdot \theta_1^b \qquad \text{(A.4)}$$

Sendo $\lambda$ função do tempo.

A função contínua $\lambda(t)$ é obtida por cálculo diferencial admitindo-se que, no caso mais geral, em que se tenha temperatura e tensões diferenciais variáveis, o incremento infinitesimal de $\varepsilon^f$, decorre de variações infinitesimais de $\lambda, \theta$ e $\sigma$:

$$d\varepsilon^f = \frac{\partial \varepsilon^f}{\partial t} dt + \left( \frac{\partial \varepsilon^f}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \varepsilon^f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varepsilon^f}{\partial \sigma} d\sigma \right) \qquad \text{(A.5)}$$

Como pelo próprio fenômeno de fluência, um incremento de deformação deve estar associado a um intervalo de tempo, é preciso que a segunda parte da equação A.5 seja nula, de tal modo que esta condição física seja satisfeita para o caso matemático em que dt=0.

$$\frac{\partial \varepsilon^f}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \varepsilon^f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varepsilon^f}{\partial \sigma} d\sigma = 0 \tag{A.6}$$

Mas,

$$\varepsilon^f = A \cdot \left(t - \lambda(t)\right)^a \cdot \sigma^c(t) \cdot \theta^b(t) \tag{A.7}$$

$$\frac{d\varepsilon^f}{d\theta} = \frac{b \cdot A \cdot \left(t-\lambda(t)\right)^a \cdot \sigma^c(t) \cdot \theta^b(t)}{\theta(t)} \tag{A.8}$$

$$\frac{d\varepsilon^f}{d\theta} = \frac{b \cdot \varepsilon^f(t)}{\theta(t)} \tag{A.9}$$

$$\frac{d\varepsilon^f}{d\sigma} = \frac{c \cdot A \cdot \left(t-\lambda(t)\right)^a \cdot \sigma^c(t) \cdot \theta^b(t)}{\sigma(t)} \tag{A.10}$$

$$\frac{d\varepsilon^f}{d\sigma} = \frac{c \cdot \varepsilon^f(t)}{\sigma(t)} \tag{A.11}$$

$$\frac{d\varepsilon^f}{d\lambda} = -\frac{a \cdot A \cdot \left(t-\lambda(t)\right)^a \cdot \sigma^c(t) \cdot \theta^b(t)}{\left(t-\lambda(t)\right)} \tag{A.12}$$

$$\frac{d\varepsilon^f}{d\lambda} = -\frac{a \cdot \varepsilon^f(t)}{\left(t-\lambda(t)\right)} \tag{A.13}$$

Substituindo-se A.9, A.11 e A.13 em A.6:

$$-\frac{a \cdot \varepsilon^f}{(t-\lambda)} d\lambda + b \cdot \varepsilon^f \frac{d\theta}{\theta} + c \cdot \varepsilon^f \frac{d\sigma}{\sigma} = 0 \tag{A.14}$$

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial t} dt;\ d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt;\ d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial t} dt \tag{A.15}$$

Substituindo-se A.15 em A.14:

$$a \frac{d\lambda}{(t-\lambda)} = b \cdot \frac{\dot{\theta}}{\theta} dt + c \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} dt \tag{A.16}$$

$$\rightarrow \lambda(t) = \lambda_o + \int_{t_o}^{t_1} \frac{(t-\lambda)}{a} \left(b \cdot \frac{\dot{\theta}}{\theta} + c \cdot \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right) dt \tag{A.17}$$

A equação geral contínua de fluência é então escrita por:

$$\varepsilon^f(t) = A[t - \lambda(t)]^a \cdot [\theta(t)]^b \cdot [\sigma(t)]^c \tag{A.18}$$

A integração com o tempo da deformação $\varepsilon^f(t)$ no algoritmo explícito de Euler pode ser encontrada por dois processos:

- Primeiro Processo: obtenção do parâmetro $\lambda(t)$ a partir da condição de continuidade da curva de fluência para um instante $t$ qualquer.

- Segundo Processo: integração numérica direta da equação $d\varepsilon^t(t)$.

**PRIMEIRO PROCESSO**

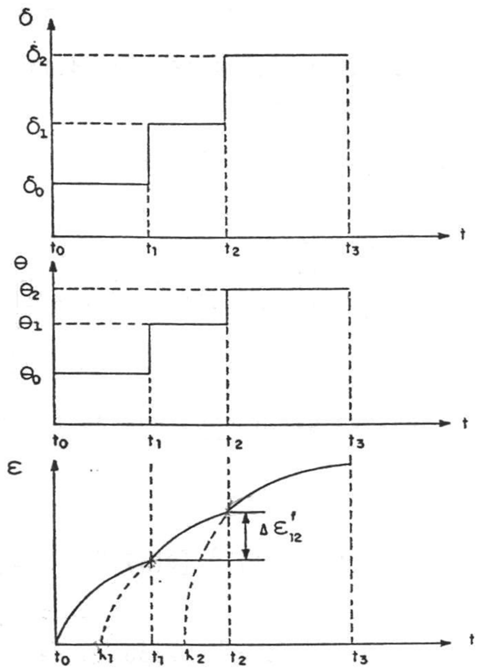


Figura A.3: Primeiro processo (modificado – Costa, 1984).

Cálculo dos parâmetros λ que introduzem continuidade na deformação por fluência.

Obtenção de $\lambda_1$:

$$\varepsilon^f = \varepsilon^f \tag{A.19}$$

$$(t_1 - t_0)^a \cdot \theta_0^b \cdot \sigma_0^c = \left(t_1 - \lambda(t_1)\right)^a \cdot \theta_1^b \cdot \sigma_1^c \tag{A.20}$$

$$\left(t_1 - \lambda(t_1)\right)^a = (t_1 - t_0)^a \cdot \frac{\theta_0^b}{\theta_1^b} \cdot \frac{\sigma_0^c}{\sigma_1^c} \tag{A.21}$$

$$\lambda(t_1) = t_1 - \left[(t_1 - t_0)^a \cdot \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^b \cdot \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^c\right]^{\frac{1}{a}} \tag{A.22}$$

Cálculo de $\lambda(t_2)$:

$$[t_2 - \lambda(t_1)]^a \cdot \theta_1^b \cdot \sigma_1^c = [t_2 - \lambda(t_2)]^a \cdot \theta_2^b \cdot \sigma_2^c \quad \text{(A.23)}$$

$$\lambda(t_2) = t_2 - \left\{[t_2 - \lambda(t_1)]^a \cdot \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^b \cdot \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^c\right\}^{\frac{1}{a}} \quad \text{(A.24)}$$

Para dois instantes t quaisquer:

$$\lambda(t_n) = t_n - \left\{[t_n - \lambda(t_{n-1})]^a \cdot \left(\frac{\theta_{n-1}}{\theta_n}\right)^b \cdot \left(\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\right)^c\right\}^{\frac{1}{a}} \quad \text{(A.25)}$$

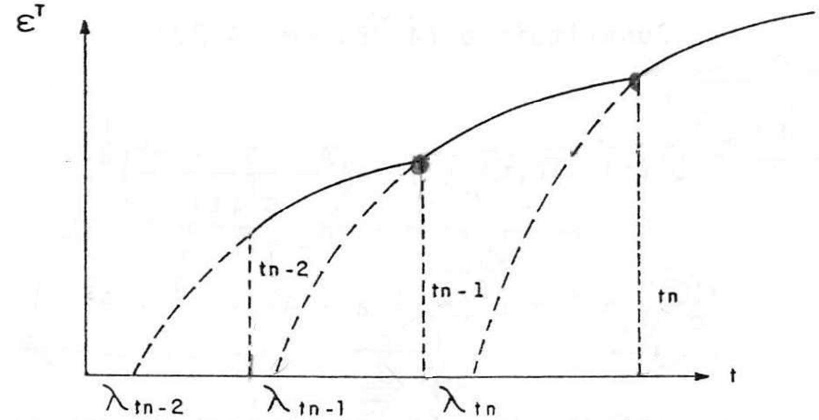


Figura A.4: Incremento de deformação por fluência (modificado – Costa, 1984).

$$\Delta\varepsilon^f = \left\{A[t_n - \lambda(t_{n-1})]^a \cdot \theta_{n-1}^b \cdot \sigma_{n-1}^c - A[t_{n-1} - \lambda(t_{n-2})]^a \cdot \theta_{n-2}^b \cdot \sigma_{n-2}^c\right\} \quad \text{(A.26)}$$

**SEGUNDO PROCESSO**

$$\varepsilon^f(t) = A[t - \lambda(t)]^a \cdot \theta^b \cdot \sigma^c \quad \text{(A.27)}$$

$$\dot{\varepsilon}^f(t) = \frac{a \cdot A \cdot [t - \lambda(t)]^a \cdot \theta^b \cdot \sigma^c}{[t - \lambda(t)]} \quad \text{(A.28)}$$

$$\dot{\varepsilon}^f(t) = \frac{a \cdot \varepsilon^f(t)}{[t - \lambda(t)]} \quad \text{(A.29)}$$

Com base na equação (A.27):

$$[t - \lambda(t)] = \left[\frac{\varepsilon^f(t)}{A \cdot \theta^b \cdot \sigma^c}\right]^{\frac{1}{a}} \quad \text{(A.30)}$$

Substituindo (A.30) em (A.29):

$$\dot{\varepsilon}^f(t) = a \cdot \varepsilon^f(t) \cdot \left(\frac{A \cdot \theta^b \cdot \sigma^c}{\varepsilon^f(t)}\right)^{\frac{1}{a}} \tag{A.31}$$

$$\varepsilon^f(t)^{\frac{1}{a}-1} \cdot \dot{\varepsilon}^f(t) = a \cdot A^{\frac{1}{a}} \cdot \theta^{\frac{b}{a}} \cdot \sigma^{\frac{c}{a}} \tag{A.32}$$

Integrando ambos os membros da equação (A.32):

$$\int_0^t \varepsilon(t)^{\frac{1}{a}-1} d\varepsilon = a \cdot A^{\frac{1}{a}} \cdot \int_0^t \theta^{\frac{b}{a}} \cdot \sigma^{\frac{c}{a}}\, dt \tag{A.33}$$

$$\varepsilon^f(t) = A\left(\int_0^t \theta^{\frac{b}{a}} \cdot \sigma^{\frac{c}{a}}\, dt\right)^a \tag{A.34}$$

A integração da equação A.34 pode ser feita numericamente. Admitindo-se que se conheça a deformação por fluência, a temperatura e a tensão diferencial após n intervalos de tempo $\Delta t$, a deformação no instante $(n+1)\Delta t$ pode ser escrita por:

$$\varepsilon_{n+1}^f = A\left[\left(\int_0^{n\cdot\Delta t} \theta^{\frac{b}{a}} \cdot \sigma^{\frac{c}{a}}\, dt\right) + \left(\int_{n\cdot\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \theta^{\frac{b}{a}} \cdot \sigma^{\frac{c}{a}}\, dt\right)\right]^a \tag{A.35}$$

Aplicando-se a regra de Simpson para a solução da segunda integral.

$$\varepsilon_{n+1}^f = A\left[\left(\int_0^{n\cdot\Delta t} \theta^{\frac{b}{a}} \cdot \sigma^{\frac{c}{a}}\, dt\right) + \frac{\Delta t}{2}\left(\theta_n^{\frac{b}{a}} \cdot \sigma_n^{\frac{c}{a}} + \theta_{n+1}^{\frac{b}{a}} \cdot \sigma_{n+1}^{\frac{c}{a}}\right)\right]^a \tag{A.36}$$

Mas,

$$\varepsilon_n^f(t) = A\left(\int_0^{t_f} \theta^{\frac{b}{a}} \cdot \sigma^{\frac{c}{a}}\, dt\right)^a \tag{A.37}$$

Sendo:

$$t_f = n \cdot \Delta t \rightarrow \varepsilon_n^f(t) = A\left(\int_0^{n\cdot\Delta t} \theta^{\frac{b}{a}} \cdot \sigma^{\frac{c}{a}}\, dt\right)^a \rightarrow \varepsilon_n^{f\,\frac{1}{a}}(t) = A^{\frac{1}{a}}\left(\int_0^{n\cdot\Delta t} \theta^{\frac{b}{a}} \cdot \sigma^{\frac{c}{a}}\, dt\right) \tag{A.38}$$

Substituindo (A.38) em (A.36):

$$\varepsilon_{n+1}^f = \left[\left(\varepsilon_n^f\right)^{\frac{1}{a}} + \frac{\Delta t}{2} \cdot A^{\frac{1}{a}}\left(\theta_n^{\frac{b}{a}} \cdot \sigma_n^{\frac{c}{a}} + \theta_{n+1}^{\frac{b}{a}} \cdot \sigma_{n+1}^{\frac{c}{a}}\right)\right]^a \tag{A.39}$$

No algoritmo explícito de Euler $\theta_{n+1} = \theta_n$ e $\sigma_{n+1} = \sigma_n$. As equações (A.39) e (A.26) fornecem o mesmo resultado.

O desenvolvimento matemático apresentado anteriormente assume apenas uma componente no tensor de tensões e deformações. No caso multiaxial há apenas uma componente no tensor de tensões de deformações. No caso multiaxial de tensões e deformações $\varepsilon^f(t)$ e $\sigma(t)$ são substituídos pela deformação e tensão equivalentes definidos anteriormente pelas seguintes expressões:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left(S_x{}^2 + S_y{}^2 + 2 \cdot \tau_{xy}{}^2 + S_z{}^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.40}$$

$$\varepsilon_e{}^f = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(\left(\varepsilon_x^f\right)^2 + \left(\varepsilon_y^f\right)^2 + 2 \cdot \left(\varepsilon_{xy}^f\right)^2 + \left(\varepsilon_z^f\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.41}$$

Empregando-se o procedimento da SAI para integração de deformação efetiva de fluência, pode-se escrever o algoritmo explícito de Euler de integração com o tempo do tensor de deformações por fluência.

Pelo princípio dos trabalhos virtuais:

$$\int_V \left[\,{}^t\sigma\right]^T \cdot [\varepsilon^*] dV - \int_V \left[\,{}^t f_v\right]^T \cdot [U^*] \;\; dV - \int_S \left[\,{}^t f_s\right]^T \cdot [U^*] \;\; \cdot dS = 0 \tag{A.42}$$

Onde $\left[\,{}^t f_v\right]$ e $\left[\,{}^t f_s\right]$ são as forças volumétricas e superficiais no instante t.

Admitindo-se que o tensor de deformações total seja definido pela soma de uma parcela elástica e uma parcela não linear:

$$\left[\,{}^t\varepsilon\right] = \left[\,{}^t\varepsilon_e\right] + \left[\,{}^t\varepsilon^f\right] \tag{A.43}$$

O estado de tensões no instante t é dado por:

$$\left[\,{}^t\sigma\right] = [C]\left\{\left[\,{}^t\varepsilon\right] - \left[\,{}^t\varepsilon^f\right]\right\} \tag{A.44}$$

Sabendo-se que:

$$[u] = [N][U] \; e \; [u^*] = [N][U^*] \quad \text{(A.45)}$$

$$[\varepsilon] = [B][U] \quad \text{(A.46)}$$

E substituindo-se as equações A.44, A.45 e A.46 em A.42, tem-se:

$$\int_V [\varepsilon^*]^T [C]\left(\left[\,{}^t\varepsilon\right] - \left[\,{}^t\varepsilon^f\right]\right)dV - [U^*]^T \int_V [N]^T [f_v]\, dV - [U^*]^T \int_S [N]^T [f_S]\, dS = 0 \quad \text{(A.47)}$$

$$U^* \left\{\int_V [B]^T [C][B]dV\left[\,{}^tU\right] = \int_V [B]^T [C]\left[\,{}^t\varepsilon^f\right]dV + \left[\,{}^tF\right]\right\} \quad \text{(A.48)}$$

Onde:

$$\left[\,{}^tF\right] = \int_V [N]^T \left[\,{}^tf_V\right] dV + \int_S [N]^T \left[\,{}^tf_S\right] dS \quad \text{(A.49)}$$

A equação de equilíbrio em um instante t qualquer pode então ser escrita por:

$$\int_V [B]^T [C][B]dV\left[\,{}^tU\right] = \int_V [B]^T [C]\left[\,{}^t\varepsilon^f\right]dV + \left[\,{}^tF\right] \quad \text{(A.50)}$$

### A.1.1. Sequência do processo incremental de integração do tensor de deformações por fluência aplicável a problemas de escavações subterrâneas.

1. Geração do estado inicial de tensões nos pontos de integração dos elementos, devido ao peso da coluna litostática:

$$\sigma_y = \gamma_m \cdot H \text{ e } \sigma_z = \sigma_x = K_h \cdot \sigma_y,\; \tau_{xy} = 0 \quad \text{(A.51)}$$

Onde $\gamma_m$ é a densidade média da coluna litostática, H é a profundidade do ponto de integração, $\sigma_y$ é a pressão vertical, $\sigma_z = \sigma_x$ são as pressões horizontais, $K_h$ coeficiente de empuxo horizontal, normalmente considerado como sendo igual a 1.0 no caso de cavidades em depósitos evaporíticos.

O cálculo das forças nodais equivalentes ao estado inicial de tensões se aplicável ao problema:

$$[F_{\sigma_o}] = \int_V [B]^T \cdot [\sigma_o]\, dV \tag{A.52}$$

2. Geração do tensor de deformações térmicas nos pontos de integração dos elementos:

$$[\varepsilon_T] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x = \alpha \cdot \theta \\ \varepsilon_y = \alpha \cdot \theta \\ \varepsilon_z = \alpha \cdot \theta \\ \gamma_{xy} = 0 \cdot 0 \end{Bmatrix}$$

Onde $\alpha$ é o coeficiente de expansão térmica do material e $\theta$ é a temperatura. O cálculo das forças nodais equivalentes às deformações térmicas se aplicáveis ao problema é:

$$[F_T] = \int_V [B]^T \cdot [C] \cdot [\varepsilon_T]\, dV \tag{A.53}$$

3. Cálculo do estado de tensões para t=0 (n=1):

$$\int_V [B]^T [C][B] dV [U]^{t=0} = \int_V [N]^T [f_v]^{t=0}\, dV - \int_S [N]^T [f_v]^{t=0}\, dS + [F_T] + [F_{\sigma_o}] \tag{A.54}$$

$$[K] \cdot [U] = [R]^{t=0} + [F_T] - [F_o] \tag{A.55}$$

$$[\varepsilon] = [B] \cdot [U] \tag{A.56}$$

$$[\sigma] = [\sigma_o] + [C]\{[\varepsilon] - [\varepsilon_T]\} \tag{A.57}$$

4. Cálculo do incremento no tensor de deformações por fluência entre dois instantes $t_n$ e $t_{n-1}$ por Odqvist, 1974:

$$\Delta\varepsilon^f = \frac{3}{2} \frac{\Delta\varepsilon_e}{\sigma_{e_{t=t_o}}} \cdot [S_{t=t_o}] \tag{A.58}$$

Onde $[S]$ é o tensor de tensões desviadoras, $\sigma_e$ é a tensão generalizada ou efetiva de fluência, $\Delta\varepsilon_e$ é o incremento da deformação generalizada ou efetiva é obtida com base em resultados de ensaios de laboratório ou com parâmetros aferidos através de análise de sensibilidade por comparação com resultados de experimentação de campo:

$$\Delta\varepsilon^f = \{A[t_n - \lambda(t_{n-1})]^a \cdot \theta_{n-1}^b \cdot \sigma_{n-1}^c - A[t_{n-1} - \lambda(t_{n-2})]^a \cdot \theta_{n-2}^b \cdot \sigma_{n-2}^c\} \tag{A.59}$$

5. Cálculo do tensor acumulado de deformações por fluência

$$\left[{}^{t_n}\varepsilon^f\right] = \left[{}^{t_{n-1}}\varepsilon^f\right] + \left[\Delta\varepsilon_n^f\right] \tag{A.60}$$

6. Cálculo do campo de deslocamentos $\left[{}^{t_n}U\right]$ de modo a se alcançar o equilíbrio estrutural, admitindo uma deformação inicial $\left[{}^{t_n}\varepsilon^f\right]$:

$$[K]\cdot\left[{}^{t_n}U\right] = {}^{t_n}[R] + \int_V \, [B]^T\,[C]\left[{}^{t_n}\varepsilon^f\right]dV + [F_T] - [F_o] \tag{A.61}$$

$$\left[{}^{t_n}\varepsilon\right] = [B]\cdot\left[{}^{t_n}U\right] \tag{A.62}$$

$$\left[{}^{t_n}\sigma\right] = [C]\left\{\left[{}^{t_n}\varepsilon\right] - \left[{}^{t_n}\varepsilon^f\right]\right\} + [\sigma_o] + [\sigma_T] \tag{A.63}$$

Onde $[\sigma_T] = -C\cdot\alpha\cdot T$ (tensões térmicas).

7. Cálculo do parâmetro $\lambda(t_n)$:

$$\lambda(t_n) = t_n - \left\{[t_n - \lambda(t_{n-1})]^a \cdot \left(\frac{\theta_{n-1}}{\theta_n}\right)^b \cdot \left(\frac{\sigma_{e_{n-1}}}{\sigma_{e_n}}\right)^c\right\}^{\frac{1}{a}} \tag{A.64}$$

8. Reinício do processo em 4.

Este algoritmo fornece uma solução condicionalmente estável exigindo a aplicação de pequenos intervalos de tempo na fase de fluência primária correspondente à fase de redistribuição de tensões da solução *steady state*.

Devido à extensa aplicação do algoritmo explícito de Euler, principalmente por pesquisadores envolvidos no estudo de fluência de estruturas metálicas, foram desenvolvidos diversos critérios para a determinação do intervalo de tempo crítico acima do qual a solução se tornaria instável. Dos critérios pesquisados pelo autor, o que melhor conduziu a bons resultados foi o desenvolvido por Treharne. Por este critério o intervalo crítico é dado por:

$$\Delta t < \frac{4}{3}\frac{(1+\nu)}{E}\frac{1}{A\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\sigma_e^{c-1}\cdot\theta^{b-1}\cdot t^{a-1}} \tag{A.65}$$

Quando se utiliza, para equação de fluência, a expressão:

$$\varepsilon_e = A \cdot \sigma_e^c \cdot t^a \cdot \theta^b \tag{A.66}$$

# B. Algoritmo implícito incremental iterativo, método "α" de integração das deformações por fluência com o tempo

Este material foi reproduzido a partir da tese de doutorado de Alvaro Costa (Costa, 1984).

A aplicação deste algoritmo é restrita no presente trabalho, ao tratamento de materiais com lei constitutiva visco-elástica. A título de desenvolvimento do algoritmo será utilizada a lei de fluência empírica apresentada, normalmente empregada na simulação do comportamento quase-estático dos evaporitos.

## B.1. Integração das deformações por fluência com o tempo

Para este algoritmo emprega-se o método "α" de integração. Entre os instantes t e t+Δt a deformação por fluência varia, bem como a tensão diferencial e a temperatura.

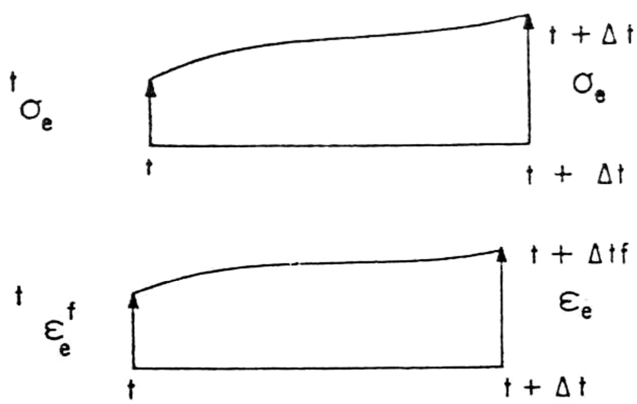


Figura B.1: Incremento de tensão e deformação por fluência (modificado – Costa, 1984).

O incremento da deformação efetiva é dado por:

$$\Delta\varepsilon_e^f = \Delta t \cdot {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\dot{\varepsilon}_e^f \tag{B.1}$$

Onde:

$${}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\dot{\varepsilon}_e^f = a \cdot A \cdot (t+\alpha\cdot\Delta t)^{a-1} \cdot {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\theta^b \cdot {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_e \tag{B.2}$$

$$^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_e = (1-\alpha)\cdot\ ^{t}\sigma_e + \alpha\cdot\ ^{t+\Delta t}\sigma_e \tag{B.3}$$

$$\left[^{t+\alpha\cdot\Delta t}S\right] = (1-\alpha)\cdot\left[\ ^{t}S\right] + \alpha\cdot\left[^{t+\Delta t}S\right] \tag{B.4}$$

Sendo $[^{t+\alpha\cdot\Delta t}S]$ o tensor de tensões desviadoras.

O método proposto está ilustrado na Figura B.2 e consiste em se obter o valor da derivada no instante $t+\alpha\cdot\Delta t$ empregando-se os valores extremos das variáveis de estado temperatura e tensão.

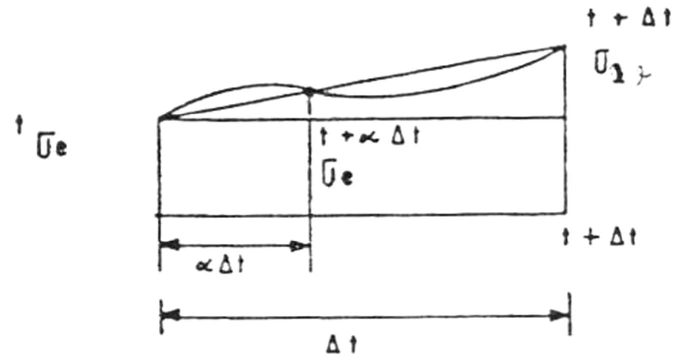


Figura B.2: Variáveis extremos de tensão (modificado – Costa, 1984).

$$\Delta\sigma_e = {}^{t+\Delta t}\sigma_e - {}^{t}\sigma_e \ \ (para\ \delta t = \Delta t) \tag{B.5}$$

$$\Delta\sigma_e' = {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_e - {}^{t}\sigma_e \ (para\ \delta t = \Delta t) \tag{B.6}$$

$$^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_e = \left(\frac{^{t+\Delta t}\sigma_e - {}^{t}\sigma_e}{\Delta t}\right)\cdot\alpha\cdot\Delta t + {}^{t}\sigma_e \tag{B.7}$$

$$^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_e = (1-\alpha)\cdot\ ^{t}\sigma_e + \alpha\cdot\ ^{t+\Delta t}\sigma_e \tag{B.8}$$

Com base nas equações B.2, B.3 e B.4 e aplicando-se a lei por Odqvist, o tensor de deformações por fluência no instante $t+\Delta t$ pode ser escrito por:

$$\left[^{t+\Delta t}\varepsilon^f\right] = \left[\ ^{t}\varepsilon^f\right] + \Delta t\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_e}\cdot\ ^{t+\alpha\cdot\Delta t}\dot{\varepsilon}_e^f\cdot\left[^{t+\alpha\cdot\Delta t}S\right] \tag{B.6}$$

Escrevendo-se o tensor de tensões desviadoras por:

$$[S] = [D]\cdot[\sigma] \tag{B.7}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & +\frac{2}{3} \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

E substituindo-se B.7 em B.6:

$$\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{f}\right] = \left[\ {}^{t}\varepsilon^{f}\right] + \Delta t \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{e}} \cdot {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\dot{\varepsilon}_{e}^{f} \cdot [D] \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma\right] \tag{B.9}$$

$${}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{e}} \cdot {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\dot{\varepsilon}_{e}^{f} \tag{B.10}$$

$$\rightarrow \left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{f}\right] = \left[\ {}^{t}\varepsilon^{f}\right] + \Delta t \cdot {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma \cdot [D] \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma\right] \tag{B.11}$$

## B.2. Sequência do processo incremental iterativo de integração do tensor de deformações por fluência aplicável a problemas de escavações subterrâneas

Considerando-se válido que a deformação total seja a soma de uma parcela elástica e uma parcela não-linear:

$$\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon\right] = \left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon_{elast}\right] + \left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{f}\right] \tag{B.12}$$

Sendo $\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon\right]$ o tensor de deformação total, $\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon_{elast}\right]$ a parcela elástica e $\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{f}\right]$ é a parcela não linear.

Empregando-se a equação matricial B.12 o tensor de tensões $[{}^{t+\Delta t}\sigma]$ é definido por:

$$\left[{}^{t+\Delta t}\sigma\right] = [C]\left\{\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon\right] - \left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{f}\right]\right\} + [\sigma_{o}] + [\sigma_{\theta}] \tag{B.13}$$

Onde $[\sigma_{o}]$ é a tensão devido ao estado inicial de tensões e $[\sigma_{\theta}]$ tensão devido às deformações térmicas.

Com a equação B.13 pode-se escrever a equação de equilíbrio no instante $t + \Delta t$ pela aplicação do princípio dos trabalhos virtuais.

$$\int_{V} [\varepsilon^{*}]^{T} \cdot \left[{}^{t+\Delta t}\sigma\right] dV - \int_{S} [U^{*}]^{T} \cdot \left[{}^{t+\Delta t}f_{s}\right] dS - \int_{V} [U^{*}]^{T} \cdot \left[{}^{t+\Delta t}f_{v}\right] dV = 0 \tag{B.14}$$

$$\int_V [\varepsilon^*]^T \cdot \{[C] \cdot ([{}^{t+\Delta t}\varepsilon] - [{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f]) + [\sigma_o] + [{}^{t+\Delta t}\sigma_\theta]\} dV - \int_S [U^*]^T \cdot [{}^{t+\Delta t}f_s] dS - \int_V [U^*]^T \cdot [{}^{t+\Delta t}f_v] dV = 0 \quad \text{(B.15)}$$

Substituindo-se as equações de $\varepsilon^*$ e $U^*$, chega-se à equação de equilíbrio quase-estático da estrutura no instante $t + \Delta t$:

$$\int_V [B]^T \cdot [C] \cdot [{}^{t+\Delta t}\varepsilon] dV = \int_S [N]^T \cdot [{}^{t+\Delta t}f_s] dS + \int_V [N]^T \cdot [{}^{t+\Delta t}f_v] dV - \int_V [B]^T \cdot [\sigma_o] dV - \int_V [B]^T \cdot [{}^{t+\Delta t}\sigma_\theta] dV + \int_V [B]^T \cdot [C] \cdot [{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f] dV \quad \text{(B.16)}$$

$$\int_V [B]^T \cdot [C][{}^{t+\Delta t}\varepsilon] dV = \int_V [B]^T \cdot [C][B] dV [{}^{t+\Delta t}U] \quad \text{(B.17)}$$

Substituindo B.17 em B.16 e chamando:

$$[{}^{t+\Delta t}R] = \int_S [N]^T \cdot [{}^{t+\Delta t}f_s] dS + \int_V [N]^T \cdot [{}^{t+\Delta t}f_v] dV \quad \text{(B.18)}$$

Tem-se:

$$\int_V [B]^T \cdot [C][B] dV [{}^{t+\Delta t}U] = [{}^{t+\Delta t}R] - \int_V [B]^T \cdot [\sigma_o] dV - \int_V [B]^T \cdot [{}^{t+\Delta t}\sigma_\theta] dV + \int_V [B]^T \cdot [C] \cdot [{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f] dV \quad \text{(B.19)}$$

$$[K] = \int_V [B]^T \cdot [C][B] dV \quad \text{(B.20)}$$

$$[K] \cdot [{}^{t+\Delta t}U] = [{}^{t+\Delta t}R] - \int_V [B]^T \cdot [\sigma_o] dV - \int_V [B]^T \cdot [{}^{t+\Delta t}\sigma_\theta] dV + \int_V [B]^T \cdot [C] \cdot [{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f] dV \quad \text{(B.20)}$$

Por observação do sistema de equações em B.20 é fácil se constatar a não-linearidade do problema:

Como [$^{t+\Delta t}\varepsilon^f$] é função de [$^{t+\Delta t}\sigma$] e por sua vez [$^{t+\Delta t}\sigma$] é função de [$^{t+\Delta t}\varepsilon$], que por sua vez é função de [$^{t+\Delta t}U$], conclui-se ser o sistema não-linear, devendo ser resolvido passo a passo.

Além do sistema de equações ser não linear, a equação constitutiva é também não linear.

$$\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f\right] = \left[\ {}^{t}\varepsilon^f\right] + \Delta t \cdot {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma \cdot [D] \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma\right] \quad \text{(B.21)}$$

$$\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma\right] = (1-\alpha) \cdot \left[\ {}^{t}\sigma\right] + \alpha \cdot \left[{}^{t+\Delta t}\sigma\right] \quad \text{(B.22)}$$

$$\left[{}^{t+\Delta t}\sigma\right] = [C] \cdot \left(\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon\right] - \left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f\right]\right) + [\sigma_o] + \left[{}^{t+\Delta t}\sigma_\theta\right] \quad \text{(B.23)}$$

Os sistemas B.21, B.22 e B.23 podem ser resolvidos por dois métodos:

1. Substituição Sucessiva:

$$\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f_{k+1}\right] = \left[\ {}^{t}\varepsilon^f\right] + \Delta t \cdot {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma_k \cdot [D] \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_k\right] \quad \text{(B.24)}$$

Onde k=k-ézimo passo iterativo

$$\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_k\right] = (1-\alpha) \cdot \left[\ {}^{t}\sigma_k\right] + \alpha \cdot \left[{}^{t+\Delta t}\sigma_k\right] \quad \text{(B.25)}$$

$$\left[{}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1}\right] = C \cdot \left\{\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon_i\right] - \left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f_{k+1}\right]\right\} + \sigma_o + {}^{t+\Delta t}\sigma_\theta \quad \text{(B.26)}$$

Onde i = i-ézimo passo incremental iterativo do sistema de equações de equilíbrio.

Os sistemas B.21, B.22 e B.23 devem ser resolvidos recursivamente até que seja atingida a condição *steady-state*, ou seja:

$$\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f_{k+1}\right] - \left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f_{k}\right] \leq tol_1 \quad \text{(B.27)}$$

$$\left[{}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1}\right] - \left[{}^{t+\Delta t}\sigma_{k}\right] \leq tol_2 \quad \text{(B.28)}$$

Após a tolerância ter sido satisfeita, o valor de $\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f_{k+1}\right]$ é substituído no sistema de equações em B.20, obtendo-se mais um passo no campo de deslocamentos $\left[{}^{t+\Delta t}U^{i+1}\right]$

$$[K] \cdot \left[{}^{t+\Delta t}U^{i+1}\right] = \int_S [N]^T \cdot \left[{}^{t+\Delta t}f_s\right] dS + \int_V [N]^T \cdot \left[{}^{t+\Delta t}f_v\right] dV - \int_V [B]^T \cdot [\sigma_o] dV -$$
$$\int_V [B]^T \cdot \left[{}^{t+\Delta t}\sigma_\theta\right] dV + \int_V [B]^T \cdot [C] \cdot \left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f_{k+1}\right] dV \quad \text{(B.29)}$$

Calculado o valor de $\left[{}^{t+\Delta t}U^{i+1}\right]$ obtém-se $\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{i+1}\right]$=$[B] \cdot \left[{}^{t+\Delta t}U^{i+1}\right]$e com o valor de $\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{i+1}\right]$, reinicia-se a recursividade sobre as equações B.24, B.25 e

B.26. A cada passo iterativo na obtenção do campo de deslocamentos, pode-se escrever a seguinte equação:

$$\left[{}^{t+\Delta t}U^{i+1}\right] = \left[{}^{t+\Delta t}U^{i}\right] + \left[\Delta U^{i+1}\right] \tag{B.30}$$

Substituindo-se B.30 em B.29:

$$[K]\cdot\left[{}^{t+\Delta t}U^{i}\right] + [K]\cdot\left[\Delta U^{i+1}\right] = \left[{}^{t+\Delta t}R\right] - \int_V [B]^T\cdot[\sigma_o]dV - \int_V [B]^T\cdot\left[{}^{t+\Delta t}\sigma_\theta\right]dV + \int_V [B]^T\cdot[C]\cdot\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon_{k+1}^{f}\right]dV \tag{B.31}$$

Mas,

$$[K]\cdot\left[{}^{t+\Delta t}U^{i}\right] = \int_V [B]^T\cdot[C]\cdot[B]\left[{}^{t+\Delta t}U^{i}\right]dV = \int_V [B]^T\cdot[C]\cdot\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{i}\right]dV \tag{B.32}$$

Substituindo B.32 em B.29

$$[K]\cdot\left[\Delta U^{i+1}\right] = \left[{}^{t+\Delta t}R\right] - \int_V [B]^T\cdot[C]\cdot\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{i}\right]dV - \int_V [B]^T\cdot[\sigma_o]dV - \int_V [B]^T\cdot\left[{}^{t+\Delta t}\sigma_\theta\right]dV + \int_V [B]^T\cdot[C]\cdot\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon_{k+1}^{f}\right]dV \tag{B.33}$$

A equação B.33 pode ser colocada na forma:

$$[K]\cdot\left[\Delta U^{i+1}\right] = \left[{}^{t+\Delta t}R\right] - \int_V [B]^T\cdot\left\{[C]\cdot\left(\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{i}\right] - \left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon_{k+1}^{f}\right]\right) + [\sigma_o] + \left[{}^{t+\Delta t}\sigma_\theta\right]\right\}dV \tag{B.34}$$

Mas,

$$\left[{}^{t+\Delta t}\sigma^{i+1}\right] = [C]\cdot\left(\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{i}\right] - \left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon_{k+1}^{f}\right]\right) + [\sigma_o] + \left[{}^{t+\Delta t}\sigma_\theta\right]$$
$$\rightarrow [K]\cdot\left[\Delta U^{i+1}\right] = \left[{}^{t+\Delta t}R\right] - \int_V [B]^T\cdot\left[{}^{t+\Delta t}\sigma^{i+1}\right]dV \tag{B.35}$$

A cada iteração “i” no campo dos deslocamentos, têm-se n subiterações nas equações B.21 a B.23. O processo iterativo termina quando $\left[\Delta U^{i+1}\right]$ é aproximadamente zero.

O processo de substituição sucessiva nas equações B.21, B.22 e B.23 não garante a convergência da integração. Por este motivo, no presente trabalho a satisfação da lei constitutiva do material é feita iterativamente pelo método de Newton-Raphson.

## B.3. Aplicação do método de Newton-Raphson na solução do sistema não-linear que fornece o valor de $\left[{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{f}\right]$

Em duas iterações sucessivas no estado de tensões tem-se $\left[{}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1}\right]$ e $\left[{}^{t+\Delta t}\sigma_{k}\right]$, desenvolvendo-se $\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{f}\right]$ em série de Taylor no entorno de $\left[{}^{t+\Delta t}\sigma_{k}\right]$, tem-se:

$$\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon_{k+1}^{f(i)}\right] = \left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon_{k}^{f(i)}\right]\left\{\frac{\left[\partial\, {}^{t+\Delta t}\varepsilon^{f}\right]}{[\partial\sigma]}\right\}_{\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma^{(i)}\right]} \cdot \left(\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k+1}^{(i)}\right] - \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right]\right) \quad \text{(B.36)}$$

$$\left\{\frac{[\partial\varepsilon^{f}]}{[\partial\sigma]}\right\}_{\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma^{(i)}\right]} = \Delta t \cdot [D] \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}\right] \cdot \left\{\frac{\partial\gamma}{[\partial\sigma]}\right\}_{\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right]} + \Delta t \cdot {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma_{k}^{(i)} \cdot [D] \quad \text{(B.37)}$$

$$\left[{}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1}\right] = [C] \cdot \left(\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{(i)}\right] - \left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon_{k+1}^{f(i)}\right]\right) + [\sigma_{o}] + [\sigma_{\theta}] \quad \text{(B.38)}$$

Substituindo-se B.36 e B.37 em B.38:

$$\left[{}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1}^{(i)}\right] = [C] \cdot \left\{\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{(i)}\right] - \left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon_{k}^{f(i)}\right] - \left(\Delta t \cdot [D] \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right] \cdot \left\{\frac{\partial\gamma}{[\partial\sigma]}\right\}_{\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right]} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\Delta t \cdot {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma_{k}^{(i)} \cdot [D]\right) \cdot \left(\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k+1}\right] - \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}\right]\right)\right\} + [\sigma_{o}] + [\sigma_{\theta}] \quad \text{(B.39)}$$

Mas,

$$\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k+1}\right] = (1-\alpha) \cdot \left[\,{}^{t}\sigma\right] + \alpha \cdot {}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1} \quad \text{(B.40)}$$

$$\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}\right] = (1-\alpha) \cdot \left[\,{}^{t}\sigma\right] + \alpha \cdot {}^{t+\Delta t}\sigma_{k} \quad \text{(B.41)}$$

Substituindo B.40 e B.41 em B.39:

$$\left[{}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1}^{(i)}\right] = [C] \cdot \left\{\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{(i)}\right] - \left[\ {}^{t}\varepsilon^{f}\right] - \Delta t \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma_{k}\ \right] \cdot [D] \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right] - \left(\Delta t \cdot [D] \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right] \cdot \left\{\frac{\partial\gamma}{[\partial\sigma]}\right\}_{\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right]} + \Delta t \cdot {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma_{k}^{(i)} \cdot [D]\right)\left((1-\alpha)\cdot\left[\ {}^{t}\sigma\right] + \alpha \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k+1}^{i}\right] - (1-\alpha)\cdot\left[\ {}^{t}\sigma\right] - \alpha \cdot {}^{t+\Delta t}\sigma_{k}\right)\right\} + [\sigma_o] + [\sigma_\theta] \tag{B.42}$$

Fazendo-se as devidas modificações na equação matricial em B.42 chega-se à equação matricial recursiva para convergência do estado de tensões:

$$\left\{[I] + \alpha \cdot \Delta t \cdot [C] \cdot \left([D] \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right] \cdot \left\{\frac{\partial\gamma}{[\partial\sigma]}\right\}_{\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right]} + {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma_{k}\ \cdot [D]\right)\right\} \cdot \left[{}^{\boldsymbol{t+\Delta t}}\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k+1}}^{(\boldsymbol{i})}\right] = [C] \cdot \left\{\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{(i)}\right] - \left[\ {}^{t}\varepsilon^{f}\right] - \Delta t \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma_{k}^{(i)}\right] \cdot [D] \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right] + \alpha \cdot \Delta t \cdot \left([D] \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right] \cdot \left\{\frac{\partial\gamma}{[\partial\sigma]}\right\}_{\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right]} + {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma_{k}^{(i)} \cdot [D]\right) \cdot {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}\right\} + [\sigma_o] + [\sigma_\theta] \tag{B.43}$$

A equação matricial em B.43 pode ser deduzida aplicando-se diretamente Newton-Raphson sobre a equação:

$$f\left(\left[{}^{t+\Delta t}\sigma\right]\right) = \left[{}^{t+\Delta t}\sigma\right] - [C] \cdot \left(\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{(i)}\right] - \left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{f(i)}\right]\right) + [\sigma_o] + [\sigma_\theta] \tag{B.44}$$

Calculado o valor do tensor de tensões ${}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1}$ pode-se obter o tensor de deformações por fluência $\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon_{k+1}^{f(i)}\right]$:

$$\left[{}^{\boldsymbol{t+\Delta t}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k+1}}^{\boldsymbol{f(i)}}\right] = \left[\ {}^{t}\varepsilon^{f}\right] + \Delta t \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma_{k}^{(i)}\right] \cdot [D] \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right] + \alpha \cdot \Delta t \cdot \left([D] \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right] \cdot \left\{\frac{\partial\gamma}{[\partial\sigma]}\right\}_{\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}\ \right]} + {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma_{k}\ \cdot [D]\right) \cdot \left(\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k+1}^{(i)}\right] - \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right]\right) \tag{B.45}$$

O processo é interrompido quando:

$$\left(\left[{}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1}^{(i)}\right] - \left[{}^{t+\Delta t}\sigma_{k}^{(i)}\right]\right) \le tol \tag{B.46}$$

Substituindo-se $\left[{}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1}^{(i)}\right]$, após ter sido satisfeito o critério de convergência, no sistema de equações de equilíbrio B.35, obtém-se mais um passo iterativo no campo de deslocamentos e, portanto, mais um passo iterativo no campo das deformações, ou seja:

$$[K]\cdot\left[\Delta U^{i+1}\right]=\left[{}^{t+\Delta t}R\right]-\int_V [B]^T\cdot\left[{}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1}^{(i)}\right]dV \tag{B.47}$$

$$\left[{}^{t+\Delta t}U^{i+1}\right]=\left[{}^{t+\Delta t}U^{i}\right]+\left[\Delta U^{i+1}\right] \tag{B.48}$$

$$\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{i+1}\right]=[B]\cdot\left[{}^{t+\Delta t}U^{i+1}\right] \tag{B.49}$$

Se $\left[\Delta U^{i+1}\right]$ não satisfaz uma tolerância pré-determinada, reinicia-se o processo global iterativo utilizando-se o novo valor de $\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{i+1}\right]$ na recursividade em (B.43). Pode-se provar que o processo incremental iterativo do algoritmo implícito anterior é incondicionalmente estável para $\alpha > \frac{1}{2}$.

### B.4. Método de Newton-Raphson com sub-iteração

A equação matricial recursiva (B.43) é aplicada para as tensões definidas nos extremos do intervalo de tempo, ou seja, repetindo as expressões básicas.

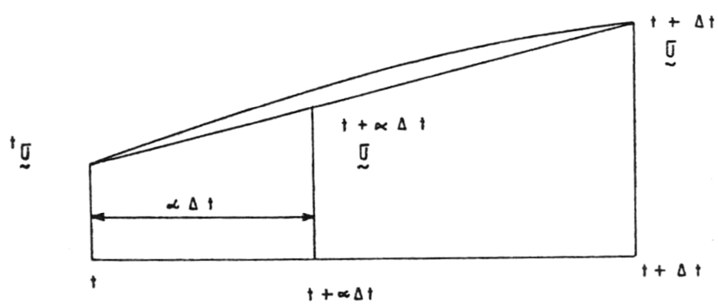


Figura B.3: Método de Newton-Raphson com sub-iteração (modificado – Costa, 1984).

$$\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma\right]=\frac{\left[{}^{t+\Delta t}\sigma\right]-\left[{}^{t}\sigma\right]}{\Delta t}\cdot\alpha\cdot\Delta t+{}^{t}\sigma \tag{B.50}$$

$$\left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma\right]=(1-\alpha)\cdot\left[{}^{t}\sigma\right]+\alpha\cdot\left[{}^{t+\Delta t}\sigma\right] \tag{B.51}$$

$$\left[{}^{t+\Delta t}\sigma\right]=[C]\cdot\left(\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon\right]-\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{f}\right]\right)+[\sigma_o]+[\sigma_\theta] \tag{B.52}$$

Pretende-se fazer a integração com o tempo do tensor de deformações por fluência pelo método α:

$$\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{f}\right] = \left[\ {}^{t}\varepsilon^{f}\right] + \Delta t \cdot {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\dot{\varepsilon}^{f} \tag{B.53}$$

Onde:

$${}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\dot{\varepsilon}^{f} = {}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma \cdot [D] \cdot \left[{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma\right] \tag{B.54}$$

$${}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\gamma = \frac{3}{2} \cdot \frac{{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\dot{\varepsilon}^{f}}{{}^{t+\alpha\cdot\Delta t}\sigma_e} \tag{B.55}$$

O incremento do tensor de deformações por fluência está sendo calculado pela multiplicação de $\Delta t$ pela derivada de $\left[\varepsilon^{f}\right]$ em $t + \alpha \cdot \Delta t$. Quanto menor o intervalo de tempo, melhor será a aproximação.

Subdividindo-se o intervalo de tempo $\Delta t$ em n sub-intervalos de tempo $\delta t$ a integração anterior garante uma aproximação sensivelmente superior.

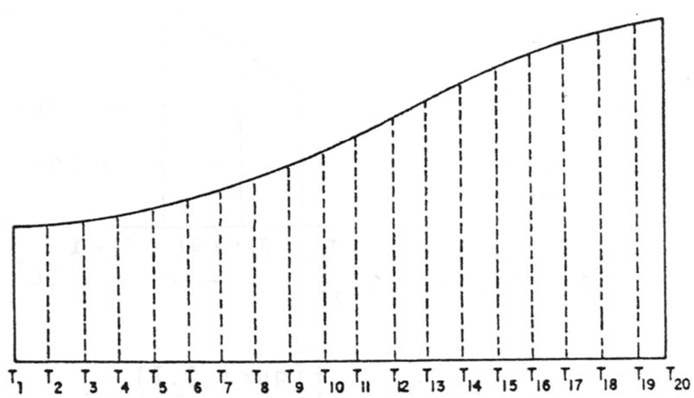


Figura B.4: Subdivisão de intervalos de tempo $\Delta t$ em n sub-intervalos de tempo $\delta t$ (modificado – Costa, 1984).

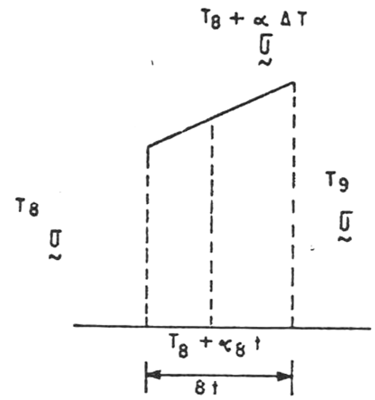


Figura B.5: Subdivisão de intervalos de tempo $\Delta t$ em n sub-intervalos de tempo $\delta t$ (modificado – Costa, 1984).

$$\left[{}^{T_8+\delta T}\varepsilon^f\right] = \left[{}^{T_8}\varepsilon^f\right] + \Delta t \cdot \left[{}^{T_8+\alpha\cdot\Delta t}\dot{\varepsilon}^f\right] = \left[{}^{T_9}\varepsilon^f\right] \tag{B.56}$$

A aproximação linear conduz a um resultado mais satisfatório. Entre dois subintervalos de tempo consecutivos quaisquer, tem-se:

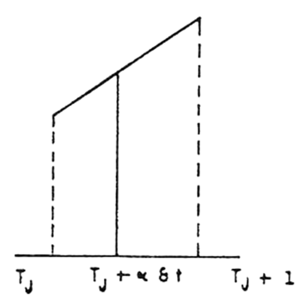


Figura B.6: Subintervalos de tempo consecutivos (modificado – Costa, 1984).

$$\left[{}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\sigma\right] = (1-\alpha)\left[{}^{T_j}\sigma\right] + \alpha \cdot \left[{}^{T_j}\sigma\right] \tag{B.57}$$

$$\left[{}^{T_{j+1}}\varepsilon^f\right] = \left[{}^{T_j}\varepsilon^f\right] + \delta t \cdot {}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\gamma \cdot [D] \cdot \left[{}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\sigma\right] \tag{B.58}$$

$$\left[{}^{T_{j+1}}\sigma\right] = [C]\left(\left[{}^{T_j+1}\varepsilon\right] - \left[{}^{T_j+1}\varepsilon^f\right]\right) + [\sigma_o] + [\sigma_\theta] \tag{B.59}$$

O tensor $\left[{}^{T_j+1}\varepsilon\right]$ não é obtido diretamente do campo de deslocamentos $\left[{}^{t+\Delta t}U\right]$, pois o mesmo é obtido no final do intervalo de tempo $t+\Delta t$ a partir do sistema de equações de equilíbrio.

Reescrevendo-se o sistema de equações de equilíbrio:

$$\left[K\right] \cdot \left[\Delta U^{i+1}\right] = \left[{}^{t+\Delta t}R\right] - \int_V \left[B\right]^T \cdot {}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1} dV \tag{B.60}$$

Resolvido o sistema B.60 tem-se:

$$\left[{}^{t+\Delta t}U^{i+1}\right] = \left[{}^{t+\Delta t}U^{i}\right] + \left[\Delta U^{i+1}\right] \tag{B.61}$$

Com $\left[{}^{t+\Delta t}U^{i+1}\right]$ calcula-se $\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{i+1}\right]$:

$$\left[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{i+1}\right] = \left[B\right] \cdot \left[{}^{t+\Delta t}U^{i+1}\right] \tag{B.62}$$

Para se obter o valor de $\left[{}^{T_{j+1}}\varepsilon\right]$ admite-se que a variação de $[\varepsilon]$ entre $t$ e $t + \Delta t$ seja linear:

$$\left[{}^{T_{j+1}}\varepsilon\right] = \left[\,{}^{t}\varepsilon\right] + \frac{{}^{t+\Delta t}\varepsilon - {}^{t}\varepsilon}{\Delta t}\left(T_{j+1} - t\right) \tag{B.63}$$

Onde $T_{j+1} = T_j + \delta t$ e $\delta t = \frac{\Delta t}{n}$

Aplicando-se Newton-Raphson em B.58 e B.59 chega-se à equação matricial de recursividade para o subintervalo de tempo $T_j$ e $T_{j+1}$:

$$\left\{[I] + \alpha \cdot \delta t \cdot [C] \cdot \left([D] \cdot \left[{}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\sigma^{(i)}\right] \cdot \left\{\frac{\partial \gamma^{(i)}}{[\partial \sigma]}\right\}_{\left[{}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\sigma^{(i)}\right]} + {}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\gamma^{(i)} \cdot [D]\right)\right\} \cdot$$

$$\left[{}^{\boldsymbol{T_{j+1}}}\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k+1}}^{(\boldsymbol{i})}\right] = [C] \cdot \left\{\left[{}^{T_{j+1}}\varepsilon^{(i)}\right] - \left[{}^{T_j}\varepsilon^{f}\right] - \delta t \cdot \left[{}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\gamma_k\right] \cdot [D] \cdot \left[{}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\sigma_k\right] + \alpha \cdot \delta t \cdot\right.$$

$$\left.\left([D] \cdot \left[{}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\sigma_k\right] \cdot \left\{\frac{\partial \gamma}{[\partial \sigma]}\right\}_{\left[{}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\sigma_k^{(i)}\right]} + {}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\gamma_k \cdot [D]\right) \cdot {}^{T_{j+1}}\sigma_k{}^{(i)}\right\} + [\sigma_o] + [\sigma_\theta] \tag{B.64}$$

O tensor de deformações por fluência é dado por:

$$\left[{}^{\boldsymbol{T_{j+1}}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k+1}}^{\boldsymbol{f(i)}}\right] = \left[{}^{\boldsymbol{T_j}}\varepsilon^{f(i)}\right] + \delta t \cdot \left[{}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\gamma_k\right] \cdot [D] \cdot \left[{}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\sigma_k^{(i)}\right] + \alpha \cdot \delta t \cdot \Bigg([D] \cdot \left[{}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\sigma_k^{(i)}\right] \cdot \left\{\frac{\partial\gamma}{[\partial\sigma]}\right\}_{\left[{}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\sigma_k\right]} + {}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\gamma_k \cdot [D]\Bigg) \cdot \left(\left[{}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\sigma_{k+1}^{(i)}\right] - \left[{}^{T_j+\alpha\cdot\delta t}\sigma_k^{(i)}\right]\right)$$

(B.65)

Examinando-se o algoritmo implícito anterior, verifica-se que o incremento de deformações não-lineares é calculado no instante $t + \alpha \cdot \Delta t$ em função do estado de tensões $\left[\,{}^{t}\sigma\right]$ e $\left[{}^{t+\Delta t}\sigma\right]$.

# C. Dedução da equação de cálculo do incremento no tensor de deformações por fluência entre dois instantes $t_n$ e $t_{n-1}$ por Odqvist, 1974

No presente trabalho, adota-se a formulação apresentada por Odqvist, na qual a equação constitutiva é deduzida inicialmente para a fase de fluência secundária, onde o tensor de velocidades de deformação é constante com o tempo adotando-se como lei constitutiva para a velocidade de deformação a função potencial de Norton.

Posteriormente, esta formulação é estendida para ambas as fases de fluência, transiente ou secundária, para uma lei constitutiva qualquer.

Admitindo-se a incompressibilidade do material.

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33} = 0 \qquad \text{(C.1)}$$

Adota-se, do mesmo modo que Von Mises, a velocidade de dissipação da energia plástica acumulada $\dot{\omega}$:

$$W = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \rightarrow \dot{\omega} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = S_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}\dot{\varepsilon}_{ij} = S_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad \text{(C.2)}$$

Considerando (1):

$$\dot{\omega} = S_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad \text{(C.3)}$$

Se a velocidade de dissipação da energia plástica acumulada varia com o tempo, permanecendo constante o tensor de velocidades de deformação ($\dot{\varepsilon}_{ij}$), (fase de fluência secundária) pode-se escrever:

$$\delta\dot{\omega} = \delta S_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial S_{ij}} \qquad \text{(C.4)}$$

Considerando-se como Von Mises a hipótese de que $\dot{\omega}$ é uma função potencial plástica de escoamento do material, função de uma grandeza escalar

$\sigma_e$, dependente das 6 componentes de tensões desviadoras e invariantes segundo o sistema cartesiano, a equação anterior pode ser escrita por:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \sigma_e} \cdot \frac{\partial \sigma_e}{\partial s_{ij}} \tag{C.5}$$

Em um instante t qualquer pode ser escrito por:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = {}^{t}k \cdot S_{ij} \tag{C.6}$$

Onde ${}^{t}k$ é função de $\sigma_e$.

Com a equação C.6, chega-se a mais uma hipótese em consequência da formulação proposta, ou seja, a da coaxialidade entre o tensor de velocidade de deformação com o tensor de tensões desviadoras.

Com esta nova hipótese pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_x^f &= k \cdot S_x \\
\dot{\varepsilon}_y^f &= k \cdot S_y \\
\dot{\varepsilon}_z^f &= k \cdot S_z \\
\dot{\varepsilon}_{xy}^f &= k \cdot \tau_{xy} \\
\dot{\varepsilon}_{xz}^f &= k \cdot \tau_{xz} \\
\dot{\varepsilon}_{yz}^f &= k \cdot \tau_{yz}
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Também são válidas as seguintes relações de proporcionalidade:

$$\begin{aligned}
\left(\dot{\varepsilon}_x^f - \dot{\varepsilon}_y^f\right) &= k \cdot \left(S_x - S_y\right) \\
\left(\dot{\varepsilon}_y^f - \dot{\varepsilon}_z^f\right) &= k \cdot \left(S_y - S_z\right) \\
\left(\dot{\varepsilon}_z^f - \dot{\varepsilon}_x^f\right) &= k \cdot \left(S_z - S_x\right) \\
\dot{\varepsilon}_{xy}^f &= k \cdot \tau_{xy} \\
\dot{\varepsilon}_{xz}^f &= k \cdot \tau_{xz} \\
\dot{\varepsilon}_{yz}^f &= k \cdot \tau_{yz}
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Elevando-se ao quadrado as equações e multiplicando as três últimas equações por 6 e finalmente somando-se todas as equações, resulta:

$$\left(\dot{\varepsilon}_x^f\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_y^f\right)^2 - 2 \cdot \dot{\varepsilon}_x^f \cdot \dot{\varepsilon}_y^f + \left(\dot{\varepsilon}_y^f\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_z^f\right)^2 - 2 \cdot \dot{\varepsilon}_y^f \cdot \dot{\varepsilon}_z^f + \left(\dot{\varepsilon}_z^f\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_x^f\right)^2 - 2 \cdot \dot{\varepsilon}_z^f \cdot \dot{\varepsilon}_x^f + 6 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{xz}^f\right)^2 + 6 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{xy}^f\right)^2 + 6 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{yz}^f\right)^2 = k^2\left(S_x{}^2 + S_y{}^2 - 2 \cdot S_x \cdot S_y + S_y{}^2 + S_z{}^2 - 2 \cdot S_y \cdot S_z + S_z{}^2 + S_x{}^2 - 2 \cdot S_z \cdot S_x + 6 \cdot \tau_{xy}{}^2 + 6 \cdot \tau_{xz}{}^2 + 6 \cdot \tau_{yz}{}^2\right) \qquad \text{(C.9)}$$

$$\rightarrow 2 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_x^f\right)^2 + 2 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_y^f\right)^2 + 2 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_z^f\right)^2 - 2 \cdot \dot{\varepsilon}_x^f \cdot \dot{\varepsilon}_y^f - 2 \cdot \dot{\varepsilon}_y^f \cdot \dot{\varepsilon}_z^f - 2 \cdot \dot{\varepsilon}_z^f \cdot \dot{\varepsilon}_x^f + 6 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{xy}^f\right)^2 + 6 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{xz}^f\right)^2 + 6 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{yz}^f\right)^2 = k^2\left(2 \cdot S_x{}^2 + 2 \cdot S_y{}^2 + 2 \cdot S_z{}^2 - 2 \cdot S_x \cdot S_y - 2 \cdot S_y \cdot S_z - 2 \cdot S_z \cdot S_x + 6 \cdot \tau_{xy}{}^2 + 6 \cdot \tau_{xz}{}^2 + 6 \cdot \tau_{yz}{}^2\right) \qquad \text{(C.10)}$$

Mas,

$$\left(S_x + S_y + S_z\right)^2 = 0 = S_x{}^2 + S_y{}^2 + S_z{}^2 + 2 \cdot S_x \cdot S_y + 2 \cdot S_y \cdot S_z + 2 \cdot S_x \cdot S_z \qquad \text{(C.11)}$$

$$\left(\dot{\varepsilon}_x^f + \dot{\varepsilon}_y^f + \dot{\varepsilon}_z^f\right)^2 = 0 = \left(\dot{\varepsilon}_x^f\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_y^f\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_z^f\right)^2 + 2 \cdot \dot{\varepsilon}_x^f \cdot \dot{\varepsilon}_y^f + 2 \cdot \dot{\varepsilon}_y^f \cdot \dot{\varepsilon}_z^f + 2 \cdot \dot{\varepsilon}_z^f \cdot \dot{\varepsilon}_x^f \qquad \text{(C.12)}$$

Substituindo-se estas duas últimas equações na anterior:

$$3 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_x^f\right)^2 + 3 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_y^f\right)^2 + 3 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_z^f\right)^2 + 6 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{xy}^f\right)^2 + 6 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{xz}^f\right)^2 + 6 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{yz}^f\right)^2 = k^2\left(3 \cdot S_x{}^2 + 3 \cdot S_y{}^2 + 3 \cdot S_z{}^2 + 6 \cdot \tau_{xy}{}^2 + 6 \cdot \tau_{xz}{}^2 + 6 \cdot \tau_{yz}{}^2\right) \qquad \text{(C.13)}$$

Dividindo-se a equação por 3:

$$\left[\left(\dot{\varepsilon}_x^f\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_y^f\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_z^f\right)^2 + 2 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{xy}^f\right)^2 + 2 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{xz}^f\right)^2 + 2 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{yz}^f\right)^2\right] = k^2\left[S_x{}^2 + S_y{}^2 + S_z{}^2 + 2 \cdot \tau_{xy}{}^2 + 2 \cdot \tau_{xz}{}^2 + 2 \cdot \tau_{yz}{}^2\right] \qquad \text{(C.14)}$$

Define-se agora a tensão e a deformação generalizada ou efetiva de fluência:

Tensão efetiva de fluência:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left({S_x}^2 + {S_y}^2 + {S_z}^2 + 2{\tau_{xy}}^2 + 2{\tau_{xz}}^2 + 2{\tau_{yz}}^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (C.15)$$

Deformação efetiva de fluência:

$$\dot{\varepsilon}_e^f = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\left(\dot{\varepsilon}_x^f\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_y^f\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_z^f\right)^2 + 2 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{xy}^f\right)^2 + 2 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{xz}^f\right)^2 + 2 \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{yz}^f\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (C.16)$$

As definições anteriores, com introdução dos termos $\sqrt{\frac{3}{2}}$ e $\sqrt{\frac{2}{3}}$ deve-se à condição desses invariantes de tensões e velocidades de deformação se igualarem à tensão e velocidade de deformação uniaxial no caso das curvas experimentais obtidas nos ensaios uniaxiais.

Substituindo-se as definições (C.15), (C.16) em (C.14):

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \dot{\varepsilon}_e^f \qquad (C.17)$$

$$k = \frac{\dot{\varepsilon}_e^f}{\sigma_e} \cdot \frac{3}{2} \qquad (C.18)$$

Substituindo-se (C.18) em (C.7):

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x^f \\ \dot{\varepsilon}_y^f \\ \dot{\varepsilon}_z^f \\ \dot{\varepsilon}_{xy}^f \\ \dot{\varepsilon}_{xz}^f \\ \dot{\varepsilon}_{yz}^f \end{Bmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\dot{\varepsilon}_e^f}{\sigma_e} \cdot \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \qquad (C.19)$$

Sabe-se que:

$$\dot{\varepsilon}_{xy}^f = \frac{\dot{\gamma}_{xy}^f}{2}$$
$$\dot{\varepsilon}_{xz}^f = \frac{\dot{\gamma}_{xz}^f}{2} \qquad (C.20)$$
$$\dot{\varepsilon}_{yz}^f = \frac{\dot{\gamma}_{yz}^f}{2}$$

Substituindo:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x^f \\ \dot{\varepsilon}_y^f \\ \dot{\varepsilon}_z^f \\ \dot{\gamma}_{xy}^f \\ \dot{\gamma}_{xz}^f \\ \dot{\gamma}_{yz}^f \end{Bmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\dot{\varepsilon}_e^f}{\sigma_e} \cdot \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ 2 \cdot \tau_{xy} \\ 2 \cdot \tau_{xz} \\ 2 \cdot \tau_{yz} \end{Bmatrix} \qquad \text{(C.21)}$$

Finalmente pode-se empregar como equação constitutiva geral a equação:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_e} \cdot \dot{\varepsilon}_e \cdot S_{ij} \qquad \text{(C.22)}$$

A relação entre $\varepsilon_e$ e $\sigma_e$ pode seguir a lei empírica de fluência.

Esta equação é usada no cálculo do incremento no tensor de deformações por fluência entre dois instantes $t_n$ e $t_{n-1}$ por Odqvist (1974):

$$\Delta\varepsilon^f = \frac{3}{2}\frac{\Delta\varepsilon_e}{\sigma_{e_{t=t_o}}} \cdot \left[S_{t=t_o}\right] \qquad \text{(C.23)}$$