2
Propriedades geométricas de curvas parametrizadas no $\mathbb{R}^4$

Nesse capítulo trataremos dos conceitos básicos de geometria diferencial referentes à curvas parametrizadas no $\mathbb{R}^4$.

2.1
Curvas Parametrizadas

Uma *curva parametrizada* é uma aplicação contínua $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ de um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$. O conjunto imagem $C = \{\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^n | t \in I\}$ é chamado *traço* de $\mathbf{r}$. A aplicação $\mathbf{r}$ é dita uma *parametrização* de C e chamaremos t de *parâmetro da curva.*

A curva $\mathbf{r}$ é dita ser *diferenciável* em $t = t_0$, se $\lim_{t\to t_0} \frac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0}$ existe, e nesse caso o valor desse limite será denotado por $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ ou $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$. O vetor $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ é chamado de *vetor tangente* à curva $\mathbf{r}$ em $t = t_0$.

Se $\mathbf{r}$ é diferenciável em todos os pontos de seu domínio dizemos simplesmente que ela é *diferenciável.*

Podemos definir a função derivada de uma curva diferenciável $\mathbf{r}$ como sendo a função $\dot{\mathbf{r}} : I \to \mathbb{R}^n$ que associa a cada $t_0 \in I$ o *vetor derivada* $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$.

Quando existir o valor da derivada da função $\dot{\mathbf{r}}(t)$ no ponto $t = t_0$, dizemos que ele é a *segunda derivada* de $\mathbf{r}$ em t_0, nesse caso esse número será denotado por $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$.

Derivadas de ordem superiores em cada ponto $t \in I$ são obtidas de forma análoga, quando existirem.

Se $\mathbf{r}$ possui derivadas até ordem k e elas são contínuas em todos os pontos de seu domínio, então dizemos que ela é de classe $\mathcal{C}^k$.

Uma curva é dita ser *suave* se ela possui derivadas de todas as ordens em todos os pontos de seu domínio.

Uma curva $\mathbf{r}$ de classe $\mathcal{C}^k$ é dita ser *regular de ordem* m se os m vetores derivadas de $\mathbf{r}$,

$$\{\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \ldots, \frac{d^m\mathbf{r}}{dt^m}\},$$

em qualquer ponto de seu domínio são linearmente independentes.

Em particular, uma curva $\mathbf{r}$ de classe $\mathcal{C}^1$ é regular se para qualquer ponto de seu domínio a norma do vetor tangente nunca é igual a zero.

2.2
Reparametrização da curva

O traço de uma curva $\mathbf{r}$ pode possuir diversas parametrizações. A geometria diferencial estuda propriedades das curvas que são invariantes a reparametrizações. Por isso, seria interessante definir uma relação de equivalência entre as diversas parametrizações de um dado traço.

Duas curvas paramétricas de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathbf{r}_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{r}_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$, são *equivalentes* se existe uma bijeção $\phi : I_1 \to I_2$ tal que $\frac{d\phi}{dt}(t) \neq 0$, para todo $t \in I_1$ e $\mathbf{r}_2(\phi(t)) = \mathbf{r}_1(t)$. Nessas condições, dizemos que $\mathbf{r}_2$ é uma reparametrização de $\mathbf{r}_1$

2.3
Comprimento de Arco

Sejam $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ uma curva continuamente diferenciável e $[a,b] \subset I$ um intervalo fechado. O *comprimento de arco* de $\mathbf{r}$ no intervalo $[a,b]$ é definido por:

$$l = \int_a^b \|\dot{\mathbf{r}}(u)\| du,$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma euclidiana do vetor.

Para uma curva regular $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ de ordem $\mathcal{C}^k, k \geq 1$, e para um número $t_0 \in I$, podemos definir a função $s : I \to \mathbb{R}^n$ como

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{r}}(u)\| du$$

Como $\|\dot{\mathbf{r}}(\cdot)\|$ é uma função contínua, então s é uma função diferenciável e $\dot{s}(t) = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|$.

Ao escrever $\bar{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(t(s))$, onde $t(s)$ é a inversa de $s(t)$, dizemos que a curva $\bar{\mathbf{r}}$ está *parametrizada pelo comprimento de arco.*

Derivando $\bar{\mathbf{r}}(s)$ em relação a s, obtemos:

$$\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{ds}(s) = \dot{\mathbf{r}}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}(s) = \dot{\mathbf{r}}(t(s)) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}(s)} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t(s))}{\|\dot{\mathbf{r}}(t(s))\|}.$$

Isso implica que $\|\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{ds}(s)\| = 1$ para todo s.

Por outro lado, se a curva $\mathbf{r}$ tem $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = 1$ em todos os pontos t de seu domínio I, então ela está parametrizada pelo comprimento de arco, pois para quaisquer t_0 e t em I o comprimento de arco de $\mathbf{r}$ em $[t_0, t]$ vale

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} 1du = t - t_0.$$

Daqui por diante, usaremos a notação $'$ para denotar a derivada em relação ao comprimento de arco e $\dot{}$ para denotar a derivada em relação a um parâmetro qualquer.

Vale observar que toda curva regular pode ser reparametrizada para obter velocidade unitária, ou seja, para se tornar parametrizada pelo comprimento de arco (1).

2.4 Teoria Local de Curvas no $\mathbb{R}^4$ Parametrizadas pelo Comprimento de Arco

Seja $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Denotamos por $\mathbf{t}(s) = \mathbf{r}'(s)$ o vetor tangente unitário da curva $\mathbf{r}$ em s. Como $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$, isto é $< \mathbf{r}'(s), \mathbf{r}'(s) >= 1$, temos, ao derivarmos ambos os membros da igualdade anterior, que:

$$< \mathbf{r}''(s), \mathbf{r}'(s) > + < \mathbf{r}'(s), \mathbf{r}''(s) > = 0.$$

O que implica em:

$$< \mathbf{r}'(s), \mathbf{r}''(s) > = 0.$$

Estabelecemos que $\mathbf{r}''(s)$ está na direção do vetor que denominamos *vetor normal unitário* $\mathbf{n}(s)$ (veja Figura 2.1). Com isso, podemos definir uma função diferenciável $k_1 : I \to \mathbb{R}$, tal que $\mathbf{r}''(s) = k_1(s)\mathbf{n}(s)$. Chamamos o número real $k_1(s)$ de *curvatura* da curva $\mathbf{r}$ em $s \in I$. A curvatura $k_1(s)$ nos fornece uma medida do quão rapidamente uma curva se afasta, em uma vizinhança de s, da tangente em s.

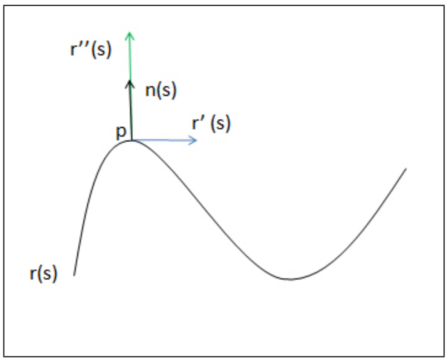

Figura 2.1: O vetor tangente e normal a curva $\mathbf{r}$ em s.

Se aplicarmos o produto escalar com $\mathbf{r}''(s)$ em ambos os membros da equação $\mathbf{r}''(s) = k_1(s)\mathbf{n}(s)$, obtemos que

$$k_1^2(s) \;=\, < \mathbf{r}''(s), \mathbf{r}''(s) > .$$

Em resumo, até agora, obtivemos três expressões para o cálculo das primeiras propriedades geométricas diferenciais de uma curva, são elas:

$$\mathbf{r}'(s) = \mathbf{t}(s),$$

$$\mathbf{r}''(s) = k_1(s)\mathbf{n}(s),$$

e

$$k_1^2(s) \;=\, < \mathbf{r}''(s), \mathbf{r}''(s) > .$$

Para obter outras propriedades geométricas interessantes para curvas no $\mathbb{R}^n$ é necessário definir a famosa base móvel de Frenet-Serret.

2.4.1 Fórmulas de Frenet-Serret

Se $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ é uma curva de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, regular de ordem n e parametrizada pelo comprimento de arco, então a *base móvel de Frenet-Serret* no $\mathbb{R}^n$, denotada por $\{\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_1(s), ..., \mathbf{e}_n(s)\}$, é obtida pela aplicação do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt nos vetores $\mathbf{r}'(s), \mathbf{r}''(s), ..., \mathbf{r}^{(n)}(s)$. Essa base é portanto abtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1(s) &= \frac{\mathbf{r}'(s)}{\|\mathbf{r}'(s)\|} \\
\mathbf{e}_2(s) &= \frac{\mathbf{r}''(s) - <\mathbf{r}''(s), \mathbf{e}_1(s)>\mathbf{e}_1(s)}{\|\mathbf{r}''(s) - <\mathbf{r}''(s), \mathbf{e}_1(s)>\mathbf{e}_1(s)\|} \\
&\vdots \\
\mathbf{e}_k(s) &= \frac{\mathbf{r}^{(k)}(s) - \sum_{i=1}^{k-1} <\mathbf{r}^{(k)}(s), \mathbf{e}_i(s)>\mathbf{e}_i(s)}{\|\mathbf{r}^{(k)}(s) - \sum_{i=1}^{k-1} <\mathbf{r}^{(k)}(s), \mathbf{e}_i(s)>\mathbf{e}_i(s)\|}
\end{aligned}$$

O teorema a seguir constitui uma das principais ferramentas de determinação das fórmulas de Frenet-Serret para curvaturas de ordem superior.

Teorema 2.1 *Se* $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ *é uma curva de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$*, regular de ordem* n *e parametrizada pelo comprimento de arco, então para qualquer* $s \in I$ *tem-se que:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1'(s) \\ \mathbf{e}_2'(s) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1}'(s) \\ \mathbf{e}_n'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1(s) & 0 & k_2(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -k_{n-2}(s) & 0 & k_{n-1}(s) \\ 0 & 0 & \dots & -k_{n-1}(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(s) \\ \mathbf{e}_2(s) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1}(s) \\ \mathbf{e}_n(s) \end{bmatrix}.$$

Em particular para as curvas no $\mathbb{R}^4$, podemos denotar a base móvel de Frenet-Serret como sendo $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}_1(s), \mathbf{b}_2(s)\}$, onde chamamos esses vetores, repectivamente, de vetor tangente, vetor normal, vetor binormal e vetor trinormal de $\mathbf{r}$ em s. Aplicando o Teorema anterior, obtemos a lista completa das quatro fórmulas de Frenet-Serret para curvas no $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{t}'(s) = k_1(s)\mathbf{n}(s) \tag{2-1}$$

$$\mathbf{n}'(s) = -k_1(s)\mathbf{t}(s) + k_2(s)\,\mathbf{b}_1(s) \tag{2-2}$$

$$\mathbf{b}_1'(s) = -k_2(s)\mathbf{n}(s) + k_3(s)\mathbf{b}_2(s) \tag{2-3}$$

$$\mathbf{b}_2'(s) = -k_3(s)\mathbf{b}_1(s) \tag{2-4}$$

Como observação, as *curvaturas generalizadas* (ou *curvaturas de Frenet-Serret*) são definidas pela expressão:

$$k_i(s) \; = < \mathbf{e}_i'(s), \mathbf{e}_{i+1}(s) >, \text{ com } 1 \leq i \leq n-1.$$

Uma vez determinadas as fórmulas de Frenet-Serret, nosso objetivo agora é encontrar as expressões das curvaturas $k_1(s)$, $k_2(s)$ e $k_3(s)$ para uma curva $\mathbf{r}$ no $\mathbb{R}^4$ parametrizada pelo comprimento de arco em termos de suas funções derivadas até a 4^a ordem. A razão é que os dois métodos numéricos a serem propostos no capítulo 4, na realidade, calculam aproximações para essas quatro derivadas.

2.5 Obtendo as propriedades geométricas de curvas no $\mathbb{R}^4$

2.5.1 Os vetores tangente e normal e a curvatura k_1

Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt nas duas primeiras derivadas da curva $\mathbf{r}$ parametrizada pelo comprimento de arco, podemos obter novamente as fórmulas das primeiras propriedades geométricas que foram calculadas na seção 2.4:

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{r}'(s), \tag{2-5}$$

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|}, \tag{2-6}$$

e que:

$$k_1(s) = < \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) > = \|\mathbf{r}''(s)\| \tag{2-7}$$

2.5.2 O vetor binormal e a curvatura k_2

Agora, o objetivo é determinar uma expressão para o vetor binormal $\mathbf{b}_1$ e para k_2 em cada ponto da curva $\mathbf{r}(s)$.

O vetor $\mathbf{b}_1$ é definido como sendo:

$$\mathbf{b}_1(s) := \frac{\mathbf{r}'''(s) - < \mathbf{r}'''(s), \mathbf{t}(s) > \mathbf{t}(s) - < \mathbf{r}'''(s), \mathbf{n}(s) > \mathbf{n}(s)}{\|\mathbf{r}'''(s) - < \mathbf{r}'''(s), \mathbf{t}(s) > \mathbf{t}(s) - < \mathbf{r}'''(s), \mathbf{n}(s) > \mathbf{n}(s)\|} \tag{2-8}$$

Para obter $k_2(s)$, inicialmente derivamos a expressão $\mathbf{r}''(s) = k_1(s)\mathbf{n}(s)$:

$$\mathbf{r}'''(s) = k_1'(s)\mathbf{n}(s) + k_1(s)\mathbf{n}'(s)$$

$$\mathbf{r}'''(s) = k_1'(s)\mathbf{n}(s) + k_1(s)(-k_1(s)\mathbf{t}(s) + k_2(s)\mathbf{b}_1(s)$$

$$\mathbf{r}'''(s) = -k_1^2(s)\mathbf{t}(s) + k_1'(s)\mathbf{n}(s) + k_1(s)k_2(s)\mathbf{b}_1(s)$$

Com isso, podemos obter $k_1'(s)$ através do produto escalar de cada um dos termos da identidade anterior com $\mathbf{n}(s)$. Assim,

$$< \mathbf{r}'''(s), \mathbf{n}(s) > = -k_1^2(s) < \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) > + k_1'(s) < \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) > + k_1(s)k_2(s) < \mathbf{n}(s), \mathbf{b}_1(s) > .$$

Que nos dá:

$$k_1'(s) \;=\; < \mathbf{r}'''(s), \mathbf{n}(s) >$$

Com esse resultado, podemos determinar uma fórmula para $k_2(s)$:

$$< \mathbf{r}'''(s), \mathbf{b}_1(s) > = \; -k_1^2(s) < \mathbf{t}(s), \mathbf{b}_1(s) > +k_1'(s) < \mathbf{n}(s), \mathbf{b}_1(s) > +k_1(s)\, k_2(s) < \mathbf{b}_1(s), \mathbf{b}_1(s) > .$$

Logo,

$$k_2(s) \;=\; \frac{< \mathbf{r}'''(s), \mathbf{b}_1(s) >}{k_1(s)} \tag{2-9}$$

Para obter o vetor trinormal $\mathbf{b_2}$ de forma mais simples podemos utilizar o produto vetorial no $\mathbb{R}^4$ que será definido a seguir.

2.5.3
O produto vetorial no $\mathbb{R}^4$

Sejam 3 vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$. Obtenha uma matriz C_{3x4} onde as linhas de C são constituídas pelos vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Assim, $C = [\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}]^T$.

Seja c_j o determinante da matriz 3×3 obtida eliminando-se a j-ésima coluna de C. O produto vetorial dos 3 vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é representado pelo vetor:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w} = [c_1\ , -c_2\ , c_3\ , -c_4] \in \mathbb{R}^4.$$

Exemplo: Sejam $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{w} = (2, 1, 1, 0)$. Temos que

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ c_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,\ c_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } c_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w} = [c_1,\ -c_2,\ c_3,\ -c_4] = (-1, 2, 0, 1)$$

Algumas propriedades:

1. Se os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são linearmente independentes, então o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ é ortogonal a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ individualmente;

2. Se os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são linearmente dependentes, então o produto vetorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$;

3. Seja $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, então $\lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\lambda\mathbf{u}) \times \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \times (\lambda\mathbf{w})$.

2.5.4
O vetor trinormal e a curvatura k_3

O vetor trinormal $\mathbf{b}_2(s)$ pode ser obtido da seguinte forma:

$$\mathbf{b}_2(s) = \frac{\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s) \times \mathbf{r}'''(s)}{\|\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s) \times \mathbf{r}'''(s)\|} \tag{2-10}$$

pois, por definição, ele deve ser ortogonal ao espaço gerado por esses três vetores, que é o mesmo espaço gerado por $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}_1(s)\}$.

Podemos também utilizar essa mesma estratégia do produto vetorial para obter uma outra forma de calcular o vetor binormal $\mathbf{b}_1$. Já que temos, para cada s, os vetores $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{r}''$, então o vetor $\mathbf{b}_1$ é também dado por:

$$\mathbf{b}_1(s) = \frac{\mathbf{b}_2(s) \times \mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{b}_2(s) \times \mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)\|}. \tag{2-11}$$

Para calcular $k_3(s)$, vamos calcular $\mathbf{r}^{(4)}(s)$ que é obtida substituindo as fórmulas de Frenet-Serret na derivada da expressão:

$$\mathbf{r}'''(s) = -k_1^2(s)\mathbf{t}(s) + k_1'(s)\mathbf{n}(s) + k_1(s)k_2(s)\mathbf{b}_1(s).$$

Assim,

$$\begin{gathered}
\mathbf{r}^{(iv)}(s) = -2k_1(s)\,k_1^{'}(s)\,\mathbf{t}(s) + (-k_1^2(s))\,\mathbf{t}^{'}(s) + \\
k_1^{''}(s)\,\mathbf{n}(s) + k_1^{'}(s)\,\mathbf{n}^{'}(s) + (k_1^{'}(s)\,k_2(s) + \\
k_1(s)\,k_2^{'}(s))\,\mathbf{b}_1(s) + k_1(s)k_2(s)\mathbf{b}_1^{'}(s) \implies
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{r}^{(iv)}(s) = -2k_1(s)\,k_1^{'}(s)\,\mathbf{t}(s) - k_1^2(s)\,k_1(s)\,\mathbf{n}(s) + \\
k_1^{''}(s)\,\mathbf{n}(s) + k_1(s)\,[-k_1(s)\,\mathbf{t}(s) + k_2(s)\mathbf{b}_1(s)\,] + \\
k_1^{'}(s)k_2(s)\mathbf{b}_1(s) + k_1(s)k_2(s)\,[\,-k_2(s)\mathbf{n}(s) + k_3(s)\mathbf{b}_2(s)\,] \implies
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{r}^{(iv)}(s) = -2k_1(s)\,k_1^{'}(s)\,\mathbf{t}(s) - k_1^3(s)\,\mathbf{n}(s) + \\
k_1^{''}(s)\,\mathbf{n}(s) - k_1^{'}(s)\,k_1(s)\,\mathbf{t}(s) + k_1^{'}(s)\,k_2(s)\mathbf{b}_1(s) +
\end{gathered}$$

$$k_1'(s)k_2(s)\mathbf{b}_1(s) + k_1(s)k_2'(s)\mathbf{b}_1(s) - k_1(s)k_2^2(s)\mathbf{n}(s) +$$
$$k_1(s)k_2(s)k_3(s)\mathbf{b}_2(s) \Longrightarrow$$

$$\mathbf{r}^{(iv)}(s) = -3k_1(s)\,k_1'(s)\,\mathbf{t}(s) + [-k_1^3(s) + k_1''(s) - k_1'(s)\,k_2(s)]\mathbf{n}(s) +$$
$$[\,2k_1'(s)\,k_2(s) + k_1(s)\,k_2'(s)\,]\,\mathbf{b}_1(s) +$$
$$k_1(s)k_2(s)k_3(s)\mathbf{b}_2(s).$$

Finalmente, $k_3(s)$ é obtida fazendo o produto escalar de cada um dos termos da expressão anterior com $\mathbf{b}_2(s)$. Assim,

$$< \mathbf{r}^{(iv)}(s), \mathbf{b}_2(s) > =$$

$$-3k_1(s)\,k_1'(s) < \mathbf{t}(s), \mathbf{b}_2(s) > +$$
$$[\,-k_1^3(s) + k_1''(s) - k_1(s)k_2^2(s)\,] < \mathbf{n}(s), \mathbf{b}_2(s) > +$$
$$[\,2k_1'(s)\,k_2(s)\,k_1(s)\,k_2'(s)\,] < \mathbf{b}_1(s), \mathbf{b}_2(s) > +$$
$$k_1(s)\,k_2(s)\,k_3(s) < \mathbf{b}_2(s), \mathbf{b}_2(s) > .$$

Portanto,

$$k_3(s) = \frac{< \mathbf{r}^{(iv)}(s), \mathbf{b}_2(s) >}{k_1(s)k_2(s)} \qquad (2\text{-}12)$$

Ficam portanto, definidas todas as propriedades geométricas diferenciais de uma curva $\mathbf{r}(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco.

2.6 Teoria Local de Curvas no $\mathbb{R}^4$ Parametrizadas de Forma Arbitrária

Vimos nas seções anteriores como obter as fórmulas de Frenet-Serret para uma curva $\mathbf{r}(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco. Nesta seção, mostraremos como obter as expressões das fórmulas de Frenet-Serret para uma curva com parametrização arbitrária, digamos $\mathbf{h}(t)$.

Sabemos que toda curva regular pode ser reparametrizada para ter vetor tangente unitário.

Digamos que $\mathbf{h} : (a, b) \to \mathbb{R}^4$ seja uma curva regular com parametrização $\mathbf{h}$. Seja $\mathbf{r} : (c, d) \to \mathbb{R}^4$ uma reparametrização de $\mathbf{h}$ pelo comprimento de arco. Podemos escrever que $\mathbf{h}(t) = \mathbf{r}(s(t))$ onde $s(t)$ é a função comprimento de arco.

Seja $\gamma = \{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}_1(s), \mathbf{b}_2(s)\}$ a base ortonormal de Frenet-Serret para a curva $\mathbf{r}(s)$. Seja $\zeta = \{\bar{\mathbf{t}}(t), \bar{\mathbf{n}}(t), \bar{\mathbf{b}}_1(t), \bar{\mathbf{b}}_2(t)\}$ a base ortonormal de Frenet-Serret para a curva $\mathbf{h}(t)$. Definimos, então, o seguinte conjunto de expressões:

$$\begin{cases} \bar{k}_i(t) = k_i(s(t)),\ i\ =\ 1,2,3 \\ \bar{\mathbf{t}}(t) = \mathbf{t}(s(t)) \\ \bar{\mathbf{n}}(t) = \mathbf{n}(s(t)) \\ \bar{\mathbf{b}}_1(t) = \mathbf{b}_1(s(t)) \\ \bar{\mathbf{b}}_2(t) = \mathbf{b}_2(s(t)) \end{cases}.$$

Seja $\mathbf{h} : (a,b) \to \mathbb{R}^4$ uma curva de classe $\mathcal{C}^4$ regular com parametrização arbitrária. Seja $\mathbf{r} : (c,d) \to \mathbb{R}^4$ uma reparametrização de $\mathbf{h}$ pelo comprimento de arco. Considere que $v(t) = \|\dot{\mathbf{h}}(t)\| = \dot{s}(t)$. Como $\mathbf{h}(t) = \mathbf{r}(s(t))$ onde $s(t)$ é a função comprimento de arco, então as fórmulas de Frenet para a curva $\mathbf{h}$ são dadas por:

$$\tfrac{d}{dt}(\bar{\mathbf{t}}(t)) = v(t)\bar{k_1}(t)\bar{\mathbf{n}}(t)$$

$$\tfrac{d}{dt}(\bar{\mathbf{n}}(t)) = -v(t)\bar{k_1}(t)\bar{\mathbf{t}}(t) + v(t)\bar{k_2}(t)\bar{\mathbf{b}}_1(t)$$

$$\tfrac{d}{dt}(\bar{\mathbf{b}_1}(t)) = -v(t)\bar{k_2}(t)\bar{\mathbf{n}}(t) + v(t)\bar{k_3}(t)\bar{\mathbf{b}}_2(t)$$

$$\tfrac{d}{dt}(\bar{\mathbf{b}}_2(t)) = -v(t)\bar{k_3}(t)\bar{\mathbf{b}}_1(t)$$

Uma vez obtidos os vetores tangente, normal, binormal e trinormal que caracterizam a base de Frenet no $\mathbb{R}^4$ para uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, precisamos determinar as expressões para as derivadas até a quarta ordem de uma curva $\mathbf{h}$ com parametrização arbitrária. Como $\mathbf{h}(t) = \mathbf{r}(s(t))$, obtemos que:

$$\mathbf{h}'(t) = v(t)\bar{\mathbf{t}}(t)$$

Derivando a expressão anterior, temos a segunda derivada que é dada por:

$$\mathbf{h}''(t) = \frac{dv}{dt}(t)\bar{\mathbf{t}}(t) + v^2(t)\bar{k}_1(t)\bar{\mathbf{n}}(t)$$

Derivando novamente, encontramos uma expressão para a terceira derivada:

$$\mathbf{h}'''(t) = [\frac{d^2v}{dt^2}(t) - v^3(t)\bar{k}_1^2(t)]\bar{\mathbf{t}}(t)\ +\ [3v(t)\frac{dv}{dt}(t)\bar{k}_1(t) + v^2(t)\frac{d\overline{k_1}}{dt}(t)]\bar{\mathbf{n}}(t)$$

$$+v^3(t)\bar{k}_1(t)\bar{k}_2(t)\bar{\mathbf{b}}_1(t)$$

Derivando mais uma vez obtemos finalmente uma expressão para a quarta derivada:

$$\mathbf{h}^{(iv)}(t) = [\frac{d^3v}{dt^3}(t) - 6v^2(t)\frac{dv}{dt}(t)\bar{k}_1^2(t) - v^3(t)\bar{k}_1(t)\frac{d\bar{k}_1(t)}{dt}]\bar{\mathbf{t}}(t) + [4v(t)\frac{d^2v}{dt^2}(t)\bar{k}_1(t)$$

$$+5v(t)\frac{dv}{dt}(t)\frac{d\bar{k}_1}{dt}(t) - v^4(t)\bar{k}_1^3(t) + 3\bar{k}_1(t)(\frac{dv}{dt}(t))^2 + v^2(t)\frac{d^2\bar{k}_1}{dt^2}(t) - v^4(t)\bar{k}_1(t)\bar{k}_2^2(t)]\bar{\mathbf{n}}(t)$$

$$+[6v^2(t)\frac{dv}{dt}(t)\bar{k}_1(t)\bar{k}_2(t) + 2v^3(t)\frac{d\bar{k}_1}{dt}(t)\bar{k}_2(t) + v^3(t)\bar{k}_1(t)\frac{d\bar{k}_2}{dt}(t)]\bar{\mathbf{b}}_1(t)$$

$$+v^4(t)\bar{k}_1(t)\bar{k}_2(t)\bar{k}_3(t)\bar{\mathbf{b}}_2(t)$$

A seguir, destacamos o principal teorema que será utilizado neste trabalho:

Teorema 2.2 *Se* $\mathbf{h} : (a,b) \to \mathbb{R}^4$ *é uma curva de classe* $\mathcal{C}^4$ *e regular, então vale para qualquer* $t \in (a,b)$ *que:*

$$\bar{\mathbf{t}}(t) = \frac{\mathbf{h}'(t)}{\|\mathbf{h}'(t)\|};$$

$$\bar{\mathbf{b}}_2(t) = \frac{\mathbf{h}'(t) \times \mathbf{h}''(t) \times \mathbf{h}'''(t)}{\|\mathbf{h}'(t) \times \mathbf{h}''(t) \times \mathbf{h}'''(t)\|};$$

$$\bar{\mathbf{b}}_1(t) = \frac{\bar{\mathbf{b}}_2(t) \times \mathbf{h}'(t) \times \mathbf{h}''(t)}{\|\bar{\mathbf{b}}_2(t) \times \mathbf{h}'(t) \times \mathbf{h}''(t)\|};$$

$$\bar{\mathbf{n}}(t) = \frac{\bar{\mathbf{b}}_1(t) \times \bar{\mathbf{b}}_2(t) \times \mathbf{h}'(t)}{\|\bar{\mathbf{b}}_1(t) \times \bar{\mathbf{b}}_2(t) \times \mathbf{h}'(t)\|};$$

$$\bar{k}_1(t) = \frac{< \bar{\mathbf{n}}(t), \mathbf{h}''(t) >}{\|\mathbf{h}'(t)\|^2};$$

$$\bar{k}_2(t) = \frac{< \bar{\mathbf{b}}_1(t), \mathbf{h}'''(t) >}{\|\mathbf{h}'(t)\|^3 \bar{k}_1(t)};$$

$$\bar{k}_3(t) = \frac{< \bar{\mathbf{b}}_2(t), \mathbf{h}^{(iv)}(t) >}{\|\mathbf{h}'(t)\|^4 \bar{k}_1(t)\bar{k}_2(t)}.$$