

## 2 Simplificação de Malhas

Malhas triangulares são utilizadas nas mais diversas áreas como forma de representar objetos ou modelos em ambientes computacionais. São compostas pelo agrupamento de triângulos que se adequam às pequenas porções das formas que se quer reproduzir. A manipulação desse tipo de malha é suportada por diversos *softwares* e dispositivos de *hardware*, que ajudam a melhorar o desempenho computacional durante a manipulação (4, 19, 34).

A manipulação de malhas contendo um grande número de triângulos exige um alto poder computacional para ser efetuada. Métodos de simplificação eliminam triângulos que não são relevantes na definição da estrutura representada. O resultado é uma nova triangulação com um número menor de triângulos e que se aproxima da original.

A quantificação de importância pode ser feita utilizando qualquer um dos tipos de primitivas que definem a malha. Quando uma dessas primitivas é removida, as outras também são afetadas, em virtude da dependência que existe entre elas. Qualquer tipo de primitiva escolhida para ser removida implica a remoção de triângulos, o que ocorre de forma indireta.

A simplificação pode ser feita em caráter local ou global. Quando tratada localmente, as primitivas são reduzidas de forma gradativa, aplicando-se pequenas mudanças em certas regiões da malha. Por outro lado, a simplificação global reconstrói toda a malha, alterando a posição dos vértices e refazendo a triangulação (13, 21, 29, 33).

Considerando o tempo e os recursos computacionais requeridos, os métodos locais são mais vantajosos que os globais pois possuem estruturas de dados e operações mais simples de serem executadas. Por outro lado, os métodos globais geram uma melhor estimativa de erro.

### 2.1 Conceitos

**Definição 2.1 (Malha)** *Uma malha é uma estrutura topológica e geométrica*

formada por um complexo simplicial  $K$  composto por simplexes - vértices, arestas e faces - e suas estruturas de adjacências.

Em malhas triangulares, existem três tipos de simplexes: os 0-simplexos, correspondentes aos vértices  $v_i \in K$ ; os 1-simplexos, relativos às arestas  $\{v_i, v_j\} \in K$  formadas pela ligação entre os vértices  $v_i$  e  $v_j$ ; e os 2-simplexos, denotados pelas faces triangulares  $\{v_i, v_j, v_k\} \in K$  (15, 16).

**Definição 2.2 (Estrela de um vértice)** A estrela de um vértice  $v \in K$  é o conjunto de todos os simplexes  $\sigma \in K$  tais que  $v \in \sigma$  e é denotado por  $Star(v)$ .

**Definição 2.3 (Elo de um vértice)** O elo de um vértice  $v \in K$  é o conjunto dos 0-simplexos e 1-simplexos  $\sigma \in Star(v)$  que não se ligam a  $v$  e é denotado por  $Link(v)$ .

**Definição 2.4 (Grau de um vértice)** O grau de um vértice  $v \in K$  é número de vértices pertencentes ao  $Link(v)$  e é representado por  $Deg(v)$ .

**Definição 2.5 (Malha 2-variedade)** Uma malha é uma 2-variedade se as estrelas de todos os seus vértices são homeomorfas a um disco ou semi-disco, no caso dos vértices pertencentes ao bordo.

A Figura 2.1 apresenta exemplos de disposição de triângulos que formam estruturas que não são 2-variedades (32).

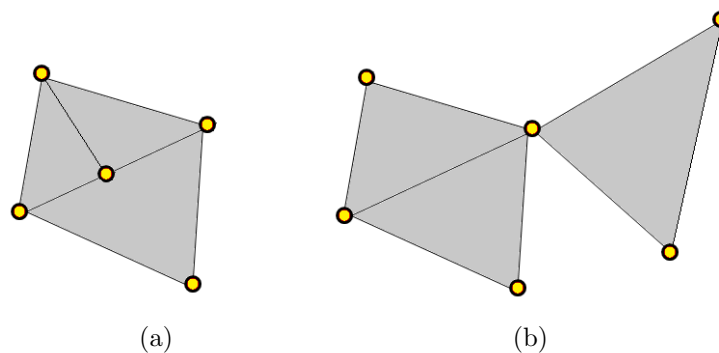


Figura 2.1: Exemplos de malhas que não são 2-variedades, sendo (b) uma não-variedade.

Nos casos de malhas com bordo, as arestas do bordo pertencem apenas a um triângulo, enquanto as arestas internas continuam sendo compartilhadas

por dois triângulos. Malhas triangulares desta natureza são classificadas como 2-variedades com bordo.

Uma questão a ser abordada é a qualidade dos triângulos gerados no processo de simplificação. Problemas numéricos e de visualização podem ser causados pela ocorrência de triângulos muito finos e longos. Pelo fato deles se aproximarem de linhas, operações aplicadas na malha podem ser comprometidas quando tais elementos aparecem. Na visualização, certas áreas podem ficar destacadas pelas linhas que aparecem, retirando o aspecto de realidade desejado para o objeto (19).

Em seguida são apresentados os operadores computacionais utilizados na elaboração do método proposto neste trabalho. Um operador computacional é um conjunto de ações que transformam uma estrutura de dados computacional (19), são aplicados nas malhas provocando uma mudança em suas triangulações.

### 2.1.1

#### Troca de Arestas

Nesta operação ocorre uma troca da aresta adjacente que existe entre as faces da triangulação original. Ela é utilizada para melhorar o aspecto dos triângulos gerados na malha simplificada. A Figura 2.2 mostra uma troca de aresta aplicada a uma malha.

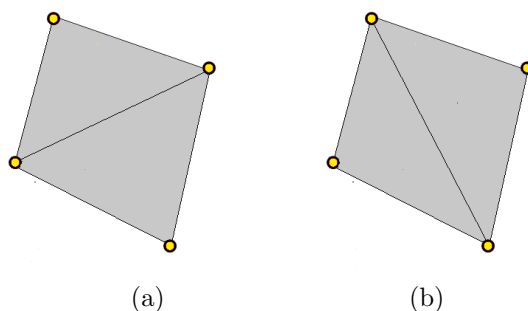


Figura 2.2: Resultado de uma troca de aresta aplicada a uma porção da malha. Em (a) o original e em (b) o resultado obtido.

### 2.1.2

#### Decimação de Vértices

A operação de remoção de um vértice de uma malha é conhecida como decimação. Um buraco é gerado na malha, que é retriangulado, a partir do elo do vértice removido. Além do vértice, são removidos triângulos e arestas. Junto com a decimação podem ser usadas técnicas para gerar triângulos bem

distribuídos na área a ser preenchida. A Figura 2.3 mostra o processo feito durante a decimação de um vértice de uma malha.

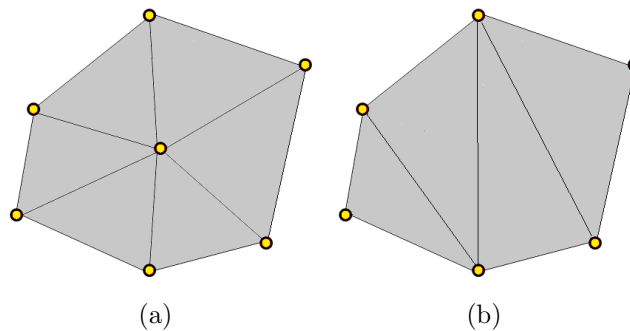


Figura 2.3: Decimação de um vértice de uma malha. Em (a) a malha original com o vértice a ser removido (central) e em (b) a malha obtida com a triangulação da região delimitada por seu elo.

### 2.1.3 Razão de Aspecto

A razão de aspecto de um triângulo oferece uma medida da relação que existe entre o comprimento de seus lados e sua área. O resultado é um valor presente no intervalo  $[0, 1]$  que mostra o quanto o triângulo se aproxima de estruturas conhecidas, como um triângulo equilátero, cujo valor é 1, ou degenerado, com valor 0 (14). Considerando um triângulo  $t$  com área  $a$  e lados  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$ , a razão de aspecto deste triângulo,  $R_t$ , pode ser calculada da seguinte forma:

$$R_t = \frac{4\sqrt{3}a}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}. \quad (2-1)$$

Pode-se utilizar a razão de aspecto para controlar a qualidade da triangulação gerada durante o processo de simplificação. Quanto maior a quantidade de triângulos com razão próxima a 1, melhores serão a disposição dos triângulos ao longo da malha (próximos a equiláteros) e o resultado adquirido durante a renderização. A Figura 2.4 mostra a mudança do aspecto triangular em função da razão de aspecto.

## 2.2 Avaliação de Erro

A distância  $d(y, S')$  que existe entre um ponto  $y$ , presente em uma superfície  $S$ , e uma outra superfície  $S'$  é definida por

$$d(y, S') = \min_{y' \in S'} \|y - y'\|_2, \quad (2-2)$$

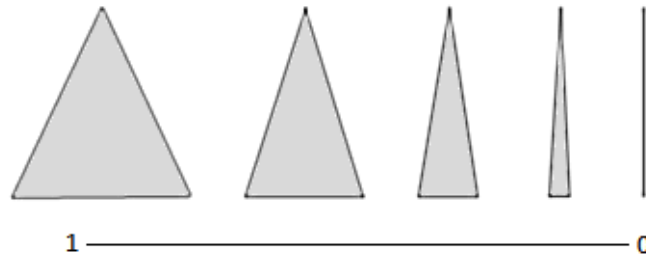


Figura 2.4: Mudanças que ocorrem na estrutura de triângulos e como elas estão associadas aos valores assumidos pela razão de aspecto.

onde  $\| \cdot \|_2$  representa a norma euclidiana. A partir dela, pode-se definir a distância de Hausdorff entre as superfícies  $S$  e  $S'$ , representada por  $d(S, S')$ , como (1)

$$d(S, S') = \max_{y \in S} d(y, S'). \quad (2-3)$$

A distância de Hausdorff pode não ser simétrica, isto é,  $d(S, S') \neq d(S', S)$ . Em virtude disso, recomenda-se utilizar a distância de Hausdorff simetrizada, da forma

$$d_s(S, S') = \max [d(S, S'), d(S', S)]. \quad (2-4)$$

Outras métricas são baseadas na distância que cada ponto tem para uma superfície. Uma delas é o erro médio,  $d_M$ , definido por

$$d_M = \frac{1}{A(S)} \iint_{y \in S} d(y, S') dS \quad (2-5)$$

onde  $A(S)$  é a área da superfície  $S$ . A outra é a raiz do erro quadrático médio (*Root Mean Square Error*),  $d_{RMSE}$ , especificada por:

$$d_{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{A(S)} \iint_{y \in S} d(y, S')^2 dS} \quad (2-6)$$

O erro adquirido pela remoção de um ponto pertencente a uma malha é passível de avaliação através do uso destas três distâncias especificadas. Hausdorff calcula o erro máximo cometido, enquanto as outras duas abordam um erro médio do modelo gerado em relação ao original. Por outro lado, o cálculo delas é demasiadamente custoso para servir como avaliação de erro durante o processo de simplificação, em decorrência do grande número de distâncias entre pontos que precisam ser calculadas (21). Elas são utilizadas posteriormente como métricas de erro entre o modelo original e o reduzido e calculadas com o auxílio do METRO (6), *software* que implementa as métricas de erro discutidas.