

2

Conceitos de confiabilidade estrutural

As estruturas projetadas pelos engenheiros, geralmente são dimensionadas de forma conservadora, já que sobre elas são impostos fatores de segurança que são recomendados em normas de projeto. Ainda assim, as estruturas falham.

Em um projeto de engenharia um dos aspectos mais importantes, além da funcionalidade da estrutura é a segurança dela. Um projeto seguro requer o conhecimento de todas as variáveis envolvidas no problema. Porém, o conhecimento de uma variável não é total e esta sempre tem um grau de incerteza associado.

De acordo com o mencionado acima, é conveniente considerar que as variáveis a serem utilizadas no projeto de uma estrutura sejam de caráter aleatório, isto é, que possam ser definidas por estatísticas que representem bem sua aleatoriedade.

A confiabilidade de uma estrutura, Rel , é definida como o complemento da probabilidade de falha, POF , de acordo com a seguinte expressão [3]:

$$Rel = 1 - POF \quad (2.1)$$

É comum usar a POF como a medida da confiabilidade de uma estrutura. A POF também é muito usada na análise de risco, onde este é definido como:

$$Risco = POF \times COF \quad (2.2)$$

Na equação (2.2) COF é a consequência de falha, geralmente traduzida em termos econômicos, fatalidades humanas, paradas no processo, dano ao ambiente, etc. Para se ter uma boa análise de risco e dado que a COF é de caráter inflexível, o cálculo da POF torna-se importante e muitos esforços são concentrados em esta área.

2.1

Probabilidade de falha

O cálculo da POF é baseado na determinação de uma função de desempenho do sistema em estudo, conhecida como função de estado limite ou função de falha, $g(x)$ [3-5], onde x é um vetor, com as variáveis envolvidas na análise. Quando $g(x) < 0$ é definido que a estrutura falha. Logo, a probabilidade da estrutura falhar é dada por $POF = P(g(x) \leq 0)$.

Se $f(x)$ representa a função densidade de probabilidade conjunta de todas as variáveis aleatórias x envolvidas na análise, a POF pode ser determinada como a integração de $f(x)$ em todo o domínio da falha:

$$POF = \int_{g(x) \leq 0} f(x) dx \quad (2.3)$$

A avaliação da expressão (2.3) envolve a avaliação de uma integral n-dimensional, onde n é o número de variáveis aleatórias pertencentes a x .

A análise de confiabilidade estrutural pode ser entendida como a probabilidade da carga máxima na estrutura, L , exceder a resistência da estrutura, R , durante a sua vida útil. A figura 2.1 apresenta o caso de sobreposição das distribuições de L e R .

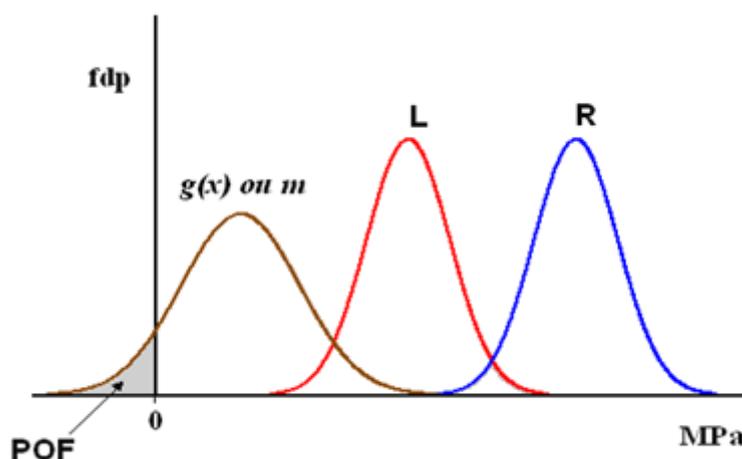


Figura 2.1 – Fundamento da integridade estrutural

Assim a função de falha $g(x)$, com $x = (R, L)$, pode ser escrita como $g(x) = m = R - L$ [3-5]. As variáveis R e L são aleatórias e são representadas pelas distribuições de probabilidade. A *POF* pode ser reescrita como:

$$POF = \int_{g(x) \leq 0} f_{R,L}(R, L) dR dL \quad (2.4)$$

$$POF = P(R - L \leq 0) = P(m \leq 0) \quad (2.5)$$

Para ajudar na análise de confiabilidade estrutural foi introduzido o conceito de *índice de confiabilidade*, β , o qual se baseia na média e no desvio padrão das variáveis aleatórias e é definido como:

$$\beta = \frac{E[g(x)]}{\sqrt{Var[g(x)]}} \quad (2.6)$$

Onde, $E[g(x)]$ é o valor esperado (a média de $g(x)$) e $\sqrt{Var[g(x)]}$ é o desvio padrão (a raiz da variância de $g(x)$).

Para o caso de R e L serem distribuídas como funções normais o estado limite m também será uma função normal e a interpretação do índice de confiabilidade para o sistema $R-L$, pode ser ilustrada na figura 2.2.

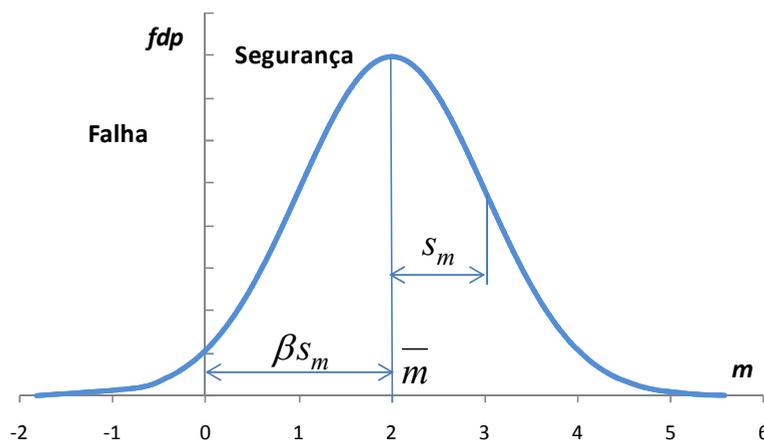


Figura 2.2 – Distribuição normal da função de estado limite m

A área da região dos valores menores que zero do gráfico mostrado na figura 2.2 é a *POF*. O índice de confiabilidade β é igual ao número de desvio padrões para o valor da média da distribuição de m ser menor ou igual a zero [3].

A *POF* definida nas equações (2.4 e 2.5) pode então ser calculada usando a distribuição cumulativa normal padrão, $\Phi(-\beta)$. Assim:

$$POF = \Phi\left(\frac{0 - \bar{m}}{s_m}\right) = \Phi(-\beta) \quad (2.7)$$

2.2

Métodos para o cálculo da probabilidade de falha

Para problemas reais, onde podem existir várias variáveis e com distribuições não-normais, a função de falha é complexa e a avaliação da equação (2.4) não é fácil. Portanto, métodos alternativos são geralmente empregados na sua avaliação. Estes métodos se dividem basicamente em métodos analíticos, tal como o método de confiabilidade de primeira ordem conhecido como *FORM* (*First Order Reliability Method*) e métodos baseados na simulação de Monte Carlo [3].

2.2.1

Método de confiabilidade de primeira ordem (*FORM*)

No método *FORM*, as variáveis aleatórias x_i , as quais podem ter qualquer distribuição e ser ou não dependentes entre si, são transformadas em variáveis y que têm distribuição normal padrão e são estatisticamente independentes.

A distribuição normal equivalente de x no ponto x^* pode ser obtida igualando as funções acumulada e de densidade da distribuição de x , com a de uma normal no ponto x^* [6]. A média e o desvio padrão (σ_x^N e μ_x^N) da distribuição normal equivalente no ponto x^* são iguais a:

$$\sigma_x^N = \frac{\phi\left\{\Phi^{-1}\left[F_x(x^*)\right]\right\}}{f_x(x^*)} \quad (2.8)$$

$$\mu_x^N = x^* - \sigma_x^N \Phi^{-1}\left[F_x(x^*)\right] \quad (2.9)$$

Onde, $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ são às funções de densidade e acumulada da distribuição normal padrão, $f_x(\cdot)$ e $F_x(\cdot)$ correspondem às funções densidade e acumulada da variável x , e $\Phi^{-1}(\cdot)$ é a inversa da distribuição acumulada normal padrão.

O ponto sobre a superfície de falha (hiperplano), com a menor distância até a origem é identificado como y^* , este é o ponto de projeto no espaço das variáveis reduzidas. A distância da origem até o ponto y^* corresponde ao valor de β . A partir disto a *POF* é calculada de acordo com a equação (2.7) [3-5]. A distância do ponto y^* até a origem é calculada como:

$$\beta = |y^*| \quad (2.10)$$

Na Figura 2.3 é mostrada a superfície de falha ($g(y) = 0$) representada pela reta $l = \left(\frac{\bar{R} - \bar{L}}{s_L}\right) + (s_R / s_L)r$ (para o caso de duas variáveis) no espaço padronizado.

O índice de confiabilidade β é definido como a distância da superfície de falha representada pela equação geral da reta $s_R r - s_L l + (\bar{R} - \bar{L}) = 0$ no espaço das variáveis padronizadas até a origem [3].

O ponto sobre a superfície de falha mais próximo da origem é o ponto $y^* = (r^*, l^*)$. Este ponto é chamado de ponto de projeto ou ponto mais provável de falha. O método *FORM* resume-se em encontrar o ponto de projeto y^* , a partir da transformação das variáveis R e L em variáveis normais padrões, a qual é feita utilizando distribuições normais equivalentes.

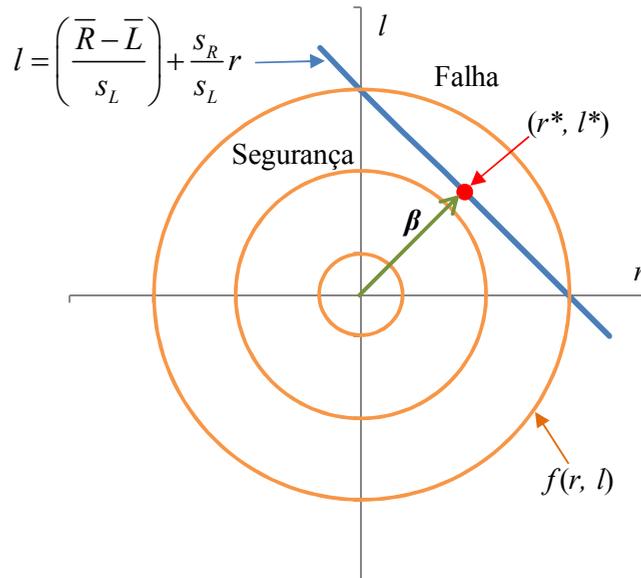


Figura 2.3 – Representação da superfície de falha no espaço padronizado

O ponto de projeto pode ser obtido através de um algoritmo desenvolvido por Hasofer e Lind (1974) [3,7,8] e aperfeiçoado por Rackwitz e Fiessler (1978) [6]. Este algoritmo é comumente identificado como *HL-RF* e é resumido pela seguinte expressão:

$$y^{K+1} = \frac{1}{|\nabla g(y^K)|^2} \left[\nabla g(y^K)^T y^K - g(y^K) \right] \nabla g(y^K)^T \quad (2.11)$$

Onde $\nabla g(y^K)$ é o gradiente da função de falha no espaço padrão, $g(y^K)$ é o valor da função de falha, ambos avaliados no ponto y^K , e y^{K+1} é o próximo ponto da mínima distância da origem até o ponto de projeto.

O algoritmo converge quando $\frac{|y^{k+1}| - |y^k|}{|y^{k+1}|} \leq Tol$ (p. ex. para $Tol=0.01\%$).

Uma vez que a convergência é alcançada, o procedimento é, então, verificar se a função limite no ponto de projeto é, aproximadamente, zero. A figura 2.4 apresenta esquematicamente o método *FORM*.

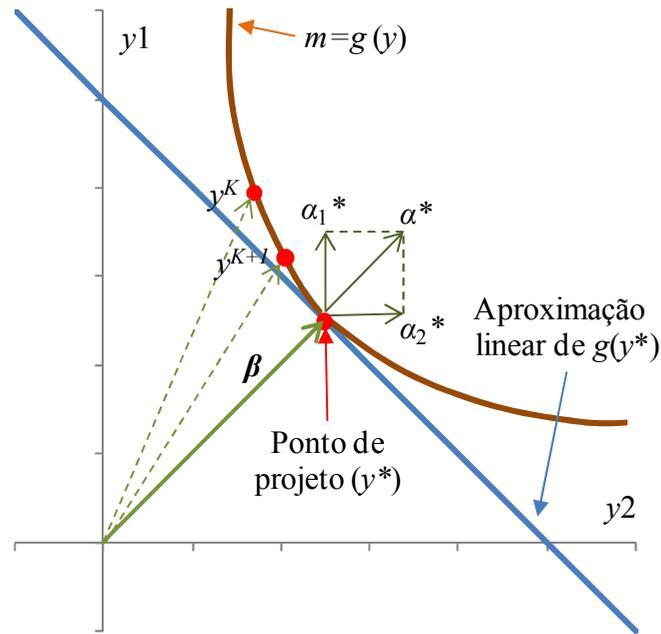


Figura 2.4 – Método *FORM* algoritmo *HR-LF*

Além de determinar o índice de confiabilidade, o *FORM* também calcula a sensibilidade de cada variável na probabilidade de falha. A medida de sensibilidade é calculada através do valor de α_i , o qual é a componente do vetor normal (α_1^* e α_2^* , figura 2.4) à superfície de falha, calculado no ponto de projeto, que se expressa por [3, 8]:

$$\alpha_i = - \frac{(\partial g(x_i^*) / \partial x_i) \sigma_{x_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n [(\partial g(x_i^*) / \partial x_i) \sigma_{x_i}]^2}} \quad (2.12)$$

$$\alpha_i = \frac{y_i^*}{\beta} \quad (2.13)$$

A sensibilidade de cada variável é determinada através de um fator de importância dado como:

$$I_i = 100 \times (\alpha_i)^2 \quad (2.14)$$

O valor de I_i dá uma estimativa da influência de cada variável no valor da *POF*. Assim, variáveis com fator de importância baixo podem ser consideradas como determinísticas na análise [8]. Dito de outra forma, as variáveis com fatores de importância altos são as que contribuem na *POF* e são aqueles que merecem maior atenção na modelagem estatística.

O método *FORM* faz uma aproximação linear da função de estado limite no ponto de projeto. Uma aproximação de segunda ordem também pode ser feita e este método é conhecido como método *SORM* (*Second Order Reliability Method*).

2.2.2

Método de confiabilidade de segunda ordem (*SORM*)

Este método exige que a função de estado limite seja diferenciável duas vezes, com a finalidade de se fazer uma aproximação quadrática no ponto de projeto [3, 8].

A *POF*, por este método é calculada, segundo:

$$POF = \Phi(-\beta) \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \beta \kappa_j)^{-0.5} \quad (2.15)$$

Onde: κ_j são as curvaturas principais da função de estado limite no ponto de projeto, para mais informações sobre como calcular, pode-se consultar a bibliografia [3, 8].

2.2.3

Novo algoritmo *FORM* por Low e Tang (*FORM-LT*)

Segundo o algoritmo de Hasofer-Lind, o índice de confiabilidade β é definido como a mínima distância da origem até a superfície do estado limite (ou superfície de falha), no espaço das variáveis padronizadas. Esta distância pode ser calculada pela equação (2.10), a qual pode ser reescrita como:

$$\beta = \sqrt{(y^*)^T (y^*)} \quad (2.16)$$

Em geral, para as variáveis com qualquer tipo de distribuição e, que possam estar correlacionadas entre si, o índice de confiabilidade da equação (2.16) é calculado como [9, 10]:

$$\beta = \min_{x \in F} \sqrt{\left[\frac{x_i - \mu_i^N}{\sigma_i^N} \right]^T \mathbf{R}^{-1} \left[\frac{x_i - \mu_i^N}{\sigma_i^N} \right]} \quad (2.17)$$

Onde: $x \in F$ significa que as variáveis x_i pertencem ao domínio de falha e $\mathbf{R} = [\rho_{ij}]$ é a matriz que contém os coeficientes de correlação, ρ_{ij} , das diferentes variáveis do problema [1].

O ponto de projeto x^* é calculado através do uso de programas de otimização do tipo SOLVER da Microsoft EXCEL, ou com a função *fsolve* ou *fzero* do MATLAB, o qual minimiza o valor de β , mudando os valores de x_i .

O SOLVER da Microsoft EXCEL usa um código de otimização não linear de gradiente reduzido genérico, chamado de GRG2, o qual foi desenvolvido por LEON LASDON da Universidade do Texas e por ALLAN WAREN da Universidade Estadual de Cleveland [52].

A função *fsolve* ou *fzero* do MATLAB possui quatro algoritmos para a solução de este problema, os quais são: Método Dogleg da Região de Confiança (Trust-Region Dogleg Method), Algoritmo *fsolve* reflexivo da Região de Confiança (Trust-Region Reflective *fsolve* Algorithm), Método de Levenberg-Marquardt e o Método de Gauss-Newton [53].

Inicialmente LOW e TANG usaram o SOLVER do EXCEL e a equação (2.17), para calcular o valor de β , o qual irá modificar os valores de x^* , até que a função de estado limite seja igual a zero, $g(x^*) = 0$. Usando este método, faz-se

necessário implementar um código para calcular a média e o desvio padrão (σ_x^N e μ_x^N) da distribuição normal equivalente no ponto x^* [9].

Uma nova melhoria do método descrito anteriormente é também proposta por LOW e TANG [10], e a equação (2.17) é reescrita como:

$$\beta = \min_{x \in F} \sqrt{[n]^T \mathbf{R}^{-1} [n]} \quad (2.18)$$

Onde $[n]$ é um vetor coluna com as variáveis normais equivalentes padronizadas, n_i , as quais são definidas por:

$$n_i = \left[\frac{x_i - \mu_i^N}{\sigma_i^N} \right] = \Phi^{-1} [F(x_i)] \quad (2.19)$$

Com a equação (2.19), é possível voltar a calcular x_i da seguinte forma:

$$x_i = F^{-1} [\Phi(n_i)] \quad (2.20)$$

Nas equações (2.19) e (2.20), $\Phi^{-1}(\cdot)$ é a inversa da distribuição acumulada normal padrão, $F(\cdot)$ corresponde à função acumulada da variável (\cdot) , $F^{-1}(\cdot)$ é a inversa da função acumulada da variável (\cdot) e $\Phi(\cdot)$ é a distribuição acumulada normal padrão.

Nesta nova melhoria do método *FORM* o valor de β é calculado usando a equação (2.18), LOW e TANG usaram o SOLVER do EXCEL para este cálculo [10]. A diferença com relação à equação (2.17) está na não necessidade em se calcular a média e o desvio padrão normal equivalente.

O valor do ponto de projeto, x^* , é determinado usando a equação (2.20). Para cada iteração do SOLVER os valores de n_i , que inicialmente são iguais a

zero, mudam até que a função de estado limite seja igual a zero, $g(x^*) = 0$. Dito de outra forma, o objetivo deste método é encontrar valores de x_i , tal que, $F(x_i) = \Phi(n_i)$. A partir deste conceito, x pode ser calculado como uma função de n . Abaixo se demonstram como pode ser feito o dito cálculo, para as distribuições mais típicas usadas em engenharia.

No caso da distribuição normal com parâmetros de média (μ_x) e de desvio padrão (σ_x), a variável x pode ser calculada em função de n da seguinte forma:

$$F(x) = \Phi(n) = \Phi\left[\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right] \Rightarrow n = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \Rightarrow x = \mu_x + n\sigma_x \quad (2.21)$$

Para a distribuição Lognormal com parâmetros de média (μ_x) e de desvio padrão (σ_x), a variável x em função de n é calculada como:

$$\zeta = \sqrt{\ln\left[1 + \left(\frac{\sigma_x}{\mu_x}\right)^2\right]}, \quad \lambda = \ln(\mu_x) - 0.5\zeta^2 \quad (2.22)$$

$$F(x) = \Phi(n) = \Phi\left[\frac{\ln(x) - \lambda}{\zeta}\right] \Rightarrow n = \frac{\ln(x) - \lambda}{\zeta} \Rightarrow x = \exp(\lambda + n\zeta) \quad (2.23)$$

Na equação (2.22) são calculados os parâmetros (λ) e (ζ) que são respectivamente o valor esperado (média) de $\ln(x)$ e o desvio padrão de $\ln(x)$ da distribuição Lognormal.

Para a distribuição de valor extremo máximo (Gumbel) com parâmetros de média (μ_x) e de desvio padrão (σ_x), a variável x em função de n é calculada como:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{\pi}{\sigma_x} \right), \quad \psi = \mu_x - \frac{0.5772}{\delta} \quad (2.24)$$

$$F(x) = \Phi(n) = \exp\left[-\exp(-\delta(x - \psi))\right] \Rightarrow x = \psi - \frac{\ln[-\ln(\Phi(n))]}{\delta} \quad (2.25)$$

Na equação (2.24), são calculados os parâmetros de localização (ψ) e de escala (δ) da distribuição de Gumbel.

Para a distribuição de Weibull com parâmetros de forma (ξ) e de escala (λ), e definida como: $F(x) = 1 - \exp\left[-(x/\lambda)^\xi\right]$, a variável x em função de n é calculada como:

$$x = \lambda \left[-\ln(1 - \Phi(n)) \right]^{1/\xi} \quad (2.26)$$

Para a distribuição exponencial com parâmetro de média (μ_x), a variável x em função de n é dada por:

$$x = -\mu_x \ln[1 - \Phi(n)] \quad (2.27)$$

Para outro tipo de distribuições pode-se consultar a bibliografia [10].

2.2.4

Método de simulação Monte Carlo

O método de simulação de Monte Carlo é uma técnica baseada no uso de números aleatórios. O valor da variável (definida por uma função de distribuição) é selecionado através da geração de números aleatórios.

Para o sistema $R-L$, m amostras das variáveis R e L são geradas aleatoriamente a partir da sua *fdp*. Em cada amostra a função de estado limite é avaliada e é verificado o número de vezes nas quais $g(x)$ é menor que zero ($g(x) \leq 0$). A razão entre o número total de falhas e o número total de amostras é usada para estimar a *POF*.

$$POF = \frac{\text{Número amostras falhas}}{\text{Número total amostras}} \quad (2.28)$$

Devido ao fato que os valores de *POF* trabalhados em confiabilidade estrutural são geralmente pequenos, torna-se necessário fazer muitas simulações, o que demanda um gasto maior de tempo computacional. Assim, métodos de amostragem são incorporados à técnica de Monte Carlo para reduzir o número de simulações, tal como o método de amostragem chamado de hipercubo latino [3,11].

2.3

Análise de confiabilidade estrutural de sistemas

O uso da análise de confiabilidade estrutural de sistemas pode ser útil nos casos onde existem várias funções de estado limite que descrevem o problema.

Para a análise de confiabilidade de sistemas estruturais, os diagramas de blocos são comumente utilizados, tais como apresentados na figura 2.5. Cada componente do sistema representa um evento de falha.

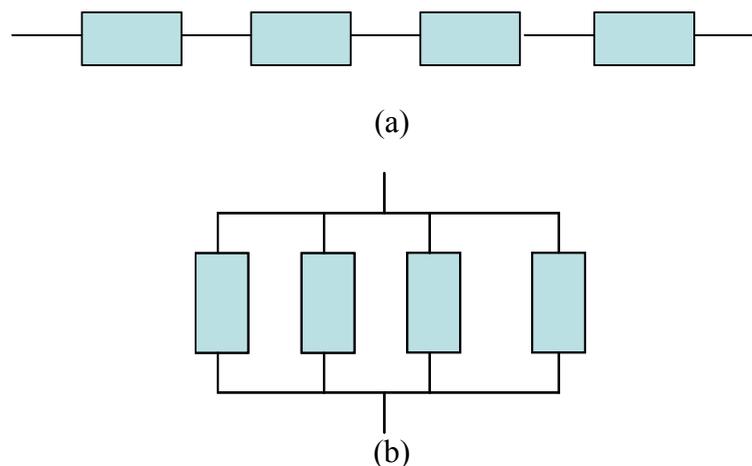


Figura 2.5 – (a) Sistema em série. (b) Sistema em paralelo

A figura 2.5 (a) representa o sistema em série e este é chamado assim, porque a falha de um componente representa a falha do sistema. A probabilidade de falha do sistema pode ser representada pela união dos eventos de falha individuais do sistema [8, 12, 13] e é calculada por:

$$POF_{serie} = P\left(\bigcup_{i=1}^n (g_i(x) \leq 0)\right) \quad (2.29)$$

Para um sistema com eventos de falha independentes, a probabilidade pode ser definida pela equação (2.30) [12]. Por exemplo, para um duto com n defeitos de corrosão independentes, a falha de um defeito qualquer provoca a falha de todo o sistema, neste caso, a falha do duto.

$$POF_{serie} = 1 - (1 - POF_1)(1 - POF_2) \dots (1 - POF_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - POF_i) \quad (2.30)$$

A figura 2.5 (b) representa o sistema em paralelo, chamado assim, porque a falha do sistema só ocorre quando todos os seus componentes falham. A probabilidade de falha do sistema pode ser definida pela interseção dos eventos de falhas individuais do sistema [8, 13] e é definida por:

$$POF_{paralelo} = P\left(\bigcap_{i=1}^n (g_i(x) \leq 0)\right) \quad (2.31)$$

Para um sistema com eventos de falha independentes, a probabilidade pode ser definida pela equação (2.32) [12].

$$POF_{paralelo} = \prod_{i=1}^n POF_i \quad (2.32)$$

Quando os eventos de falha dos sistemas em série ou paralelo são correlacionados, as equações (2.30) e (2.32) já não são mais válidas. Se cada evento de falha do sistema é descrito por uma função limite de falha ($g(x)$ ou m), e onde m é uma função normal padrão a probabilidade de falha do sistema pode ser calculada usando a função de probabilidade normal padrão multivariável, de acordo com [3]:

$$POF_{serie} = 1 - \Phi_n(\beta_n, \rho_{nn}) \quad (2.33)$$

$$POF_{paralelo} = \Phi_n(-\beta_n, \rho_{nn}) \quad (2.34)$$

Onde, Φ_n é uma função cumulativa n-dimensional normal padrão, β é um vetor com os índices de confiabilidade de cada função limite de falha e ρ é uma matriz de coeficientes de correlação entre as funções limites.

No caso de duas funções limites, obtêm-se uma função cumulativa bidimensional normal, $\Phi(-\beta_I, -\beta_{II}, \rho_{I,II})$ [3,14], com coeficiente de correlação entre as duas funções limites e definido por:

$$\rho_{I,II} = \alpha_I^T \alpha_{II} \quad (2.35)$$

Onde, α_i é um vetor normal à função limite i padronizada no ponto de projeto (y_i^*) e pode ser calculado por:

$$\alpha_i = \frac{y_i^*}{\beta_i} \quad (2.36)$$

2.4

Interseção e união de probabilidades

Em confiabilidade estrutural, tal como foi descrito na análise de confiabilidade de sistemas, existe a possibilidade de se ter a combinação de diferentes eventos, seja pela união, ou pela interseção destes eventos.

A probabilidade de dois eventos ocorrer, por exemplo, o evento de falha EF de um defeito e o evento de inspeção (detecção do defeito) EI , pode ser definida com a probabilidade de interseção dos diferentes eventos. Esta probabilidade pode ser determinada da seguinte forma, usando os conceitos sobre leis de probabilidade:

$$P(EF \cap EI) = P(EF / EI)P(EI) \quad (2.37)$$

2.5

Atualização da probabilidade de falha

Quando são conhecidas novas informações, a probabilidade de falha pode ser atualizada [8]. Essas informações podem ser eventos de inspeção, de reparo, propriedades do material, etc., os quais podem ser analisados através de funções limites.

Por exemplo, a probabilidade de detecção de um defeito em uma inspeção pode ser definida como:

$$P(EI) = P(h(x) \geq 0) \quad (2.38)$$

Onde: $h(x)$ é a função de estado limite que define o evento de inspeção.

Logo, nos casos de atualização, é de interesse o conhecimento da probabilidade condicional. É possível, por exemplo, determinar qual é a probabilidade de ocorrência de uma falha EF , dado o resultado de uma inspeção EI , $P(EF/EI)$. A solução deste problema é dada pelo teorema de Bayes [3,12,13].

$$P(EF/EI) = \frac{P(EI/EF)P(EF)}{P(EI)} = \frac{P(EF \cap EI)}{P(EI)} \quad (2.39)$$

Se os eventos EF e EI são definidos pelas funções limites $g(x)$ e $h(x)$, respectivamente, a equação (2.39) pode ser re-escrita como:

$$P(EF/EI) = \frac{P(g(x) < 0 \cap h(x) > 0)}{P(h(x) > 0)} \quad (2.40)$$

No caso de vários eventos de inspeção a equação (2.40) pode ser estendida a [3,54]:

$$P(EF/EI_1 \dots EI_n) = \frac{P(g(x) < 0 \cap h_1(x) \cap \dots \cap h_n(x) > 0)}{P(h_1(x) \cap \dots \cap h_n(x) > 0)} \quad (2.41)$$

De acordo com o que foi anteriormente apresentado, a atualização da probabilidade de falha se resume a um problema de interseção de vários eventos ao mesmo tempo. Estes conduzem à solução de uma função cumulativa n-dimensional normal padrão, similar à estudada nos sistemas em paralelo.

Em alguns outros casos, a atualização será dada pela união de eventos (sistema em serie), ou pela combinação de interseção e união de eventos. Mas em geral, para todos os casos a determinação da probabilidade de falha levará ao cálculo da integral da função multinormal.

Na teoria de confiabilidade estrutural é possível achar e desenvolver algoritmos para esta solução. Alguns métodos conhecidos são as aproximações multinormais de primeira ordem *FOMN (First Order Multinormal)* e o método do produto das probabilidades condicionais marginais *PCM (Product of Conditional Probabilities)* [8, 14], estes métodos serão estudados no próximo capítulo.