

# 1

## Introdução

O problema de estimar de forma precisa as propriedades geométricas de curvas discretas no plano  $\mathbb{R}^2$  e no espaço  $\mathbb{R}^3$  é reconhecidamente importante em diferentes domínios da ciência, tais como: visão computacional (9), reconhecimento de padrões (7), processamento de imagens (4) e modelagem geométrica (8).

O objetivo principal desse trabalho é o desenvolvimento de métodos numéricos que estimam as propriedades geométricas (vetores tangente, normal, binormais e curvaturas) de curvas discretas no  $\mathbb{R}^4$ . A Figura 1.1 ilustra uma projeção de um conjunto de pontos pertencentes a uma discretização uniforme da curva paramétrica  $\mathbf{r}(t) = (2\cos(t) + 2\cos(3t), 2\sin(t) - 2\sin(3t), 4\sin(2t), \frac{1}{2}t^2)$ .

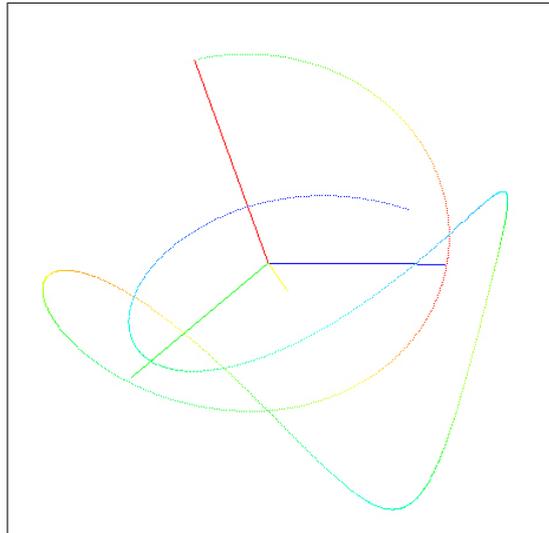


Figura 1.1: Projeção particular com rotação nos 4 eixos

Esse trabalho tem sua justificativa não só pelo conteúdo matemático do assunto, mas também pelas aplicações existentes de curvas no  $\mathbb{R}^4$  como em construção de curvas *offsets* e em detecção de colisões (5) e (3).

Foi adotada como metodologia a extensão para o  $\mathbb{R}^4$  de dois métodos existentes para cálculo de curvaturas para curvas discretas no  $\mathbb{R}^3$ . O primeiro deles é baseado nas estimativas por mínimos quadrados parametrizando a curva por comprimento de arco (6). O segundo utiliza um modelo de derivação discreta (2).

## 1.1

### Divisão da Dissertação

No capítulo 2 trataremos dos conceitos básicos de geometria diferencial. Vamos falar sobre curvas parametrizadas no  $\mathbb{R}^4$ , definir curvas regulares e comprimento de arco, definir o produto vetorial no  $\mathbb{R}^4$ , tratar de aspectos importantes sobre teoria local de curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, apresentar as fórmulas de Frenet-Serret, tratar de curvas com parametrização arbitrária e obter as expressões para as curvaturas  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ .

No capítulo 3, vamos definir uma curva implícita no  $\mathbb{R}^4$ , enunciar o teorema da função implícita, tratar de curvas em hipersuperfícies implícitas e descrever os procedimentos, segundo um modelo contínuo, para obtenção das curvaturas de um ponto pertencente a interseção de três hipersuperfícies implicitamente definidas no  $\mathbb{R}^4$ .

No capítulo 4, vamos descrever os métodos numéricos para uma estimação das curvaturas de uma curva discreta no  $\mathbb{R}^4$ . Eles são as extensões dos algoritmos propostos em (6) e (2).

No capítulo 5 serão apresentados os resultados computacionais através de gráficos e tabelas que mostram os erros de estimação comparados à resultados analíticos tanto para curvas implícitas quanto para curvas paramétricas.

Finalmente, o capítulo 6 apresentará as considerações finais e assuntos que serão abordados em trabalhos futuros.