

### 3

## Métodos para a solução da função multinormal

Nas análises de confiabilidade estrutural o cálculo da integral multinormal é a base para os problemas descritos por duas ou mais funções limites. A seguir será apresentada a definição e os métodos de solução para o cálculo da probabilidade de falha através de uma função multinormal.

### 3.1

#### A função binormal

A integral da função binormal pode ser considerada como um caso especial da integral do cálculo da *POF* da equação (2.3), onde um vetor  $\mathbf{X}$  é composto por duas variáveis  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ , as quais são normalmente distribuídas e dependentes através de um coeficiente de correlação,  $\rho$ , [8].

Se for considerado que as regiões de falha das equações de estado limite são definidas pelo domínio  $\mathbf{X}_1 > x_1$  e  $\mathbf{X}_2 > x_2$ , a *POF* pode ser escrita como:

$$POF = \int_{x_2 > x_2}^{\infty} \int_{x_1 > x_1}^{\infty} f_X(X, \rho) dX \quad (3.1)$$

Onde,  $f_X(\cdot)$ , é a função de densidade de probabilidade binormal e é definida por:

$$f_X(X, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp \left[ -\frac{\left(\frac{x_1 - \mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1 - \mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}\right)\left(\frac{x_2 - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\right)}{2(1-\rho^2)} \right] \quad (3.2)$$

A função de densidade de probabilidade binormal é definida por vários parâmetros os quais são: as médias das variáveis,  $\mu_{x1}$  e  $\mu_{x2}$ , os desvios padrões das variáveis,  $\sigma_{x1}$  e  $\sigma_{x2}$ , e o coeficiente de correlação entre as variáveis,  $\rho = \rho_{x1x2}$ . Os valores de  $x_1$  e  $x_2$  pertencem ao domínio:  $-\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty$ .

O coeficiente de correlação pode variar de  $[-1 \leq \rho \leq 1]$  e ele serve como uma medida da dependência linear entre as variáveis, além, de influenciar na forma da função binormal. O coeficiente pode ser definido por [55]:

$$\rho = \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{\sigma_{x1}\sigma_{x2}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_{x1})(x_2 - \mu_{x2}) f_{x1}(x_1) f_{x2}(x_2) dx_1 dx_2}{\sigma_{x1}\sigma_{x2}} \quad (3.3)$$

Na equação (3.3),  $\text{cov}(x_1, x_2)$  é a covariância entre  $x_1$  e  $x_2$ ,  $f_{x1}(x_1)$  é a função de densidade de probabilidade normal da variável  $x_1$  e  $f_{x2}(x_2)$  é a função de densidade de probabilidade normal da variável  $x_2$ .

A função de probabilidade acumulada,  $F_X(\cdot)$ , é obtida integrando a equação (3.2) [6]:

$$F_X(X, \rho) = P \left[ \bigcap_{i=1}^2 (X_i \leq x_i) \right] = \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} f_X(x_1, x_2, \rho) dx_1 dx_2 \quad (3.4)$$

A equação (3.4) pode ser calculada numericamente.

Na figura 3.1 mostra-se como exemplo a forma de uma função binormal com parâmetros  $\mu_{x1} = 3$ ,  $\mu_{x2} = 2$ ,  $\sigma_{x1} = 2$ ,  $\sigma_{x2} = 2$  e  $\rho = 0.5$ .

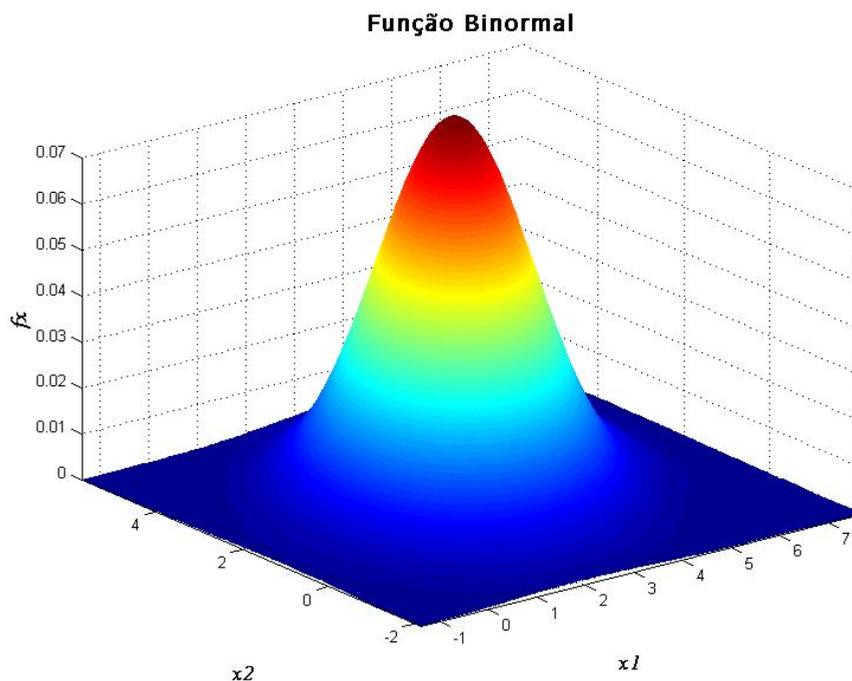


Figura 3.1 – Função Binormal.

Uma forma “padrão” para a função binormal é mais conveniente de ser usada, para isso, as variáveis são padronizadas, tal como:

$$y_1 = \left( \frac{x_1 - \mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}} \right), \quad y_2 = \left( \frac{x_2 - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}} \right) \quad (3.5)$$

e  $\mu_{y_1} = \mu_{y_2} = 0$  e  $\sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} = 1$ . Substituindo-se estes valores e a equação (3.5) em (3.2) e (3.4), se obtém:

$$f_X(X, \rho) = \frac{1}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \phi_2(y, \rho) \quad (3.6)$$

$$F_X(X, \rho) = \Phi_2(y, \rho) \quad (3.7)$$

Onde,  $\phi_2(\cdot)$  e  $\Phi_2(\cdot)$  (o subscrito 2 significa bi), são a função de densidade de probabilidade binormal e a função de probabilidade acumulada para variáveis padronizadas  $y = (y_1, y_2)$ , respectivamente,  $\phi_2(\cdot)$  é dado como:

$$\phi_2(y, \rho) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{y_1^2 + y_2^2 - 2\rho y_1 y_2}{2(1-\rho^2)} \right] \quad (3.8)$$

$$\Phi_2(y, \rho) = \int_{-\infty}^{y_2} \int_{-\infty}^{y_1} \phi_2(y, \rho) dy_1 dy_2 \quad (3.9)$$

Cabe notar que o único parâmetro que define a função de densidade de probabilidade padrão binormal (equação 3.8) é o coeficiente de correlação  $\rho$  [55]. A seguir são apresentados alguns gráficos de contorno da função binormal padrão, onde se observa a influência do coeficiente de correlação.

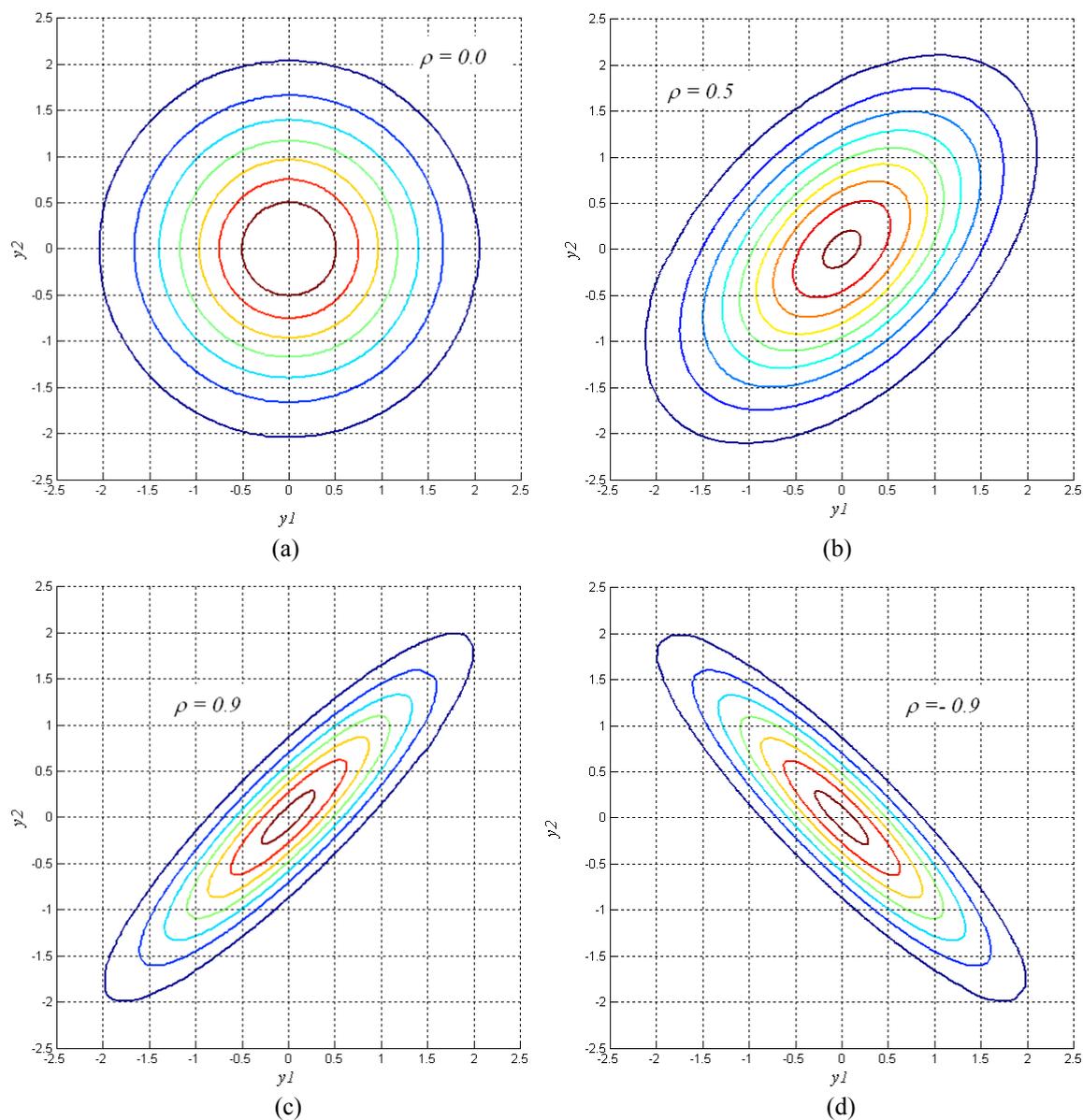


Figura 3.2 – Influência do coeficiente de correlação na função de densidade de probabilidade padrão binormal.

Nos gráficos se observa que conforme o coeficiente de correlação tende a um (1), a distribuição fica mais esticada e o eixo maior das elipses de contorno da função binormal tem a inclinação positiva. Para coeficientes de correlação negativos, o eixo maior das elipses de contorno tem uma inclinação negativa. Quando  $\rho=0$  os contornos da função binormal aparecem como círculos concêntricos. O  $\rho=0$ , significa que as variáveis são independentes entre si.

## 3.2

### A função multinormal

Em 3.1 for considerado que a *POF* para duas funções de estado limite definidas pelo domínio  $\mathbf{X}_1 > \mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{X}_2 > \mathbf{x}_2$ , pode ser calculada pela equação (3.1). Para problemas de análise de confiabilidade estrutural com várias funções limites, a solução de (3.1) envolve a integração de uma distribuição multinormal, a qual pode ser definida por [14, 15]:

$$\begin{aligned} \Phi_m(\mathbf{c}, \mathbf{R}) &= P \left[ \bigcap_{k=1}^m (X_k \leq c_k) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{c_m} \dots \int_{-\infty}^{c_1} \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \exp\left(-X^T \mathbf{R}^{-1} X / 2\right) dx_1 \dots dx_m \end{aligned} \quad (3.10)$$

Na equação (3.10), tem-se que  $(X_k \leq c_k)$  são os  $m$  estados limites do problema no espaço padrão e  $\mathbf{R}$  é uma matriz ( $m \times m$ ), com os coeficientes de correlação entre os estados limites.

Tal como já tratado no capítulo 2, na teoria de confiabilidade estrutural quando são usados métodos de primeira ordem, as funções limites não lineares e com  $n$  variáveis não normais, são aproximadas por funções limites lineares no espaço das variáveis normais padronizadas. Deste modo, a função limite “padronizada” pode ser escrita assim [14, 15]:

$$m_i = \alpha_i^T y + \beta_i \quad (i = 1, 2 \dots m) \quad (3.11)$$

onde,  $y$  é um vetor com as  $n$  variáveis normais padronizadas,  $\alpha$  é o vetor normal à função limite padronizada e  $\beta$  é o vetor com os índices de confiabilidade de cada função limite.

A correlação entre os estados limites  $m_i$  e  $m_j$  é definida como:

$$\rho_{ij} = \alpha_i^T \alpha_j \quad (3.12)$$

De acordo com (3.12), a matriz de correlação  $\mathbf{R}$  é definida em termos dos vetores unitários normais aos pontos de linearização (pontos de projeto) das superfícies de falha das componentes do sistema [56].

Cabe lembrar aqui que quando  $m_i \leq 0$  significa que existe uma falha, e que o cálculo da probabilidade de falha é feito por  $\Phi(-\beta_i)$ , onde:  $\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição acumulada padrão normal e  $\beta_i = -c_i$  é o índice de confiabilidade para o  $i$ -ésimo estado limite, a equação (3.10) pode ser re-escrita assim :

$$\Phi_m(\mathbf{c}, \mathbf{R}) = P \left[ \bigcap_{k=1}^m (X_k \leq -\beta_k) \right] = \Phi_m(-\boldsymbol{\beta}, \mathbf{R}) \quad (3.13)$$

A equação (3.13) é igual à equação (2.30) para o caso de um sistema em paralelo e esta expressão é a base para a solução de problemas de confiabilidade com vários modos de falha, ou estados limites. De forma análoga a solução para o sistema em serie é definida por [57]:

$$\begin{aligned} P \left[ \bigcup_{k=1}^m (X_k \leq -\beta_k) \right] &= 1 - P \left[ \bigcap_{k=1}^m (-X_k \leq \beta_k) \right] \\ &= 1 - \Phi_m(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{R}) = 1 - \Phi_m(-\mathbf{c}, \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

A seguir é apresentado um exemplo simples que mostra o cálculo da *POF* para um sistema com duas funções limites. O índice de confiabilidade para cada componente do sistema é dado por  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = 2$ , o valor de  $\rho = 0.5$ . O sistema

está em paralelo. A *POF* é calculada usando a equação (3.13), a integral foi calculada numericamente usando o software MATLAB, assim:

$$POF = P\left[\bigcap_{k=1}^2 (X_k \leq -\beta_i)\right] = \Phi_2(-\beta, \mathbf{R})$$

$$= \int_{-\infty}^{-\beta_2} \int_{-\infty}^{-\beta_1} \frac{1}{2\pi \left(\det \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}\right) d\beta_1 d\beta_2$$

$$\beta_1 = 1$$

$$\beta_2 = 2$$

$$\rho = 0.5$$

$$POF = 0.0133$$

A figura 3.3 apresenta graficamente o cálculo da *POF* do exemplo anterior.

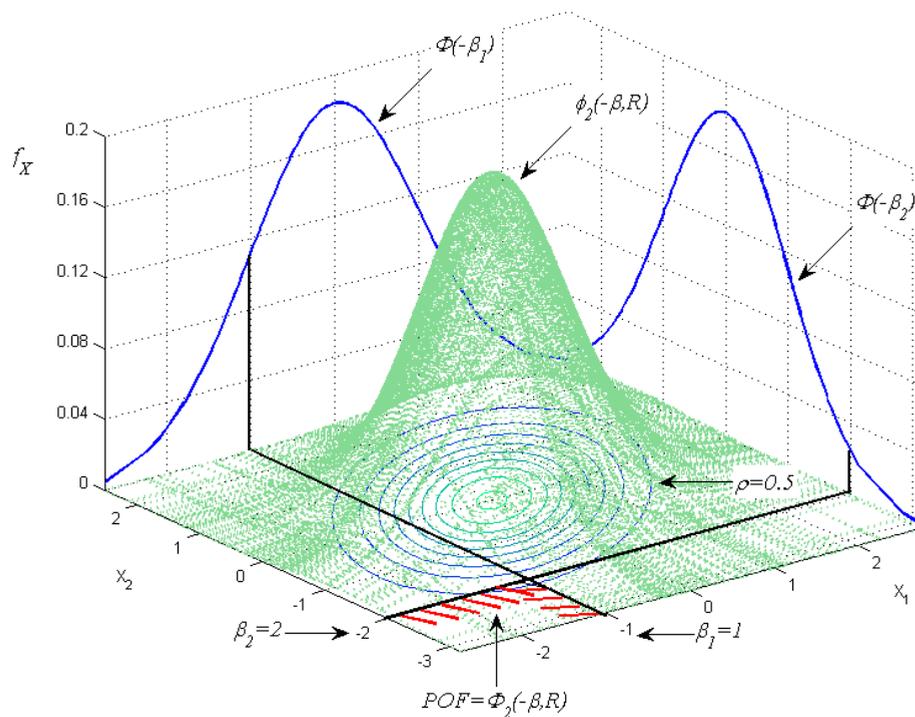


Figura 3.3 – Cálculo da *POF* para um sistema com duas funções limites. Usando a integral da função de densidade de probabilidade padrão binormal.

A integração numérica da equação (3.13) para sistemas com várias funções de estado limite não é considerada Prática para problemas de engenharia. A seguir

são apresentados alguns métodos baseados nas aproximações multinormais de primeira ordem (*FOMN*) e no produto das probabilidades condicionais marginais (*PCM*) [14]. Estes métodos proporcionam algoritmos eficientes para a solução da equação (3.13).

### 3.3

#### Método de primeira ordem multinormal – *FOMN*

As bases de este método provêm dos conceitos do método *FORM*, o qual foi apresentado no capítulo 2 [16]. O primeiro passo do método para calcular a integral  $\Phi_m(\mathbf{c}, \mathbf{R})$ , consiste em transformar as variáveis correlacionadas  $\mathbf{x}$  em variáveis  $\mathbf{U}$ , estatisticamente independentes, através da transformação de Rosenblatt [17]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad \text{ou} \quad x_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}U_j \quad (3.15)$$

Em (3.15),  $\mathbf{B}$  é uma matriz triangular inferior obtida da decomposição de Choleski da matriz de correlação  $\mathbf{R} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$ . A matriz  $\mathbf{B}$  é calculada assim:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & & & \\ b_{12} & b_{22} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdot & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = 1$$

$$b_{21} = \rho_{21}$$

$$b_{i1} = \rho_{i1} \quad i = 3, \dots, n$$

$$b_{22} = \sqrt{1 - b_{21}^2}$$

$$b_{33} = \sqrt{1 - b_{31}^2 - b_{32}^2}$$

$$b_{ii} = \left( 1 - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad j = 2, \dots, i-1$$

$$b_{ij} = \frac{\left( \rho_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik} \alpha_{jk} \right)}{\alpha_{jj}} \quad i = 3, \dots, n$$

A equação (3.15) pode ser substituída em (3.13) assim:

$$\Phi_m(\mathbf{c}, \mathbf{R}) = P \left[ \bigcap_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^k b_{kj} U_j \leq -\beta_k \right) \leq 0 \right] \quad (3.16)$$

Usando a condição  $U_1 \leq -\beta_1$ , a integral  $\Phi_m(\mathbf{c}, \mathbf{R})$  pode ser reduzida em uma dimensão [14]:

$$\Phi_m(\mathbf{c}, \mathbf{R}) = P \left[ \bigcap_{k=2}^m \left( \sum_{j=1}^k b_{kj} U_j \leq -\beta_k \right) \mid (U_1 \leq -\beta_1) \right] \times P(U_1 \leq -\beta_1) \quad (3.17)$$

onde:  $P(U_1 \leq -\beta_1) = \Phi(-\beta_1)$

Devido a que  $U_1$  é independente das variáveis  $U_2, U_3, \dots, U_k$ , a probabilidade condicional da equação (3.17) pode ser re-escrita como uma probabilidade não condicional, assim [8, 17]:

$$P \left[ \bigcap_{k=2}^m \left( \sum_{j=1}^k b_{kj} U_j \leq -\beta_k \right) \mid (U_1 \leq -\beta_1) \right] = P \left[ \bigcap_{k=2}^m \left( b_{k1} \tilde{U}_1 + \sum_{j=1}^k b_{kj} U_j \leq -\beta_k \leq 0 \right) \right] \quad (3.18)$$

Onde:  $\tilde{U}_1 = \Phi^{-1}[\Phi(-\beta_1)\Phi(U_1)]$ , [12, 14], substituindo este valor em (3.18):

$$P \left[ \bigcap_{k=2}^m \left( b_{k1} \Phi^{-1}[\Phi(-\beta_1)\Phi(U_1)] + \sum_{j=1}^k b_{kj} U_j \leq -\beta_k \right) \right] = P \left[ \bigcap_{k=2}^m (h_k(U) \leq 0) \right] \quad (3.19)$$

Onde:  $h_k(U) \leq 0$  é uma função de estado limite não linear, a qual pode ser linearizada assim [15]:

$$h_k(U) \approx h_{k_{lin}}(U) = \beta_k^{(2)} + \sum_{j=1}^k \alpha_{kj} U_j \quad (k = 2, \dots, m) \quad (3.20)$$

onde:  $\alpha_{kj}$  são os co-senos diretores ao ponto de projeto ( $U^*$ ) e  $\beta_k^{(2)}$  é a mínima distância ao plano aproximado calculado pelo método *FORM*. A probabilidade de  $h_k(U) \leq 0$  pode ser calculada como:

$$P[h_k(U) \leq 0] = P\left[\left(\beta_k^{(2)} + \sum_{j=1}^k \alpha_{kj} U_j\right) \leq 0\right] \approx \Phi(-\beta_k^{(2)}), \quad (k = 2, \dots, m) \quad (3.21)$$

E, portanto:

$$P\left[\bigcap_{k=2}^m (h_k(U) \leq 0)\right] = \Phi_{m-1}(-\beta^{(2)}, \mathbf{R}^{(2)}) \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.17) tem-se:

$$\Phi_m(\mathbf{c}, \mathbf{R}) = \Phi(-\beta_1) \Phi_{m-1}(-\beta^{(2)}, \mathbf{R}^{(2)}) \quad (3.23)$$

o valor de  $\mathbf{R}^{(2)} = \alpha^T \alpha$ . Repetindo-o de forma seqüencial para o número de dimensões  $m$  e seguindo de forma análoga ao encontrado em (3.23), o cálculo de  $\Phi_m(\mathbf{c}, \mathbf{R})$  pode ser feito como um produto de  $m$  integrais normais unidimensionais [15]:

$$\Phi_m(\mathbf{c}, \mathbf{R}) = \Phi(-\beta_1) \times \Phi(-\beta_2^{(2)}) \times \dots \times \Phi(-\beta_m^{(m)}) \quad (3.24)$$

O procedimento explicado acima para a solução da integral multinormal é geralmente conhecido como método cru *FOMN* (*First Order Multinormal*) e a sua exatidão diminui com o incremento das dimensões  $m$  ( $m > 6$ ) e a quantidade de variáveis correlacionadas, segundo um estudo feito por PANDEY [15].

O método ainda continua complexo, dado que tem que usar o *FORM* para calcular o valor de  $\beta_k^{(2)}$  e a linearização da equação (3.19) pode trazer mais erros

ao cálculo de  $\Phi_m(\mathbf{c}, \mathbf{R})$ . Uma melhoria ao método *FOMN* é conhecida como método *I-FOMN* (*Improved – First Order Multinormal*) [18].

No método *I-FOMN* o cálculo da probabilidade condicional da equação (3.17) é melhorado. Ao invés de usar a equação (3.18), a probabilidade é calculada numericamente usando uma integral binormal, similar ao exemplo apresentado em 3.2. Para isto, primeiro, as variáveis  $U_j$  são transformadas nas variáveis  $X_k$  através da transformação de Rosenblatt, e a probabilidade condicional de equação (3.17) é definida por [14]:

$$P \left[ \left( \sum_{j=1}^k b_{kj} U_j \leq -\beta_k \right) \middle| (U_1 \leq -\beta_1) \right] = P \left[ (X_k \leq -\beta_k) \middle| (X_1 \leq -\beta_1) \right] \quad (3.25)$$

Usando as leis de probabilidade tem-se que:

$$P \left[ (X_k \leq -\beta_k) \middle| (X_1 \leq -\beta_1) \right] = \frac{P \left[ (X_k \leq -\beta_k) \cap (X_1 \leq -\beta_1) \right]}{(X_1 \leq -\beta_1)} \quad (3.26)$$

$$\frac{P \left[ (X_k \leq -\beta_k) \cap (X_1 \leq -\beta_1) \right]}{(X_1 \leq -\beta_1)} = \frac{\Phi_2(-\beta_1, -\beta_k, \rho_{1k})}{\Phi(-\beta_1)} = \Phi(-\beta_{k,l}^2) \quad (3.27)$$

O numerador de (3.27)  $\Phi_2(-\beta_1, -\beta_k, \rho_{1k})$  é uma função binormal que pode ser calculada numericamente. Para finalizar o método, o valor de  $\Phi(-\beta_{k,l}^2)$  é substituído em (3.23).

### 3.4

#### Método do produto das probabilidades condicionais marginais - *PCM*

O método se baseia no princípio que uma distribuição multinormal pode ser representada como um produto das probabilidades condicionais e que cada

probabilidade condicional é representada por uma distribuição unidimensional [14].

$$\Phi_m(\mathbf{c}, \mathbf{R}) = P\left[(X_m \leq c_m) \middle| \bigcap_{k=1}^{m-1} (X_k \leq c_k)\right] \times P\left[(X_{m-1} \leq c_{m-1}) \middle| \bigcap_{k=1}^{m-2} (X_k \leq c_k)\right] \times \dots \times P[(X_1 \leq c_1)] \quad (3.28)$$

A seguir será explicado o procedimento do método *PCM* (*Product of Conditional Marginals*) usando uma função trinormal,  $\Phi_3(\mathbf{c}, \mathbf{R})$ , onde  $x_i = c_i$  é o intercepto do  $i$ -ésimo plano com o eixo  $x_i$  e  $\mathbf{R} = [\rho_{ij}]$  é a matriz correlação, com  $i, j = 1, 2, 3$ . Expressando a função em termos de probabilidade condicional, tem-se o seguinte:

$$\Phi_3(\mathbf{c}, \mathbf{R}) = P\left[(X_3 \leq c_3) \middle| \bigcap_{k=1}^{3-1} (X_k \leq c_k)\right] \times P[(X_2 \leq c_2) | (X_1 \leq c_1)] \times \Phi_1(c_1) \quad (3.29)$$

Em (3.29), o termo  $\Phi_1(c_1)$  é facilmente calculado e  $P[(X_2 \leq c_2) | (X_1 \leq c_1)]$  requer o cálculo de uma distribuição marginal de  $X_2$  truncada em  $X_1 \leq c_1$ . Para isso é necessário definir a distribuição de densidade de probabilidade marginal a qual é definida como [8]:

$$f_{x_2|x_1 \leq c_1}(x_2) = \frac{f_{x_1 x_2}(x_1, x_2)}{f_{x_2}(x_2)} = \frac{1}{\Phi(c_1)} \int_{-\infty}^{c_1} \phi_{x_1 x_2}(x_1, x_2, r_{12}) dx_1 \quad (3.30)$$

A função  $f_{x_2|x_1 \leq c_1}(x_2)$  não é uma distribuição normal, mas sua média  $\mu_{2|1}$  e seu desvio padrão  $\sigma_{2|1}$  são dados por [14, 19]:

$$\mu_{2|1} = -r_{21} A_1 \quad (3.31)$$

$$A_1 = \frac{\phi(c_1)}{\Phi(c_1)} \quad (3.32)$$

$$\sigma_{2|1} = \sqrt{1 - r_{21}^2 B_1} \quad (3.33)$$

$$B_1 = A_1(c_1 + A_1) \quad (3.34)$$

Usando a média  $\mu_{2|1}$  e o desvio padrão  $\sigma_{2|1}$ , e o conceito de variável padronizada é possível definir uma distribuição normal para calcular  $P[(X_2 \leq c_2)|(X_1 \leq c_1)]$ :

$$P[(X_2 \leq c_2)|(X_1 \leq c_1)] = \Phi\left(\frac{c_2 - \mu_{2|1}}{\sigma_{2|1}}\right) = \Phi(c_{2|1}) \quad (3.35)$$

Da equação anterior é definido o valor de  $c_{2|1}$  como:

$$c_{2|1} = \frac{c_2 - \mu_{2|1}}{\sigma_{2|1}} = \frac{c_2 + r_{12}A_1}{\sqrt{1 - r_{12}^2 B_1}} \quad (3.36)$$

O valor de (3.36) é substituído em (3.35) e este por sua vez em (3.29).

De forma similar e por analogia o valor de  $c_{3|2}$  para calcular a probabilidade de  $P[(X_3 \leq c_3) | \bigcap_{k=1}^{3-1} (X_k \leq c_k)]$  é expresso como:

$$c_{3|2} = \frac{c_3 + r_{23|1}A_{2|1}}{\sqrt{1 - r_{23|1}^2 B_{2|1}}} \quad (3.37)$$

Onde:  $A_{2|1} = \phi(c_{2|1}) / \Phi(c_{2|1})$ ,  $B_1 = A_1(c_1 + A_1)$  e  $r_{23|1} = r_{23|x_1 \leq c_1}$  definido por:

$$r_{23|1} = \frac{r_{23} - r_{12}r_{13}B_1}{\sqrt{1 - r_{12}^2 B_1} \sqrt{1 - r_{13}^2 B_1}} \quad (3.38)$$

A equação (3.28) pode ser generalizada em função de  $c_{k|(k-1)}$ , assim [58]:

$$\Phi_m(\mathbf{c}, \mathbf{R}) = \prod_{k=1}^m \Phi(c_{k|k-1}) \quad (3.39)$$

Em (3.39)  $c_{k|(k-1)}$  representa-se como uma variável condicional normal e  $\Phi_m(\mathbf{c}, \mathbf{R})$  é calculado como o produto de distribuições unidimensionais.

Para fins de programação e para a forma geral ( $m$  componentes), cabe dizer que os subscritos das equações (3.38) e (3.39) podem ser substituído por  $3 \rightarrow m$ ,  $2 \rightarrow k$  e  $B_1 \rightarrow B_{(k-1)|(k-2)}$ . O método *PCM* é relativamente simples, só é necessário o cálculo de  $c_{k|(k-1)}$ , o qual só depende de cálculos algébricos não muito complexos.

### 3.5

#### Método melhorado do produto das probabilidades condicionais – *I-PCM*

O método *I-PCM* foi desenvolvido com o fim de corrigir os erros que apresenta o método *PCM* no cálculo da *POF* de sistemas em série. Já para sistemas em paralelo o método apresenta um bom desempenho [14].

No numeral 2.3 viu-se que a probabilidade de falha é calculada para os sistemas em paralelo e em série usando as equações (3.13) e (3.14) respectivamente. Para o caso de um sistema em série com dois componentes a *POF* é calculada usando o método *PCM* e é definida por:

$$\begin{aligned} P \left[ \bigcup_{k=1}^2 (X_k \leq -\beta_k) \right] &= 1 - P \left[ \bigcap_{k=1}^2 (-X_k \leq \beta_k) \right] \\ &= 1 - \Phi_2(\beta_1, \beta_2, \rho) = 1 - \left[ \Phi(\mathbf{c}_{2|1}) \Phi(\mathbf{c}_1) \right] \approx 1 - \left[ \Phi(\beta_2) \Phi(\beta_1) \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

A *POF* também é definida usando o conceito de união de probabilidades, assim:

$$P\left[\bigcup_{k=1}^2(X_k \leq -\beta_k)\right] = \Phi(-\beta_1) + \Phi(-\beta_2) - \Phi_2(-\beta_1, -\beta_2, \rho) \quad (3.41)$$

Das equações (3.40) e (3.41) pode ser concluído que o método *PCM* para o sistema em série usa uma região *espelho* da falha, enquanto que a equação (3.41) usa a região verdadeira de falha. A seguir apresenta-se, graficamente, este conceito. O exemplo corresponde a um sistema em série bidimensional com  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 1$ , e  $\rho = 0.77$ .

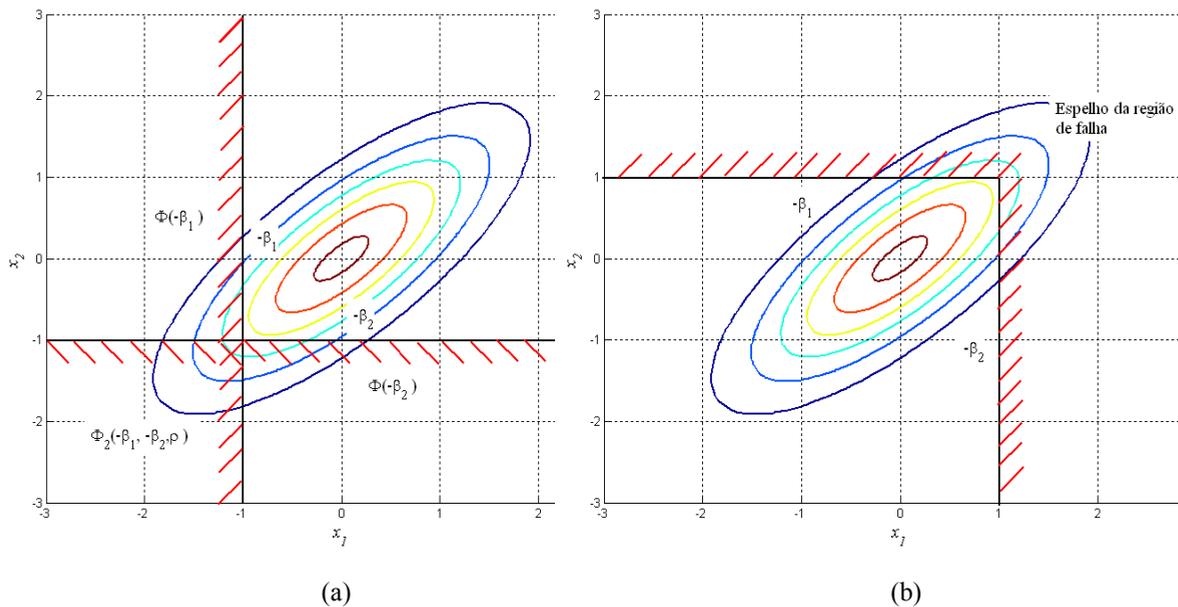


Figura 3.4 – Cálculo da *POF* para um sistema em série bidimensional. (a) Região de falha verdadeira eq. (3.41). (b) Espelho da região de falha usado pelo *PCM* eq. (3.40).

A partir da figura 3.4 (b) pode ver-se que o *PCM* sobreestima a *POF*, tem uma região de falha maior; enquanto na figura 3.4 (a) a região de falha é menor, devido a que é descontado o valor de  $\Phi_2(-\beta_1, -\beta_2, \rho)$ . Os resultados da *POF* foram os seguintes:

**PCM - Eq. (3.40):**

$$P\left[\bigcup_{k=1}^2(X_k \leq -\beta_k)\right] = 1 - \Phi_2(\beta_1, \beta_2, \rho) = 1 - [\Phi(\beta_2|\beta_1)\Phi(\beta_1)] = 0.2288$$

**Exato - Eq. (3.41):**

$$P\left[\bigcup_{k=1}^2(X_k \leq -\beta_k)\right] = 0.1587 + 0.1587 - 0.0932 = 0.2242$$

Do exemplo acima, vê-se que o *PCM* é maior que o exato, embora, o erro seja só de 2.1%. Cabe lembrar que o sistema só tem duas dimensões e à medida que as dimensões aumentam os erros se propagam.

Para corrigir o *PCM*, uma melhoria (*I-PCM*) é feita através do seguinte conceito: da equação (3.41), tem-se o último termo que corresponde à definição da *POF* para um sistema em paralelo, portanto, a equação é redefinida como:

$$\begin{aligned} P\left[\bigcup_{k=1}^{m=2}(X_k \leq -\beta_k)\right] &= \Phi(-\beta_1) + \Phi(-\beta_2) - P\left[\bigcap_{k=1}^{m=2}(X_k \leq -\beta_k)\right] \\ &= \Phi(-\beta_1) + \Phi(-\beta_2) - \prod_{k=1}^{m=2} \Phi(c_{k|k-1}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

A seguir é desenvolvido ainda mais o exemplo anterior, usando-se, agora, a equação (3.42):

***I-PCM* - Eq. (3.41):**

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{m=2}(X_k \leq -\beta_k)\right] = 0.1587 + 0.1587 - 0.0944 = 0.2230$$

O erro do *I-PCM* com respeito ao método exato é de 0.54%.

Uma generalização do método usando o conceito exposto em (3.42), pode ser dada por:

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{c}_{j|k}) &= P\left[(X_j \leq c_j) \mid \bigcap_{i=1}^k (X_i \leq c_i)\right] = P\left[(X_{j|(k-1)} \leq c_{j|(k-1)}) \mid (X_{k|(k-1)} \leq c_{k|(k-1)})\right] \\
&= \frac{\Phi_2(c_{j|(k-1)}, c_{k|(k-1)}, \mathbf{r}_{kj|(k-1)})}{\Phi(c_{k|(k-1)})} = 1 - \frac{\Phi(-c_{j|(k-1)}) - \Phi_2(-c_{j|(k-1)}, -c_{k|(k-1)}, \mathbf{r}_{kj|(k-1)})}{\Phi(c_{k|(k-1)})} \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Onde:  $k = 1, \dots, m - 1$ ,  $j = k + 1, \dots, m$  e  $\mathbf{r}_{kj|(k-1)}$  se obtêm de forma similar a equação (3.38) [14].

Para finalizar, ressalta-se que o método *I-PCM* deve ser usado quando existem sistemas em série, já para sistemas em paralelo pode-se usar o método *PCM*.

Foram apresentados vários métodos que ajudam no cálculo da integral multinormal. As principais vantagens dos métodos baseados no *PCM* são: não requerem a avaliação de integrais via métodos numéricos e poderem ser facilmente implementados em um programa de confiabilidade estrutural. Nos próximos capítulos serão apresentados exemplos onde a integral multinormal é usada para a avaliação da confiabilidade estrutural, especialmente em dutos.