Referências Bibliográficas

[1] A., M. J. I. J. **HRBF Implicits**. 2011. Tese de Doutorado - IMPA.

[2] AROUCA, S. D. S. **Método implícito para reconstrução de curvas a partir de pontos esparsos**. 2006. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio.

[3] AZEVEDO, L. D. S. **Visualização por pontos de superfícies implícitas no $\mathcal{R}^4$**. 2011. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio.

[4] BELKIN, M.; NIYOGI, P. **Neural Computing**. Laplacian eigenmaps for dimensionality reduction and data representation, journal, n.15, p. 1373–1396, 2003.

[5] BENTLEY, J. L. **Commun. ACM**. Multidimensional binary search trees used for associative searching, journal, v.18, n.9, p. 509–517, 1975.

[6] BERTSEKAS, D. P. **Nonlinear Programming**. 2nd. ed., Athena Scientific, 1999.

[7] BISHOP, C. M. **Pattern Recognition and Machine Learning**. 1st ed.. ed., Springer, 2006.

[8] BISHOP, C. M.; M., S. ; WILLIAMS, C. K. I. **Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS 1996)**. Gtm: A principled alternative to the self-organizing map, journal, v.9, p. 354–360, 1997.

[9] BRAZIL, E. V.; MACÊDO, I.; SOUSA, M. C.; VELHO, L. ; FIQUEIREDO, L. H. **Computer and Graphics**. Shape and tone depiction for implicit surfaces, journal, p. 43–53, 2011.

[10] BREIMAN, L.; FRIEDMAN, J.; OLSHEN, R. ; STONE, C. **Classification and Regression Trees**. Wadsworth and Brooks, 1984.

[11] CASTRO, D. A. **Esquemas de aproximação em multinível e aplicações**. 2011. Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas.

[12] CHANG, C.-C.; LIN, C.-J. Libsvm: A library for support vector machines, journal. www.csie.ntu.edu.tw/ cjlin/papers/libsvm.pdf.

[13] CHU, W.; KEERTHI, S. S. ; ONG, C. J. **IEEE Transactions on Neural Networks**. Bayesian support vector regression using a unified loss function, journal, v.15, p. 29–44, 2004.

[14] COX, T. F.; COX, M. A. A. **Multidimensional Scaling**. 2nd. ed., Chapman & Hall/CRC, 2000.

[15] DA ROSA, J. C.; VEIGA, A. ; MEDEIROS, M. C. **Comput. Stat. Data Anal.** Three-structured smooth transition regression models based on cart algorithm, journal, v.52, n.5, p. 2469–2488, 2008.

[16] DONOHO, D. L.; GRIMES, C. **Proceedings of the National Academy f Sciences of The United States of America**. Hessian eigenmaps: Locally linear embedding techniques for high dimensional data, journal, p. 5591–5596, 2003.

[17] ESTEVEZ, P. A.; CHONG, A. M. **Proceedings of IJCNN 2006**. Geodesic nonlinear mapping using the neural gas network, journal, p. 3287–3294, 2006.

[18] FERRRARI, S.; STENGEL, R. F. **IEEE Transactions on Neural Networks**. Smooth function approximation using neural networks, journal, v.16, n.1, 2005.

[19] FUCHS, H.; KEDEM, Z. M. ; NAYLOR, B. F. **SIGGRAPH Comput. Graph.** On visible surface generation by a priori tree structures, journal, v.14, n.3, p. 124–133, 1980.

[20] GINGOLD, R.; MONAGHAN, J. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, journal, v.181, p. 375–389, 1977.

[21] GUY, G.; MEDIONI, G. **International Journal of Computer Vision**. Inferring global perceptual contours from local features, journal, v.20, p. 113–133, 1996.

[22] GUY, G.; MEDIONI, G. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**. Inference of surfaces, 3d curves, and junctions from sparse, noise, 3d data, journal, v.19, n.11, p. 1265–1277, 1997.

[23] HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R. ; FRIEDMAN, J. **The Elements of Statistical Learning. Data Mining, Inference and Prediction**. Springer, 2001.

[24] HOTTELING, H. **Journal of Educational Psychology**. Analysis of a complex of statistical variables into principal components, journal, p. 417–441, 1933.

[25] IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. V. **Otimização**. 1st. ed., IMPA, 2007.

[26] JHONSON, G.; STRYK, R. ; BEISSEL, S. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. Sph for high velocity impact calculations, journal, p. 347–373, 1996.

[27] JOLLIFFE, I. T. **Principal Component Analysis**. 2nd. ed., Springer, 2002.

[28] JONES, F. **Honors calculus iii/iv**. Rice University.

[29] KOHONEN, T. **Self-Organizing Maps**. 3rd.. ed., Springer, 2000.

[30] KUBRUSLY, J. Q. **Regressão Construtiva por Regiões Definidas Implicitamente**. 2009. Tese de Doutorado - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio.

[31] LAGE, M.; BORDIGNON, A.; PETRONETTO, F.; VEIGA, L.; TAVARES, G.; LEWINER, T. ; LOPES, H. **Proceedings of the 2008 XXI Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing**. Approximations by smooth transitions in binary space partitions, journal, p. 230–236, 2008.

[32] LEE, J.; ARCHAMBEAU, C. ; VERLEYSEN, M. **Proceedings of ESANN 2003, 11th European Symposium on Artificial Neural Networks**. Locally linear embedding versus isotop, journal, p. 527–534, 2003.

[33] LEE, J. A.; MICHEL, V. **Nonlinear Dimensionality Reduction**. Springer, 2007.

[34] LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds**. Springer, 2003.

[35] LEE, J. M. **Introduction to Topological Manifolds**. 2nd. ed., Springer, 2011.

[36] LEITE, V. R. C. **Uma análise da classificação de litologias utilizando svm, mlp e métodos ensemble**. 2012. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio.

[37] LI, J. Multiatributes pattern recognition for reservoir prediction, journal, p. 205–208, 2005.

[38] LI, Q.; GRIFFITHS, J. G. ; WARD, J. **Comput. Aided Geom. Des.** Constructive implicit fitting, journal, v.23, n.1, p. 17–44, 2005.

[39] LIMA, E. L. **Análise Real**, volume 2. Impa, 2004.

[40] LIMA, E. L. **Álgebra exterior**. Primeira edição. ed., IMPA, 2009.

[41] LIMA, E. L. **Variedades Diferenciáveis**. IMPA, 2009.

[42] MEDEROS, B.; LAGE, M.; AROUCA, S.; PETRONETTO, F.; LEWINER, T.; VELHO, L. ; LOPES, H. **Journal of the Brazilian Computer Society**. Regularized implicit surface reconstruction from points and normals, journal, v.13, n.4, p. 7–16, 2007.

[43] MEDIONI, G.; KANG, S. B. **Emerging Topics in Computer Vision**. Prentice Hall PTR, 2005.

[44] MEDIONI, G.; LEE, M. S. ; TANG, C. K. **A Computacional Framework for Segmentation and Grouping**. Elsevier, 2000.

[45] MORDOHAI, P. **A Perceptual Organization Approach for Figure Completion, Binocular and Multiple-View Stereo and Machine Learning Using Tensor Voting**. 2005. Tese de Doutorado - Faculty of the Graduate School University of Southtern California.

[46] MORDOHAI, P.; MEDIONI, G. **Tensor Voting - A perceptual Organization Approach to Computer Vision and Machine Learning**. First edition. ed., Morgan & Claypool Publishers, 2006.

[47] MORDOHAI, P.; MEDIONI, G. **Journal of Machine Learning Research**. Dimensionality estimation, manifold learning and function approximation using tensor voting, journal, n.11, p. 411–450, 2010.

[48] NGUYEN-TUONG, D.; SEEGER, M. ; PETERS, J. **Advanced Robotics**. Model learning with local gaussian process regression, journal, v.23, n.15, p. 2015–1034, 2009.

[49] OHTAKE, Y.; BELYAEV, A.; ALEXA, M.; TURK, G. ; SEIDEL, H.-P. **ACM Trans. Graph.** Multi-level partition of unity implicits, journal, v.22, n.3, p. 463–470, 2003.

[50] PEARSON, K. **Philosophical Magazine**. On lines and planes of closest fit to systems of points in space, journal, v.2, n.6, p. 559–572, 1901.

[51] PEDREGOSA, F.; VAROQUAUX, G.; GRAMFORT, A.; MICHEL, V.; THIRION, B.; GRISEL, O.; BLONDEL, M.; PRETTENHOFER, P.; WEISS, R.; DUBOURG, V.; VANDERPLAS, J.; PASSOS, A.; COURNAPEAU, D.; BRUCHER, M.; PERROT, M. ; DUCHESNAY, E. **Journal of Machine Learning Research**. Scikit-learn: Machine learning in python, journal, v.12, p. 2825–2830, 2011.

[52] PIRES, G. **Variedades. linhas e superfícies**. Instituto Superior. Departamento de Matemática. Secção de Álgebra e Análise.

[53] POGGIO, T.; GIROSI, F. **Proceedings of the IEEE**. Networks for approximation and learning, journal, v.78, n.9, p. 1481–1497, 1990.

[54] RAMUSSEN, C. E.; WILLIAM, C. K. I. **Gaussian Process for Machine Learning**. The MIT Press, 2006.

[55] RIPLEY, B. Package 'tree'-classification and regression trees, journal, 2012.

[56] RIPLEY, B. D. **Pattern Recognition and Neural Networks**. Cambridge University Press, 1996.

[57] ROWEIS, S. T.; SAUL, L. K. **Science**. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding, journal, v.290, p. 2323–2326, 2000.

[58] ROWEIS, S. T.; SAUL, L. K. **Journal of Machine Learning Research**. Think globally, fit locally: Unsupervised learning of nonlinear manifolds, journal, p. 119–155, 2003.

[59] R project url, journal, 2007. http://www.r-project.org/.

[60] RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. 3rd. ed., McGraw-Hill, Inc., 1976.

[61] SAMMON, J. W. **IEEE Transactions on Computers**. A non-linear mapping algorithm for data structure analysis, journal, p. 401–409, 1969.

[62] SCHOLKOPF, B.; SMOLA, A. J. **Learning with kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond**. The MIT Press, 2001.

[63] SCHWAIGHOFER, A.; TRESP, V. **Transductive and inductive methods for approximate gaussian process regression**. In: IN, p. 953. MIT Press, 2002.

[64] SIMMONS, G. F. **Introduction to Topology and Modern Analysis**. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963.

[65] SMIRNOFF, A.; BOISVERT, E. ; PARADIS, S. J. **Computers Geosciences**. Support vector machine for 3d modelling from sparse geological information of various origins, journal, n.34, p. 127–143, 2008.

[66] SMOLA, A. J.; BARTLETT, P. **Sparse greedy gaussian process regression**. In: ADVANCES IN NEURAL INFORMATION PROCESSING SYSTEMS 13, p. 619–625. MIT Press, 2001.

[67] SPIVAK, M. **Calculus on Manifolds**. Addison-Wesley Publishing Company, 1965.

[68] SVENSEN, J. **GTM: The generative topographic mapping**. 1998. Tese de Doutorado - Aston University.

[69] TANG, C.-K. **Tensor Voting in Computer Vision, Visualization, and Higher Dimensional Inferences**. 2000. Tese de Doutorado - Faculty of the Graduate School University of Southtern California.

[70] TASDIZEN, T.; TAREL, J.-P. ; COOPER, D. B. **IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition**. Algebraic curves that work better, journal, p. 35–41, 1999.

[71] TAVARES, G.; LOPES, H.; LAIER, A.; CASTRO, R.; SANTOS, R. ; MURAD, A. Métodos baseados em núcleos e máquina de suporte vetorial em aplicações de geofísica de petróleo, journal, 2007.

[72] TENENBAUM, J. B.; SILVA, V. ; LANGFORD, J. C. **Science**. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction, journal, n.290, p. 2319–2323, 2000.

[73] THOMAS, J. E. **Fundamentos de Engenharia de Petróleo**. Editora Interciência, 2001.

[74] TIPPING, M. E. **Journal of Machine Learning Research**. Sparse bayesian learning and the relevance vector machine, journal, v.1, p. 211–244, 2001.

[75] TONG, W. S.; TANG, C. K. ; MEDIONI, G. **CVPR01**. First-order tensor voting and application to 3d scale analysis, journal, v.1, p. 175–182, 2001.

[76] TONG, W. S.; TANG, C. K. ; MORDOHAI, P. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**. First-order augmentation to tensor voting for boundary inference and multiscale analysis in 3d, journal, v.26, n.5, 2004.

[77] TRESP, V. **Neural Computing**. A bayesian committee machine, journal, v.12, p. 2719–2741, 2000.

[78] V.VAPNIK. **The Nature of Statistical Learning Theory**. 2nd.. ed., Springer-Verlag, 2000.

[79] WENDLAND, H. **Scattered Data Approximation**. Cambridge University Press, 2005.

[80] WINITZKI, S. **Linear Algebra via Exterior Products**. lulu.com, 2009.

[81] ZHANG, Z.; ZHA, H. **SIAM Journal of Scientific Computing**. Principal manifolds and nonlinear dimension reduction via local tangent space alignment, journal, v.26, p. 313–338, 2002.

[82] ZHAO, B.; WEI ZHOU, H. Nonlinear classification of avo attributes using svm, journal, 2005.

A
Conceitos de topologia

A área da Matemática responsável por estudar as propriedades de objetos que são preservadas através de alguns tipos de alterações morfológicas, tais como deformação, torção ou alongamento, chama-se Topologia. A única operação não permitida é “cortar” os objetos. Dessa maneira, garante-se que a estrutura ou conectividade dos objetos seja mantida. Por exemplo, um círculo é topologicamente equivalente a uma elipse e uma esfera equivalente a um elipsóide. Conforme mostra a figura A.1, a superfície de uma rosquinha pode ser continuamente deformada na superfície de um copo de café com uma alça, esticando a metade da rosquinha para se tornar o copo e reduzindo a outra metade para formar a alça. Se dois objetos são ditos terem as mesmas propriedades topológicas então eles são homeomorfos.

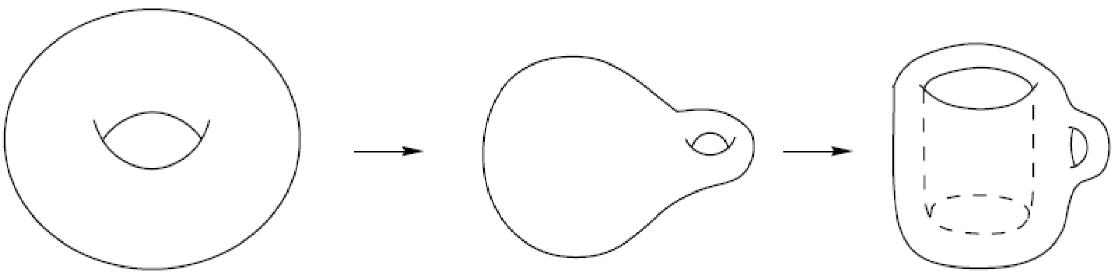

Figura A.1: Deformação de uma rosquinha em um copo de café. (Lee,2011(35))

Os objetos em Topologia são formalmente definidos como espaços topológicos. Um conjunto X para o qual uma topologia $\mathcal{T}$ é especificada é chamado um espaço topológico.

Definição A.1. *Uma topologia em um conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tendo as seguintes propriedades:*

- $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.
- A união dos elementos de qualquer subcoleção de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$.

- A interseção dos elementos de qualquer subcoleção finita de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$.

Um conjunto X equipado com uma topologia é referido como um espaço topológico. Os elementos de $\mathcal{T}$ são chamados de subconjuntos abertos de X com respeito a $\mathcal{T}$ e os elementos de X são chamados pontos do espaço topológico (X, $\mathcal{T}$). De um ponto de vista mais geométrico, um espaço topológico também pode ser definido usando vizinhanças e axiomas de Haussdorf. A vizinhança de um ponto $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é frequentemente definida como a bola aberta de raio ϵ, $B_\epsilon(\mathbf{y})$, isto é, o conjunto de pontos dentro de uma esfera de dimensão n e raio $\epsilon > 0$, centrada em $\mathbf{y}$. Um conjunto contendo uma vizinhança aberta é também chamado uma vizinhança. Assim, um espaço topológico é definido do seguinte modo:

- Para cada ponto $\mathbf{y}$, existe pelo menos uma vizinhança $\mathcal{U}(\mathbf{y})$ tal que $\mathbf{y} \in \mathcal{U}(\mathbf{y})$
- Se $\mathcal{U}(\mathbf{y})$ e $\mathcal{V}(\mathbf{y})$ são vizinhanças de um mesmo ponto $\mathbf{y}$, então existe uma vizinhança $\mathcal{W}(\mathbf{y})$ tal que $\mathcal{W}(\mathbf{y}) \subset \mathcal{U}(\mathbf{y}) \cup \mathcal{V}(\mathbf{y})$.
- Se $\mathbf{z} \in \mathcal{U}(\mathbf{y})$ então existe uma vizinhança $\mathcal{V}(\mathbf{z})$ de $\mathbf{z}$ tal que $\mathcal{V}(\mathbf{z}) \subset \mathcal{U}(\mathbf{y})$.
- Para dois pontos distintos, existem duas vizinhanças disjuntas desses pontos.

Dois espaços topológicos X e Y são ditos serem homeomorfos se existe um homeomorfismo de X em Y, isto é, um mapeamento bijetivo $F : X \to Y$, contínuo, cujo mapeamento inverso $F^{-1} : Y \to X$ também é contínuo. Se X e Y são homeomorfos, então seus pontos possuem uma correspondência biunívoca, de tal maneira que também existe uma correspondência biunívoca entre seus conjuntos abertos. Assim, os dois espaços apenas diferem quanto a natureza dos pontos e, sob o ponto de vista da topologia, podem ser considerados equivalentes.

Dadas as definições anteriores, podemos definir uma variedade topológica M.

Definição A.2. *Seja M um espaço topológico. M é uma variedade topológica de dimensão m se satisfaz as seguintes propriedades:*

- M é um espaço de Haussdorf, isto é, para todo par de pontos $p, q \in M$, existem subconjuntos abertos disjuntos $U, V \subset M$ tal que $p \in U$ e $q \in V$.
- Existe uma base enumerável para a topologia de M.

- M é localmente euclidiana de dimensão m, isto é, ao redor de todo ponto de M existe uma vizinhança que é topologicamente a mesma que a bola unitária em $\mathbb{R}^m$.

A propriedade localmente euclidiana significa que para todo $p \in M$, existe:

- Um conjunto aberto $U \in M$ tal que $p \in U$.
- Um conjunto aberto $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ e um homeomorfismo $\varphi : U \to \tilde{U}$.

Uma definição equivalente de espaços localmente euclidianos é obtida se, ao invés de requerer que U seja homeomorfo a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$, ele seja homeomorfo a uma bola aberta de $\mathbb{R}^m$ ou ao próprio $\mathbb{R}^m$.

O teorema a seguir nos mostra que a dimensão de uma variedade é uma propriedade topológica intrínseca.

Teorema A.1 (Invariância de Dimensão)**.** *Se $m \neq n$, então um espaço topológico não vazio não pode ser, ao mesmo tempo, uma variedade de dimensão m e uma variedade de dimensão n.*

A demonstração pode ser encontrada em (35).

Definição A.3. *Seja M uma variedade topológica de dimensão m, um sistema de coordenadas locais ou carta local em M é um par (U, φ), onde U é um subconjunto aberto de M e $\varphi : U \to \tilde{U}$ é um homeomorfismo de U para um subconjunto aberto $\tilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$. (Veja a ilustração A.2)*

Algumas observações:

1. Pela definição de variedade topológica, cada ponto $p \in M$ está contido no domínio de alguma carta (U, φ).
2. Dizemos que m é a dimensão de $\varphi : U \to \varphi(U)$.
3. Para cada $p \in U$ tem-se $\varphi(p) = (\varphi_1(p), \varphi_2(p), \ldots, \varphi_m(p))$. Os números $\varphi_1(p), \varphi_2(p), \ldots, \varphi_m(p)$ chamam-se as coordenadas de p relativamente ao sistema φ.

Definição A.4. *Chama-se atlas de dimensão m sobre um espaço topológico M, uma coleção $\mathcal{U}$ de sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ em M, cujos domínios U cobrem M.*

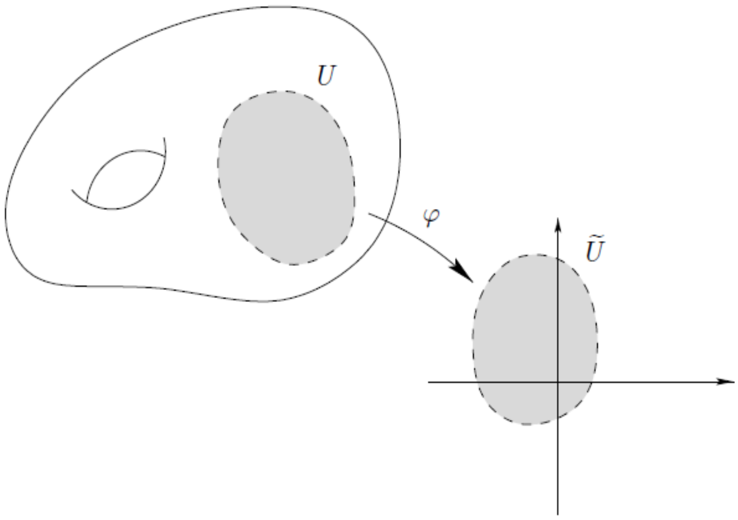

Figura A.2: Uma carta local. (Lee,2003(34))

Um espaço topológico M no qual existe um atlas de dimensão m chama-se variedade topológica de dimensão m.

Um mapeamento topológico é uma função que é um homeomorfismo em sua imagem, que é sempre injetivo e contínuo. É uma representação de um objeto topológico (uma variedade, por exemplo) em um certo espaço, usualmente $\mathbb{R}^n$ para algum n, de tal forma que suas propriedades topológicas sejam preservadas. Para maiores detalhes sobre espaços topológicos (64) e para uma boa introdução a variedades topológicas veja (35).

A definição dada de variedade é suficiente para estudar suas propriedades topológicas, tais como compacidade e conexidade. No entanto, a teoria de variedades topológicas não faz referência ao Cálculo. Para que tenha sentido falar sobre derivadas de funções, curvas ou mapas em uma variedade, será necessário introduzir um novo tipo de variedade, chamada variedade diferenciável. É importante verificar que não se pode definir uma variedade diferenciável como sendo uma variedade topológica com alguma propriedade especial, uma vez que a propriedade de diferenciabilidade pode não ser invariante por homeomorfismos.

Considere M uma variedade topológica de dimensão m. Seja $p \in M$, p pertence ao domínio de um sistema de coordenadas $\varphi : U \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$. Uma definição plausível de uma função diferenciável, conforme descrito em (34), seria dizer que $f : M \to \mathbb{R}$ é diferenciável se, e somente se, a função composta $f \circ \varphi^{-1} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável. No entanto, tal afirmação fará sentido apenas se esta propriedade for independente da escolha da carta. Logo, para que tal colocação se verifique, precisamos estudar cartas diferenciáveis. Uma vez que a diferenciabilidade não é uma propriedade invariante por homeomorfismo, deve-se considerar a coleção de todas as cartas diferenciáveis. Portanto, deve-se estudar mudanças de coordenadas e atlas diferenciáveis. As definições a seguir foram obtidas de (41).

Definição A.5. *Sejam $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ e $\omega : V \to \mathbb{R}^m$ sistemas de coordenadas locais no espaço topológico M, tais que $U \cap V \neq \emptyset$. Cada ponto $p \in U \cap V$ tem coordenadas $\varphi(p) = (\varphi_1(p), \varphi_2(p), \ldots, \varphi_m(p))$ no sistema φ e coordenadas $\omega(p) = (\omega_1(p), \omega_2(p), \ldots, \omega_m(p))$ relativamente ao sistema ω. A correspondência $(\varphi_1(p), \varphi_2(p), \ldots, \varphi_m(p)) \leftrightarrow (\omega_1(p), \omega_2(p), \ldots, \omega_m(p))$ estabelece um homeomorfismo $\psi_{\varphi\omega} = \omega \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \omega(U \cap V)$ que é chamado mudança de coordenadas. Veja a ilustração A.3.*

Tem-se que: $\psi_{\varphi\varphi} = id_{\varphi(U)}$ e $\psi_{\varphi\omega} = (\psi_{\omega\varphi})^{-1}$

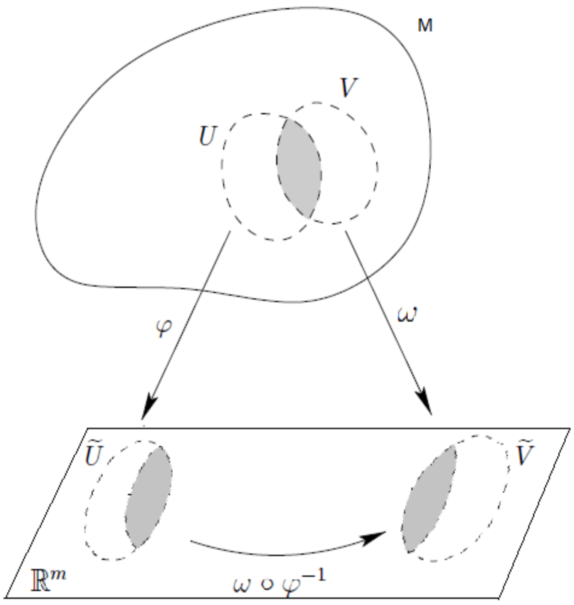

Figura A.3: Mudança de coordenadas

Definição A.6. *Um atlas $\mathcal{U}$ sobre um espaço topológico M diz-se diferenciável de classe C^k $(k \geq 1)$, se todas as mudanças de coordenadas $\psi_{\varphi\omega}$, $\varphi, \omega \in \mathcal{U}$ são aplicações de classe C^k.*

Como $\psi_{\omega\varphi} = (\psi_{\varphi\omega})^{-1}$, segue-se que os $\psi_{\varphi\omega}$ são difeomorfismos de classe C^k. Se escrevermos $\psi_{\varphi\omega} : (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) \to (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$, então o determinante jacobiano $det(\dfrac{\partial \omega_i}{\partial \varphi_j})$ é não nulo em todo ponto de $\varphi(U \cap V)$.

Da mesma maneira que espaços topológicos são considerados os mesmos se eles são homeomorfos, duas variedades diferenciáveis são essencialmente indistinguíveis se elas são difeomorfas. O interesse central da teoria de variedades diferenciáveis está no estudo das propriedades de variedades diferenciáveis que são preservadas por difeomorfismos. Uma boa referência para estudar variedades diferenciáveis é (34, 41). Consideramos por variáveis diferenciáveis, as variedades infinitamente diferenciáveis ou C^∞. Vejamos algumas definições auxiliares para a definição de uma variedade diferenciável.

Definição A.7. *Seja $\mathcal{U}$ um atlas de dimensão m e classe C^k em um espaço topológico M. Um sistema de coordenadas $z : W \to \mathbb{R}^n$ em M diz-se admissível relativamente ao atlas $\mathcal{U}$ se, para todo sistema de coordenadas locais $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$, pertencente a $\mathcal{U}$, com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas $\psi_{\varphi z}$ e $\psi_{z\varphi}$ são de classe C^k.*

Definição A.8. *Um atlas $\mathcal{U}$, de dimensão m e classe C^k, sobre M, diz-se máximo quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a $\mathcal{U}$.*

Definição A.9. *Uma variedade diferenciável, de dimensão m e classe C^k é um par ordenado $(M,\mathcal{U})$ onde M é um espaço topológico de Haussdorf, com base enumerável e $\mathcal{U}$ é um atlas máximo de dimensão m e classe C^k sobre M.*

Uma variedade diferenciável difere de uma variedade topológica, conforme descrito acima, porque a noção de diferenciabilidade existe nela. Toda variedade diferenciável é uma variedade topológica, no entanto, a afirmação inversa não é sempre verdade. Uma variedade diferenciável é uma variedade equipada com sua “estrutura funcional”, como por exemplo, equações paramétricas. A disponibilidade de equações paramétricas nos permite relacionar a variedade a suas variáveis latentes, a saber, seus parâmetros e graus de liberdade (33).

Como exemplos de variedades temos as curvas, superfícies e volume ilustrados no capítulo 4, esfera, o toro, dentre outros.

Vamos definir a dimensionalidade de uma variedade de acordo com (67).

Definição A.10. *Um subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ é chamado uma variedade de dimensionalidade m (em $\mathbb{R}^n$) se, para todo ponto $x \in M$ existe um conjunto aberto U contendo x, um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, e um difeomorfismo $h : U \to V$ tal que:*

$$h(U \cap V) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) = \{y \in V : y^{m+1} = \ldots = y^n = 0\}.$$

Pela definição, temos dois casos extremos: um ponto em $\mathbb{R}^n$, que é uma variedade de dimensão 0 e um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, que é uma variedade de dimensão n. Como exemplo, veja as figuras 2.1 e 2.2 obtidas de (67).

Vamos definir uma variedade de dimensão m com bordo conforme (67).

Definição A.11. *Considere o semi-espaço* $\mathbb{H}^m \subset \mathbb{R}^n$ *definido como* $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m / x_m \geq 0\}$ *Um subconjunto* M *de* $\mathbb{R}^n$ *é uma variedade de dimensão* m *com bordo se para todo ponto* $\mathbf{x} \in M$ *vale uma das seguintes condições:*

- *Existe um conjunto aberto* U *contendo* $\mathbf{x}$*, um conjunto aberto* $V \subset \mathbb{R}^n$*, e um difeomorfismo* $h : U \rightarrow V$ *tal que:*

$$h(U \cap V) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) = \{\mathbf{y} \in V : y^{m+1} = \ldots = y^n = 0\}.$$

- *Existe um conjunto aberto* U *contendo* $\mathbf{x}$*, um conjunto aberto* $V \subset \mathbb{R}^n$ *e um difeomorfismo* $h : U \rightarrow V$ *tal que :*

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{H}^m \times \{0\}) = \{\mathbf{y} \in V : y^m \geq 0 \text{ } e \text{ } y^{m+1} = \ldots = y^n = 0\}$$

  e $h(\mathbf{x})$ *tem a* m*-ésima componente igual a zero.*

É importante observar que ambas as condições anteriores não podem ser válidas para o mesmo $\mathbf{x}$, conforme justificado em (67). Temos ainda que o conjunto de todos os pontos $\mathbf{x} \in M$ para o qual a segunda condição é satisfeita é chamado o bordo de M e é denotado por ∂M. Essa definição não deve ser confundida com o bordo de um conjunto. Um exemplo simples de variedade com bordo é a bola fechada $B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x}\| = 1\}$ com $\partial B^n = S^{n-1}$. A menos que seja declarado, consideraremos o termo "variedade" como sendo "variedade diferenciável sem bordo".

Vamos estudar aplicações diferenciáveis em variedades, isto é, definiremos funções diferenciáveis em variedades, cuja imagem é $\mathbb{R}$ (função de valor real) ou $\mathbb{R}^k$, para algum $k > 1$ (função de valor vetorial). A generalização para aplicações diferenciáveis entre variedades pode ser obtida em (41, 34).

Definição A.12. *Seja* M *uma variedade diferenciável, uma função* $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ *é dita ser diferenciável se, para toda carta diferenciável* (U, φ) *em* M*, a função composta* $f \circ \varphi^{-1}$ *é diferenciável no subconjunto aberto* $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$*.*

Algumas considerações:

- O conjunto de todas funções diferenciáveis de valores reais $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é denotado por $C^\infty(M)$ e constitui um espaço vetorial.
- Pela definição, a diferenciabilidade de f significa que sua composição com todo sistema de coordenadas é diferenciável, no entanto, na prática, basta verificar a diferenciabilidade em cada uma das cartas de algum atlas diferenciável, conforme mostra o lema a seguir.

Lema A.1. *Seja* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *um atlas diferenciável para* M. *Se* $f : M \to \mathbb{R}^k$ *é uma função tal que* $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ *é diferenciável para cada* α *então* f *é diferenciável.*

A demonstração pode ser obtida em (34).

O teorema a seguir dá uma caracterização alternativa de variedades.

Teorema A.2. *Um subconjunto* M *de* $\mathbb{R}^n$ *é uma variedade de dimensão* m *se, e somente se, para cada ponto* $\mathbf{x} \in M$ *existe um conjunto aberto* U *tal que* $\mathbf{x} \in U$, *um conjunto aberto* $W \subset \mathbb{R}^m$, *e uma função diferenciável bijetiva* $f : W \to \mathbb{R}^n$ *tal que:*

- $f(W) = M \cap U$;
- $f'(\mathbf{y})$ *tem posto* m *para cada* $\mathbf{y} \in W$;
- $f^{-1} : f(W) \to W$ *é contínua.*

A função f é chamada um sistema de coordenadas ao redor de $\mathbf{x}$.