



Rogério Vaz de Almeida Junior

Estimadores de Curvaturas para Curvas no R^4

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador : Prof. Sinésio Pesco
Co-Orientador: Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes

Rio de Janeiro
setembro de 2011

Rogério Vaz de Almeida Junior

Estimadores de Curvaturas para Curvas no R^4

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

Prof. Sinésio Pesco

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes

Co-Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Humberto José Bortolossi

Instituto de Matemática – UFF

Prof. Marcos Craizer

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 16 de setembro de 2011

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Rogério Vaz de Almeida Junior

Graduou-se em Matemática (licenciatura) pela Universidade Federal Fluminense, Niterói-RJ). Durante a graduação, conquistou o segundo lugar no Prêmio Vasconcellos Torres de Iniciação científica realizado na UFF com o trabalho *Visualização Científica: Deformações em Mapas Cartográficos* na área de ciências exatas e da terra. Participou do concurso RIVED tendo desenvolvido o software DynAtlas que explora a geometria do globo terrestre. Este trabalho foi um dos 17 contemplados no Brasil pelo MEC e a Organização das Nações Unidas na área de desenvolvimento de softwares para educação.

Ficha Catalográfica

de Almeida junior, Rogério Vaz

Estimadores de Curvaturas para Curvas no R^4 / Rogério Vaz de Almeida Junior; orientador: Sinésio Pesco ; co-orientador: Hélio Côrtes Vieira Lopes. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2011.

v., 101 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Geometria Diferencial; Estimadores de Curvaturas; Processamento Geométrico. I. Pesco, Sinésio. II. Lopes, Hélio Côrtes Vieira. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

“O ser humano vivencia a si mesmo, seus pensamentos como algo separado do resto do universo - numa espécie de ilusão de ótica de sua consciência. E essa ilusão é uma espécie de prisão que nos restringe a nossos desejos pessoais, conceitos e ao afeto por pessoas mais próximas. Nossa principal tarefa é a de nos livrarmos dessa prisão, ampliando o nosso círculo de compaixão, para que ele abranja todos os seres vivos e toda a natureza em sua beleza. Ninguém conseguirá alcançar completamente esse objetivo, mas lutar pela sua realização já é por si só parte de nossa liberação e o alicerce de nossa segurança interior. ”

Albert Einstein

Dedico esta dissertação aos meus pais por todo apoio e incentivo em todos os momentos da minha vida.

Agradecimentos

A Deus, pela oportunidade da vida. Aos meus pais, Rogério Vaz de Almeida e Rosane de Andrade de Almeida, por todo apoio e por serem os personagens principais da minha história. Ao meu padrinho Ricardo Gonçalves de Andrade pelas palavras de incentivo nos momentos de dificuldade. Ao meu orientador de mestrado Sinésio Pesco pelas longas conversas nos meus momentos de dificuldade e por confiar no meu trabalho. Ao meu orientador durante minha graduação Humberto José Bortolossi por toda paciência, dedicação e profissionalismo. Ao professor Hélio Côrtes Vieira Lopes pelas idéias valiosas e toda ajuda na parte escrita deste trabalho. Aos meus colegas de mestrado, especialmente Luana Sá, Andrea Lins, Maria Andrade, Lis Ingrid e Leandro Souza pelo companheirismo, incentivo e amizade. Por fim, agradeço à CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Resumo

de Almeida junior, Rogério Vaz; Pesco, Sinésio; Lopes, Hélio Côrtes Vieira. **Estimadores de Curvaturas para Curvas no \mathbb{R}^4** . Rio de Janeiro, 2011. 101p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Vamos apresentar neste trabalho dois métodos para calcular as propriedades diferenciais geométricas de uma curva discreta no \mathbb{R}^4 . O primeiro é baseado em aproximações por comprimento de arco. O segundo é baseado na metodologia de derivação discreta. Esses métodos estimam numericamente as curvaturas k_1 , k_2 e k_3 e os vetores tangente, normal, binormal e trinormal para cada ponto da curva. São apresentados também cálculos dessas propriedades geométricas para curvas tanto na forma paramétrica como na forma implícita, com o objetivo final de testar a consistência dos métodos propostos comparando-os aos resultados teóricos.

Palavras-chave

Geometria Diferencial; Estimadores de Curvaturas; Processamento Geométrico.

Abstract

de Almeida junior, Rogério Vaz; Pesco, Sinésio (Advisor); Lopes, Hélio Côrtes Vieira (Co-Advisor). **Curvature Estimators for Curves in \mathbb{R}^4** . Rio de Janeiro, 2011. 101p. MSc. Dissertation — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

We present new algorithms for computing the differential geometry properties of a discrete curve in \mathbb{R}^4 based on two different methods: arc-length approximation and discrete derivatives.

Keywords

Differential Geometry; Curvature Estimation; Geometry Processing.

Sumário

1	Introdução	12
1.1	Divisão da Dissertação	13
2	Propriedades geométricas de curvas parametrizadas no \mathbb{R}^4	14
2.1	Curvas Parametrizadas	14
2.2	Reparametrização da curva	15
2.3	Comprimento de Arco	15
2.4	Teoria Local de Curvas no \mathbb{R}^4 Parametrizadas pelo Comprimento de Arco	16
2.5	Obtendo as propriedades geométricas de curvas no \mathbb{R}^4	19
2.6	Teoria Local de Curvas no \mathbb{R}^4 Parametrizadas de Forma Arbitrária	22
3	Curvas Implícitas no \mathbb{R}^4 e Curvaturas	25
3.1	Hipersuperfícies Implícitas	25
3.2	Curvas Implícitas e o Teorema da Função Implícita	25
3.3	Curvas em uma Hipersuperfície	26
3.4	Curvas com Parametrização Especial em uma Hipersuperfície	27
3.5	Propriedades Geométricas de uma Curva Implícita no \mathbb{R}^4	28
4	Estimadores Numéricos de Curvatura	31
4.1	Cálculo das Curvaturas: Coordenadas Independentes	31
4.2	O Método das Derivadas Discretas	36
5	Resultados Computacionais	40
5.1	Geração de Pontos	40
5.2	Ruído aditivo	41
5.3	Visualização	41
5.4	Análise de erro	41
5.5	Curvas Parametrizadas	42
5.6	Curvas Implícitas	77
6	Conclusão	98
	Referências Bibliográficas	99
A	Análise do tempo de execução	100
A.1	Legenda de curvas e apresentação das tabelas	100

Lista de figuras

1.1	Projeção particular com rotação nos 4 eixos	12
2.1	O vetor tangente e normal a curva \mathbf{r} em s .	17
4.1	Ajuste de Curva	31
4.2	Derivadas discretas	37
5.1	Preditor-corretor no \mathbb{R}^3	40
5.2	Acréscimo de ruído em um ponto	41
5.3	rotação nos 4 eixos	42
5.4	Curvatura k_1 , $n = 1300$, $\sigma = 0$	43
5.5	Curvatura k_2 , $n = 1300$, $\sigma = 0$	43
5.6	Curvatura k_3 , $n = 1300$, $\sigma = 0$	43
5.7	Projeção em XY , $n = 1300$, $\sigma = 0.1$	44
5.8	Gráfico $n \times M_e$, $q = 2$, $\sigma = 0$	44
5.9	Gráfico $n \times M_e$, $q = 2$, $\sigma = 0$	44
5.10	Gráfico $n \times M_e$, $q = 2$, $\sigma = 0$	45
5.11	Gráfico $n \times M_e$, $q = 10$, $\sigma = 0$	45
5.12	Gráfico $n \times M_e$, $q = 10$, $\sigma = 0$	45
5.13	Gráfico $n \times M_e$, $q = 10$, $\sigma = 0$	45
5.14	Gráfico $n \times M_e$, $q = 2$, $\sigma = 10^{-2}$	47
5.15	Gráfico $n \times M_e$, $q = 2$, $\sigma = 10^{-2}$	47
5.16	Gráfico $n \times M_e$, $q = 2$, $\sigma = 10^{-2}$	48
5.17	Gráfico $n \times M_e$, $q = 10$, $\sigma = 10^{-2}$	48
5.18	Gráfico $n \times M_e$, $q = 10$, $\sigma = 10^{-2}$	48
5.19	Gráfico $n \times M_e$, $q = 10$, $\sigma = 10^{-2}$	49
5.20	Gráfico $n \times M_e$, $q = 2$, $\sigma = 10^{-3}$	49
5.21	Gráfico $n \times M_e$, $q = 2$, $\sigma = 10^{-3}$	49
5.22	Gráfico $n \times M_e$, $q = 2$, $\sigma = 10^{-3}$	49
5.23	Gráfico $n \times M_e$, $q = 10$, $\sigma = 10^{-3}$	50
5.24	Gráfico $n \times M_e$, $q = 10$, $\sigma = 10^{-3}$	50
5.25	Gráfico $n \times M_e$, $q = 10$, $\sigma = 10^{-3}$	50
5.26	Gráfico $q \times M_e$, $n = 1300$, $\sigma = 0$	52
5.27	Gráfico $q \times M_e$, $n = 1300$, $\sigma = 0$	52
5.28	Gráfico $q \times M_e$, $n = 1300$, $\sigma = 0$	52
5.29	Gráfico $q \times M_e$, $n = 1300$, $\sigma = 10^{-2}$	54
5.30	Gráfico $q \times M_e$, $n = 1300$, $\sigma = 10^{-2}$	54
5.31	Gráfico $q \times M_e$, $n = 1300$, $\sigma = 10^{-2}$	54
5.32	rotação nos 4 eixos	56
5.33	k_1 , $n = 1300$	56
5.34	k_2 , $n = 1300$	56
5.35	k_3 , $n = 1300$	57
5.36	Curvatura k_1	57
5.37	Curvatura k_2	58

5.38	Curvatura k_3	58
5.39	$n = 1300$, $\sigma = 10^{-4}$	59
5.40	$\sigma = 0$, $n = 1300$	59
5.41	$\sigma = 10^{-2}$, $n = 1300$	59
5.42	Coordenadas independentes, $\sigma = 0$, $q = 2$, gráfico $n \times M_e$	60
5.43	Derivadas discretas, $\sigma = 0$, $q = 2$, gráfico $n \times M_e$	60
5.44	Coordenadas independentes, $\sigma = 10^{-4}$, $q = 2$, gráfico $n \times M_e$	62
5.45	Derivadas discretas, $\sigma = 10^{-4}$, $q = 2$, gráfico $n \times M_e$	62
5.46	Coordenadas independentes, $n = 1300$, $q = 2$	64
5.47	Derivadas discretas, $n = 1300$, $q = 2$	64
5.48	rotação nos 4 eixos	64
5.49	$n = 1300$, curvatura k_1	65
5.50	$n = 1300$, curvatura k_2	65
5.51	Projeção em XY , $n = 1300$, curvatura k_3	65
5.52	$n = 1300$, $\sigma = 10^{-2}$	65
5.53	zoom, $\sigma = 0$	66
5.54	zoom, $\sigma = 10^{-2}$	66
5.55	Gráfico $n \times M_e$, $q = 10$, $\sigma = 0$	67
5.56	Gráfico $n = 1300$, $\sigma = 0$	67
5.57	Gráfico $q = 2$, $n = 1300$	68
5.58	Gráfico $q = 2$, $n = 1300$	68
5.59	Gráfico $q = 2$, $n = 1300$	68
5.60	Gráfico $n = 1300$, $\sigma = 10^{-4}$	68
5.61	Gráfico $n = 1300$, $\sigma = 10^{-4}$	68
5.62	Gráfico $n = 1300$, $\sigma = 10^{-4}$	69
5.63	rotação nos 4 eixos	69
5.64	Escala para k_1	70
5.65	Escala para k_2	70
5.66	Escala para k_3	70
5.67	Curvatura k_1	71
5.68	Curvatura k_2	71
5.69	Curvatura k_3	72
5.70	Curva com $n = 1300$, $\sigma = 0.1$	72
5.71	Gráfico $q = 10$, $\sigma = 0$, curvatura k_1	73
5.72	Gráfico $q = 10$, $\sigma = 0$, k_2	73
5.73	Gráfico $q = 10$, $\sigma = 0$, k_3	73
5.74	Gráfico $n \times M_e$, $q = 10$, $\sigma = 10^{-3}$	73
5.75	Gráfico $n \times M_e$, $q = 10$, $\sigma = 10^{-3}$	74
5.76	Gráfico $n \times M_e$, $q = 10$, $\sigma = 10^{-3}$	74
5.77	Gráfico $t \times k_1$, $q = 2$, $\sigma = 0$	75
5.78	Gráfico $t \times k_2$, $q = 2$, $\sigma = 0$	75
5.79	Gráfico $t \times k_3$, $q = 2$, $\sigma = 0$	75
5.80	Gráfico $t \times k_1$, $q = 2$, $\sigma = 10^{-3}$	75
5.81	Gráfico $t \times k_2$, $q = 2$, $\sigma = 10^{-5}$	76
5.82	Gráfico $t \times k_3$, $q = 2$, $\sigma = 10^{-5}$	76
5.83	Curva exemplo 1	77
5.84	Escala para k_1	78

5.85 Escala para k_2	78
5.86 Escala para k_3	78
5.87 Gráfico $n \times M_e$, $q = 2$, $\sigma = 0$	79
5.88 Gráfico $n \times M_e$, $q = 2$, $\sigma = 0$	79
5.89 Gráfico $n \times M_e$, $\sigma = 10^{-5}$	79
5.90 Gráfico $n \times M_e$, $\sigma = 10^{-5}$	79
5.91 Gráfico $q \times M_e$, $\sigma = 0$, $n = 1300$	80
5.92 $\sigma = 10^{-5}$, $n = 1300$, curvatura k_1	80
5.93 $\sigma = 10^{-5}$, $n = 1300$, curvatura k_2	80
5.94 Eixos x e y	81
5.95 Visualização do eixo z	81
5.96 Visualização do eixo w	82
5.97 Nova rotação	82
5.98 Escala para k_1	82
5.99 Escala para k_2	82
5.100 Escala para k_3	83
5.101 $q = 2$, $\sigma = 0$, curvatura k_1	84
5.102 $q = 2$, $\sigma = 0$, curvatura k_2	84
5.103 $q = 2$, $\sigma = 0$, curvatura k_3	84
5.104 $q = 2$, $\sigma = 10^{-3}$, curvatura k_1	85
5.105 $q = 2$, $\sigma = 10^{-3}$, curvatura k_2	86
5.106 $q = 2$, $\sigma = 10^{-3}$, curvatura k_3	86
5.107 Projeção em XY	87
5.108 Visualização do eixo z	87
5.109 Rotação nos 4 eixos	88
5.110 Nova rotação	88
5.111 $n = 1300$, $\sigma = 0$, curvatura k_1	89
5.112 $n = 1300$, $\sigma = 0$, curvatura k_2	89
5.113 $n = 1300$, $\sigma = 10^{-3}$, curvatura k_1	90
5.114 $n = 1300$, $\sigma = 10^{-3}$, curvatura k_2	90
5.115 $q = 2$, $\sigma = 0$, curvatura k_1	90
5.116 $q = 2$, $\sigma = 0$, curvatura k_2	91
5.117 $q = 2$, $\sigma = 10^{-4}$, curvatura k_1	91
5.118 $q = 2$, $\sigma = 10^{-4}$, curvatura k_2	92
5.119 Visualização em x e y	93
5.120 Visualização do eixo z	93
5.121 Visualização do eixo w	93
5.122 Curvatura k_1	93
5.123 Curvatura k_2	93
5.124 Curvatura k_3	94