3
Analise dos Modelos Matemáticos

3.1
Introdução.

Este capítulo apresenta alguns modelos matemáticos que se propõe a descrever o efeito da taxa de deformação, $\dot{\varepsilon}$, nas curvas $\sigma \times \varepsilon$ medidas dinamicamente, desprezando outros modelos, de essência semi-empíricos, cujo a medição dos parâmetros é muitas vezes realizada a partir de testes de tração feitos sob controle de velocidade, supondo que a taxa de deformação seja dada por $\dot{\varepsilon} = v/L$. Este procedimento definitivamente inapropriado até mesmo na região elástica, conforme visto no capitulo 1.

Importante ressaltar que o estudo do efeito da taxa de deformação pelos modelos matemáticos apresentados neste capítulo cabe apenas ao regime plástico de interesse, compreendido entre a deformação real de 0,2%, definido por este estudo, até a deformação em que ocorre a resistência máxima.

3.1.1
Modelos de Johnson–Cook.

Conforme comentado no capítulo 1, em 1983, *Johnson e Cook* criaram uma equação, essencialmente fenomenológica, que descreve a relação do encruamento do material em função da taxa de deformação e da temperatura no regime plástico. Em 2005 DIETENBERGER, BUYUK e KAN confirmam que o modelo de **JC** é dependente da taxa de deformação e temperatura para um material de comportamento viscoplastico. As formas multiplicativas dos termos de deformação, taxa de deformação e temperatura, evidenciam que com o aumento da taxa de deformação haverá um aumento do patamar de encruamento do material.

Em 2010, SHROT e BAKERS relatam no seu *paper* que o modelo de **JC** é usado para descrever o comportamento material no regime plástico sobre grandes deformações, em taxas de deformação elevadas e em altas temperaturas. Esse modelo matemático, que é o mais usual para quantificar os efeitos dinâmicos na parte elastoplástica das curvas σ×ε, pode ser dado por:

$$\sigma = \left[S_{E0} . \left\{ 1 + B(\varepsilon - \varepsilon_E)^N \right\} \right] . [1 + C \ln(\dot{\varepsilon} / \dot{\varepsilon}_0)] \tag{12}$$

onde **σ** e **ε** são a tensão e a deformação que atuam no CP de tração após o seu escoamento; $\mathbf{S_{E0}}$ é a resistência ao escoamento medida numa taxa de referência $\dot{\varepsilon}_0$; ε_E = $\mathbf{S_E}$/**E** + 0.002 é a deformação associada à resistência ao escoamento; **E** é o módulo de elasticidade; **B** e **N** são os parâmetros que quantificam o encruamento (estático) do material; e **C** é o parâmetro que quantifica a influência (suposta logarítmica) da taxa de deformação nas curvas σ×ε do material. Esta é a forma mais correta de escrever a equação de **JC** (pois $\sigma = S_{E0}$ se $\varepsilon = \varepsilon_{E0}$ e $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0$), que em princípio deve ser aplicada às tensões e deformações reais, mas é também usada para descrever o efeito da taxa nas tensões e deformações de engenharia.

O termo atribuído no primeiro colchetes refere-se ao termo elasto-plástico e no segundo colchetes refere-se ao termo viscoso. O terceiro termo, que se refere à temperatura não foi atribuído, pois conforme mencionado no capítulo 2, os ensaios de tração foram realizados sob temperatura controlada e fixada em 22ºC, o que não permite com que esse termo estabelece qualquer alteração no comportamento do ajuste dessa equação.

3.1.2
Modelos de Meyers.

Em 1999, MEYERS sugeriu uma equação que altera apenas o termo logarítmico da equação de **JC** modificada, substituindo o logaritmo natural por um logaritmo na base 10. A equação 13 é mostrada também sem o termo térmico da equação pela mesma razão que explicada anteriormente. Embora ambas as equações modificadas sejam idênticas, exceto pela base logarítmica, as equações originais têm relevante diferença na parcela adicional da temperatura. A equação de

MEYERS modificada é mostrada abaixo:

$$\sigma = \left[S_{E0} . \left\{ 1 + B(\varepsilon - \varepsilon_E)^N \right\} \right] [1 + C \log_{10}(\dot{\varepsilon} / \dot{\varepsilon}_0)] \tag{13}$$

3.1.3
Modelos de Zerilli-Armstrong.

Em 1986, *Zerilli e Armstrong* criaram um modelo matemático constitutivo que é baseado em deformação, taxa de deformação e temperatura, onde estes são responsáveis pela alteração no comportamento do material devido a relação constitutiva com os mecanismos de deslocamento, segundo DIETENBERGER, BUYUK e KAN (2005). Todavia essa parcela térmica não é relevante para este estudo, uma vez que nos ensaios a temperatura foi mantida constante. A segunda parte da equação mostra a relação de ajuste entre tensão, deformação e taxa de deformação, dado por:

$$\sigma = S_{E0} + B.(\varepsilon - \varepsilon_E)^N + C.\exp(\dot{\varepsilon} / \dot{\varepsilon}_0) \tag{14}$$

Da mesma forma que **JC**, em **ZA** os valores de $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ são a tensão e a deformação que atuam no **CP** de tração após o seu escoamento; $\mathbf{S_{E0}}$ é a resistência ao escoamento medida numa taxa de referência $\dot{\varepsilon}_0$; $\boldsymbol{\varepsilon_E} = \mathbf{S_E/E} + 0.002$ é a deformação associada à resistência ao escoamento; E é o módulo de elasticidade; **B** e **N** são os parâmetros que quantificam o encruamento (estático) do material; e **C** é o parâmetro que quantifica a influência (suposta exponencial) da taxa de deformação nas curvas $\sigma\times\varepsilon$ do material.

3.1.4
Modelos de Cowper-Symonds

.

Em 1957 Cowper e Symonds (CS) introduziram uma equação constitutiva para caracterizar o efeito dinâmico da taxa de deformação nas propriedades mecânicas do material. Este modelo, que é adequado para materiais isotrópicos e sensíveis ao encruamento cinemático, permite que se defina o patamar de encruamento dependente da taxa de deformação usada para ensaiar o material do corpo de prova.

Em 2010, LAROUR publicou a equação de CS que foi ajustada ao conjunto dos dados experimentais do seu estudo, não gerando patamares de escoamento relevantes. Desta forma, a esta equação foi proposta uma alteração com a adição do termo logaritmo, onde os resultados serão discutidos no capítulo seguinte. Assim, a equação de Cowper-Symonds modificada é dada por:

$$\sigma = \left[\left\{B + S_{E0}.\left(\varepsilon - \varepsilon_E{}^N\right)\right\}\right]\left[1 + \ln(\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0)^{1/C}\right] \tag{15}$$

onde, **σ** é tensão de escoamento dinâmica a partir de uma taxa de deformação plástica uniaxial, $\mathbf{S_E}$ é a resistência ao escoamento a partir de uma taxa estática de deformação (referência $\dot{\varepsilon}_0$ = 0, 0025 s^{-1}), $\mathbf{S_{E0}}$ é a resistência ao escoamento medida numa taxa de referência $\dot{\varepsilon}_0$; $\boldsymbol{\varepsilon_E} = \mathbf{S_E/E}$ + 0.002 é a deformação associada à resistência ao escoamento; E é o módulo de elasticidade, **B** é a constante de encruamento, **N** é o expoente de encruamento e **C** é o coeficiente de encruamento da taxa de deformação.