

**SALETE SOUZA DE OLIVEIRA**

**INSTABILIDADE PARAMÉTRICA DE COLUNAS**

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia Civil da PUC/RJ como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Paulo Batista Gonçalves

Departamento de Engenharia Civil  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Rio de Janeiro, Março de 1998

## ***Belém-Pará-Brasil***

*Vão destruir o Ver-o-Peso p´ra construir um shopping center, vão derrubar o palacete Pinho p´ra construir um condomínio. Coitada da Cidade Velha, que foi vendida p´ra Holliwood, p´ra ser usada como albergue, no novo filme do Spielberg.*

*Quem quiser venha ver, mas só um de cada vez.  
Não queremos nossos jacarés tropeçando em vocês.*

*A culpa é da mentalidade que foi criada sobre a região, porque que tanta gente teme, Norte não é com M, nossos índios não comem ninguém agora é só hamburger, porque ninguém nos leva a sério, só o nosso minério.*

*Aqui a gente toma guaraná quando não tem Coca-Cola. Chega das coisas da terra que o que é bom vem lá de fora. Transformados até a alma, sem cultura e opinião. O nortista só queria fazer parte da nação.*

*Ah! Chega de mal feitura. Ah! deixa de triste rima. Devolvam a nossa cultura!. Queremos o Norte lá em cima, porque onde já se viu, isso é Belém , isso é Pará, isso é Brasil.*

*Grupo Mosaico de Ravena*

***Ao único Deus, mediante Jesus Cristo, Senhor nosso,  
glória, majestade, império e soberania, antes de  
todas as eras, e agora, e por todos os séculos.***

***A querida mãe Maria de Jesus e aos tios  
Kim Kolstad e Luzia Santos  
com carinho e estima.***

***E também para Suzy, Cintia, Daniel  
e Zezé, os quais são amigos  
e irmãos do coração.***

## **Agradecimentos**

A excelente orientação do ilibado Professor Paulo Batista Gonçalves permeou cada etapa da pesquisa, desde a definição do tema até a interpretação dos resultados. O Professor Paulo é um exemplo de extrema competência e seriedade no que diz respeito a sua profissão e como ser humano é um grande amigo nos momentos difíceis, o Professor Paulo não mede esforços no sentido de sempre auxiliar os seus orientandos na descoberta de seus próprios caminhos.

Os Professores do Departamento de Engenharia Civil da PUC/Rio, são um exemplo de extrema competência profissional.

Os Professores Almir de Morisson Faria e José Perilo da Rosa Neto, foram os grandes responsáveis pelo meu desejo de ingressar na carreira acadêmica.

Os Professores Ronaldson Carneiro, Antonio Malaquias e Peres sempre me incentivaram a trilhar os belos caminhos da pesquisa.

Minha mãe, meus irmãos, tios e primos, sempre me acompanharam neste caminho, e apesar da distância nos deram muita força e carinho.

A UFPa e a CAPES financiou meus estudos através do PICDT.

Durante a realização deste trabalho, foram inúmeras as vezes que obtive a colaboração dos colegas.

Nos problemas matemáticos, foi sempre bom contar com a colaboração do grande amigo Marcelo Goulart. Conversamos sobre as belezas da matemática, esclarecendo juntos vários conceitos importantes para a continuação de nossos trabalhos.

No início deste trabalho, meu conhecimento sobre programação em Fortran era bastante restrito, porém contei com a colaboração atenciosa do amigo Leonardo Bello que não hesitou no auxílio de diversas questões.

O colega Zenon Guzman, sempre visitava minha sala de estudos para conversar sobre o andamento de nossos trabalhos, esclarecendo juntos vários conceitos importantes.

Depois de um dia de trabalho árduo, era sempre bom retornar ao lar e nos valer da companhia de amigos como Alexandre, André, Carlos Vitor, Janaina, Luciano e Yvelyne.

O encontro com amigos, como Karina, Marcelo Valverde, Élcio, Ana Cristina, Givanildo, Grover, Hernan, Humberto, Aellington, Alex Vaca, Marco De La Quintana, Marcos Noronha, Aldo, Bebeto, Glaucia, Craveiro, Maria Tereza, Daniela Carijó, Ciro, Ricardo Hissa, Ricardo Oliveira, Áurea, Claudia Campos, Katri, Stefane, Margareth, Chan,

Cristina, Sidiclei, Claudio, Walter, William, Waldo, Américo e especialmente a amiga Isabella, me trazia grande alegria.

A “máfia” paraense sempre estava presente e era representada pelos amigos Ricardo Alexandre, Giorgiana, Cristiana, Alan, Gerson, Luciana Ericeira, Devaney, Stoessel, Regina Augusta e Alexandre Sampaio.

Expresso aqui minha profunda admiração por amigos que me faziam inúmeras ligações quando eu desaparecia. São eles os meus queridos amigos e irmãos da Igreja Presbiteriana da Gávea, na pessoa do conspícuo amigo Reverendo Marcos Azevedo.

Os amigos da Assembléia de Deus em Belém, na pessoa do Reverendo Firmino da Anunciação Gouveia, me ajudaram chegar até aqui.

A todas essas pessoas agradeço a ajuda, mas não a amizade, porque amizade não se agradece, compartilha-se, mas a lembrança de vossa colaboração estará comigo sempre presente.

Salete Souza de Oliveira

Março, 1998

## Resumo

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver uma formulação e certas estratégias que permitam a análise da perda de estabilidade de colunas esbeltas submetidas a carregamento axial periódico, fenômeno este conhecido como ressonância paramétrica. Uma excitação é dita paramétrica quando aparece nas equações de movimento do sistema na forma de coeficientes variáveis com o tempo - geralmente periódicos - e não como uma não-homogeneidade.

A coluna é descrita pela formulação clássica de Navier. O presente trabalho trata a coluna considerando-se um e três graus de liberdade com ou sem não-linearidades. As equações de movimento são obtidas utilizando-se o princípio de Hamilton através do método de Ritz.

A equação linear (equação de Mathieu) e a equação de Duffing com pequeno amortecimento, são resolvidas de forma aproximada pelo método das múltiplas escalas, revelando a possibilidade de instabilização da posição de equilíbrio em diversas regiões do espaço definido pelos parâmetros de controle. A mesma conclusão é mostrada utilizando-se procedimentos computacionais para a resolução dos sistemas de equações lineares e não-lineares, com ou sem imperfeição geométrica inicial, podendo-se obter assim, a resposta do sistema, planos fase, seções de Poincaré e diagramas de bifurcação.

Mostra-se a partir dos resultados numéricos, que a coluna submetida a cargas axiais harmônicas, pode tanto apresentar soluções com o mesmo período da força excitadora, quanto oscilações subarmônicas e superarmônicas de diversas ordens, além de movimentos caóticos.

## Abstract

The main aim of the present work is to develop a formulation and some strategies for the instability analysis of slender columns under an axial harmonic force this phenomenon is known as parametric resonance. An excitation is said to be parametric if it appears as time-dependent - often periodic - coefficients in the equations governing the motion of the system, and not as an inhomogeneous term.

The column is described by Navier classical formulation. The present work consider the column with one or three degrees of freedom with or without nonlinearities. The equations governing the motion are obtained by the Ritz method.

The linear equation (Mathieu equation) and the Duffing equation with small damping are solved in an approximate way using multiple scales techniques, revealing the possibility of destabilizing the static equilibrium position in certain regions of the control space. A similar conclusion is obtained by employing numerical methods for the solution of linear and nonlinear equation systems with or without initial geometrical imperfections.

This enables one to obtain time response, phase space, projections Poincaré sections and bifurcation diagrams. These numerical results show that the column with nonlinearities and loaded by a periodic longitudinal force can present various solutions with the same period as the forcing and subharmonic e superharmonic oscillations, as well as chaotic motions.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b> .....	X
<b>Lista de Símbolos</b> .....	XVII
<b>Capítulo I – Introdução</b> .....	1
1.1 – Considerações Iniciais .....	2
1.2 - Organização do Texto .....	5
<b>Capítulo II – Formulação</b> .....	8
2.1 – Introdução.....	9
2.2 – Funcional da Viga-Coluna .....	9
2.2.1 – Energia Potencial Total .....	14
2.2.2 – Energia Cinética .....	15
2.3 – Funcional Total .....	16
2.4 – Variáveis Adimensionais .....	16
2.5 – Funcional Final não Dimensional.....	16
2.6 – Efeito da Imperfeição Geométrica .....	17
2.6.1 – Energia Potencial Total .....	20
2.6.2 – Funcional Total .....	20
2.6.3 – Funcional Final não Dimensional .....	21
2.7 – Equações de Movimento .....	22
2.7.1 – Método de Ritz .....	22
2.7.2 – Equações Lineares de Movimento .....	25
2.7.3- Equações Não-Lineares de Movimento .....	26

2.7.3.1- Coluna com Um Grau de Liberdade .....	27
2.7.3.2- Coluna com Três Graus de Liberdade .....	29
<b>Capítulo III – Solução Analítica .....</b>	<b>30</b>
3.1 – Introdução.....	31
3.2 – Caso Linear .....	31
3.3 – Métodos para a Determinação do Diagrama de Strutt .....	33
3.3.1 – Método das Múltiplas Escalas .....	34
3.3.2 – Efeito do Amortecimento .....	41
3.3.3 – Influência das Não-Linearidades .....	47
<b>Capítulo IV – Procedimento Computacional .....</b>	<b>59</b>
4.1 – Introdução.....	60
4.2 – Resposta do Sistema e Espaço Fase .....	60
4.3 – Mapeamento de Poincaré .....	62
4.4 – Procedimento para o traçado do Diagrama de Bifurcação, Analisando a Resposta no Tempo .....	63
4.5 – Valores de Transição .....	64
<b>Capítulo V – Análise dos Resultados .....</b>	<b>66</b>
5.1 – Dados de Entrada do Programa .....	67
5.2 – Diagramas de Estabilidade da Coluna .....	68
5.3 – Comparação das Soluções Numérica e Analítica das Curvas de Transição .....	70
5.4 – Influência do Amortecimento Viscoso .....	75
5.5 – Diagramas de Bifurcação, Respostas no Tempo e Planos Fase .....	75



5.6 – Efeito da Imperfeição Geométrica Inicial .....	100
5.7 – Influência do Número de Graus de Liberdade na Resposta da Coluna .....	110
5.8 – Análise da Resposta da Coluna para $P_o=1.1P_{cr}$ .....	115
 Capítulo VI – <b>Conclusões e Sugestões</b> .....	126
 <b>Referências Bibliográficas</b> .....	130
 Apêndice A – <b>Funcional e Equações Não-Lineares da Coluna com Três Graus de Liberdade</b> .....	134
Apêndice B – <b>Funcional e Equações Não-Lineares da Coluna com Imperfeição Geométrica Inicial</b> .....	137

## Lista de Figuras

### Capítulo II

Figura 2.1- Coluna biarticulada com carregamento paramétrico.	9
Figura 2.2 – Coluna Deformada	11
Figura 2.3 – Elemento infinitesimal indeformado	11
Figura 2.4 – Coluna com imperfeição geométrica	17

### Capítulo III

Figura 3.1 – Regiões estáveis e instáveis(Hachuradas) no plano $(\mathbf{d}-\mathbf{e})$ para a equação de Mathieu. [25]	32
Figura 3.2 – Efeito do amortecimento viscoso sobre a estabilidade das soluções da equação de Mathieu.	48
Figura 3.3 - Seção transversal da coluna.	52
Figura 3.4 –Curvas de resposta, calculadas com $P_0=0.6P_{cr}$ .	54
Figura 3.5 – Curvas de resposta para diferentes níveis de $\mathbf{d}_2$ .	56
Figura 3.6 – Relação entre a amplitude da resposta e a amplitude da excitação	56

### Capítulo IV

Figura 4.1 – Resposta e plano fase da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades.	61
Figura 4.2 - Seções de Poincaré. [35]	61
Figura 4.3 - Diagrama de Poincaré para a coluna com um grau de liberdade e não linearidades	64
Figura 4.4 – Diagrama de bifurcação para a coluna com um grau de liberdade e não linearidades.	65

Figura 4.5 – Curvas de transição para a coluna com um grau de liberdade e não linearidades.	65
---	----

## Capítulo V

Figura 5.1– Dimensões da Coluna.	67
Figura 5.2- Diagrama de estabilidade da coluna com um grau de liberdade e não linearidades. Amortecimento viscoso $c=0.3$ .	69
Figura 5.3- Curvas de transição da coluna na primeira e segunda região de ressonância, para o amortecimento viscoso $c=0.01$ .	72
Figura 5.4- Curvas de transição da coluna na primeira e segunda região de ressonância, para o amortecimento viscoso $c=0.1$ .	72
Figura 5.5- Curvas de transição da coluna na primeira e segunda região de ressonância, para o amortecimento viscoso $c=0.03$ .	73
Figura 5.6- Curvas de transição da coluna na primeira e segunda região de ressonância, para o amortecimento viscoso $c=0.3$ .	73
Figura 5.7- Influência do amortecimento sobre as curvas de transição.	74
Figura 5.8- Regiões escolhidas para o traçado dos diagramas de bifurcação.	74
Figura 5.9- Diagrama de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades, com o parâmetro de amplitude, $d_2 = 4$ .	77
Figura 5.10- Resposta no tempo e espaço fase do sistema no ponto 0 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9	77
Figura 5.11- Resposta no tempo do sistema no ponto 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9.	78
Figura 5.12- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9.	78

Figura 5.13- Resposta no tempo do sistema no ponto 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9, para o caso linear	79
Figura 5.14- Resposta no tempo do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9.	80
Figura 5.15- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9	80
Figura 5.16- Resposta no tempo do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9.	81
Figura 5.17- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9.	81
Figura 5.18- Diagrama de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não linearidades, com o parâmetro da frequência da excitação, $\frac{W}{w} = 1$ .	83
Figura 5.19- Resposta no tempo do sistema no ponto 0 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.	84
Figura 5.20- Resposta no tempo do sistema no ponto 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.	84
Figura 5.21- Resposta no tempo do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.	85
Figura 5.22- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.	85
Figura 5.23- Resposta no tempo do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.	86
Figura 5.24- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18	86
Figura 5.25- Resposta no tempo do sistema no ponto 4 do diagrama de bifurcação	

da Figura 5.18.	87
Figura 5.26- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 4 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.	87
Figura 5.27- Diagrama de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não linearidades, com o parâmetro da amplitude da excitação, $d_2 = 3$ .	89
Figura 5.28- Resposta no tempo do sistema no ponto 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.27.	89
Figura 5.29- Resposta no tempo do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.27.	90
Figura 5.30- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.27.	91
Figura 5.31- Resposta no tempo do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.27.	91
Figura 5.32- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.27.	91
Figura 5.33- Resposta no tempo do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.27.	92
Figura 5.34- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 4 do diagrama de bifurcação da Figura 5.27	92
Figura 5.35- Diagrama de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não linearidades, com o parâmetro da frequência da excitação, $W/w = 2$ .	95
Figura 5.36- Diagrama de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não linearidades, com o parâmetro da amplitude da excitação, $d_2 = 6$ .	95
Figura 5.37- Resposta no tempo do sistema no ponto 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.36.	96

Figura 5.38- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.36	96
Figura 5.39- Resposta no tempo do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.36.	97
Figura 5.40- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.36	97
Figura 5.41- Resposta no tempo do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.36.	98
Figura 5.42- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.36	98
Figura 5.43- Resposta no tempo do sistema no ponto 4 do diagrama de bifurcação da Figura 5.36.	99
Figura 5.44- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 4 do diagrama de bifurcação da Figura 5.36	99
Figura 5.45- Influência das imperfeições geométricas na instabilidade paramétrica da coluna, com parâmetro de amplitude do carregamento, $\mathbf{d}_2 = 3$	101
Figura 5.46- Resposta no tempo do sistema no ponto 1 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial, $f_{o1}=0$	101
Figura 5.47- Resposta no tempo do sistema no ponto 1 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial, $f_{o1}=0.01$ .	101
Figura 5.48- Resposta no tempo do sistema no ponto 1 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial, $f_{o1}=0.02$ .	102
Figura 5.49- Resposta no tempo do sistema no ponto 2 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial, $f_{o1}=0$ .	104
Figura 5.50- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 2 da Figura 5.45,	

considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial, $f_{01}=0$ .	104
Figura 5.51- Resposta no tempo do sistema no ponto 2 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial, $f_{01}=0.01$	105
Figura 5.52- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 2 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial, $f_{01}=0.01$ .	105
Figura 5.53- Resposta no tempo do sistema no ponto 2 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial, $f_{01}=0.02$ .	106
Figura 5.54- Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.45.	106
Figura 5.55- Influência das imperfeições geométricas na instabilidade paramétrica da coluna, com parâmetro da frequência do carregamento, $\frac{W}{w} = 2$	107
Figura 5.56- Diagrama de bifurcação da coluna com imperfeição geométrica inicial, $f_{01}=0.001$ . O parâmetro de amplitude, $d_2 = 4$ .	108
Figura 5.57- Diagrama de bifurcação da coluna com imperfeição geométrica inicial, $f_{01}=0.01$ . O parâmetro da frequência da excitação, $\frac{W}{w} = 1$ .	108
Figura 5.58- Diagrama de bifurcação da coluna com imperfeição geométrica inicial, $f_{01}=0.01$ . O parâmetro de amplitude, $d_2 = 3$ .	109
Figura 5.59- Diagrama de bifurcação da coluna com imperfeição geométrica inicial, $f_{01}=0.01$ . Parâmetro de frequência da excitação, $\frac{W}{w} = 2$ .	109
Figura 5.60- Diagramas de bifurcação da coluna com três graus de liberdade e não-linearidades, parâmetro de amplitude, $d_2 = 4$ .	111
Figura 5.61- Diagramas de bifurcação para a coluna com três graus de liberdade e não-linearidades. O parâmetro da frequência da excitação, $\frac{W}{w} = 1$ .	112
Figura 5.62- Diagramas de bifurcação da coluna com três graus de liberdade e	

não-linearidades, parâmetro de amplitude, $d_2 = 3$ .	113
Figura 5.63- Diagramas de bifurcação para a coluna com três graus de liberdade e não-linearidades. O parâmetro da frequência da excitação, $\frac{W}{w} = 2$ .	114
Figura 5.64- Caminho pós-crítico da coluna e resposta do sistema para dois conjuntos de condições iniciais.	116
Figura 5.65- Diagramas de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades. Parâmetro da frequência da excitação, $W = 29.47 \frac{rad}{seg}$ e a parcela constante do carregamento axial $P_o = 1.1P_{cr}$ .	116
Figura 5.66- Resposta no tempo, espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.64.	117
Figura 5.67- Resposta no tempo, espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.64.	118
Figura 5.68- Resposta no tempo, espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.64.	119
Figura 5.69- Resposta no tempo, espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 4 do diagrama de bifurcação da Figura 5.64.	120
Figura 5.70- Resposta no tempo e espaço fase do sistema na região 5 do diagrama de bifurcação da Figura 5.64.	121
Figura 5.71- Resposta no tempo, espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 6 do diagrama de bifurcação da Figura 5.64.	121
Figura 5.72- Resposta no tempo, espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 7 do diagrama de bifurcação da Figura 5.64.	122
Figura 5.73- Resposta no tempo, espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 8 do diagrama de bifurcação da Figura 5.64.	123



## Lista de Símbolos

### - Letras romanas maiúsculas

$A_s$	Área da seção transversal
$A$	Coefficiente da solução da equação de Mathieu
$\bar{A}$	Complexo conjugado de $A$
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$f_{ok}$	Amplitudes modais
$H$	Intervalo de tempo
$I$	Momento de Inércia
$K$	Rigidez da mola
$L$	Comprimento da coluna indeformada
$L_p$	Função de Lagrange
$P_{cr}$	Carga crítica de Euler
$P_o$	Parcela constante do carregamento axial
$P_t$	Amplitude do carregamento variável
$P(t)$	Parcela variável do carregamento axial
$Q_i$	Funções de força generalizada
$\bar{R}$	Raio de curvatura
$\bar{R}_o$	Raio de curvatura da estrutura indeformada
$T$	Energia cinética
$T_i$	Escalas de tempo
$T_f$	Período da excitação
$T_r$	Período da resposta do sistema
$U$	Energia interna de deformação

$U_f$	Energia de flexão
$U_k$	Energia de deformação da mola
$U_m$	Energia de membrana
$U_o$	Energia de deformação específica da coluna
$V$	Volume
$V_p$	Potencial das cargas externas
$W$	Deslocamento lateral da coluna
$W_t$	Deslocamento lateral total medido a partir da configuração da coluna perfeita indeformada
$W_o$	Imperfeição lateral inicial

**- Letras romanas minúsculas**

$a_w = \epsilon b$	Amplitude da oscilação levando em consideração as não-linearidades
$b$	Menor dimensão da seção transversal
$b_e$	Amplitude do regime estacionário levando em consideração as não-linearidades
$b_i$	amplitude de $B_i$
$c$	Amortecimento viscoso
$\hat{c}$	Expansão do amortecimento viscoso
$f_{mn}$	Respostas da solução analítica, sendo $m$ o grau de liberdade considerado e $n$ o número de termos na expansão uniforme
$f_i(t)$	Amplitudes da resposta
$\dot{f}_i(t)$	Velocidade
$\ddot{f}_i(t)$	Aceleração
$f_{oi}$	Amplitude da imperfeição geométrica inicial

$f(t, x, y)$	Função representativa da velocidade
$g(t, x, y)$	Função representativa do deslocamento
$h$	Maior dimensão da seção transversal
$k$	Número de termos necessários para descrever as imperfeições da coluna
$n$	Número de coordenadas necessárias para a descrição do campo de deslocamentos
$q$	coordenadas generalizadas
$\dot{q}$	Velocidades generalizadas
$s$	Coordenada ao longo do eixo deformado
$t$	Tempo
$t_0$	Tempo inicial
$t_f$	Tempo final
$u$	Deslocamento axial
$v$	Deslocamento na direção $z$
$x$	Coordenada axial
$x_0$	Condições iniciais de deslocamento
$y_0$	Condições iniciais de velocidade
$y$	Coordenada lateral
$w$	Parâmetro adimensional do deslocamento lateral da coluna

**- Letras gregas**

$\chi$	Variação da curvatura
$\chi_0$	Variação da curvatura, considerando a imperfeição geométrica inicial
$\chi_t$	Variação total da curvatura
$\Delta$	Encurtamento da coluna
$\delta$	Parâmetro da equação de Mathieu associado a rigidez do sistema

$\delta_1$	Parâmetro adimensional da parcela constante do carregamento axial
$\delta_2$	Parâmetro adimensional da amplitude da parcela variável do carregamento axial
$\hat{\delta}_2$	Constante na expansão de $\delta_2$
$\delta W_{nc}$	Trabalho das funções externas não conservativas
$\varepsilon$	Parâmetro da equação de Mathieu que relaciona a amplitude do carregamento variável
$\varepsilon_o$	Deformação específica
$\varepsilon_{xo}$	Deformação específica da linha neutra
$\varepsilon_{xx}$	Deformação na direção x
$\phi$	Ângulo formado entre o eixo x e o eixo da viga após a deformação
$\eta$	Parâmetro adimensional da rigidez da mola
$\Pi_p$	Energia potencial total
$\rho$	Peso específico da coluna por unidade de comprimento
$\sigma$	Parâmetro de assintonia
$\sigma_o$	Tensão
$\tau$	Parâmetro adimensional do peso específico da coluna
$\omega$	Frequência natural do sistema
$\omega_{om}$	Frequência natural do sistema, no caso de ser nula a parcela constante do carregamento axial
$\omega_m$	Frequência natural do sistema considerando a parcela constante do carregamento axial
$\Omega$	Frequência da excitação
$\xi$	Parâmetro adimensional da coordenada axial

# Capítulo I

## Introdução

## 1.1- Considerações Iniciais

A instabilidade paramétrica de elementos estruturais esbeltos é um problema clássico da teoria da estabilidade. Em função de sua importância em vários ramos da engenharia, freqüentemente são encontrados na literatura trabalhos de pesquisa nesta área. Entretanto a maioria dos trabalhos se restringem a analisar as equações linearizadas (Equações de Mathieu) que descrevem o problema. Pouco se conhece sobre a influência de termos não-lineares no comportamento global e estabilidade do sistema.

A instabilidade paramétrica está relacionada com o termo excitação paramétrica, o qual designa um caso particular de vibração forçada em que a solicitação figura na equação de movimento não como uma não-homogeneidade, mas na forma de coeficientes que variam com o tempo, sendo estes geralmente periódicos. Os sistemas submetidos a este tipo de ação, mesmo quando são governados por equações diferenciais homogêneas e lineares, podem exibir certos padrões de resposta semelhantes ao que se espera de sistemas não-lineares.

Em contraste com o caso de uma excitação externa na qual uma pequena excitação não pode produzir uma grande resposta, a menos que a freqüência da excitação esteja próxima de uma das freqüências naturais do sistema (ressonância primária), uma pequena excitação paramétrica pode produzir uma resposta de grande amplitude quando a freqüência da excitação é aproximadamente duas vezes uma das freqüências naturais do sistema (ressonância paramétrica principal). Pode também ocorrer ressonância paramétrica quando a freqüência da excitação for próxima da freqüência natural e de certos submúltiplos desta freqüência.

As primeiras observações do fenômeno de ressonância paramétrica são atribuídas a Faraday. De acordo com [25], ele constatou que as ondas que se formam na superfície de um

líquido dentro de um cilindro submetido a excitação vertical exibem o dobro do período dessa excitação. Melde [24] obteve um resultado semelhante ao estudar as vibrações em um fio preso por uma extremidade a um suporte rígido e na outra a um diapásão de baixa frequência. Em determinadas condições, a excitação longitudinal introduzida pelo diapásão provocava o aparecimento de vibrações transversais no fio, com a metade da frequência da solicitação. A base teórica para essas observações foi apresentada por Strutt [34].

Stephenson [32] foi o primeiro a observar que sob a ação de um carregamento periódico, uma coluna poderia permanecer estável mesmo quando a parcela constante da carga fosse da ordem de duas vezes o valor Crítico de Euler. Beliaev [6] analisou a resposta de uma coluna reta biarticulada para uma carga periódica axial da forma  $p(t) = p_o + p_1 \cdot \cos(\Omega t)$ , e mostrou que a equação do movimento discretizada é uma equação de Mathieu, determinando assim a frequência de ressonância paramétrica principal para a coluna. Ou seja, ele notou que a coluna exibia fortes vibrações laterais quando a frequência da solicitação longitudinal era aproximadamente o dobro da frequência natural do movimento transversal.

Até certo ponto este resultado surpreende, porque além de se observarem vibrações numa direção perpendicular à solicitação, a relação de frequências não é aquela da ressonância nos sistemas lineares usuais. Por outro lado, não é difícil entender o porque de tal relação de frequências, basta notar que a frequência de oscilação vertical do ponto de aplicação do carregamento é o dobro da frequência do movimento lateral. Assim, na ressonância, o trabalho realizado pelo esforço externo é sempre positivo e a energia do sistema aumenta continuamente, até o ponto em que as forças dissipativas estabeleçam o equilíbrio energético.

Excitações paramétricas são freqüentes em muitas aplicações da engenharia. Nos sistemas mecânicos elásticos, em particular, o estudo das vibrações induzidas por carregamento paramétrico pulsante foi um dos problemas que motivou o desenvolvimento da chamada Teoria da Estabilidade Dinâmica de Sistemas Elásticos.

Krylov e Bogoliubov [21] utilizaram o procedimento de Galerkin para determinar a resposta dinâmica da coluna sob um carregamento axial periódico com diferentes condições de contorno, Chelomei [12] estudou a ressonância paramétrica de uma coluna. McLachlan [23] estudou a teoria e aplicações das funções de Mathieu. Arscott [3], Erugin [16] e Yakubovich e Starzhinskii [38] estudaram as equações diferenciais com coeficientes periódicos.

R. L. Carlson, H. C. T. Lo e R. P. Briley [9] estudaram a excitação paramétrica de uma barra tensionada com uma determinada curvatura inicial. J. S. Huang e L. H. Hung [18] estudaram a estabilidade dinâmica de uma viga simplesmente apoiada sob um carregamento axial periódico. A resposta na ressonância paramétrica principal de um sistema com um grau de liberdade, considerando as não-linearidades quadráticas e cúbicas foi analisada por L. D. Zavodney, A. H. Nayfeh e N. E. Sanchez [39].

M. P. Cartmell [10] estudou as equações de movimento para uma viga monoengastada excitada parametricamente. K. R. Asfar e K. K. Masoud [4] analisaram o efeito do amortecimento em sistemas com um grau de liberdade excitados parametricamente. C. C. Chen e M. K. Yeh [13] investigaram analiticamente a instabilidade paramétrica de uma coluna monoengastada sob um carregamento periódico na direção da tangente ao topo da coluna.

O livro do Stoker [33] apresenta um tratamento detalhado, usando técnicas de perturbação, sobre vibrações não-lineares em sistemas mecânicos e elétricos incluindo ressonância paramétrica.



Duas referências básicas sobre a estabilidade dinâmica de sistemas elásticos e a instabilidade paramétrica em particular, estão nos livros do Bolotin [7], o qual discutiu a influência da ressonância paramétrica sobre a estabilidade dinâmica de sistemas elásticos, e o livro de Nayfeh e T.Mook [25] que é um dos mais recentes tratando sobre o caso da instabilidade paramétrica incluindo ainda o estudo de métodos de perturbação e o estudo de sistemas com vários graus de liberdade.

## 1.2- Organização do Texto

Este trabalho se insere na linha de pesquisa de Instabilidade e Dinâmica das Estruturas da PUC-Rio, dentro do projeto de pesquisa que estuda as vibrações não-lineares e caóticas de elementos estruturais esbeltos [19,20,22,28].

O presente trabalho analisa a coluna considerando-se a mesma com um e três graus de liberdade, para os casos linear ou não-linear e levemente amortecidos. Além disso admite-se que o carregamento axial, responsável pelo aparecimento dos coeficientes variáveis com o tempo, seja sempre periódico, e que o amortecimento seja do tipo viscoso.

No Capítulo II são deduzidos, utilizando-se programas de álgebra simbólica como Maple V Release for Windows 95, os funcionais de energia e as equações de movimento para uma coluna biarticulada sob carregamento axial, considerando-se os casos linear e não-linear com um e três graus de liberdade, incluindo-se ainda o efeito da imperfeição geométrica inicial. As informações daí decorrentes são aproveitadas nos capítulos que seguem. Cabe ressaltar que pouco se conhece sobre os efeitos de imperfeições geométricas na instabilidade paramétrica de elementos estruturais esbeltos.

Sabe-se que, de um modo geral, não existem soluções analíticas exatas para as equações diferenciais não-lineares com coeficientes periódicos. No Capítulo III foram empregados métodos de perturbação para a obtenção de soluções aproximadas para este problema. A equação não-linear estudada foi a equação que considera apenas as não-linearidades cúbicas relacionadas à rigidez do sistema, esta equação é conhecida como a equação de Duffing. Como a equação encontrada afasta-se muito pouco do modelo linear, foi permitido o emprego dos chamados métodos de perturbação, os quais oferecem soluções analíticas aproximadas, válidas “na vizinhança” de uma solução conhecida. Para isto adotou-se, o método das múltiplas escalas como mostrado em [25].

No Capítulo IV, mostra-se as estratégias computacionais utilizadas para a solução do sistema de equações diferenciais, implementando-se ainda rotinas para o traçado das seções de Poincaré, Diagramas de Bifurcação e obtenção dos valores de transição da estabilidade para a instabilidade.

No Capítulo V, são apresentados os resultados da implementação computacional, mostrando-se que o diagrama de estabilidade da coluna é o mesmo, quando se considera um ou mais graus de liberdade. Compara-se a solução analítica da equação de Mathieu com amortecimento estudada no Capítulo III com a solução numérica para o mesmo caso. Analisa-se também os diagramas de bifurcação, respostas no tempo, planos fase e diagramas de Poincaré para diversos casos, considerando-se ou não o efeito da imperfeição geométrica inicial.

Finalmente, no Capítulo VI são apresentadas as principais conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

Em seguida às conclusões, que são apresentadas no Capítulo VI, dois anexos mostram os funcionais e as equações de movimento para o modelo da coluna com três graus de liberdade e não-linearidades, com ou sem imperfeição geométrica.

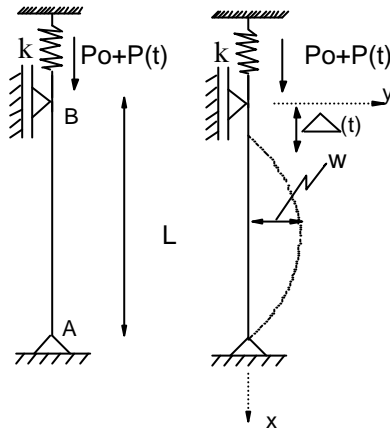
## Capítulo II

---

### Formulação

## 2.1- Introdução

São apresentados neste capítulo os funcionais de energia e as equações de movimento para uma coluna biarticulada sob carregamento axial como mostra a Figura 2.1.



**Figura 2.1-** Coluna biarticulada com carregamento paramétrico

A função de Lagrange é expressa pela seguinte equação

$$L_p = T - \Pi_p \quad (2.1)$$

onde  $T$  é a energia cinética, que é função das coordenadas e velocidades generalizadas, e  $\Pi_p$  é a energia potencial total, que depende apenas das coordenadas generalizadas.

A função de Lagrange é do tipo

$$L_p = L_p(q, \dot{q}, t) \quad (2.2)$$

onde  $q$  e  $\dot{q}$  são as coordenadas e velocidades generalizadas, respectivamente.

## 2.2 - Funcional da Viga-Coluna

A energia potencial total de uma estrutura é dada pela seguinte expressão

$$\Pi_p = U + V_p \quad (2.3)$$

onde  $V_p$  é o potencial das cargas externas e  $U$  é a energia interna de deformação da estrutura.

Considerando-se o material elástico e linear, a energia de deformação específica da coluna é calculada pela seguinte expressão

$$U_o = \int_0^e \mathbf{s}_o d\mathbf{e} = \frac{E\mathbf{e}^2}{2} \quad (2.4)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade da coluna e  $\epsilon$ , a deformação específica.

A energia de deformação da coluna é dada por

$$U = \int_V U_o dV = \frac{1}{2} \int_V E\epsilon^2 dV \quad (2.5)$$

A deformação na direção  $x$  é dada pela expressão

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{xo} + y\chi \quad (2.6)$$

onde  $\epsilon_{xo}$  é a deformação específica da linha neutra e  $\chi$ , a mudança de curvatura. O deslocamento translacional na direção  $y$  é simplesmente  $W(x)$ . A coluna foi descrita pela formulação clássica de Navier, e, assim, todos os outros componentes são desprezados no cálculo da energia interna de deformação.

Substituindo-se (2.6) em (2.5) e sabendo-se que o momento estático  $\int_{A_s} y dA_s = 0$  e

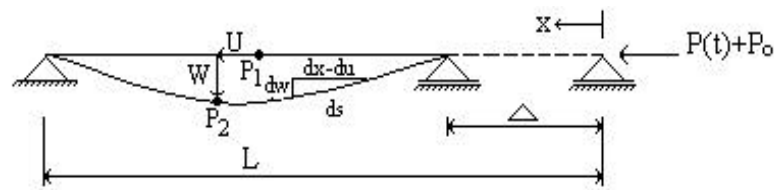
$\int_{A_s} y^2 dA_s = I$ , tem-se que a energia interna de deformação fica representada pelo somatório da

energia de membrana,  $U_m$ , mais a energia de flexão,  $U_f$ , podendo ser expressa como

$$U = U_m + U_f = \frac{1}{2} \int_0^L EA_s \epsilon_{xo}^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx \quad (2.7)$$

Não se levando em consideração a deformação axial,  $\varepsilon_{x0}$ , hipótese adotada na teoria inextensional de vigas [5,15], a única parcela da energia interna considerada é a energia de flexão da viga, a saber

$$U = U_f = \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx \quad (2.8)$$



**Figura 2.2-** Coluna deformada.

Considerando a viga-coluna mostrada na Figura 2.2, tem-se que o deslocamento de um ponto  $P_1$  para um ponto  $P_2$  pode ser representado por um vetor de deslocamentos que é decomposto em duas componentes, um deslocamento axial,  $u$ , e um deslocamento lateral,  $W$ . Considerando que a linha neutra da estrutura é inextensível, o comprimento  $L$  da estrutura indeformada é o mesmo após a sua deformação. Assim, tem-se que o comprimento do elemento linear indeformado  $dx$  é igual ao elemento curvo  $ds$ .



**Figura 2.3-** Elemento infinitesimal indeformado.

Fazendo-se uso da geometria diferencial, pode-se dizer que o elemento da Figura (2.3.a) é, no limite, idêntico ao elemento da Figura (2.3.b). Assim pode-se escrever as seguintes relações:

$$\sin \phi = \frac{dW}{ds} = \frac{dW}{dx} = W_{,x} \quad (2.9)$$

onde  $\phi$  é o ângulo formado entre o eixo  $x$  e o eixo da viga após a deformação. Portanto,

$\phi = \sin^{-1}(W_{,x})$  e, de acordo com [15], a curvatura do eixo deformado é dado por:

$$\frac{1}{\bar{R}} = \phi_{,x} = \sin^{-1}(W_{,x})_{,x} = \frac{W_{,xx}}{(1 - W_{,x}^2)^{3/2}} \quad (2.10)$$

onde  $\bar{R}$  é o raio de curvatura.

Sabe-se que o raio de curvatura da estrutura indeformada é

$$\frac{1}{\bar{R}_0} = \frac{1}{\alpha} = 0 \quad (2.11)$$

e assim tem-se que a variação de curvatura é

$$\chi = \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{\bar{R}_0} = \frac{W_{,xx}}{(1 - W_{,x}^2)^{3/2}} \quad (2.12)$$

Expandindo-se (2.12) em séries de Taylor, e restando-se em  $W$  todos os termos até a quarta ordem chega-se a

$$\chi = W_{,xx} \left[ 1 + \frac{1}{2} W_{,x}^2 \right] \quad (2.13)$$

Substituindo-se (2.13) em (2.8) tem-se que a energia de flexão é dada por:

$$U \cong \int_0^L \frac{1}{2} EI W_{,xx}^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} W_{,x}^2 \right]^2 dx \cong \int_0^L \frac{1}{2} EI \left( W_{,xx}^2 + W_{,xx}^2 W_{,x}^2 + \frac{1}{4} W_{,xx}^2 W_{,x}^4 \right) dx \quad (2.14)$$

De acordo com [15], esta aproximação é suficiente para descrever com exatidão o caminho pós-crítico da coluna, mesmo na região de grandes deslocamentos laterais.



Em virtude do modelo adotado, tem-se que levar em consideração a energia de deformação da mola, que para uma mola linear é dada por

$$U_k = \frac{K\Delta^2}{2} \quad (2.15)$$

onde  $K$  é a rigidez da mola e  $\Delta$  é o encurtamento da coluna que pode ser calculado em função do vetor deslocamento. Pela figura (2.3.b) e usando o teorema de Pitágoras tem-se

$$(ds)^2 = (dx - du)^2 + (dW)^2 \quad (2.16)$$

Como  $ds=dx$  e dividindo (2.16) por  $(dx)^2$ , obtém-se

$$1 = (1 - u_{,x})^2 + W_{,x}^2 \quad (2.17)$$

que resulta em

$$1 - u_{,x} = \sqrt{(1 - W_{,x}^2)} \quad (2.18)$$

ou

$$du = \left[ 1 - (1 - W_{,x}^2)^{1/2} \right] dx \quad (2.19)$$

Integrando os dois lados de (2.19), verifica-se que a variação de comprimento da coluna,  $\Delta$ , é dado por

$$\Delta = \int_0^L du = \int_0^L \left[ 1 - (1 - W_{,x}^2)^{1/2} \right] dx \quad (2.20)$$

Expandindo-se o termo  $(1 - W_{,x}^2)^{1/2}$  de (2.20) até a quarta ordem em série de Taylor, como se fez com a curvatura, tem-se que

$$\Delta = \int_0^L \left( \frac{1}{2} W_{,x}^2 + \frac{1}{8} W_{,x}^4 \right) dx \quad (2.21)$$

Substituindo-se (2.21) em (2.15), a energia de deformação da mola fica

$$U_k = \frac{K}{2} \left[ \int_0^L \left( \frac{1}{2} W_{,x}^2 + \frac{1}{8} W_{,x}^4 \right) dx \right]^2 \quad (2.22)$$

A mola foi introduzida no modelo para que se possa representar de forma conveniente certos mecanismos de aplicação de carga usados na prática.

O potencial das cargas externas é dado pelo produto da carga,  $(P_o + P(t))$ , e o encurtamento na extremidade da estrutura,  $\Delta$ , podendo ser expresso como

$$V_p = (P_o + P(t))\Delta \quad (2.23)$$

onde  $P_o$  é a parcela constante do carregamento axial e  $P(t)$  é a parcela dependente do tempo.

Substituindo-se o valor de  $\Delta$  em (2.23) e verificando que o deslocamento é realizado no sentido contrário ao das forças, o potencial das cargas externas fica

$$V_p = - \int_0^L (P_o + P(t)) \left[ \frac{1}{2} W_{,x}^2 + \frac{1}{8} W_{,x}^4 \right] dx \quad (2.24)$$

### 2.2.1 - Energia Potencial Total

Usando (2.14), (2.22) e (2.24), chega-se à seguinte expressão para a energia potencial total da coluna:

$$\begin{aligned} \Pi_p = & \int_0^L \frac{1}{2} EI \left( W_{,xx}^2 + W_{,xx}^2 W_{,x}^2 + \frac{1}{4} W_{,xx}^2 W_{,x}^4 \right) dx \\ & - \int_0^L \left[ (P_o + P(t)) \left( \frac{1}{2} W_{,x}^2 + \frac{1}{8} W_{,x}^4 \right) \right] dx \\ & + \frac{K}{2} \left[ \int_0^L \left( \frac{1}{2} W_{,x}^2 + \frac{1}{8} W_{,x}^4 \right) dx \right]^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

### 2.2.2 - Energia Cinética

Para se ter a função de Lagrange, equação (2.1), basta determinar agora a energia cinética  $T$ .

A energia cinética de um elemento infinitesimal de viga é

$$T_{el} = \frac{\rho V^2}{2} \quad (2.26)$$

onde [17],

$$V^2 = \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{W}^2 = \left( \dot{u} - y \dot{W}_{,x} \right)^2 + \dot{W}^2 \quad (2.27)$$

Integrando-se (2.26) no volume obtém-se a energia cinética da coluna que é dada por

$$T = \int_0^L \frac{\rho A_s}{2} \dot{W}^2 dx + \int_0^L \frac{\rho A_s}{2} \dot{u}^2 dx + \int_0^L \frac{\rho I}{2} \dot{W}_{,x}^2 dx \quad (2.28)$$

onde  $\rho$  é o peso específico por unidade de comprimento.

O primeiro, o segundo e o terceiro termo em 2.28 são, respectivamente, a inércia de translação na direção transversal ao eixo da viga, a inércia de translação na direção longitudinal e a inércia à rotação da seção transversal.

De acordo com [5,15], para um elemento de viga esbelta, geralmente se considera apenas o efeito da inércia à translação na direção transversal ao eixo da viga. Neste caso, tem-se que a energia cinética é dada por

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A_s \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.29)$$

## 2.3 - Funcional Total

De acordo com (2.1) e fazendo uso das expressões (2.25) e (2.29), obtém-se a função de Lagrange, para colunas esbeltas.

$$L_p = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A_s \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} EI \int_0^L \left( W_{,xx}^2 + W_{,xx}^2 W_{,x}^2 + \frac{1}{4} W_{,xx}^2 W_{,x}^4 \right) dx - \frac{K}{2} \left[ \int_0^L \left( \frac{1}{2} W_{,x}^2 + \frac{1}{8} W_{,x}^4 \right) dx \right]^2 + \int_0^L \left[ (P_o + P(t)) \left( \frac{1}{2} W_{,x}^2 + \frac{1}{8} W_{,x}^4 \right) \right] dx \quad (2.30)$$

Aqui e ao longo de toda a tese a parcela periódica do carregamento axial é tomada como uma função harmônica,  $P(t) = P_t \cos(\Omega t)$ , onde  $\Omega$  é a frequência da excitação e  $P_t$ , sua amplitude.

## 2.4 - Variáveis Adimensionais

Quando se quer realizar uma análise paramétrica, é importante que a mesma seja realizada com eficiência, para isto serão feitas as seguintes mudanças de variáveis e escolhidos os seguintes parâmetros adimensionais.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L} & 0 \leq \xi \leq 1 & \quad w = \frac{W}{L} & \quad \tau = \frac{\rho A_s L^4}{EI} \\ \eta &= \frac{KL^3}{EI} & \delta_1 = \frac{P_o L^2}{EI} & \quad \delta_2 = \frac{P_t L^2}{EI} \end{aligned} \quad (2.31)$$

## 2.5 - Funcional Final Não-Dimensional

Usando-se as expressões (2.31), chega-se ao seguinte funcional

$$\begin{aligned}
 L_p = & \int_0^1 \frac{1}{2} \tau w_{,t}^2 d\xi - \frac{1}{2} \int_0^1 w_{,\xi\xi}^2 d\xi - \frac{1}{2} \int_0^1 w_{,\xi\xi}^2 w_{,\xi}^2 d\xi - \frac{1}{8} \int_0^1 w_{,\xi\xi}^2 w_{,\xi}^4 d\xi \\
 & - \frac{1}{2} \eta \left[ \int_0^1 \left( \frac{1}{2} w_{,\xi}^2 + \frac{1}{8} w_{,\xi}^4 \right) d\xi \right]^2 + (\delta_1 + \delta_2 \cos(\Omega t)) \int_0^1 \frac{1}{2} w_{,\xi}^2 d\xi \\
 & + (\delta_1 + \delta_2 \cos(\Omega t)) \int_0^1 \frac{1}{8} w_{,\xi}^4 d\xi
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

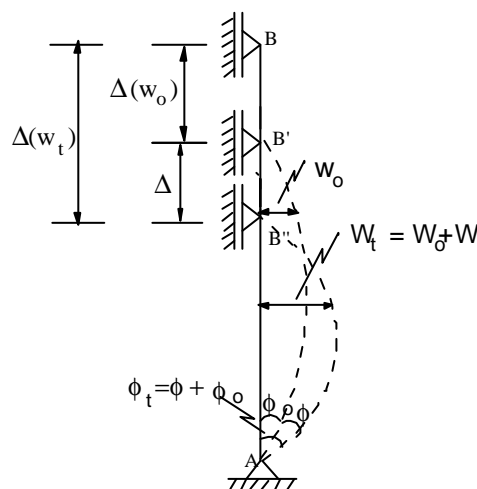
## 2.6-Efeito da Imperfeição Geométrica

Seja agora a coluna da Figura 2.4 com uma imperfeição geométrica inicial descrita por uma função  $W_o(x)$ . O deslocamento total com relação a configuração de uma coluna perfeita e indeformada é dado por

$$W_t(x, t) = W_o(x) + W(x, t) \tag{2.33}$$

onde, como mostra a Figura 2.4,  $W$  é o deslocamento gerado pelo carregamento axial.

As imperfeições geométricas são consideradas como de pequena magnitude e podem ser consideradas matematicamente como uma perturbação na solução da estrutura perfeita.



**Figura 2.4-** Coluna com imperfeição geométrica

A curvatura da coluna com imperfeição geométrica é

$$\frac{1}{R_o} = \frac{W_{o,xx}}{(1 - W_{o,x}^2)^{1/2}} \quad (2.34)$$

Da mesma forma, a curvatura total fica dada por

$$\frac{1}{R_t} = \frac{W_{,xx} + W_{o,xx}}{(1 - (W_{,x} + W_{o,x})^2)^{1/2}} \quad (2.35)$$

Expandindo-se (2.34) e (2.35) e retendo-se em  $W$  os termos até a quarta ordem, obtém-se

$$\chi_o = W_{o,xx} \left[ 1 + \frac{1}{2} W_{o,x}^2 \right] \quad (2.36)$$

$$\chi_t = (W_{,xx} + W_{o,xx}) \left[ 1 + \frac{1}{2} (W_{,x} + W_{o,x})^2 \right] \quad (2.37)$$

Tem-se pois que a variação da curvatura é dada por

$$\begin{aligned} \chi = \chi_t - \chi_o = W_{,xx} + \frac{1}{2} W_{,x}^2 W_{,xx} + W_{,x} W_{o,x} W_{,xx} + \frac{1}{2} W_{o,x}^2 W_{,xx} \\ + \frac{1}{2} W_{,x}^2 W_{o,xx} + W_{,x} W_{o,x} W_{o,xx} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Substituindo-se (2.38) em (2.8) tem-se para a energia de flexão a seguinte expressão

$$\begin{aligned} U \equiv \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx \equiv \int_0^L \frac{1}{2} EI \left( W_{,xx}^2 + W_{,xx}^2 W_{,x}^2 + \frac{1}{4} W_{,xx}^2 W_{,x}^4 + W_{o,x}^2 W_{,xx}^2 \right. \\ + \frac{1}{4} W_{o,x}^4 W_{,xx}^2 + \frac{1}{4} W_{,x}^4 W_{o,xx}^2 + W_{,x}^3 W_{,xx}^2 W_{o,x} + W_{,x}^3 W_{o,xx}^2 W_{o,x} \\ + 2W_{,x} W_{,xx}^2 W_{o,x} + W_{,x} W_{o,x}^3 W_{,xx}^2 + \frac{3}{2} W_{,x}^2 W_{,xx}^2 W_{o,x}^2 + \frac{1}{2} W_{,x}^4 W_{,xx} W_{o,xx} \\ + W_{,x}^2 W_{o,x}^2 W_{o,xx}^2 + W_{,xx} W_{,x}^2 W_{o,xx} + 2W_{,x}^3 W_{,xx} W_{o,x} W_{o,xx} + 2W_{,xx} W_{,x} W_{o,x} W_{o,xx} \\ \left. + \frac{5}{2} W_{,x}^2 W_{,xx} W_{o,x}^2 W_{o,xx} + W_{,x} W_{o,x}^3 W_{,xx} W_{o,xx} \right) dx \end{aligned} \quad (2.39)$$

Da Figura 2.4 o encurtamento,  $\Delta$ , da coluna fica dado por

$$\Delta = \Delta(W_t) - \Delta(W_o) \quad (2.40)$$

onde,

$$\Delta(W_o) = \int_0^L \left( \frac{1}{2} W_{o,x}^2 + \frac{1}{8} W_{o,x}^4 \right) dx \quad (2.41)$$

e,

$$\begin{aligned} \Delta(W_t) = \int_0^L & \left( \frac{1}{2} W_{,x}^2 + W_{,x} W_{o,x} + \frac{1}{2} W_{o,x}^2 + \frac{1}{8} W_{,x}^4 + \frac{1}{2} W_{,x}^3 W_{o,x} + \frac{3}{4} W_{,x}^2 W_{o,x}^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} W_{,x} W_{o,x}^3 + \frac{1}{8} W_{o,x}^4 \right) dx \end{aligned} \quad (2.42)$$

Substituindo-se então (2.41) e (2.42) em (2.40) tem-se de (2.15) que a energia de deformação da mola é dada por

$$\begin{aligned} U_k = \frac{K}{2} & \left[ \int_0^L \left( \frac{1}{2} W_{,x}^2 + W_{,x} W_{o,x} + \frac{1}{8} W_{,x}^4 + \frac{1}{2} W_{,x}^3 W_{o,x} + \frac{3}{4} W_{,x}^2 W_{o,x}^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} W_{,x} W_{o,x}^3 + \frac{1}{8} W_{o,x}^4 \right) dx \right]^2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

De forma similar, o potencial das cargas externas fica dado por

$$\begin{aligned} V_p = -(P_o + P(t)) & \int_0^L \left( \frac{1}{2} W_{,x}^2 + W_{,x} W_{o,x} + \frac{1}{8} W_{,x}^4 + \frac{1}{2} W_{,x}^3 W_{o,x} + \frac{3}{4} W_{,x}^2 W_{o,x}^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} W_{,x} W_{o,x}^3 + \frac{1}{8} W_{o,x}^4 \right) dx \end{aligned} \quad (2.44)$$

### 2.6.1- Energia Potencial Total

Utilizando as expressões (2.39), (2.43) e (2.44) e de acordo com (2.33), chega-se à seguinte expressão para a energia potencial total da coluna com imperfeição geométrica.

$$\begin{aligned}
 \Pi_p = & \int_0^L \frac{1}{2} EI \left( W_{,xx}^2 + W_{,xx}^2 W_{,x}^2 + \frac{1}{4} W_{,xx}^2 W_{,x}^4 + W_{o,x}^2 W_{,xx}^2 \right. \\
 & + \frac{1}{4} W_{o,x}^4 W_{,xx}^2 + \frac{1}{4} W_{,x}^4 W_{o,xx}^2 + W_{,x}^3 W_{,xx}^2 W_{o,x} + W_{,x}^3 W_{o,xx}^2 W_{o,x} \\
 & + 2 W_{,x} W_{,xx}^2 W_{o,x} + W_{,x} W_{o,x}^3 W_{,xx}^2 + \frac{3}{2} W_{,x}^2 W_{,xx}^2 W_{o,x}^2 + \frac{1}{2} W_{,x}^4 W_{,xx} W_{o,xx} \\
 & + W_{,x}^2 W_{o,x}^2 W_{o,xx}^2 + W_{,xx} W_{,x}^2 W_{o,xx} + 2 W_{,x}^3 W_{,xx} W_{o,x} W_{o,xx} + 2 W_{,xx} W_{,x} W_{o,x} W_{o,xx} \\
 & \left. + \frac{5}{2} W_{,x}^2 W_{,xx} W_{o,x}^2 W_{o,xx} + W_{,x} W_{o,x}^3 W_{,xx} W_{o,xx} \right) dx + \frac{K}{2} \left[ \int_0^L \left( \frac{1}{2} W_{,x}^2 + W_{,x} W_{o,x} + \frac{1}{8} W_{,x}^4 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} W_{,x}^3 W_{o,x} + \frac{3}{4} W_{,x}^2 W_{o,x}^2 + \frac{1}{2} W_{,x} W_{o,x}^3 \right) dx \right]^2 - (P_o + P(t)) \int_0^L \left( \frac{1}{2} W_{,x}^2 + W_{,x} W_{o,x} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{8} W_{,x}^4 + \frac{1}{2} W_{,x}^3 W_{o,x} + \frac{3}{4} W_{,x}^2 W_{o,x}^2 + \frac{1}{2} W_{,x} W_{o,x}^3 \right) dx \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

### 2.6.2- Funcional Total

De acordo com (2.1) e utilizando as expressões (2.29) e (2.46), lembrando que os termos em  $W_o$  e suas derivadas são independentes do tempo,  $t$ . Tem-se o funcional total dado por:

$$\begin{aligned}
 L_p = & \int_0^L \frac{1}{2} \rho A_s W_{,t}^2 dx - \int_0^L \frac{1}{2} EI \left( W_{,xx}^2 + W_{,xx}^2 W_{,x}^2 + \frac{1}{4} W_{,xx}^2 W_{,x}^4 + W_{o,x}^2 W_{,xx}^2 \right. \\
 & + \frac{1}{4} W_{o,x}^4 W_{,xx}^2 + \frac{1}{4} W_{,x}^4 W_{o,xx}^2 + W_{,x}^3 W_{,xx}^2 W_{o,x} + W_{,x}^3 W_{o,xx}^2 W_{o,x} \\
 & + 2 W_{,x} W_{,xx}^2 W_{o,x} + W_{,x} W_{o,x}^3 W_{,xx}^2 + \frac{3}{2} W_{,x}^2 W_{,xx}^2 W_{o,x}^2 + \frac{1}{2} W_{,x}^4 W_{,xx} W_{o,xx}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + W_{,x}^2 W_{o,x}^2 W_{o,xx}^2 + W_{,xx} W_{,x}^2 W_{o,xx} + 2W_{,x}^3 W_{,xx} W_{o,x} W_{o,xx} + 2W_{,xx} W_{,x} W_{o,x} W_{o,xx} \\
& + \frac{5}{2} W_{,x}^2 W_{,xx} W_{o,x}^2 W_{o,xx} + W_{,x} W_{o,x}^3 W_{,xx} W_{o,xx} \Big) dx - \frac{K}{2} \left[ \int_0^L \left( \frac{1}{2} W_{,x}^2 + W_{,x} W_{o,x} + \frac{1}{8} W_{,x}^4 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} W_{,x}^3 W_{o,x} + \frac{3}{4} W_{,x}^2 W_{o,x}^2 + \frac{1}{2} W_{,x} W_{o,x}^3 \right) dx \right]^2 + (P_o + P(t)) \int_0^L \left( \frac{1}{2} W_{,x}^2 + W_{,x} W_{o,x} \right. \\
& \left. + \frac{1}{8} W_{,x}^4 + \frac{1}{2} W_{,x}^3 W_{o,x} + \frac{3}{4} W_{,x}^2 W_{o,x}^2 + \frac{1}{2} W_{,x} W_{o,x}^3 \right) dx
\end{aligned} \tag{2.46}$$

### 2.6.3- Funcional Final Não-Dimensional

Utilizando-se as expressões (2.31), chega-se ao seguinte funcional considerando os efeitos da imperfeição geométrica.

$$\begin{aligned}
L_p = & \frac{1}{2} \tau \int_0^1 w_{,t}^2 d\xi - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( w_{,\xi\xi}^2 + w_{,\xi\xi}^2 w_{,\xi}^2 + \frac{1}{4} w_{,\xi\xi}^2 w_{,\xi}^4 + w_{o,\xi}^2 w_{,\xi\xi}^2 \right. \\
& + \frac{1}{4} w_{o,\xi}^4 w_{,\xi\xi}^2 + \frac{1}{4} w_{,\xi}^4 w_{o,\xi\xi}^2 + w_{,\xi}^3 w_{,\xi\xi}^2 w_{o,\xi} + w_{,\xi}^3 w_{o,\xi\xi}^2 w_{o,\xi} \\
& + 2w_{,\xi} w_{,\xi\xi}^2 w_{o,\xi} + w_{,\xi} w_{o,\xi}^3 w_{,\xi\xi}^2 + \frac{3}{2} w_{,\xi}^2 w_{,\xi\xi}^2 w_{o,\xi}^2 + \frac{1}{2} w_{,\xi}^4 w_{,\xi\xi} w_{o,\xi\xi} \\
& + w_{,\xi}^2 w_{o,\xi}^2 w_{o,\xi\xi}^2 + w_{,\xi\xi} w_{,\xi}^2 w_{o,\xi\xi} + 2w_{,\xi}^3 w_{,\xi\xi} w_{o,\xi} w_{o,\xi\xi} + 2w_{,\xi\xi} w_{,\xi} w_{o,\xi} w_{o,\xi\xi} \\
& \left. + \frac{5}{2} w_{,\xi}^2 w_{,\xi\xi} w_{o,\xi}^2 w_{o,\xi\xi} + w_{,\xi} w_{o,\xi}^3 w_{,\xi\xi} w_{o,\xi\xi} \right) d\xi - \frac{\eta}{2} \left[ \int_0^1 \left( \frac{1}{2} w_{,\xi}^2 + w_{,\xi} w_{o,\xi} + \frac{1}{8} w_{,\xi}^4 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} w_{,\xi}^3 w_{o,\xi} + \frac{3}{4} w_{,\xi}^2 w_{o,\xi}^2 + \frac{1}{2} w_{,\xi} w_{o,\xi}^3 \right) d\xi \right]^2 + (\delta_1 + \delta_2 \cos(\Omega t)) \int_0^1 \left( \frac{1}{2} w_{,\xi}^2 + \frac{1}{8} w_{,\xi}^4 \right. \\
& \left. + w_{,\xi} w_{o,\xi} + \frac{1}{2} w_{,\xi}^3 w_{o,\xi} + \frac{3}{4} w_{,\xi}^2 w_{o,\xi}^2 + \frac{1}{2} w_{,\xi} w_{o,\xi}^3 \right) d\xi
\end{aligned} \tag{2.47}$$

onde  $w_o = \frac{W_o}{L}$ .

## 2.7-Equações de Movimento

### 2.7.1-Método de Ritz

Neste trabalho será utilizado o método de Ritz e o princípio de Hamilton para se chegar às equações de movimento da coluna. O método de Ritz é baseado no princípio da energia potencial estacionária que diz:

Dentre todas as configurações admissíveis de um sistema conservativo, aquelas que satisfazem as equações de equilíbrio tornam a energia potencial total estacionária com relação a pequenas variações de deslocamentos. Se a condição de estacionariedade é um mínimo, o estado de equilíbrio é estável.

Chamando de  $q_i$ , as coordenadas generalizadas de um sistema contínuo discretizado que descreve o campo de deslocamento admissível, o princípio acima se resume a:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial q_i} = 0 \quad i=1..,n \quad (2.48)$$

onde  $n$  é número de coordenadas necessárias para a descrição do campo de deslocamentos.

Assim chega-se a um sistema de  $n$  equações com  $n$  incógnitas  $q_i$ .

O campo de deslocamentos da viga é aproximado por uma função do tipo

$$w(x, t) = f(t)W(x) \quad (2.49)$$

onde  $f(t)$  são as amplitudes que procura-se determinar e a função  $W(x)$  deve satisfazer as condições de contorno da coluna, ou seja, as restrições de deslocamento e momento zero nas

extremidades da coluna, a fim de que o método de Ritz resulte em uma solução aproximada do problema original. A função  $W(x)$  descreve a elástica da coluna e pode ser descrita pela seguinte série de funções ortogonais no intervalo de  $[0, L]$

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.50)$$

Fazendo uso de variáveis adimensionais o campo de deslocamentos fica

$$w(\xi, t) = \sum_{m=1}^n f_m(t) \sin(m\pi\xi) \quad (2.51)$$

De forma similar a imperfeição geométrica inicial pode ser descrita pela seguinte série de Fourier.

$$w_o(\xi) = \sum_{k=1}^p f_{ok} \sin(k\pi\xi) \quad (2.52)$$

sendo  $p$  o número de termos necessários para descrever as imperfeições da coluna e  $f_{ok}$  são as amplitudes modais que são parametrizadas em relação ao comprimento da coluna, ou seja,

$$f_{ok} = \frac{F_{ok}}{L}.$$

Para a determinação das equações de movimento aplica-se o princípio de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T(t) - \Pi_p(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}(t) dt = 0 \quad (2.53)$$

que considera o movimento de um sistema completamente determinado por  $s$  grandezas quaisquer  $q_1, q_2, \dots, q_s$  (coordenadas generalizadas) e suas derivadas com relação ao tempo  $\dot{q}_i$ .

A equação (2.53) é conhecida como o princípio variacional de Hamilton e mostra que a soma das variações no tempo da diferença entre as energias cinética e potencial e o trabalho feito

pelas forças não-conservativas num intervalo de tempo  $t_1$  e  $t_2$  é igual a zero. A aplicação deste princípio produz diretamente as equações de movimento para um dado sistema.

Para a coluna considerada neste trabalho, as equações de movimento foram obtidas através das equações de Lagrange. Estas equações são deduzidas diretamente da equação de Hamilton (2.53) simplesmente expressando a energia cinética  $T$ , a energia Potencial  $\Pi_p$  e o trabalho das funções externas não-conservativas  $\int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt$  em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas  $q_1, q_2 \dots, q_n$ .

Para o modelo considerado, sabe-se que a  $T$ ,  $\Pi_p$  e  $\delta W_{nc}$  são da forma:

$$\begin{aligned} T &= T\left(\dot{f}_1(t), \dot{f}_2(t), \dots, \dot{f}_m(t)\right) \\ \Pi_p &= \Pi_p\left(f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)\right) \\ \delta W_{nc} &= Q_1 \delta f_1(t) + Q_2 \delta f_2(t) + \dots + Q_n \delta f_n(t) \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  são as funções de força generalizada, representadas pelo amortecimento viscoso, correspondente as coordenadas  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ .

Substituindo-se (2.54) em (2.53) resulta em

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{i=1}^n \left( -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{f}_i(t)} \right) - \frac{\partial \Pi_p}{\partial f_i(t)} + Q_i \right) \delta f_i(t) \right] dt = 0 \quad (2.55)$$

$\delta f_i(t_1) = \delta f_i(t_2) = 0$  é a condição básica imposta sobre as variações [14]. Sabe-se que todas as variações  $\delta f_i(t)$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), são arbitrárias no intervalo e a equação (2.55) é satisfeita quando o termo entre parênteses se anula e assim tem-se as bem conhecidas equações de Lagrange de movimento.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{f}_i(t)} \right) - \frac{\partial \Pi_p}{\partial f_i(t)} = Q_i \quad (2.56)$$

Para obtenção das equações de movimento, implementou-se uma rotina em linguagem simbólica utilizando o Maple V Release for Windows 95.

### 2.7.2-Equações Lineares de Movimento

Considerando-se que a deformada da coluna pode ser descrita com boa precisão pelos três primeiros termos da expansão modal e substituindo-se (2.51) em (2.32) e integrando-se no domínio, obtém-se uma forma quadrática em termos dos deslocamentos  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  e  $f_3(t)$  e das velocidades  $\dot{f}_1(t)$ ,  $\dot{f}_2(t)$  e  $\dot{f}_3(t)$ .

$$\begin{aligned} L_p = & \frac{1}{4} \tau \dot{f}_1(t)^2 + \frac{1}{4} \tau \dot{f}_2(t)^2 + \frac{1}{4} \tau \dot{f}_3(t)^2 - 4\pi^4 f_2(t)^2 - \frac{81}{4} \pi^4 f_3(t)^2 - \frac{1}{4} \pi^4 f_1(t)^2 \\ & + \pi^2 \delta_1 f_2(t)^2 + \frac{9}{4} \pi^2 \delta_1 f_3(t)^2 + \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t)^2 + \frac{1}{4} \pi^2 \delta_1 f_1(t)^2 + \frac{1}{4} \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t)^2 \\ & + \frac{9}{4} \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_3(t)^2 \end{aligned} \quad (2.57)$$

De onde se obtém as equações de movimento

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1(t) + \frac{c}{\tau} \dot{f}_1(t) + \frac{\pi^2}{\tau} (\pi^2 - \delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_1(t) &= 0 \\ \ddot{f}_2(t) + \frac{c}{\tau} \dot{f}_2(t) + \frac{4\pi^2}{\tau} (4\pi^2 - \delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_2(t) &= 0 \\ \ddot{f}_3(t) + \frac{c}{\tau} \dot{f}_3(t) + \frac{9\pi^2}{\tau} (9\pi^2 - \delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_3(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Incluindo a imperfeição geométrica como em (2.53), o funcional toma a forma

$$\begin{aligned}
L_p = & \frac{1}{4} \tau \dot{f}_1(t)^2 + \frac{1}{4} \tau \dot{f}_2(t)^2 + \frac{1}{4} \tau \dot{f}_3(t)^2 + 2\pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_{02} f_2(t) + \pi^2 \delta_1 f_2(t)^2 \\
& + \frac{1}{2} \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_{01} f_1(t) + \frac{1}{4} \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t)^2 + \frac{9}{2} \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_{03} f_3(t) + \frac{9}{4} \pi^2 \delta_1 f_3(t)^2 \\
& + \frac{9}{2} \pi^2 \delta_1 f_{03} f_3(t) + 2\pi^2 \delta_1 f_{02} f_2(t) + \frac{1}{2} \pi^2 \delta_1 f_{01} f_1(t) - \frac{1}{4} \pi^4 f_1(t)^2 - 4\pi^4 f_2(t)^2 - \frac{81}{4} \pi^4 f_3(t)^2 \\
& + \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t)^2 + \frac{1}{4} \pi^2 \delta_1 f_1(t)^2 + \frac{9}{4} \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_3(t)^2
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Logo, as equações de movimento são

$$\begin{aligned}
\ddot{f}_1(t) + \frac{c}{\tau} \dot{f}_1(t) + \frac{\pi^2}{\tau} (\pi^2 - \delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_1(t) + \frac{\pi^2}{\tau} (-\delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_{01} &= 0 \\
\ddot{f}_2(t) + \frac{c}{\tau} \dot{f}_2(t) + \frac{4\pi^2}{\tau} (4\pi^2 - \delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_2(t) + \frac{4\pi^2}{\tau} (-\delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_{02} &= 0 \\
\ddot{f}_3(t) + \frac{c}{\tau} \dot{f}_3(t) + \frac{9\pi^2}{\tau} (9\pi^2 - \delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_3(t) + \frac{9\pi^2}{\tau} (-\delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_{03} &= 0
\end{aligned} \tag{2.60}$$

### 2.7.3- Equações Não-Lineares de Movimento

A maior parte dos sistemas mecânicos são capazes de mobilizar não-linearidades, quando as amplitudes de oscilação crescem até um certo limite.

Se há interesse no estudo do comportamento pós-crítico, ou seja, na determinação das amplitudes e fases do regime estacionário, é preciso que se incorporem os termos não-lineares.

Considera-se aqui dois casos

#### 2.7.3.1-Coluna com Um Grau de Liberdade

Considerando-se o funcional completo para a coluna com um grau de liberdade, tem-se depois de substituir (2.51) em (2.32) e integrar no domínio

$$\begin{aligned}
L_p = & \frac{1}{4} \tau \dot{f}_1(t)^2 - \frac{1}{4} f_1(t)^2 \pi^4 + \frac{1}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t)^2 \pi^2 + \frac{1}{4} \delta_1 f_1(t)^2 \pi^2 - \frac{1}{16} f_1(t)^4 \pi^6 \\
& - \frac{1}{128} f_1(t)^6 \pi^8 - \frac{1}{32} \eta f_1(t)^4 \pi^4 - \frac{3}{256} \eta f_1(t)^6 \pi^6 - \frac{9}{8192} \eta f_1(t)^8 \pi^8 + \frac{3}{64} \delta_1 f_1(t)^4 \pi^4 \\
& + \frac{3}{64} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t)^4 \pi^4
\end{aligned} \quad (2.61)$$

Logo, a equação de movimento para a coluna com um grau de liberdade com as não-linearidades consideradas no funcional, é dada por

$$\begin{aligned}
\ddot{f}_1(t) + \frac{c}{\tau} \dot{f}_1(t) + \frac{\pi^2}{\tau} (\pi^2 - \delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_1(t) + \frac{\pi^4}{2\tau} \left( \pi^2 + \frac{\eta}{2} - \frac{3}{4} \delta_1 - \frac{3}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) \right) f_1(t)^3 \\
- \frac{3\pi^6}{32\tau} \left( \pi^2 + \frac{3}{2} \eta \right) f_1(t)^5 + \frac{9}{512} \eta f_1(t)^7 \pi^8 = 0
\end{aligned} \quad (2.62)$$

Por outro lado se for considerado o funcional com não-linearidades até a quarta ordem associadas apenas a rigidez do sistema tem-se

$$L_p = \frac{1}{4} \tau \dot{f}_1(t)^2 - \frac{1}{4} \pi^4 f_1(t)^2 + \frac{1}{4} \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t)^2 + \frac{1}{4} \pi^2 \delta_1 f_1(t)^2 - \frac{1}{16} \pi^6 f_1(t)^4 \quad (2.63)$$

Neste caso, tem-se para a coluna com um grau de liberdade, uma equação de movimento tipo Duffing com não-linearidade cúbica associada a rigidez dada por

$$\ddot{f}_1(t) + \frac{c}{\tau} \dot{f}_1(t) + \frac{\pi^2}{\tau} (\pi^2 - \delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_1(t) + \frac{\pi^6}{2\tau} f_1(t)^3 = 0 \quad (2.64)$$

Adicionando-se à formulação a imperfeição geométrica tem-se o funcional

$$\begin{aligned}
L_p = & \frac{1}{4} \tau \dot{f}_1(t)^2 - \frac{3}{8} \pi^6 f_1(t)^2 f_{01}^2 + \frac{9}{32} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_1(t)^2 f_{01}^2 + \frac{9}{32} \delta_1 \pi^4 f_1(t)^2 f_{01}^2 \\
& + \frac{3}{16} \delta_1 \pi^4 f_1(t) f_{01}^3 + \frac{3}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_1(t) f_{01}^3 - \frac{3}{8} \pi^6 f_1(t)^3 f_{01} - \frac{9}{32} \pi^8 f_1(t)^3 f_{01}^3 \\
& + \frac{1}{4} \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t)^2 + \frac{1}{4} \pi^2 \delta_1 f_1(t)^2 - \frac{1}{4} \pi^4 f_1(t)^2 - \frac{1}{16} \pi^6 f_1(t)^4 + \frac{3}{64} \delta_1 \pi^4 f_1(t)^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{64} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_1(t)^4 + \frac{3}{16} \delta_1 \pi^4 f_1(t)^3 f_{01} + \frac{3}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_1(t)^3 f_{01} - \frac{15}{64} \pi^8 f_1(t)^4 f_{01}^2 \\
& - \frac{3}{32} \pi^8 f_1(t)^5 f_{01} + \frac{1}{2} \pi^2 \delta_1 f_1(t) f_{01} + \frac{1}{2} \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) f_{01} - \frac{9}{64} \pi^8 f_1(t) f_{01}^4 - \frac{1}{64} \pi^8 f_1(t)^6 \\
& - \frac{1}{2} \eta \left( \frac{1}{2} \pi^2 f_1(t) f_{01} + \frac{9}{32} \pi^4 f_1(t)^2 f_{01}^2 + \frac{1}{4} \pi^2 f_1(t)^2 + \frac{3}{64} \pi^4 f_1(t)^4 + \frac{3}{16} \pi^4 f_1(t) f_{01}^3 \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{16} \pi^4 f_1(t)^3 f_{01} \right)^2
\end{aligned} \tag{2.65}$$

A equação do movimento para este caso é dada por:

$$\begin{aligned}
& f_1''(t) + \frac{c}{\tau} \dot{f}_1(t) + \frac{\pi^2}{\tau} (\pi^2 - \delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_1(t) + \frac{\pi^2}{\tau} (-\delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_{01} \\
& + \frac{3\pi^4}{2\tau} \left( \pi^2 - \frac{3}{4} \delta_1 + \frac{1}{3} \eta - \frac{3}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) \right) f_{01}^2 f_1(t) + \frac{9\pi^6}{16\tau} \left( \pi^2 + \frac{2}{3} \eta \right) f_{01}^4 f_1(t) \\
& + \frac{9}{128\tau} \eta \pi^8 f_{01}^6 f_1(t) + \frac{9}{4\tau} \pi^4 \left( \pi^2 - \frac{1}{2} \delta_1 + \frac{1}{3} \eta - \frac{1}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \right) f_{01} f_1(t)^2 \\
& + \frac{27\pi^6}{16\tau} \left( \pi^2 + \frac{2}{3} \eta \right) f_{01}^3 f_1(t)^2 + \frac{81}{256\tau} \eta \pi^8 f_{01}^5 f_1(t)^2 + \frac{15\pi^6}{8\tau} \left( \pi^2 + \frac{7}{10} \eta \right) f_{01}^2 f_1(t)^3 \\
& + \frac{\pi^4}{2\tau} \left( \pi^2 - \frac{3}{4} \delta_1 + \frac{1}{2} \eta - \frac{3}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) \right) f_1(t)^3 + \frac{\pi^4}{2\tau} \left( -\frac{3}{4} \delta_1 - \frac{3}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) \right) f_{01}^3 \\
& + \frac{153}{256\tau} \eta \pi^8 f_{01}^4 f_1(t)^3 + \frac{15\pi^6}{16\tau} \left( \pi^2 + \frac{3}{4} \eta \right) f_{01} f_1(t)^4 + \frac{315}{512\tau} \eta \pi^8 f_{01}^3 f_1(t)^4 \\
& + \frac{3\pi^6}{16\tau} \left( \pi^2 + \frac{3}{4} \eta \right) f_1(t)^5 + \frac{189}{512\tau} \eta \pi^8 f_{01}^2 f_1(t)^5 + \frac{63}{512\tau} \eta \pi^8 f_{01} f_1(t)^6 + \frac{9}{512\tau} \eta \pi^8 f_1(t)^7 = 0
\end{aligned} \tag{2.66}$$



### **2.7.3.2-Coluna com Três Graus de Liberdade**

Para a coluna com três graus de liberdade mostra-se nos apêndices A e B, os funcionais e as equações de movimento para os casos onde se considera ou não a imperfeição geométrica inicial.

### Solução Analítica

### 3.1- Introdução

Mesmo em sua forma mais simples - quando são homogêneas, lineares e não-amortecidas as equações com coeficientes periódicos não são de solução imediata. Por meio da chamada Teoria de Floquet obtêm-se apenas algumas indicações qualitativas quanto ao caráter da resposta. A solução propriamente dita requer, em geral, o emprego de métodos aproximados, como por exemplo, o Método das Múltiplas Escalas [25], ou o emprego de métodos numéricos.

### 3.2- Caso Linear

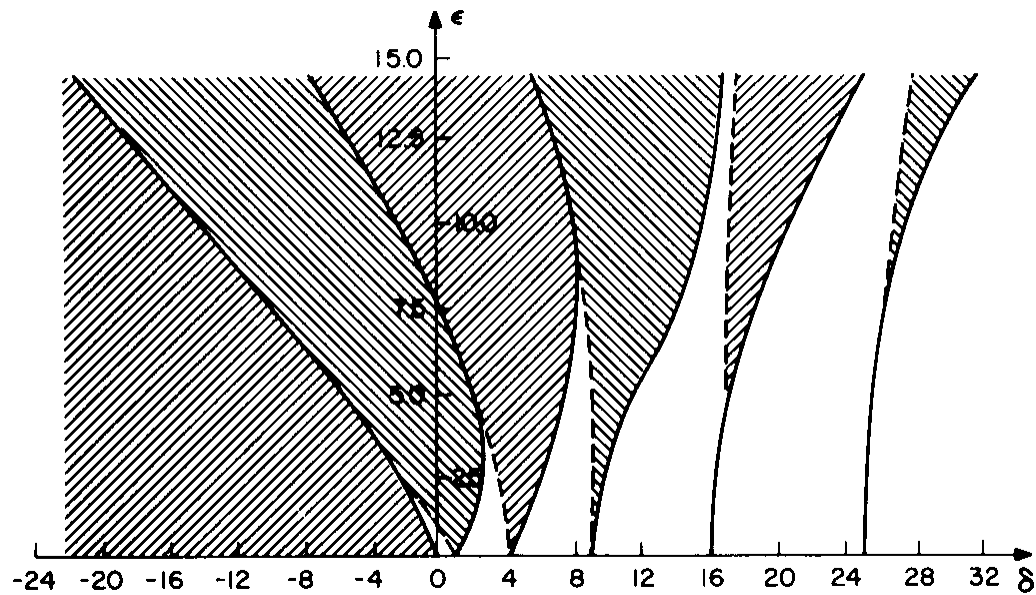
O sistema apresentado no presente trabalho é governado por equações que, a menos das não-linearidades, podem ser reduzidas à forma

$$f_1''(t) + (\delta + 2\varepsilon \cos 2t) f_1(t) = 0 \quad (3.1)$$

Esta equação, de acordo com [25], foi deduzida por Mathieu (1868), quando estudava os modos de vibração de uma membrana elíptica. Desde então é conhecida como Equação de Mathieu.

A equação de Mathieu tem sido bastante estudada e as regiões de estabilidade, em que a solução é limitada, e de instabilidade, regiões em que a solução cresce indefinidamente, estão completamente determinadas para todos os valores dos parâmetros  $\delta$  e  $\varepsilon$ . Ou seja, determinados pares  $(\delta, \varepsilon)$  definem equações cuja solução cresce de forma ilimitada com o tempo, para outros a solução é limitada. A representação destes pontos no plano  $\delta - \varepsilon$  está mostrada na Figura 3.1, conhecida como Diagrama de Strutt.

A partir dos valores de transição  $\delta$  e  $\varepsilon$  de valores estáveis para instáveis pode-se traçar as curvas de transição, também conhecidas como fronteiras de estabilidade.



**Figura 3.1** - Regiões estáveis e instáveis(hachuradas) no plano  $(\delta-\epsilon)$  para a equação de Mathieu.

[25]

No diagrama de Strutt as áreas hachuradas definem os pontos que dão origem a respostas ilimitadas, as quais são chamadas de regiões de ressonância paramétrica e são separadas das regiões de solução limitada pelas curvas de transição. No caso de um ponto pertencer a uma região de instabilidade, pode-se alterar alguma característica de forma a obter uma solução estável, isto numa fase de projeto.

Na ausência de amortecimento, as regiões de estabilidade estão unidas por pontos discretos  $\delta = N^2$ , sendo  $N$  inteiro, correspondendo a  $\epsilon = 0$ . Para tais valores de  $\delta$  e  $\epsilon$  a equação (3.1) tem soluções limitadas  $\cos(Nt)$  e  $\sin(Nt)$  que formam um conjunto fundamental com período  $2\pi$  se  $N$  é ímpar e  $\pi$  se  $N$  é par. Na vizinhança de  $\delta = 1$ , quando a frequência da excitação é aproximadamente o dobro da frequência natural do sistema, situa-se a primeira região de ressonância paramétrica. Esta é a região mais importante e a maioria das publicações estão restritas ao estudo desta região de instabilidade.

Segundo [7], observa-se que os pontos  $\delta = N^2$ ,  $N$  inteiro, no eixo  $\delta$  são pontos limites de regiões estáveis e todos os outros pontos limites de regiões estáveis são pontos instáveis.

Para valores elevados de  $\varepsilon$  as regiões de estabilidade tornam-se bastante estreitas e tendem para curvas com inclinação -1. Também para valores negativos de  $\delta$  as regiões de estabilidade são bastante estreitas e, em geral, esta região tem pouco interesse prático, porque está associada a situações em que a rigidez do sistema é negativa.

O diagrama de estabilidade é simétrico com relação ao eixo  $\delta$ , sendo portanto sempre possível considerar-se o valor absoluto de  $\varepsilon$  ( $||\varepsilon||$ ).

A teoria de Floquet fornece resultados qualitativos, sendo a solução exata muito difícil na grande maioria dos casos, além disto esta teoria, por si só, não fornece as curvas de transição que definem o diagrama de Strutt. De acordo com [25], há um procedimento para a obtenção das regiões de ressonância paramétrica que consiste na integração numérica da equação (3.1) usando pares distintos de  $(\delta, \varepsilon)$ . Sendo, este procedimento bastante laborioso, faz-se geralmente uso de técnicas aproximadas para a determinação das curvas de transição. Entretanto, para se conhecer com profundidade o comportamento não-linear nas regiões instáveis, o emprego de técnicas numéricas se torna imprescindível quando a não-linearidade se torna importante.

### 3.3- Métodos para a Determinação do Diagrama de Strutt

Na literatura existem várias técnicas analíticas para a determinação da estabilidade. Essas técnicas podem ser divididas em três classes.

Segundo [25], a primeira classe de métodos aproximados utiliza o método do determinante infinito de Hill. Esta técnica foi utilizada extensivamente para sistemas com um grau de liberdade, e, recentemente, ela tem sido aplicada para sistemas com vários graus de liberdade [7]. Este método

consiste em representar os deslocamentos em termos de uma série de Fourier com funções exponenciais imaginárias, substitui-se então os deslocamentos na equação de Mathieu e iguala-se cada um dos coeficientes da função exponencial a zero, produzindo um conjunto de equações algébricas homogêneas e, para a obtenção da solução não-trivial, o determinante desta matriz deve ser identicamente nulo.

A segunda classe consiste em métodos de perturbação que são baseados na suposição de que os coeficientes variáveis são pequenos [25].

A terceira classe utiliza a teoria de Liapunov. Este método é limitado pela dificuldade de se encontrar uma função de Liapunov conveniente.

Para determinação aproximada das curvas de transição no diagrama de Strutt, utilizou-se aqui o método das múltiplas escalas, que consiste na representação da solução na forma de uma série de potências do parâmetro  $\varepsilon$ , sendo que, como o próprio nome indica, a idéia deste método é considerar que essa expansão da solução seja uma função de múltiplas variáveis independentes, ou escalas, e não de uma única variável  $t$ . Os resultados são muito bons numa faixa próxima ao eixo horizontal, ou seja, para pequenos valores de  $\varepsilon$ .

### 3.3.1- Método das Múltiplas Escalas

Seja a seguinte expansão uniforme para (3.1)

$$f_1(t; \varepsilon) = f_{10}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon f_{11}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 f_{12}(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (3.2)$$

onde  $T_n$  são as escalas definidas por

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (3.3)$$

As derivadas com relação a  $t$  transformam-se neste caso em expansões em termos das derivadas parciais com relação a  $T_n$ , ou seja

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{dT_2}{dt} \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{dT_2}{dt} \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = \\ &= D_0^2 + \varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 D_0 D_2 + \dots\end{aligned}\tag{3.3}$$

Levando (3.2) e (3.3) em (3.1) e igualando-se os coeficientes de mesma potência em  $\varepsilon$ , obtém-se

$$D_0^2 + \delta f_{10} = 0\tag{3.4}$$

$$D_0^2 f_{11} + \delta f_{11} = -2D_0 D_1 f_{10} - 2f_{10} \cos 2T_0\tag{3.5}$$

$$D_0^2 f_{12} + \delta f_{12} = -2D_0 D_2 f_{10} - D_1^2 f_{10} - 2D_0 D_1 f_{11} - 2f_{11} \cos 2T_0\tag{3.6}$$

onde  $\delta = \omega^2$ .

A solução de (3.4) pode ser escrita como

$$f_{10} = A(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega T_0}\tag{3.7}$$

sendo  $\bar{A}$  o complexo conjugado (c.c.) de  $A$ .

Portanto (3.5) torna-se

$$D_0^2 f_{11} + \delta f_{11} = -2i\omega D_1 A e^{i\omega T_0} - A e^{i(2+\omega)T_0} - \bar{A} e^{i(2-\omega)T_0} + cc\tag{3.8}$$

Quando procura-se a solução de (3.8), verifica-se que os termos do segundo membro, que possuem frequência  $\omega$ , geram o aparecimento de termos do tipo  $T_0 e^{i\omega T_0}$  na solução particular, impedindo a convergência da solução. Assim, é preciso que estes termos, ditos seculares, se anulem. Necessita-se então de uma análise para distinguir dois casos :  $\omega \neq 1$  e  $\omega \approx 1$ .

Considerando-se primeiramente  $\omega \neq 1$ , pode-se eliminar os termos seculares em (3.8) apenas se  $D_1 A = 0$ , ou se  $A = A(T_2)$ .

A solução particular de (3.8) é dada por:

$$f_{11} = \frac{A}{4(\omega + 1)} e^{i(2+\omega)T_0} - \frac{\bar{A}}{4(\omega - 1)} e^{i(2-\omega)T_0} + \text{c.c.} \quad (3.9)$$

Substituindo-se  $f_{10}$  e  $f_{11}$  em (3.6) tem-se:

$$D_0 f_{12} + \omega^2 f_{12} = \left[ -2i\omega D_2 A + \frac{A}{2(\omega^2 - 1)} \right] e^{i\omega T_0} - \frac{A}{4(\omega + 1)} e^{i(4+\omega)T_0} - \frac{\bar{A}}{4(\omega - 1)} e^{i(4-\omega)T_0} + \text{c.c.} \quad (3.10)$$

Para a determinação da solução particular de (3.10), é necessário analisar dois casos:  $\omega \neq 2$  e

$$D_0 f_{12} = \left[ -2i\omega D_2 A + \frac{A}{2(\omega^2 - 1)} \right] e^{i\omega T_0} + \text{c.c.}$$

A eliminação dos termos seculares quando  $\omega \neq 2$ , pode ser vista da seguinte forma:

$$2i\omega D_2 A - \frac{A}{2(\omega^2 - 1)} = 0 \quad (3.11)$$

O que resulta em

$$A = \frac{1}{2} a e^{\left[ -\frac{i}{4\omega(\omega^2 - 1)} T_2 + i\beta \right]} \quad (3.12)$$

onde  $a$  e  $\beta$  são constantes. Usando (3.7), (3.9) e (3.12) e substituindo  $T_n$  por  $\varepsilon^n t$ , obtém-se a seguinte solução aproximada quando  $\omega$  é diferente de 1 e 2:

$$f_1 = a \cos \psi + \frac{1}{4} \varepsilon a \left[ \frac{1}{\omega + 1} \cos(2t + \psi) - \frac{1}{\omega - 1} \cos(2t - \psi) \right] + O(\varepsilon^2) \quad (3.13)$$

sendo



$$\psi = \left[ \omega - \frac{\varepsilon^2}{4\omega(\omega^2 - 1)} \right] t + \beta \quad (3.14)$$

A solução obtida é limitada e aperiódica e é válida para qualquer  $\delta$  diferente de 1 e 4. Esse resultado não concorda plenamente com o diagrama de Strutt, que prevê outras regiões de instabilidade. Esta diferença se justifica devido o truncamento da expansão (3.2), no termo quadrático em  $\varepsilon$ .

Quando  $\omega \approx 2$ , é interessante introduzir um parâmetro que dá idéia de proximidade entre 2 e  $\omega$  e que ajuda a reconhecer em (3.10) os chamados termos quase seculares.

$$2 = \omega + \varepsilon^2 \sigma \quad (3.15)$$

Multiplicando-se (3.15) por  $2T_0$  tem-se

$$(4 - \omega)T_0 = \omega T_0 + 2\varepsilon^2 \sigma T_0 = \omega T_0 + 2\sigma T_2 \quad (3.16)$$

A eliminação dos termos seculares de (3.10) só se verifica se

$$-2i\omega D_2 A + \frac{A}{2(\omega^2 - 1)} + \frac{\bar{A}}{4(\omega - 1)} e^{2i\sigma T_2} = 0 \quad (3.17)$$

Para se obter a solução de (3.17), escreve-se

$$A(T_2) = B(T_2) e^{(i\sigma T_2)} \quad (3.18)$$

que substituído em (3.17) resulta em ;

$$-2i\omega D_2 B + \left[ 2\omega\sigma + \frac{1}{2(\omega^2 - 1)} \right] B + \frac{\bar{B}}{4(\omega - 1)} = 0 \quad (3.19)$$

Fazendo  $B = B_r + i B_i$ , sendo  $B_r$  e  $B_i$  números reais, e separando as partes real e imaginária em

(3.19) tem-se;

$$\begin{aligned}
2\omega D_2 B_r - \left[ 2\omega\sigma - \frac{1}{4(\omega+1)} \right] B_i &= 0 \\
2\omega D_2 B_i + \left[ 2\omega\sigma + \frac{\omega+3}{4(\omega^2-1)} \right] B_r &= 0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde  $B_r$  e  $B_i$  são funções do tipo

$$\begin{aligned}
B_r &= b_r e^{\gamma t^2} \\
B_i &= b_i e^{\gamma t^2}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Substituindo (3.21) em (3.20), verifica-se que a solução trivial só é possível se

$$\begin{vmatrix}
2\omega\gamma & -2\omega\sigma + \frac{1}{4(\omega+1)} \\
2\omega\sigma + \frac{\omega+3}{4(\omega^2-1)} & 2\omega\gamma
\end{vmatrix} = 0 \tag{3.22}$$

Ou seja,

$$\gamma^2 = -\frac{1}{4\omega^2} \left[ 2\omega\sigma + \frac{\omega+3}{4(\omega^2-1)} \right] \left[ 2\omega\sigma - \frac{1}{4(\omega+1)} \right] \tag{3.23}$$

Para que a solução seja instável, é preciso que  $\gamma^2 > 0$ , o que só se verifica se:

$$-\frac{\omega+3}{8\omega(\omega^2-1)} < \sigma < \frac{\omega-1}{8\omega(\omega^2-1)} \tag{3.24}$$

Usando-se (3.15) e lembrando que  $\omega = \sqrt{\delta} \approx 2$  obtém-se:

$$-\frac{5}{48} < \sigma < \frac{1}{48} \tag{3.25}$$

$$\delta = 4 - 4\epsilon^2 \sigma \tag{3.26}$$

Substituindo-se os valores de  $\sigma$  de (3.25) em (3.26) obtém-se as curvas de transição que delimitam a chamada segunda região de ressonância paramétrica:

$$\delta = 4 - \frac{1}{12} \varepsilon^2 + \dots \quad (3.27)$$

$$\delta = 4 + \frac{5}{12} \varepsilon^2 + \dots \quad (3.28)$$

Se  $\omega \approx 1$ , o parâmetro de assintonia deve ser redefinido da seguinte forma

$$1 = \omega + \varepsilon \sigma \quad (3.29)$$

de modo que

$$(2 - \omega)T_0 = \omega T_0 + 2\sigma T_1 \quad (3.30)$$

Nesse caso, para eliminar os termos seculares de (3.8) é necessário que

$$2i\omega D_1 A + \bar{A} e^{2i\sigma T_1} = 0 \quad (3.31)$$

do que resulta a solução particular

$$f_{11} = \frac{A}{4(\omega + 1)} e^{i(2+\omega)T_0} + \text{c.c.} \quad (3.32)$$

Substituindo-se (3.32) e (3.7) em (3.6), obtém-se

$$\begin{aligned} D_0^2 f_{12} + \omega^2 f_{12} = & - \left[ 2i\omega D_2 A + D_1^2 A + \frac{A}{4(\omega + 1)} \right] e^{i\omega T_0} \\ & - \frac{A}{4(\omega + 1)} e^{i(4+\omega)T_0} \\ & - i \frac{\omega + 2}{2(\omega + 1)} D_1 A e^{i(2+\omega)T_0} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Para a eliminação dos termos seculares de (3.33) tem-se

$$2i\omega D_2 A + D_1^2 A + \frac{A}{4(\omega + 1)} = 0 \quad (3.34)$$

Derivando-se (3.31) com relação a  $T_1$  e substituindo o resultado em (3.34), obtém-se

$$2i\omega D_2 A + \left[ \frac{1}{4(\omega+1)} + \frac{1}{4\omega^2} \right] A - \frac{\sigma}{\omega} \bar{A} e^{2i\sigma T_1} = 0 \quad (3.35)$$

Verifica-se que (3.31) e (3.35) decorrem de uma expansão em múltiplas escalas de

$$2i\omega \frac{dA}{dt} + \varepsilon \left( 1 - \frac{\varepsilon\sigma}{\omega} \right) \bar{A} e^{2i\varepsilon\sigma t} + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{4(\omega+1)} + \frac{1}{4\omega^2} \right] A = 0 \quad (3.36)$$

Adotando-se a mudança de variáveis

$$A = (B_r + iB_i) e^{i\varepsilon\sigma t} \quad (3.37)$$

Separando as partes real e imaginária de (3.35) tem-se

$$\begin{aligned} 2\omega \frac{dB_r}{dt} - \left[ \varepsilon + 2\varepsilon\sigma\omega - \frac{\varepsilon^2\sigma}{\omega} - \varepsilon^2 \frac{\omega^2 + \omega + 1}{4\omega^2(\omega+1)} \right] B_i &= 0 \\ 2\omega \frac{dB_i}{dt} - \left[ \varepsilon - 2\varepsilon\sigma\omega - \frac{\varepsilon^2\sigma}{\omega} + \varepsilon^2 \frac{\omega^2 + \omega + 1}{4\omega^2(\omega+1)} \right] B_r &= 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} B_r &= b_r e^{\gamma t} \\ B_i &= b_i e^{\gamma t} \end{aligned} \quad (3.39)$$

com  $b_r$  e  $b_i$  constantes.

Além da solução trivial, para que exista outra solução é preciso que

$$\gamma^2 = \frac{\varepsilon^2}{4\omega^2} \left[ 1 + 2\sigma\omega - \frac{\varepsilon\sigma}{\omega} - \varepsilon \frac{\omega^2 + \omega + 1}{4\omega^2(\omega+1)} \right] \left[ 1 - 2\sigma\omega - \frac{\varepsilon\sigma}{\omega} + \varepsilon \frac{\omega^2 + \omega + 1}{4\omega^2(\omega+1)} \right] \quad (3.40)$$

A instabilidade da solução ocorre quando  $\gamma^2$  é positivo definido. Para que isso aconteça

$$\left( 1 - \frac{\varepsilon\sigma}{\omega} \right)^2 - \left[ \varepsilon \frac{\omega^2 + \omega + 1}{4\omega^2(\omega+1)} - 2\sigma\omega \right]^2 > 0 \quad (3.41)$$

Usando (3.29) e sabendo-se que  $\omega \approx 1$ , verifica-se que (3.41) equivale a

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{16}\varepsilon < \sigma < \frac{1}{2} + \frac{3}{16}\varepsilon \quad (3.42)$$

Portanto, as curvas de transição que delimitam a primeira região de ressonância paramétrica são dadas por

$$\delta = 1 - \varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \dots \quad (3.43)$$

$$\delta = 1 + \varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \dots \quad (3.44)$$

### 3.3.2- Efeito do Amortecimento

As forças dissipativas estão quase sempre presentes nos sistemas físicos. Admite-se neste trabalho que essas forças são representadas por um modelo de amortecimento viscoso, a equação de movimento completa é, neste caso, dada por

$$f_1''(t) + 2c f_1'(t) + (\delta + 2\varepsilon \cos 2t)f_1(t) = 0 \quad (3.45)$$

O coeficiente de amortecimento é bastante pequeno e, assim, pode-se fazer

$$c = \varepsilon \hat{c} \quad (3.46)$$

Através do método das múltiplas escalas é obtida a solução desta equação, com a determinação das novas curvas de transição entre estabilidade e instabilidade.

Substituindo-se em (3.45) uma expansão do tipo (3.2), a separação dos termos de mesma ordem resulta:

$$D_0^2 f_{10} + \omega^2 f_{10} = 0 \quad (3.47)$$

$$D_0^2 f_{11} + \omega^2 f_{11} = -2D_0 D_1 f_{10} - 2f_{10} \cos 2T_0 - 2\hat{c} D_0 f_{10} \quad (3.48)$$

$$D_0^2 f_{12} + \omega^2 f_{12} = -2D_0 D_2 f_{10} - D_1^2 f_{10} - 2D_0 D_1 f_{11} - 2f_{11} \cos 2T_0 \\ - 2\hat{c}(D_0 f_{11} + D_1 f_{10}) \quad (3.49)$$

onde  $\omega^2 = \delta$ .

A solução de (3.47) é

$$f_{10} = A(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} + c.c. \quad (3.50)$$

Substituindo (3.50) em (3.48) tem-se

$$D_0^2 f_{11} + \omega^2 f_{11} = -2i\omega \left( D_1 A + \hat{c} A \right) e^{i\omega T_0} - A e^{i(2+\omega)T_0} - \bar{A} e^{i(2-\omega)T_0} + c.c. \quad (3.51)$$

Se  $\omega$  é muito diferente de 1, a eliminação dos termos seculares de (3.51) é realizada da seguinte forma

$$D_1 A + \hat{c} A = 0 \quad (3.52)$$

o que resulta em

$$f_{11} = \frac{A}{4(\omega + 1)} e^{i(2+\omega)T_0} - \frac{\bar{A}}{4(\omega - 1)} e^{i(2-\omega)T_0} + c.c. \quad (3.53)$$

Utilizando-se (3.50) e (3.53) a equação (3.49) torna-se

$$D_0^2 f_{12} + \omega^2 f_{12} = - \left[ D_1^2 A + 2\hat{c} D_1 A + 2i\omega D_2 A - \frac{A}{2(\omega^2 - 1)} \right] e^{i\omega T_0} \\ - i \frac{\omega + 2}{2(\omega + 1)} \left( D_1 A + \hat{c} A \right) e^{i(2+\omega)T_0} \\ + i \frac{2 - \omega}{2(\omega - 1)} \left( D_1 \bar{A} + \hat{c} \bar{A} \right) e^{i(2-\omega)T_0} \\ - \frac{A}{4(\omega + 1)} e^{i(4+\omega)T_0} + \frac{\bar{A}}{4(\omega - 1)} e^{i(4-\omega)T_0} + c.c. \quad (3.54)$$

Quando  $\omega$  é muito diferente de 2, os termos seculares de (3.54) são eliminados se

$$D_1^2 A + 2\hat{c} D_1 A + 2i\omega D_2 A - \frac{A}{2(\omega^2 - 1)} = 0 \quad (3.55)$$

Substituindo-se (3.52) em (3.55) tem-se

$$2i\omega D_2 A - \left[ \hat{c}^2 + \frac{1}{2(\omega^2 - 1)} \right] A = 0 \quad (3.56)$$

Percebe-se que (3.52) e (3.56) resultam de uma expansão de múltiplas escalas de

$$2i\omega \frac{dA}{dt} + \varepsilon \left\{ 2i\omega \hat{c} - \varepsilon \left[ \hat{c}^2 + \frac{1}{2(\omega^2 - 1)} \right] \right\} A = 0 \quad (3.57)$$

Substituindo-se

$$A = (a_r + ia_i) e^{\gamma t} \quad (3.58)$$

em (3.57) e separando as partes real e imaginária, verifica-se que uma solução diferente da trivial só é possível se

$$4\omega^2 \left( \gamma + \varepsilon \hat{c} \right)^2 + \left\{ \varepsilon^2 \left[ \hat{c}^2 + \frac{1}{2(\omega^2 - 1)} \right] \right\}^2 = 0 \quad (3.59)$$

Os valores de  $\gamma$  que satisfazem (3.59) são complexos conjugados com parte real negativa, e portanto a solução de (3.45) tende ao repouso qualquer que seja  $\delta$ , contanto que diferente de 1 e 4.

Para se analisar o efeito do amortecimento sobre a segunda região de ressonância paramétrica, é conveniente introduzir um parâmetro de assintonia  $\sigma$  tal que

$$2 = \omega + \varepsilon \sigma \quad (3.60)$$

Os termos seculares em (3.54) são eliminados impondo-se

$$D_1^2 A + 2\hat{c} D_1 A + 2i\omega D_2 A - \frac{A}{2(\omega^2 - 1)} - \frac{\bar{A}}{4(\omega - 1)} e^{2i\sigma T_1} = 0 \quad (3.61)$$

Usando-se (3.52)

$$D_2 A + \frac{i}{2\omega} \left[ \frac{1}{2(\omega^2 - 1)} + \hat{c}^2 \right] A + \frac{i}{8\omega(\omega - 1)} \bar{A} e^{2i\sigma T_1} = 0 \quad (3.62)$$

As equações (3.52) e (3.62) vem de uma expansão de múltiplas escalas de

$$\frac{dA}{dt} + \left\{ \epsilon \hat{c} + \frac{i\epsilon^2}{2\omega} \left[ \frac{1}{2(\omega^2 - 1)} + \hat{c}^2 \right] \right\} A + \frac{i\epsilon^2}{8\omega(\omega - 1)} \bar{A} e^{2i\sigma T_1} = 0 \quad (3.63)$$

Levando-se

$$A = B e^{i\sigma T_1} \quad (3.64)$$

a (3.63) tem-se

$$\frac{dB}{dt} + \left\{ \epsilon \hat{c} + \frac{i\epsilon^2}{2\omega} \left[ \frac{1}{2(\omega^2 - 1)} + \hat{c}^2 \right] + i\epsilon\sigma \right\} B + \frac{i\epsilon^2}{8\omega(\omega - 1)} \bar{B} = 0 \quad (3.65)$$

cuja solução é do tipo

$$B = (b_r + ib_i) e^{\gamma t} \quad (3.66)$$

Separando-se as partes real e imaginária de (3.65), verifica-se que a solução não-trivial de

(3.45) só existe se

$$\left( \gamma + \epsilon \hat{c} \right)^2 + \left[ \frac{(\epsilon \hat{c})^2}{2\omega} + \epsilon\sigma - \frac{\epsilon^2}{8\omega(\omega + 1)} \right] \left[ \frac{(\epsilon \hat{c})^2}{2\omega} + \epsilon\sigma + \frac{\epsilon^2(\omega + 3)}{8\omega(\omega^2 - 1)} \right] = 0 \quad (3.67)$$

Para que a solução seja instável, é preciso que a parte real de  $\gamma$  seja positiva, ou seja



$$\left[ \frac{\left( \hat{\varepsilon} c \right)^2}{2\omega} + \varepsilon \sigma - \frac{\varepsilon^2}{8\omega(\omega+1)} \right] \left[ \frac{\left( \hat{\varepsilon} c \right)^2}{2\omega} + \varepsilon \sigma + \frac{\varepsilon^2(\omega+3)}{8\omega(\omega^2-1)} \right] < -\left( \hat{\varepsilon} c \right)^2 \quad (3.68)$$

Usando (3.60) e resolvendo a inequação (3.68) com  $\omega \approx 2$  obtém-se as novas curvas de transição correspondentes ao sistema amortecido.

$$\delta = 4 + \frac{\varepsilon^2}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{16} \varepsilon^4 - 16 \left( \hat{\varepsilon} c \right)^2} \quad (3.69)$$

Considerando-se o caso em que  $\omega \approx 1$ , o parâmetro de assintonia é agora definido da seguinte forma

$$1 = \omega + \varepsilon \sigma \quad (3.70)$$

Para a eliminação dos termos seculares de (3.51) é necessário que

$$2i\omega D_1 A + 2i\omega \hat{c} A + \bar{A} e^{2i\sigma T_1} = 0 \quad (3.71)$$

O que determina a solução particular

$$f_{11} = \frac{A}{4(\omega+1)} e^{i(2+\omega)T_0} + \text{c.c.} \quad (3.72)$$

Substituindo (3.72) em (3.49) e levando em consideração (3.50), TEM-SE

$$\begin{aligned} D_0^2 f_{12} + \omega^2 f_{12} = & - \left[ D_1^2 A + 2\hat{c} D_1 A + 2i\omega D_2 A + \frac{A}{4(\omega+1)} \right] e^{i\omega T_0} \\ & - i \frac{\omega+2}{2(\omega+1)} \left( D_1 A + \hat{c} A \right) e^{i(2+\omega)T_0} \\ & - \frac{A}{4(\omega+1)} e^{i(4+\omega)T_0} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Para a eliminação dos termos seculares de (3.73) é necessário que

$$D_1^2 A + 2i\omega D_2 A + \frac{A}{4(\omega+1)} + 2\hat{c} D_1 A = 0 \quad (3.74)$$

Substituindo (3.71) em (3.74) obtém-se

$$2i\omega D_2 A - \left[ \hat{c}^2 - \frac{\omega^2 + \omega + 1}{4\omega^2(\omega + 1)} \right] A - \frac{\sigma}{\omega} \bar{A} e^{2i\sigma T_1} = 0 \quad (3.75)$$

Nota-se que (3.71) e (3.75) decorrem de uma expansão em múltiplas escalas de

$$2i\omega \frac{dA}{dt} + \left\{ 2i\omega \hat{c} - \varepsilon \left[ \hat{c}^2 - \frac{\omega^2 + \omega + 1}{4\omega^2(\omega + 1)} \right] \right\} \varepsilon A + \left( 1 - \frac{\varepsilon\sigma}{\omega} \right) \varepsilon \bar{A} e^{2i\sigma T_1} = 0 \quad (3.76)$$

Utilizando a mudança de variáveis como em (3.64),

$$2i\omega \frac{dB}{dt} + \left\{ 2i\omega \hat{c} - \varepsilon \left[ \hat{c}^2 - \frac{\omega^2 + \omega + 1}{4\omega^2(\omega + 1)} \right] - 2\omega\sigma \right\} \varepsilon B + \left( 1 - \frac{\varepsilon\sigma}{\omega} \right) \varepsilon \bar{B} = 0 \quad (3.77)$$

A solução é do tipo (3.66). Separando as partes real e imaginária de (3.77), verifica-se que uma solução diferente da trivial só é possível se

$$\gamma = -\varepsilon \hat{c} \pm \frac{\varepsilon}{2\omega} \sqrt{\left( 1 - \frac{\varepsilon\sigma}{\omega} \right)^2 - \left\{ 2\omega\sigma + \varepsilon \left[ \hat{c}^2 - \frac{\omega^2 + \omega + 1}{4\omega^2(\omega + 1)} \right] \right\}^2} \quad (3.78)$$

A resposta crescerá indefinidamente se

$$\left( 1 - \frac{\varepsilon\sigma}{\omega} \right)^2 - \left\{ 2\omega\sigma + \varepsilon \left[ \hat{c}^2 - \frac{\omega^2 + \omega + 1}{4\omega^2(\omega + 1)} \right] \right\}^2 > 4\omega^2 \hat{c}^2 \quad (3.79)$$

Usando (3.70), nota-se que os limites da região de instabilidade são definidos por

$$\sigma = \frac{1}{2\omega} \left\{ -\varepsilon \left[ \hat{c}^2 - \frac{\omega^2 + \omega + 1}{4\omega^2(\omega + 1)} \right] \pm \sqrt{\left( \frac{1}{\omega} - 2 \right)^2 - 4\omega^2 \hat{c}^2} \right\} \quad (3.80)$$

Se  $\omega \approx 1$ , as curvas de transição que delimitam a primeira região de ressonância paramétrica do sistema amortecido são

$$\delta = 1 \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4 \left( \varepsilon \hat{c} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{8}} \quad (3.81)$$

Mostra-se na Figura 3.2 o efeito do amortecimento sobre as regiões de estabilidade. Verifica-se que o amortecimento tem um efeito benéfico sobre a estabilidade do sistema, diminuindo consideravelmente as regiões de instabilidade.

### 3.3.3- Influência das Não-Linearidades

Sabe-se que os sistemas lineares, sem amortecimento e excitados parametricamente possuem soluções que crescem indefinidamente com o tempo, mas os sistemas reais sempre possuem algum grau de amortecimento o qual tem um efeito estabilizante, diminuindo sensivelmente o tamanho das regiões instáveis. Se o sistema é totalmente linear, a amplitude do movimento pode aumentar a ponto de levar a sua destruição física. A maior parte dos sistemas mecânicos são, entretanto, capazes de mobilizar não-linearidades quando a amplitude da oscilação cresce exageradamente, limitando esse crescimento.

De acordo com [7], se há interesse no estudo do comportamento pós-crítico, ou melhor, na determinação das amplitudes e fases do regime estacionário, é preciso que sejam incorporados à equação de Mathieu os termos não-lineares. Quando essas não-linearidades estão associadas à rigidez do sistema, a equação correspondente é uma generalização da equação de Duffing não-forçada, incorporando a excitação axial.

A equação da coluna com um grau de liberdade que leva em consideração não-linearidade cúbica associada apenas à rigidez do sistema foi deduzida no capítulo II e está expressa em (2.46).

Admitindo que sejam pequenas as oscilações em torno da posição indeformada, a resposta pode ser aproximada por uma expansão do tipo

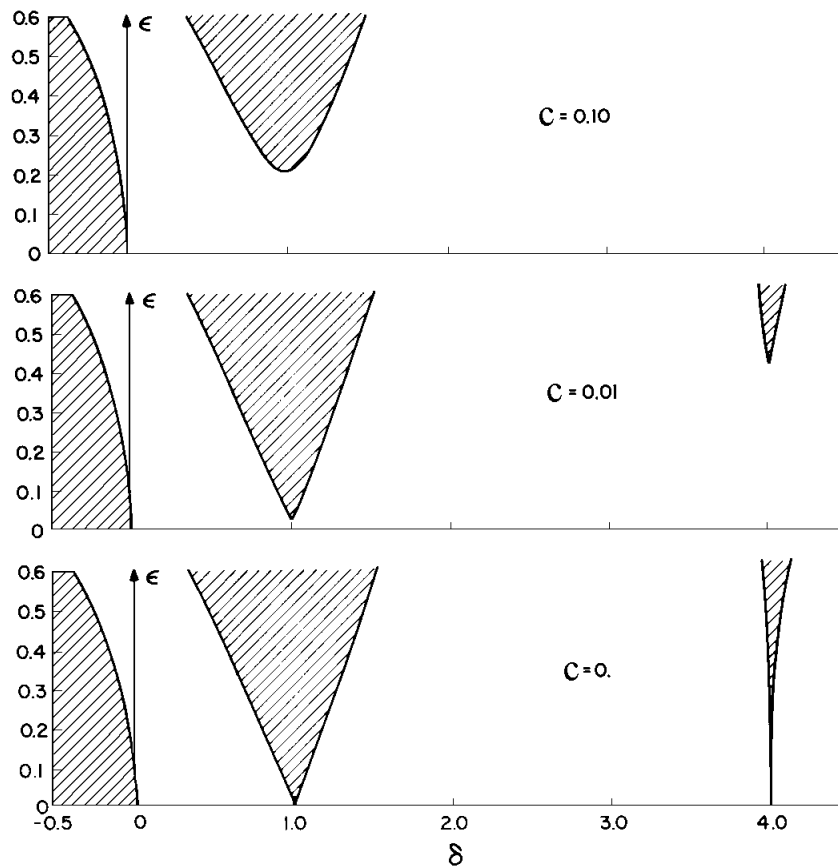
$$f_1(t, \epsilon) = \epsilon f_{11}(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 f_{12}(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^3 f_{13}(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (3.82)$$

As diferentes escalas de tempo são novamente definidas por  $T_n = \varepsilon^n t$ , onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Considera-se ainda que sejam muito pequenos tanto o amortecimento como a amplitude da parcela variável do carregamento, de maneira que

$$c = 2\varepsilon^2 \hat{c} \quad (3.83)$$

$$\delta_2 = \varepsilon^2 \hat{\delta}_2 \quad (3.84)$$



**Figura 3.2** - Efeito do amortecimento viscoso sobre a estabilidade das soluções da equação de Mathieu. As áreas hachuradas são instáveis.[25]

A separação dos termos de mesma ordem em (2.46) leva a

$$D_0^2 f_{11} + \omega^2 f_{11} = 0 \quad (3.85)$$

$$D_0^2 f_{12} + \omega^2 f_{12} = -2D_0 D_1 f_{11} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 f_{13} + \omega^2 f_{13} = & -2D_0 D_1 f_{12} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) f_{11} - 2\frac{\hat{c}}{\tau} D_0 f_{11} \\
& + \frac{\pi^2}{\tau} \hat{\delta}_2 \cos(\Omega t) f_{11} - \frac{1}{2\tau} f_{11}^3 \pi^6
\end{aligned} \quad (3.87)$$

Substituindo-se a solução de (3.85),

$$f_{11} = A_1(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} + c.c. \quad (3.88)$$

em (3.86), obtém-se

$$D_0^2 f_{12} + \omega^2 f_{12} = -2i\omega D_1 A e^{i\omega T_0} + c.c. \quad (3.89)$$

Para que a expansão (3.82) seja convergente, é necessário eliminar os termos seculares de (3.89), o que só ocorrerá se

$$A_1 = A_1(T_2) \quad (3.90)$$

Nesse caso a solução de (3.86) é

$$f_{12} = A_2(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} + c.c. \quad (3.91)$$

Substituindo-se (3.88) e (3.91) em (3.87), e levando em consideração (3.90); chega-se a

$$\begin{aligned}
D_0^2 f_{13} + \omega^2 f_{13} = & \left[ -2i\omega \left( D_1 A_2 + D_2 A_1 + \frac{\hat{c}}{\tau} A_1 \right) - \frac{3\pi^6}{2\tau} A_1^2 \bar{A}_1 \right] e^{i\omega T_0} \\
& + \frac{\pi^2}{2\tau} \hat{\delta}_2 \left( \bar{A}_1 e^{i(\Omega-\omega)T_0} + A_1 e^{i(\Omega+\omega)T_0} \right) \\
& - \frac{\pi^6}{2\tau} A_1^3 e^{3i\omega T_0}
\end{aligned} \quad (3.92)$$

A partir desse ponto, analisa-se separadamente duas possibilidades, conforme a proximidade ou não entre  $\frac{\Omega}{2}$  e  $\omega$ .

Quando  $\omega \neq \frac{\Omega}{2}$ , a eliminação dos termos seculares em (3.92) exige que

$$2i\omega \left( D_1 A_2 + D_2 A_1 + \frac{\hat{c}}{\tau} A_1 \right) + \frac{3\pi^6}{2\tau} A_1^2 \bar{A}_1 = 0 \quad (3.93)$$

A equação (3.93) é do tipo

$$D_1 A_2 + F_1(T_2) = 0 \quad (3.94)$$

De onde se conclui que

$$A_2 = -F_1(T_2)T_1 + F_2(T_2) \quad (3.95)$$

Para que a expansão seja convergente, deve valer  $F_1(T_2) = 0$ , ou seja,  $D_1 A_2 = 0$

$$2i\omega \left( D_2 A_1 + \frac{\hat{c}}{\tau} A_1 \right) + \frac{3\pi^6}{2\tau} A_1^2 \bar{A}_1 = 0 \quad (3.96)$$

Com a mudança de variáveis definida por

$$A_1 = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (3.97)$$

Onde  $a = a(T_2)$  e  $\beta = \beta(T_2)$  separando as partes real e imaginária de (3.96) obtém-se

$$a' + a \frac{\hat{c}}{\tau} = 0 \quad (3.98)$$

$$-\omega \beta' a + \frac{3\pi^6 a^3}{16\tau} = 0 \quad (3.99)$$

Mais uma vez o truncamento da expansão (3.82) é o responsável pelo desaparecimento das outras regiões de ressonância paramétrica que não a primeira.

Se  $\omega \approx \Omega/2$ , o termo de  $(\Omega - \omega)$  é quase secular, e requer uma consideração especial.

Introduzindo-se o parâmetro de assintonia  $\sigma$  definido por

$$\frac{\Omega}{2} = \omega + \varepsilon^2 \sigma \quad (3.100)$$

de maneira que

$$(\Omega - \omega)T_0 = \omega T_0 + 2\sigma T_2 \quad (3.101)$$

Verifica-se que é possível eliminar os termos seculares de (3.92) se

$$2i\omega \left( D_1 A_2 + D_2 A_1 + \frac{\hat{c}}{\tau} \right) + \frac{3\pi^6 A_1^2 \bar{A}_1}{2\tau} - \frac{\pi^2 \hat{\delta}_2 \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2}}{2\tau} = 0 \quad (3.102)$$

Essa equação também é do tipo (3.94). Pelas mesmas razões, o termo  $D_1 A_2$  deve ser nulo,

o que resulta em

$$2i\omega \left( D_2 A_1 + \frac{\hat{c}}{\tau} \right) + \frac{3\pi^6 A_1^2 \bar{A}_1}{2\tau} - \frac{\pi^2 \hat{\delta}_2 \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2}}{2\tau} = 0 \quad (3.103)$$

Substituindo-se,

$$A_1 = \frac{1}{2} b e^{i(\sigma T_2 + \beta)} \quad (3.104)$$

em (3.103), onde  $b = b(T_2)$  e  $\beta = \beta(T_2)$  e separando-se as partes real e imaginária, tem-se

$$2\omega b' + \frac{2}{\tau} c \omega b = -\frac{1}{2\tau} \pi^2 \hat{\delta}_2 b \sin(2\beta) \quad (3.105)$$

$$2\omega \beta' b + 2\omega \sigma b - \frac{3}{2\tau} \pi^6 b^3 = -\frac{1}{2\tau} \pi^2 \hat{\delta}_2 b \cos(2\beta) \quad (3.106)$$

Ao desconsiderar-se a solução trivial ( $b=0$ ), as equações (3.105) e (3.106) definem as amplitudes

do regime estacionário ao se fazer  $\beta' = b' = 0$ .

$$\beta = -\frac{1}{2} \arcsin \left( 4 \frac{c\omega}{\pi^2 \hat{\delta}_2} \right) \quad (3.107)$$

Substituindo-se (3.107) em (3.106) quando  $\beta' = 0$ , tem-se a amplitude  $b$  dada por:

$$b = \frac{1}{3} \frac{\left(6\omega\tau\Omega - 12\omega^2\tau \pm 3\sqrt{\pi^4\delta_2^2 - 4c^2\omega^2}\right)^{1/2}}{\pi^3\epsilon} \quad (3.108)$$

Usando-se (3.88), (3.100) e (3.104), nota-se que, em primeira aproximação, a resposta do sistema é

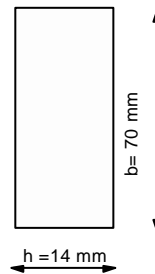
$$f_1(t) \approx \epsilon f_{11}(t) = \epsilon b \cos\left(\frac{\Omega}{2}t + \beta\right) \quad (3.109)$$

Sendo  $a_w = \epsilon b$  a amplitude de oscilação fica

$$a_w = \frac{1}{3} \frac{\left(6\omega\tau\Omega - 12\omega^2\tau \pm 3\sqrt{\pi^4\delta_2^2 - 4c^2\omega^2}\right)^{1/2}}{\pi^3} \quad (3.110)$$

onde  $\delta_2$  é o parâmetro adimensional da amplitude da parcela variável do carregamento axial definido em (2.31),  $\tau$  é o parâmetro adimensional do peso específico da coluna expresso em (2.31),  $\Omega$  é a frequência da excitação e  $\omega$  é a frequência natural do sistema. Considerou-se o peso específico da coluna,  $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$ , o módulo de elasticidade,  $E = 2.1 \times 10^{10} \text{ Kg/m}^2$  o amortecimento viscoso,  $c$ , foi considerado igual a 0.3 e o comprimento da coluna,  $L=1.18 \text{ m}$ .

Considerou-se a seção transversal da coluna com as seguintes dimensões



**Figura 3.3** - Seção transversal da coluna.



Sabe-se do Capítulo II, que a equação do movimento para o caso linear sem amortecimento e submetida apenas à parcela constante do carregamento axial é da seguinte forma

$$\ddot{f}_m + \frac{m^2 \pi^2}{\tau} (-\delta_1 + m\pi^2) f_m = 0 \quad (3.111)$$

onde  $m$  é o grau de liberdade considerado e  $\delta_1$  é o parâmetro adimensional da parcela constante do carregamento axial expresso em (2.31).

Fazendo

$$f_m = e^{-i\omega_m t} \quad (3.112)$$

$$\ddot{f}_m = -\omega_m^2 e^{-i\omega_m t} \quad (3.113)$$

e substituindo-se (3.112) e (3.113) em (3.111) tem-se

$$\omega_m^2 = \frac{m^4 \pi^4}{\rho A_s L^4} \left( 1 - \frac{P_o}{m^2 \left( \frac{EI \pi^2}{L^2} \right)} \right) \quad (3.114)$$

onde  $A_s$  é a área da seção transversal e  $P_o$  é a parcela constante do carregamento axial.

Chamando-se

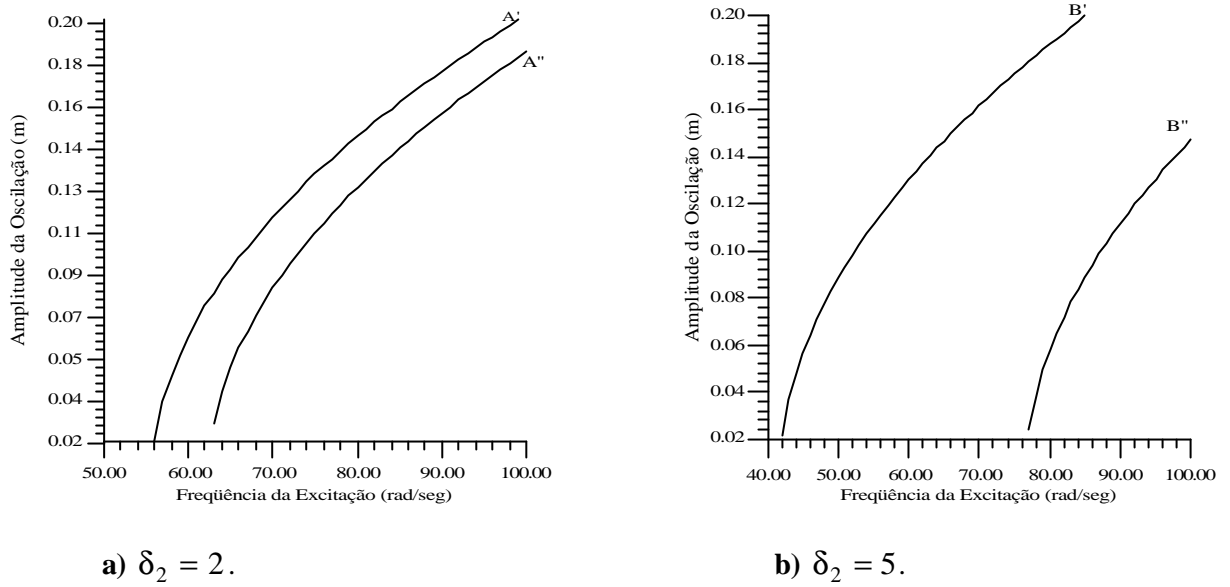
$$\omega_{om}^2 = \frac{m^4 \pi^4}{\rho A_s L^4} \quad (3.115)$$

Que representa o quadrado da frequência natural de vibração, no caso de ser nula a carga axial  $P_o$  e

sendo  $P_{cr} = \frac{EI \pi^2}{L^2}$ , a carga crítica de Euler, tem-se a expressão da frequência natural do sistema,

$\omega$ , dada por

$$\omega^2 = \omega_m^2 = \omega_{om}^2 \left( 1 - \frac{P_o}{m^2 (P_{cr})} \right) \quad (3.116)$$



**Figura 3.4** - Curvas de resposta calculadas com  $P_0 = 0.6P_{cr}$ .

As curvas de resposta mostradas nas Figuras 3.4, 3.5 e 3.6, foram plotadas apenas para o módulo da expressão 3.110, pois quando o parâmetro de controle é o parâmetro de amplitude, as curvas de resposta são simétricas em relação ao eixo do parâmetro. Já quando o parâmetro de controle é a frequência da excitação as curvas de resposta são simétricas, tanto em relação ao eixo do parâmetro, como em relação ao eixo que define as amplitudes da oscilação.

Mostra-se na Figura 3.4.a as curvas de resposta para o valor do parâmetro adimensional da amplitude da parcela variável do carregamento axial,  $\delta_2 = 2$ . As curvas A' e A'' são descritas respectivamente pelas expressões

$$a_w^{A'} = 0.01075051147 \sqrt{7.930377\Omega - 441.0943923} \quad (3.117)$$

$$a_w^{A''} = 0.01075051147 \sqrt{7.930377052\Omega - 493.7384485} \quad (3.118)$$

Verifica-se que, para o valor de  $\delta_2 = 2$ , a amplitude da oscilação começa a crescer numa faixa onde a frequência da excitação varia de 56 Hz a 63 Hz, na primeira região de ressonância

paramétrica, sendo que, a faixa entre estas duas curvas é a faixa de instabilidade para  $\delta_2 = 2$ .

$P_o = 0.6 P_{cr}$  foi o valor considerado para a parcela constante do carregamento axial.

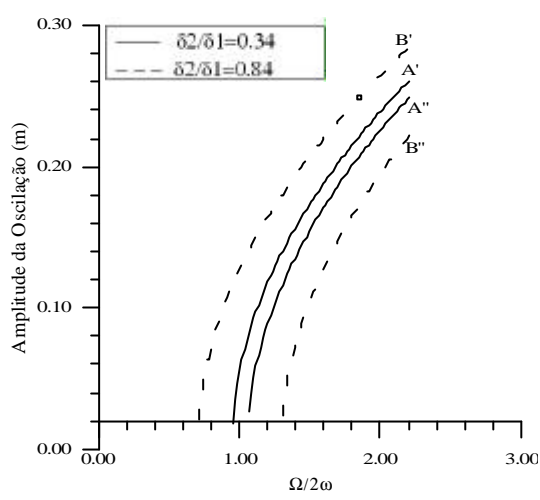
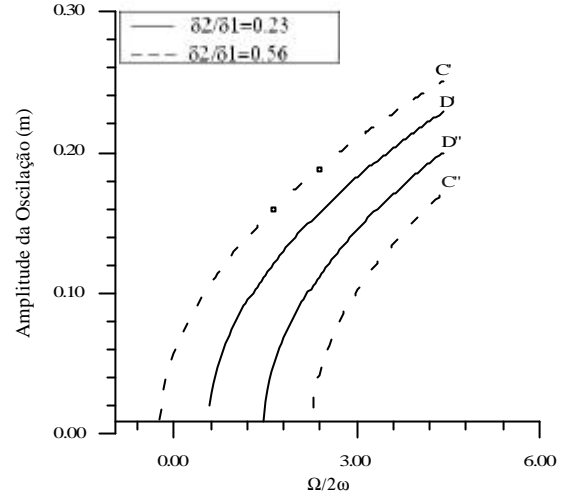
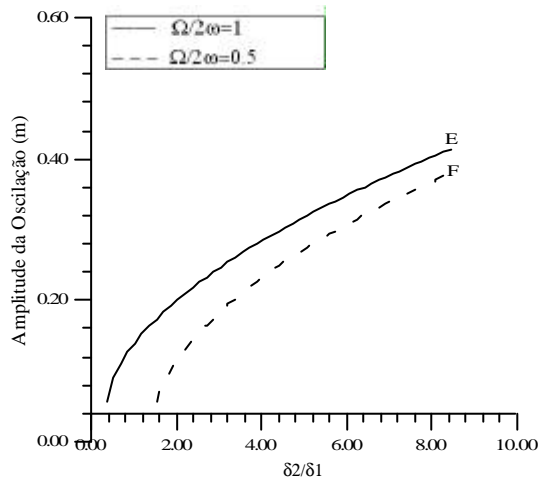
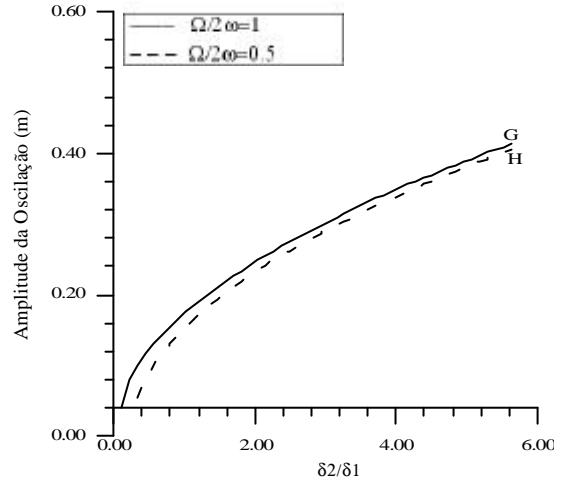
Mostra-se na Figura 3.4.b as curvas de resposta para o valor do parâmetro adimensional da amplitude da parcela variável do carregamento axial,  $\delta_2 = 5$ . As curvas B' e B'' são descritas respectivamente pelas expressões

$$a_w^{B'} = 0.01075051147 \sqrt{7.9303770\Omega - 329.2022121} \quad (3.119)$$

$$a_w^{B''} = 0.01075051147 \sqrt{7.9303770\Omega - 605.6306287} \quad (3.120)$$

Verifica-se que, quanto maior o parâmetro,  $\delta_2$ , maior é a faixa de instabilidade. Com o objetivo de se mostrar tal conclusão superpõe-se as curvas 3.4.a e 3.4.b na Figura 3.5.a, verificando-se que, quando  $\delta_2 = 5$ , ou seja,  $\frac{\delta_2}{\delta_1} = 0.84$ , a faixa de instabilidade é maior do que para o caso onde  $\delta_2 = 2$ , ou seja,  $\frac{\delta_2}{\delta_1} = 0.34$ .

Mostra-se na Figura 3.5.b o mesmo fenômeno, mas agora para o caso onde,  $P_o = 0.9 P_{cr}$ . As curvas C' e C'', mostram as curvas de resposta para o valor do parâmetro adimensional da amplitude da parcela variável do carregamento axial,  $\delta_2 = 5$ . Já as curvas D' e D'', mostram as curvas de resposta para um valor de,  $\delta_2 = 2$ . Verifica-se neste caso que a faixa de instabilidade é maior ainda do que no caso da Figura 3.5.a, pois o valor da parcela constante do carregamento axial,  $P_o = 0.9 P_{cr}$ , é muito grande.

a)  $P_o = 0.6P_{cr}$ b)  $P_o = 0.9P_{cr}$ **Figura 3.5** - Curvas de resposta para diferentes níveis de  $\delta_2$ .a)  $P_o = 0.6P_{cr}$ b)  $P_o = 0.9P_{cr}$ **Figura 3.6** - Relação entre a amplitude da resposta e a amplitude da excitação.

As curvas C' e C'', são descritas pelas expressões

$$a_w^{C'} = 0.01075051147 \sqrt{3.9654576\Omega + 28.7785162} \quad (3.121)$$

$$a_w^{C''} = 0.01075051147 \sqrt{3.9654576\Omega - 262.5184490} \quad (3.122)$$

respectivamente.

As curvas D' e D'' são descritas por

$$a_w^{D'} = 0.01075051147 \sqrt{3.96545760\Omega - 63.92506802} \quad (3.123)$$

$$a_w^{D''} = 0.01075051147 \sqrt{3.96545760\Omega - 169.8148648} \quad (3.124)$$

respectivamente.

As inclinações das curvas resultantes são devidas às não-linearidades derivadas da energia potencial. Como não existem não-linearidades provenientes das forças de inércia, estas curvas não mudam a sua inclinação qualquer que seja o valor de  $P_o < P_{cr}$ .

É importante lembrar que as soluções não-triviais só representam o fenômeno físico quando as amplitudes são suficientemente pequenas para que se possa admitir a validade da lei de Hooke.

Mostra-se na Figura 3.6.a como varia a amplitude da resposta com o parâmetro  $\delta_2$ , para o caso onde a frequência da excitação é igual a frequência natural do sistema, ou seja,  $\frac{\Omega}{2\omega} = 0.5$ , e para o caso onde a frequência da excitação é o dobro da frequência natural do sistema, isto é,  $\frac{\Omega}{2\omega} = 1$ , considerando-se o valor da parcela constante do carregamento axial  $P_o = 0.6P_{cr}$ .

As curvas E e F são descritas pelas expressões

$$a_w^E = 0.01075051147 \sqrt{0.4758226 + 3\delta_2 \sqrt{97.40909108 - \frac{312.653124}{\delta_2^2}}} \quad (3.125)$$

$$a_w^F = 0.01075051147 \sqrt{-233.6923495 + 3\delta_2 \sqrt{97.40909108 - \frac{312.653124}{\delta_2^2}}} \quad (3.126)$$

respectivamente.

Verifica-se pela Figura 3.6.a que a amplitude de oscilação começa a crescer mais rapidamente quando a frequência da excitação é o dobro da frequência natural do sistema. Mostra-se na Figura 3.6.b as curvas de resposta para o caso onde  $P_o = 0.9P_{cr}$ , sendo este valor muito grande o que faz com que as amplitudes cresçam mais rapidamente, tanto na primeira como na segunda

região de ressonância paramétrica, crescendo um pouco mais rápido na primeira região de ressonância paramétrica. As curvas G e H são descritas pelas expressões

$$a_w^G = 0.01862043208 \sqrt{\delta_2 \sqrt{97.40909108 - \frac{78.17389056}{\delta_2^2}}} \quad (3.127)$$

$$a_w^H = \sqrt{-58.43498321 + 3\delta_2 \sqrt{97.40909108 - \frac{78.17389056}{\delta_2^2}}} \quad (3.128)$$

respectivamente.

### **Procedimento Computacional**

## 4.1 - Introdução

Para a resolução numérica do sistema de equações lineares e não-lineares com ou sem imperfeição geométrica inicial, utilizou-se o algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem, implementado em Fortran para um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem [27].

Algumas ampliações foram feitas no programa a fim de resolver um sistema de várias equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, para análise de estruturas com vários graus de liberdade. Implementou-se ainda um algoritmo para traçar as seções de Poincaré, e diagramas de bifurcação, para determinar os valores de transição da estabilidade para a instabilidade, no espaço dos parâmetros de controle e para a verificação da influência da imperfeição geométrica inicial nas amplitudes do sistema no regime permanente.

Os programas desenvolvidos possuem como dados de entrada os tempos inicial e final,  $t_0$  e  $t_f$ , as condições iniciais, o intervalo de tempo para o cálculo das seções de Poincaré, IDELX, e os parâmetros adimensionais da coluna descritos em (2.31).

## 4.2- Resposta do Sistema e Espaço Fase

O modelo dinâmico do presente trabalho é representado por equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem .

Para a utilização do algoritmo Runge-Kutta, deve-se transformar estas equações em sistemas de duas equações de 1ª ordem, introduzindo-se a velocidade como variável auxiliar.

Admite-se que o problema de valor inicial apresente como solução para as variáveis do problema o que segue

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$



$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.1)$$

onde  $x$  é o deslocamento,  $y$  a velocidade e  $\dot{y}$  a aceleração.

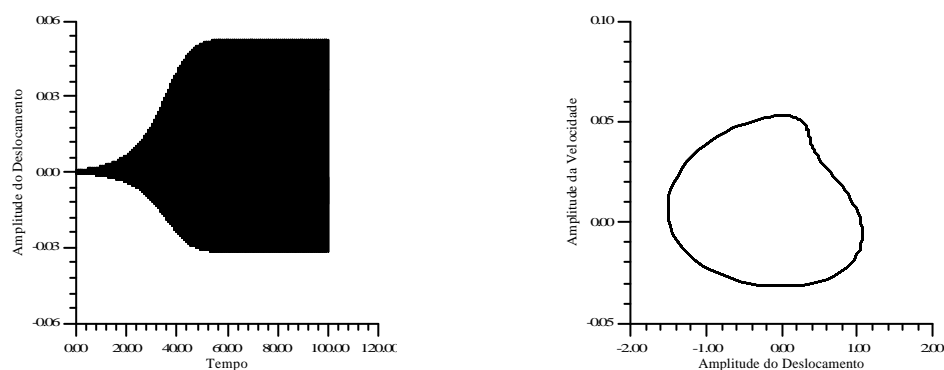
O sistema possui condições iniciais de deslocamento e de velocidade, no tempo  $t=0$

$$\begin{aligned} x_o &= x(t_o = 0) \\ y_o &= y(t_o = 0) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para que o método de Runge-Kutta não apresente problemas de instabilidade numérica é necessário que o incremento do tempo seja calculado de forma adequada. Para o caso em estudo, que aborda o problema da coluna com força axial periódica, conveniente se faz o uso de um incremento constante de tempo  $H$  igual ao período da força excitadora dividido por 100

$$H = \frac{2\pi}{100\Omega} \quad (4.3)$$

Após o fornecimento dos dados de entrada do programa, o mesmo inicia um ciclo iterativo para calcular a resposta do sistema, armazenando em um arquivo de saída os deslocamentos, velocidades e o tempo considerado. Após a obtenção dos resultados, plota-se o espaço fase e a resposta do sistema em função do tempo, como mostrado na Figura 4.1.

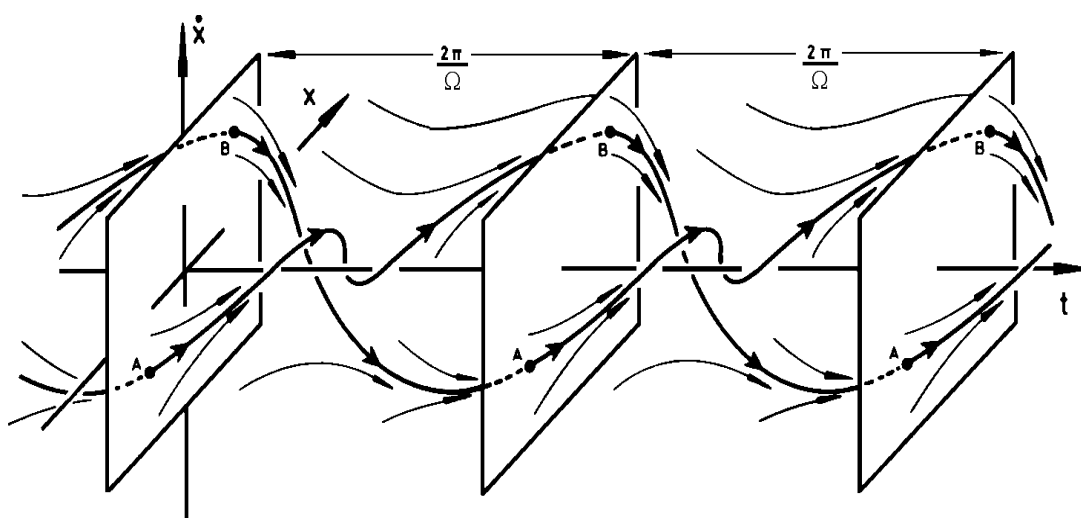


**Figura 4.1** - Resposta e plano fase da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades.

### 4.3- Mapeamento de Poincaré

A identificação de órbitas periódicas e o estudo de sua estabilidade no espaço solução é uma tarefa difícil. Para facilitar este problema utiliza-se geralmente o artifício de reduzir a dimensão do espaço solução.

Para se estudar o comportamento das trajetórias em um espaço de menor dimensão, Poincaré imaginou interceptá-las em intervalos regulares de tempo  $H = \frac{2\pi}{\Omega}$  por superfícies, em geral planos. Assim estuda-se o comportamento dos pontos de intercessão, conforme mostra a Figura 4.2.



**Figura 4.2** - Seções de Poincaré.[35]

A análise da curva solução em intervalos regulares de tempo possibilita à interpretação geométrica da curva contínua, sem nenhuma perda de informação [22].

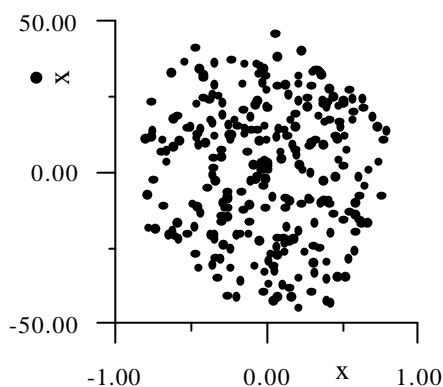
Para armazenar os pontos de Poincaré, utilizou-se um contador J que inicializa com zero. Após a sua inicialização, calcula-se a resposta do sistema, partindo-se de um dado ponto até um

tempo a dotado para que termine a resposta transiente e logo após, incrementa-se o tempo e o contador da seguinte forma

$$t = t + H \quad (4.4)$$

$$J = J + 1 \quad (4.5)$$

Se  $J < IDELX$ , calcula-se novamente a resposta do sistema para o tempo já incrementado e incrementa-se novamente o tempo e o contador  $J$ . No momento em que  $J \geq IDELX$ , armazenam-se os valores das amplitudes do deslocamento e velocidades correspondentes a resposta permanente do sistema. Repete-se estes passos enquanto o tempo for menor que o tempo final considerado no arquivo de entrada. A partir do arquivo de saída, que contém os pontos de Poincaré, traça-se o diagrama de Poincaré como mostra o exemplo da Figura 4.3.



**Figura 4.3** - Diagrama de Poincaré para a coluna com um grau de liberdade e não-linearidades.

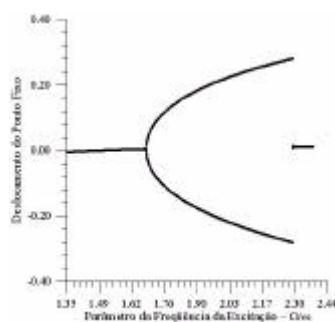
#### **4.4- Procedimento para o Traçado do Diagrama de Bifurcação,**

##### **Analisando a Resposta no Tempo.**

A equação de movimento é integrada pelo método de Runge-Kutta, como já comentado, partindo-se de um dado ponto até um tempo adotado para que termine a resposta transiente. A seguir são armazenados os valores das amplitudes de deslocamento ou velocidade referentes a uma

série de seções de Poincaré subsequentes. O tempo que se vai estabelecer para que a resposta transiente tenha acabado, bem como o número de seções de Poincaré cujos dados serão armazenados, são definidos de acordo com a sensibilidade adquirida pelo usuário sobre o problema em questão.

A seguir, o parâmetro de controle, que pode ser a frequência ou a amplitude da excitação, por exemplo, deve ser incrementado, e o par de valores iniciais são agora as informações adquiridas na última seção de Poincaré. Através deste artifício, o tempo gasto pela resposta transiente é bastante curto. Seguindo então o procedimento já citado anteriormente, armazenam-se os resultados das próximas seções de Poincaré. Este procedimento é repetido até o valor do parâmetro de controle desejado. Podendo-se, portanto, a partir do arquivo de saída que contém os pares (resposta, parâmetro de controle), traçar o diagrama de bifurcação como mostra o exemplo plotado na Figura 4.4.



**Figura 4.4** - Diagrama de Bifurcação para a coluna com um grau de liberdade e não-linearidades.

#### 4.5 - Valores de Transição $(\delta_2, \Omega)$

O objetivo deste programa é obter os pares  $(\delta_2, \Omega)$  que delimitam a região de estabilidade para a coluna a fim de traçar as curvas de transição, isto é, a fronteira de estabilidade do sistema.

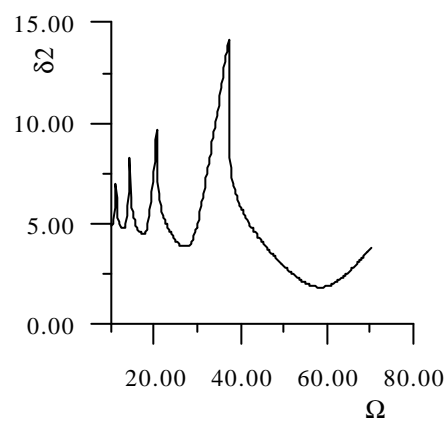
Utilizou-se as seguintes variações para a amplitude e frequência da excitação

$$\sum_{\delta_2=0.5}^{20} (\delta_2 + 0.05) \quad (4.6)$$

$$\sum_{\Omega=10}^{70} (\Omega + 0.2) \quad (4.7)$$

Iniciando com os valores  $\delta_2 = 0.5$  e  $\Omega = 10$ , a equação de movimento é integrada e, em cada passo, verifica-se os valores das amplitudes de deslocamento até um certo limite estipulado pelo programa. Caso a amplitude cresça com o tempo e um valor limite seja alcançado para o par  $(\delta_2, \Omega)$  utilizado, armazena-se o par e, logo após, incrementa-se a frequência  $\Omega$ , reiniciando  $\delta_2$ .

Caso a amplitude após a perturbação inicial tenda a zero, sabe-se que o sistema é estável para o par  $(\delta_2, \Omega)$  e incrementa-se a amplitude,  $\delta_2$ , continuando a frequência,  $\Omega$ , com o mesmo valor. Novamente integra-se a equação de movimento e verifica-se a resposta em cada passo até o limite preestabelecido, como já citado. O arquivo de saída possui assim os pares de transição podendo-se traçar a curva de transição como mostra o exemplo da Figura 4.5.

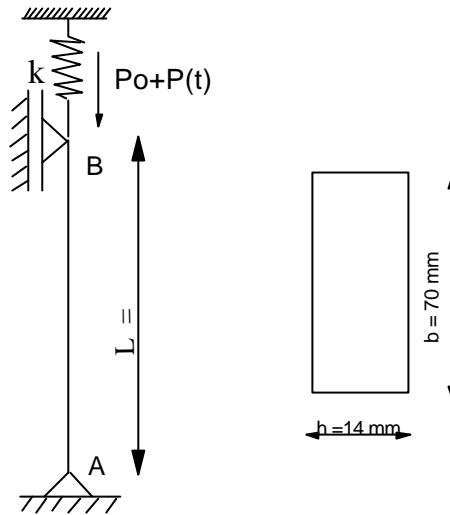


**Figura 4.5** - Curva de transição para a coluna com um grau de liberdade e não-linearidades.

### Análise dos Resultados

## 5.1- Dados de Entrada do Programa

Para a verificação dos resultados, tomou-se como exemplo uma coluna de aço com as seguintes dimensões



**Figura 5.1** - Dimensões da coluna.

O módulo de elasticidade (E) e o peso específico ( $\rho$ ) são

$$E = 2.1 \cdot 10^{10} \text{ Kgfm}^2$$

$$\rho = 7.85 \cdot 10^3 \text{ Kgfm}^3 \quad (5.1)$$

Como a seção é retangular, o momento de inércia é calculado pela seguinte expressão

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (5.2)$$

Considerou-se a rigidez da mola igual a 5 % da rigidez à flexão, ou seja

$$K = 24.3\% EI \quad (5.3)$$

Considerou-se a parcela constante do carregamento axial igual a 60 % da carga crítica de Euler, ou seja

$$P_o = 0.6 P_{cr} \quad (5.4)$$

As condições iniciais de deslocamento e velocidade foram consideradas respectivamente

$$\begin{aligned}x_o &= 0.001 \text{ m} \\y_o &= 0\end{aligned}\tag{5.5}$$

Para a coluna considerada na Figura 5.1, a carga crítica de Euler,  $P_{cr}$ , a frequência natural de vibração considerando-se a parcela constante do carregamento axial,  $\omega_1$ , a frequência natural de vibração sem levar em consideração o carregamento axial,  $\omega_{o1}$ , e os parâmetros adimensionais,  $\delta_1$ ,  $\eta$  e  $\tau$ , são dados respectivamente por

$$\begin{aligned}P_{cr} &= 2382.63 \text{ Kgf/m}^2 & \omega_1 &= 29.47 \text{ rad/seg} & \omega_{o1} &= 46.60 \text{ rad/seg} \\ \delta_1 &= 5.92 & \eta &= 0.4 & \tau &= 0.04486\end{aligned}\tag{5.6}$$

Este exemplo serviu como orientação básica para escolher a faixa de variação de cada um dos parâmetros adimensionais na análise paramétrica mostrada a seguir.

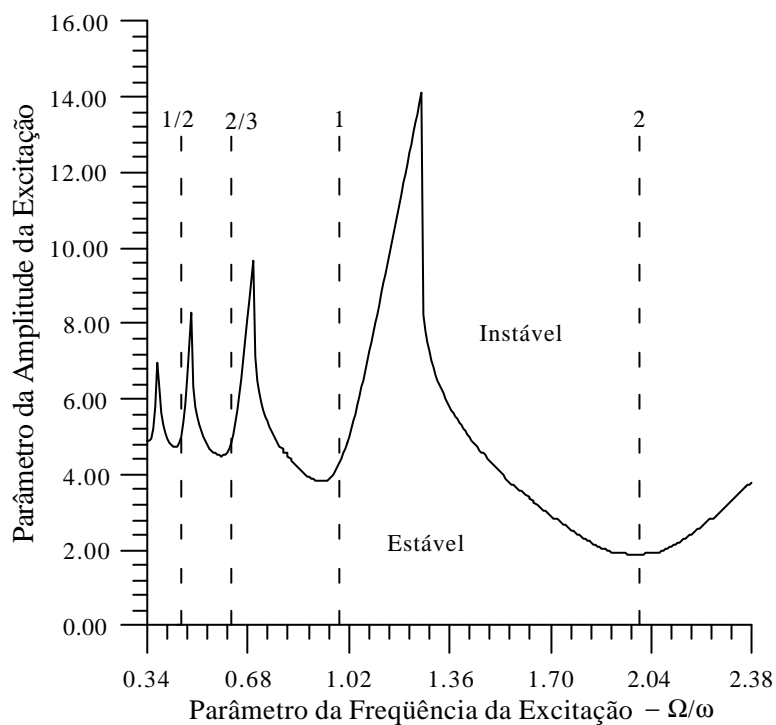
## 5.2- Diagramas de Estabilidade da Coluna

Na análise de problemas de instabilidade paramétrica o primeiro passo é a determinação das fronteiras de estabilidade.

A Figura 5.2 mostra as curvas de transição da coluna considerando-se o modelo não-linear com um grau de liberdade e amortecimento viscoso  $c = 0.3$ . Verifica-se que, na segunda região de ressonância paramétrica que corresponde ao parâmetro da frequência da excitação,  $\Omega/\omega = 1$ , um valor limite de estabilidade é alcançado quando o parâmetro da amplitude  $\delta_2 = 4.55$ . Já na primeira região de ressonância paramétrica, que corresponde a uma frequência da excitação



próxima a duas vezes a frequência natural do sistema, ou seja, o parâmetro da frequência da excitação  $\Omega/\omega = 2$ , encontrou-se o valor de transição mínimo para o parâmetro de amplitude  $\delta_2 = 1.85$ , sendo este valor bem menor do que o encontrado na segunda região. Sabe-se que esta é a principal região de instabilidade paramétrica e a mais perigosa em termos de projeto. Este fato revela a possibilidade de instabilização da posição de equilíbrio quando a frequência da excitação for da ordem de duas vezes a frequência natural do sistema. Nota-se também no diagrama de estabilidade da Figura 5.2, pequenas regiões de ressonância associadas a sub-múltiplos de  $\omega_1$  (sub-harmônicos).



**Figura 5.2** - Diagrama de estabilidade da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades.

Amortecimento viscoso -  $c = 0.3$ .

A região abaixo das curvas de transição, corresponde a situações estáveis e a região acima destas curvas a respostas instáveis.

Para o caso da coluna testou-se ainda os modelos lineares com um e três graus de liberdade e o modelo não-linear com três graus de liberdade. Verifica-se que o diagrama é idêntico àquele que representa a coluna com um grau de liberdade e não-linearidades como mostra a Figura 5.2, esta igualdade pode ser explicada pelas condições iniciais impostas, pois a variação na condição de repouso é muito pequena, sendo a oscilação no início do movimento pouco apreciável. Nestas condições o sistema é praticamente linear, sendo o primeiro modo dominante. Assim para a determinação da fronteira de estabilidade pode-se usar um modelo simplificado sem incorrer em erros palpáveis. Para o modelo com mais de um grau de liberdade surgem outras regiões de instabilidade associadas aos modos mais altos. Estas regiões estão entretanto em uma faixa de frequências bem superior a aquela estudada e mostrada na Figura 5.2.

### **5.3 - Comparação das Soluções Numérica e Analítica para as Curvas de Transição**

No Capítulo III, analisou-se o efeito do amortecimento viscoso nas curvas de transição da equação de Mathieu, equação (3.45), e através do método das múltiplas escalas, encontrou-se as equações que descrevem tais curvas na primeira e segunda região de ressonância paramétrica. Estas equações estão expressas em (3.69) e (3.81).

Verifica-se que as curvas de transição da Figura 3.2 são plotadas relacionando-se os parâmetros  $(\epsilon, \delta)$  da equação (3.45) e para se comparar os resultados da solução analítica com a solução numérica para este caso, fez-se uma mudança de variável na equação de movimento da coluna com um grau de liberdade para o caso linear expressa em (2.58), pois o resultado numérico

fornece os pontos da curva de transição relacionando-se os parâmetros  $(\delta_2, \Omega)$  da equação (2.58).

Adotando-se uma função contínua  $F_1(t)$ , tal que

$$f_1(t) = F_1(t) \exp\left(-\frac{c}{2\tau}\right) \quad (5.7)$$

e fazendo-se o uso da mudança de variável definida por

$$\varsigma = \frac{\Omega t}{2} \quad (5.8)$$

A equação do movimento expressa em (2.58) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\ddot{F}_1(\varsigma) + \left( \frac{4\pi^2(\pi^2 - \delta_1) - c^2}{\tau\Omega^2} - 4\left(\frac{\pi}{\Omega}\right)^2 \frac{\delta_2}{\tau} \cos(2\varsigma) \right) F_1(\varsigma) = 0 \quad (5.9)$$

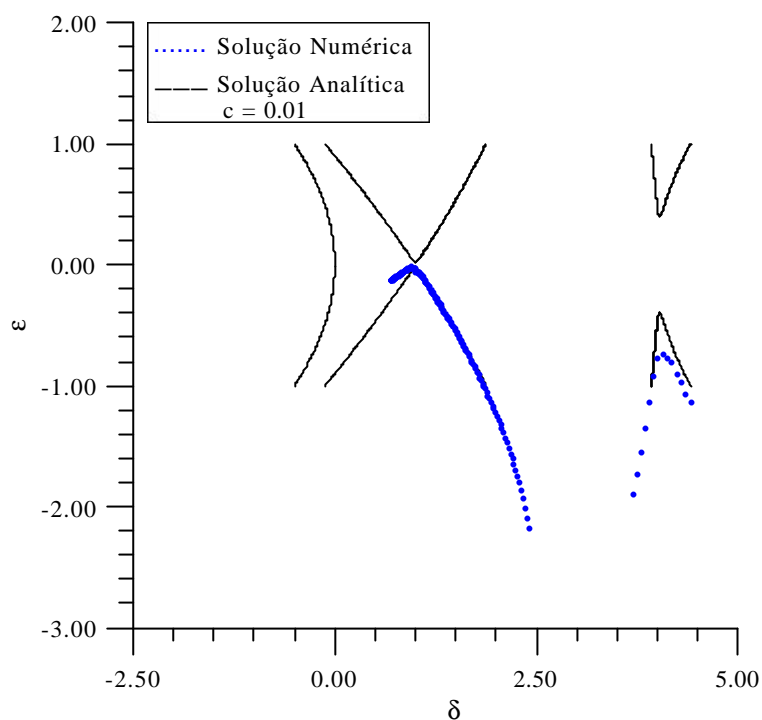
Comparando-se (5.9) com (3.45), tem-se os parâmetros  $(\varepsilon, \delta)$  da equação (5.9) dados por

$$\delta = \frac{4\pi^2(\pi^2 - \delta_1) - c^2}{\tau\Omega^2} \quad (5.10)$$

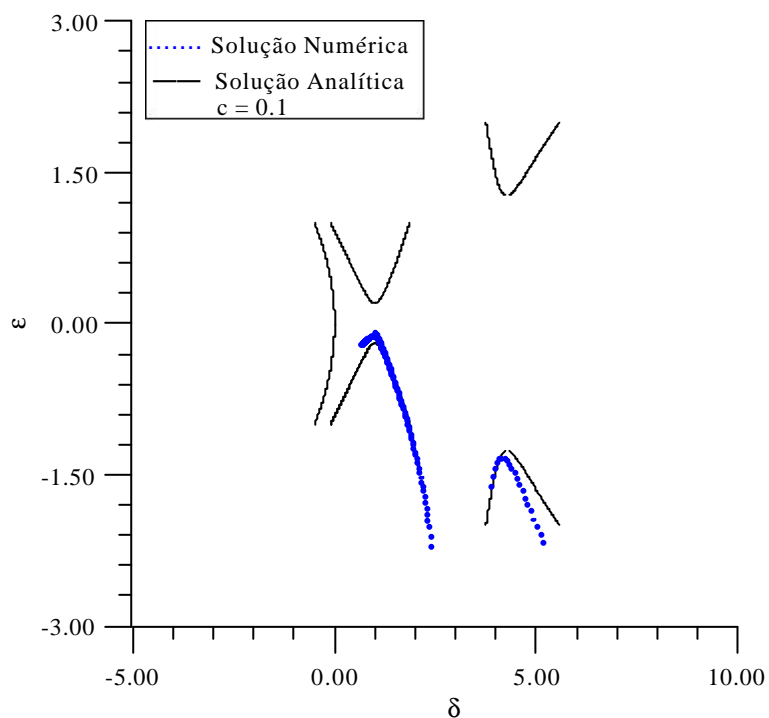
$$\varepsilon = -2\left(\frac{\pi}{\Omega}\right)^2 \frac{1}{\tau} \delta_2 \quad (5.11)$$

Tendo-se os valores de transição,  $(\delta_2, \Omega)$ , da solução numérica, calcula-se os pares de parâmetros  $(\varepsilon, \delta)$ , a fim de traçar o diagrama de Strutt e comparar as duas soluções.

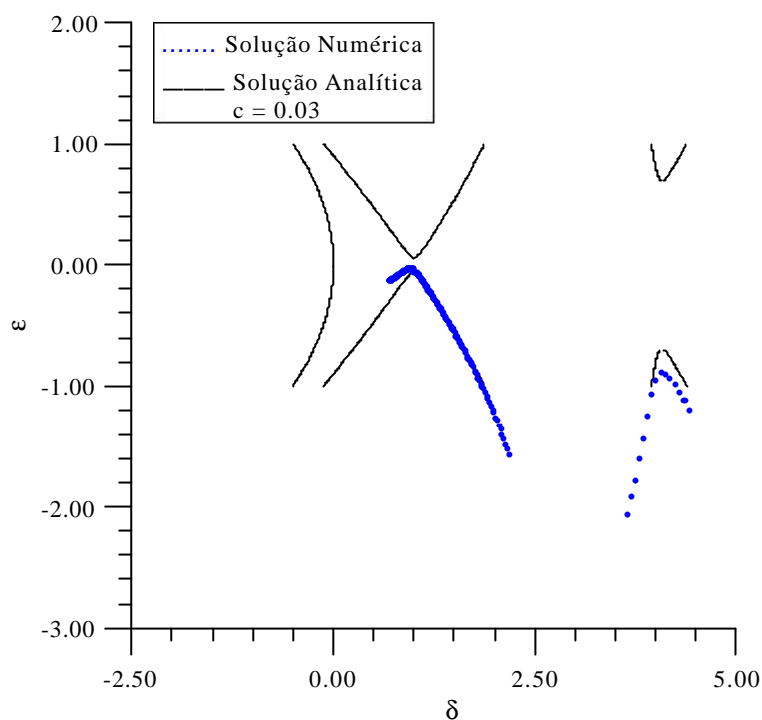
Do resultado numérico, tomou-se apenas a primeira e segunda região de ressonância paramétrica das curvas de transição para efeito de comparação com a solução analítica que foi resolvida apenas para estas regiões. A comparação entre as duas soluções está mostrada nas Figuras 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 para valores crescentes do parâmetro de amortecimento  $c$ .



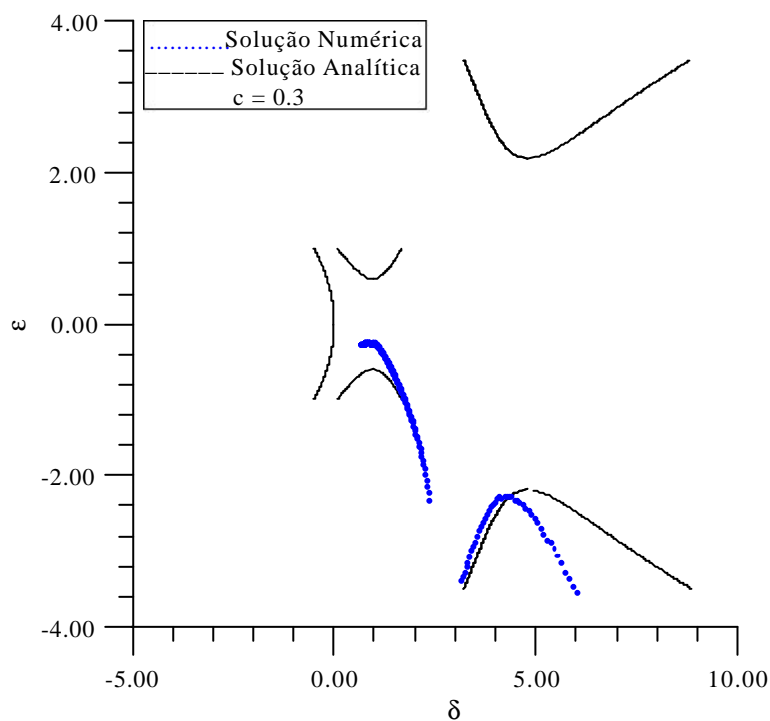
**Figura 5.3** - Curvas de transição da coluna na primeira e segunda região de ressonância paramétrica, para o amortecimento viscoso  $c = 0.01$ .



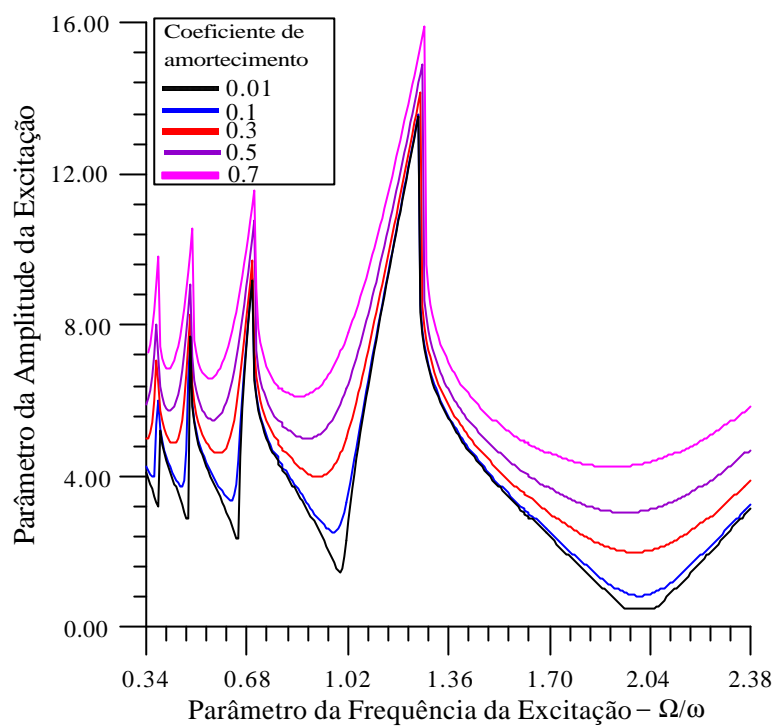
**Figura 5.4** - Curvas de transição da coluna na primeira e segunda região de ressonância paramétrica, para o amortecimento viscoso  $c = 0.1$ .



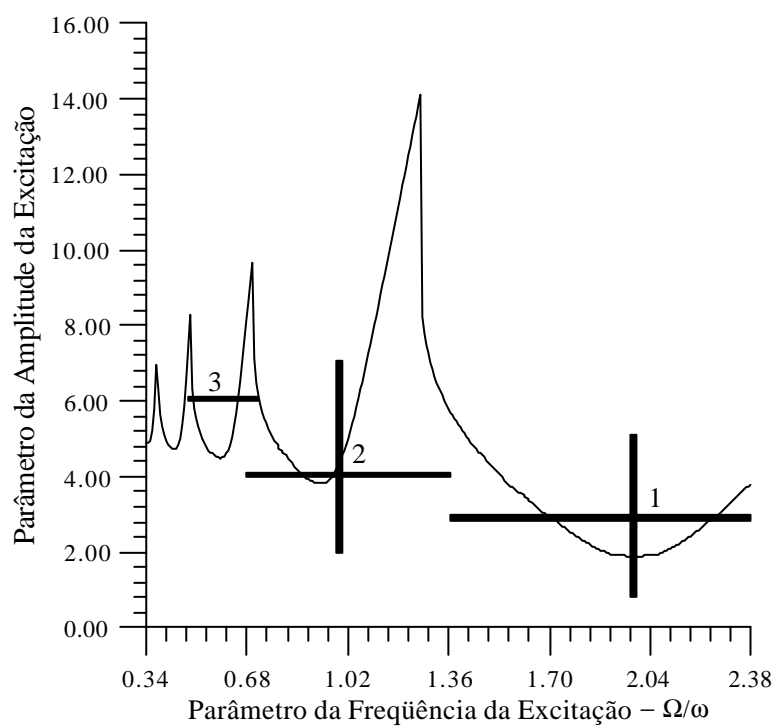
**Figura 5.5** - Curvas de transição da coluna na primeira e segunda região de ressonância paramétrica, para o amortecimento viscoso  $c = 0.03$ .



**Figura 5.6** - Curvas de transição da coluna na primeira e segunda região de ressonância paramétrica, para o amortecimento viscoso  $c = 0.3$ .



**Figura 5.7** - Influência do amortecimento sobre as curvas de transição.



**Figura 5.8** - Regiões escolhidas para o traçado dos diagramas de bifurcação.

## 5.4- Influência do Amortecimento Viscoso

No presente trabalho as forças dissipativas foram representadas por um modelo de amortecimento viscoso. A Figura 5.7 mostra o efeito do amortecimento que é o de afastar as regiões de instabilidade do eixo horizontal e diminuir sensivelmente as regiões de instabilidade.

## 5.5- Diagramas de Bifurcação, Respostas no Tempo e Planos Fase

Embora a teoria linear possa fornecer com precisão a fronteira de estabilidade e os métodos de perturbação possam ajudar a entender os efeitos da não-linearidade no comportamento do sistema quando as perturbações são de pequena magnitude, estas soluções são insuficientes para descrever o comportamento da coluna no interior das regiões de instabilidade paramétrica. Problema este pouco estudado na literatura. Entretanto o uso de métodos numéricos pode mostrar com precisão os diversos tipos de comportamento exibidos pelo sistema no interior das regiões de instabilidade. A partir destas informações o engenheiro terá condições de avaliar a gravidade da ressonância paramétrica no comportamento da coluna e as possíveis mudanças nos parâmetros do sistema para que possa evitá-la. Uma ferramenta bastante útil neste tipo de análise são os diagramas de bifurcação onde as coordenadas dos pontos fixos são mostradas como função de um dado parâmetro de controle.

Mostra-se nas Figuras 5.9, 5.18, 5.27, 5.35 e 5.36, alguns diagramas de bifurcação da coluna. As linhas retas mostradas no diagrama de estabilidade da Figura 5.8 foram as regiões escolhidas para o traçado dos diagramas de bifurcação. O diagrama de bifurcação é encontrado marcando-se sobre um dos eixos cartesianos o valor do deslocamento ou da velocidade dos pontos fixos e no outro eixo o parâmetro de controle.

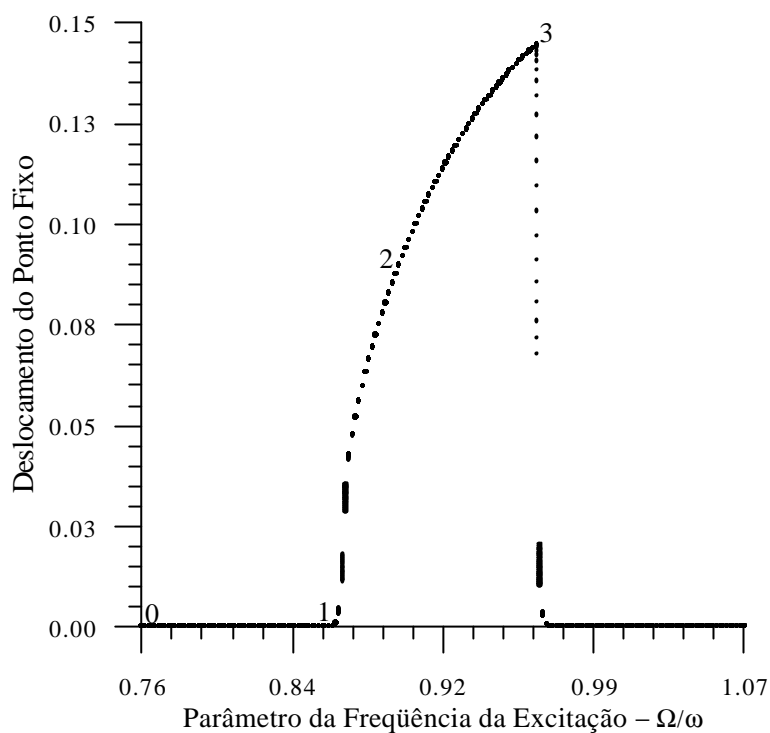
As regiões 1 e 2, são exatamente a primeira e segunda região de ressonância paramétrica. As retas verticais, representam regiões em que o parâmetro da frequência da excitação está fixa, variando-se apenas o parâmetro de amplitude. Já as retas horizontais representam regiões em que o parâmetro de amplitude está fixo, variando-se o parâmetro da frequência da excitação.

No diagrama de bifurcação da Figura 5.9, os pontos 1 e 3 são pontos próximo à curva de transição correspondendo aos pares  $(\delta_2, \Omega/\omega)$ , (4,0.869) e (4,0.964), isto pode ser verificado no diagrama de estabilidade da Figura 5.8, mas precisamente na linha horizontal da região 2. A partir do ponto 1, que é um ponto de bifurcação no diagrama de estabilidade, quando aumenta-se o parâmetro da frequência da excitação, a coluna se desestabiliza e a amplitude da resposta cresce rapidamente até o ponto 3, caindo logo depois para zero e voltando, assim, a estabilizar. Verifica-se que após a bifurcação surge uma solução periódica cujo período é igual ao da força externa aplicada no topo da coluna.

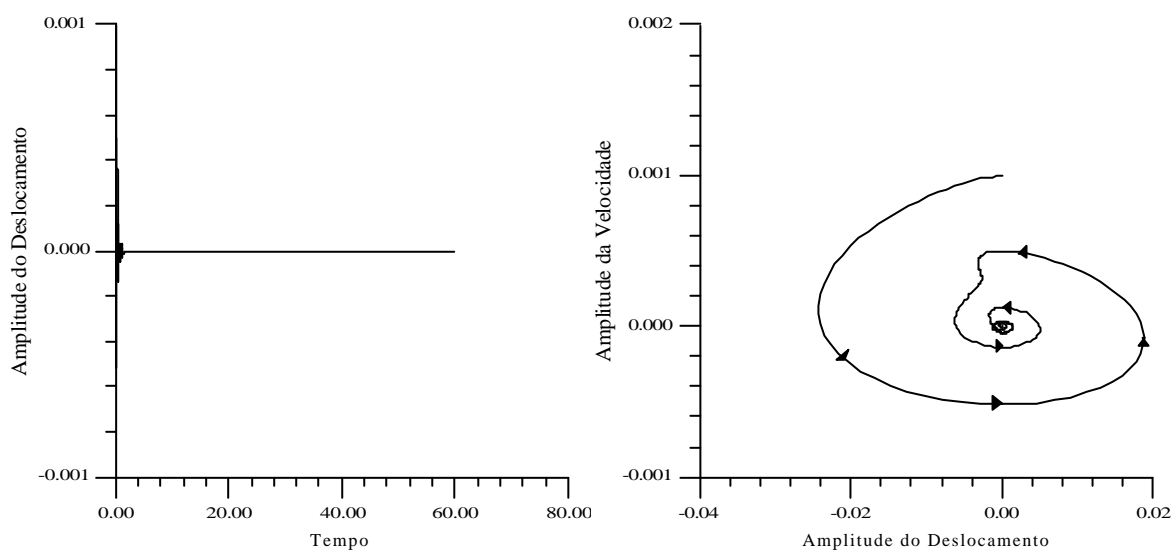
Mostra-se na Figura 5.10.a a resposta do sistema no ponto 0 do diagrama de bifurcação.

O ponto 0 corresponde a um ponto, onde o parâmetro da amplitude da excitação e o parâmetro da frequência da excitação são respectivamente (4,0.763). Este ponto encontra-se na região estável do diagrama de estabilidade. A Figura 5.10.b, mostra o espaço fase do sistema para o ponto 0, onde se verifica, após a aplicação de uma perturbação inicial, o retorno da solução a posição de equilíbrio vertical.





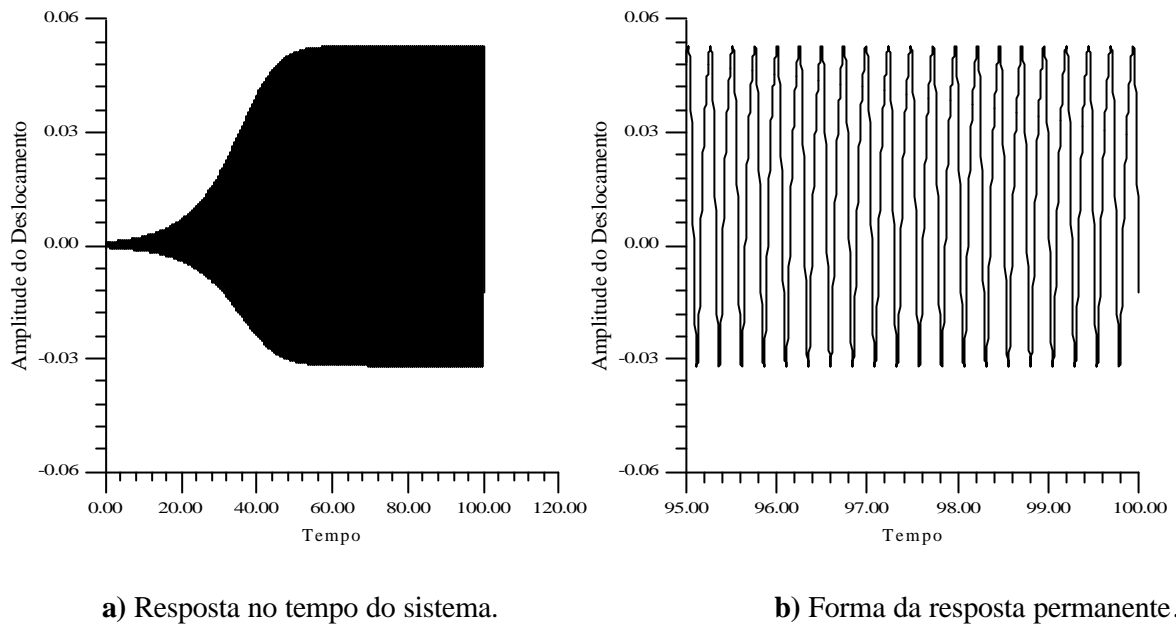
**Figura 5.9** - Diagrama de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades, com o parâmetro de amplitude  $\delta_2 = 4$ .



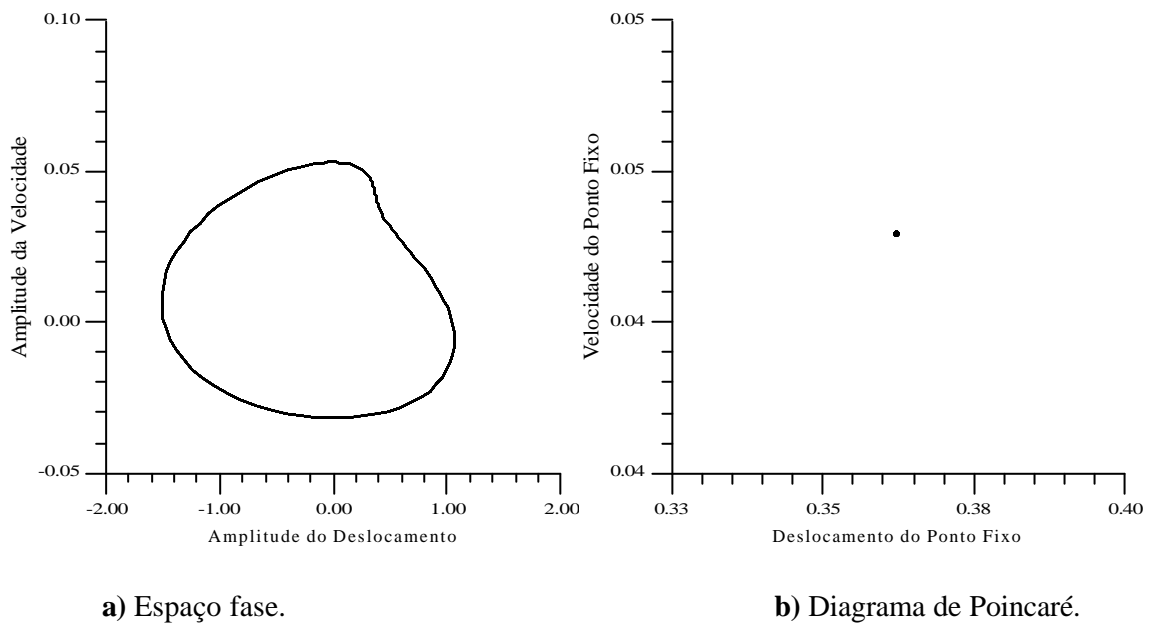
a) Resposta no tempo do sistema.

b) Espaço fase do sistema.

**Figura 5.10** - Resposta no tempo e espaço fase do sistema no ponto 0 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9.



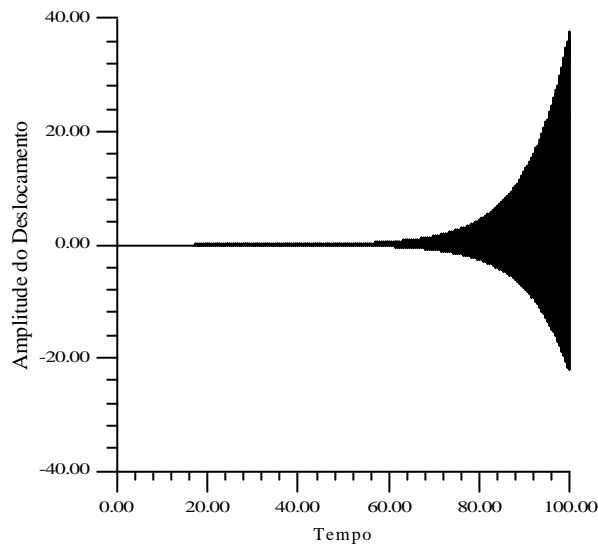
**Figura 5.11** - Resposta no tempo do sistema no ponto 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9.



**Figura 5.12** - Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9.

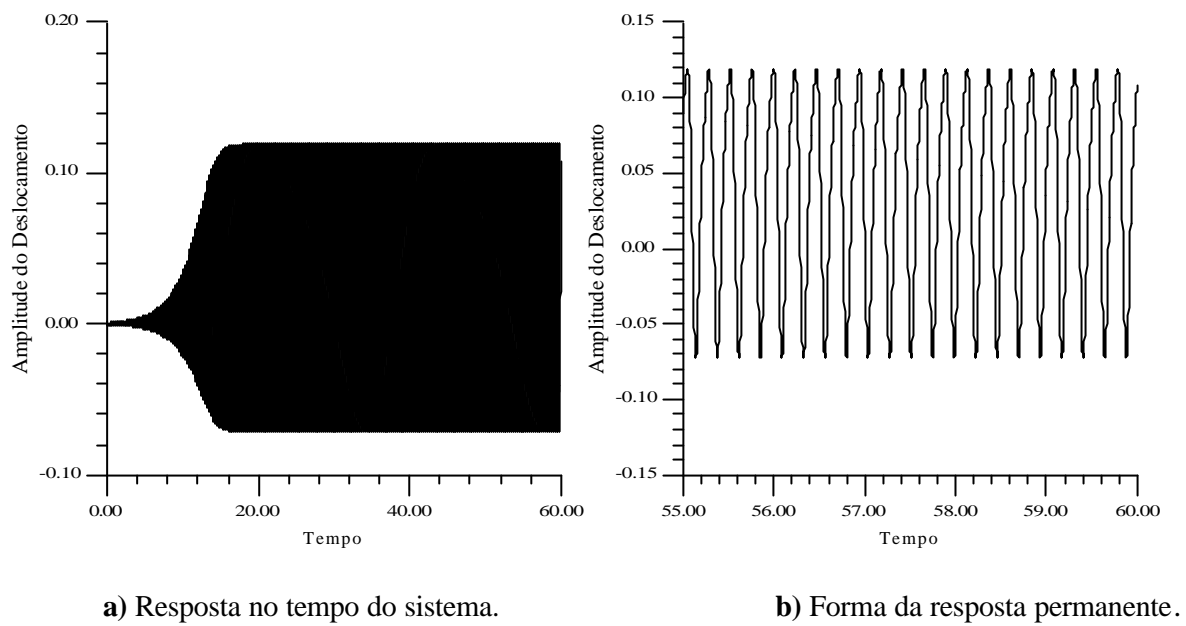
Mostra-se na Figura 5.11.a e 5.11.b a resposta do sistema no tempo e um detalhe da fase permanente da resposta, respectivamente, para o ponto 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9.

O ponto 1 é um ponto próximo à curva de transição no interior da região instável. Verifica-se que após a perturbação há um crescimento exponencial da amplitude, indicando a perda de estabilidade, mas, depois de um certo tempo, as não-linearidades são mobilizadas e a amplitude da resposta para de crescer e fica oscilando com pequena amplitude em torno da configuração de equilíbrio. Já para o caso linear, como sabe-se da solução da equação de Mathieu (3.45), a amplitude cresce indefinidamente, como mostra a Figura 5.13. Mostra-se na Figura 5.12, o espaço fase e o diagrama de Poincaré correspondente à configuração 1 e verifica-se que a solução é periódica de ordem 1, ou seja, o período da solução é igual ao período da força excitadora, como já mostrado no diagrama de bifurcação.

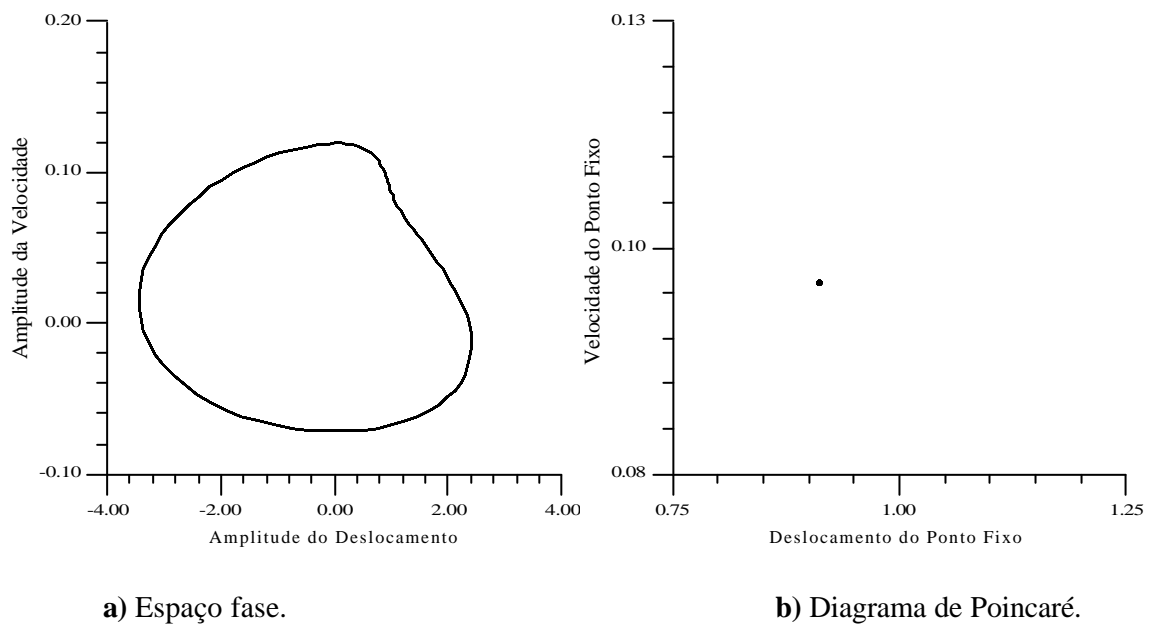


**Figura 5.13** - Resposta no tempo do sistema, no ponto 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9 para o caso linear.

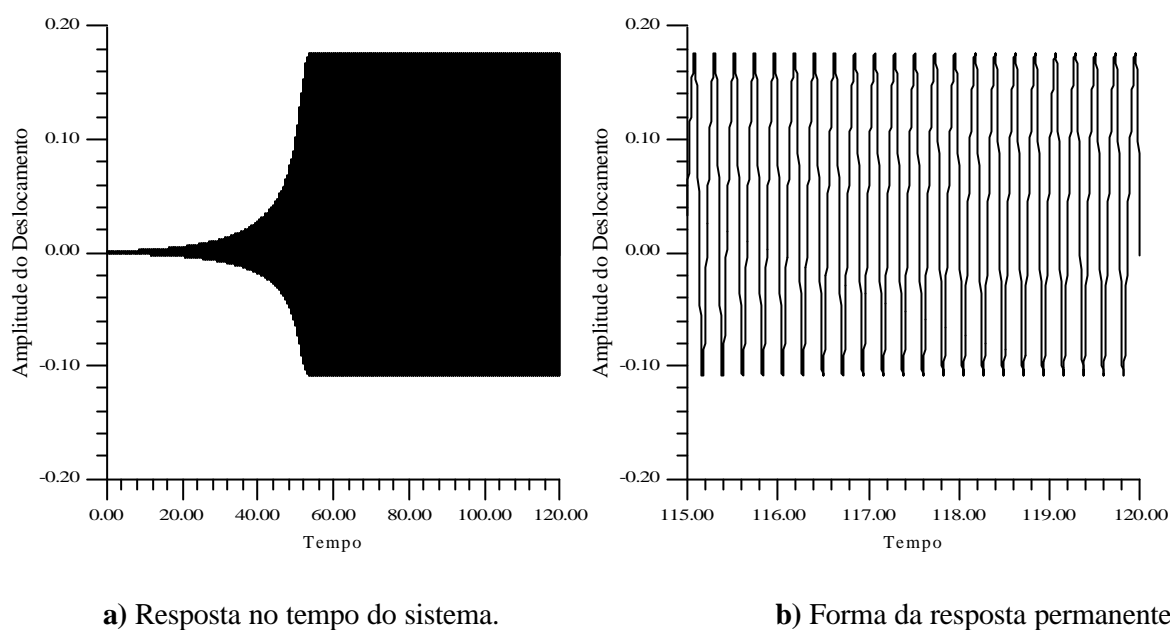
Mostra-se nas Figuras 5.14.a e 5.14.b, a resposta do sistema e a forma da solução permanente no ponto 2, (4,0.9), o qual pertence à região instável do diagrama de estabilidade. As Figuras 5.15.a e 5.15.b mostram o espaço fase e o diagrama de Poincaré para o mesmo ponto. Verifica-se através do diagrama de Poincaré da Figura 5.15.b, que o período da resposta é igual ao período da excitação, pois o mesmo possui apenas um ponto.



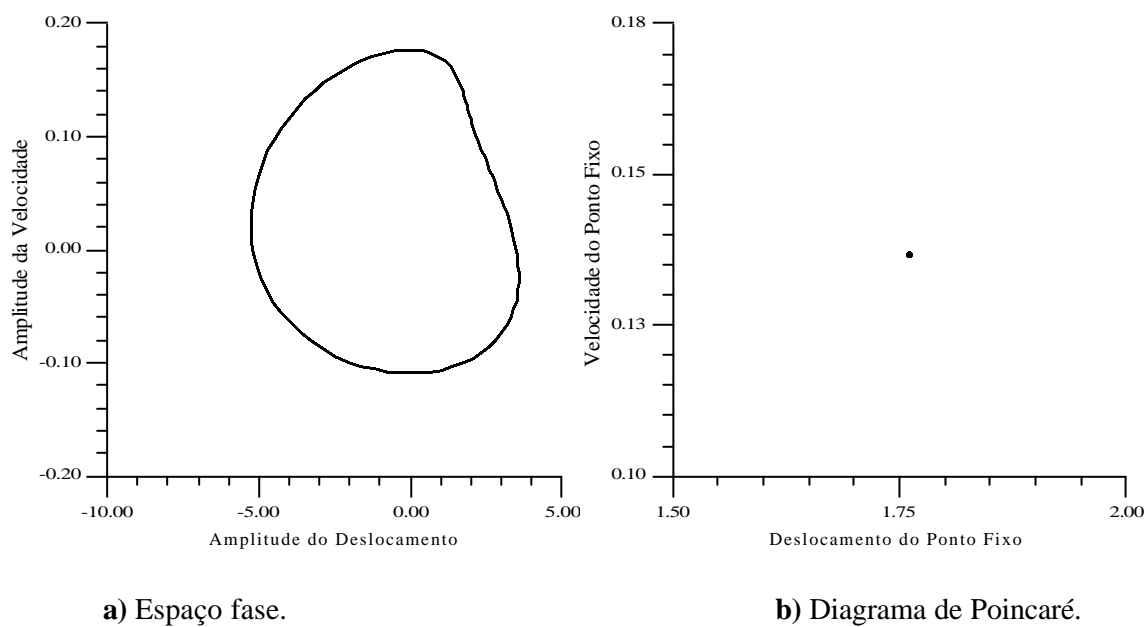
**Figura 5.14** - Resposta no tempo do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9.



**Figura 5.15** - Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9.



**Figura 5.16** - Resposta no tempo do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9.



**Figura 5.17** - Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.9.

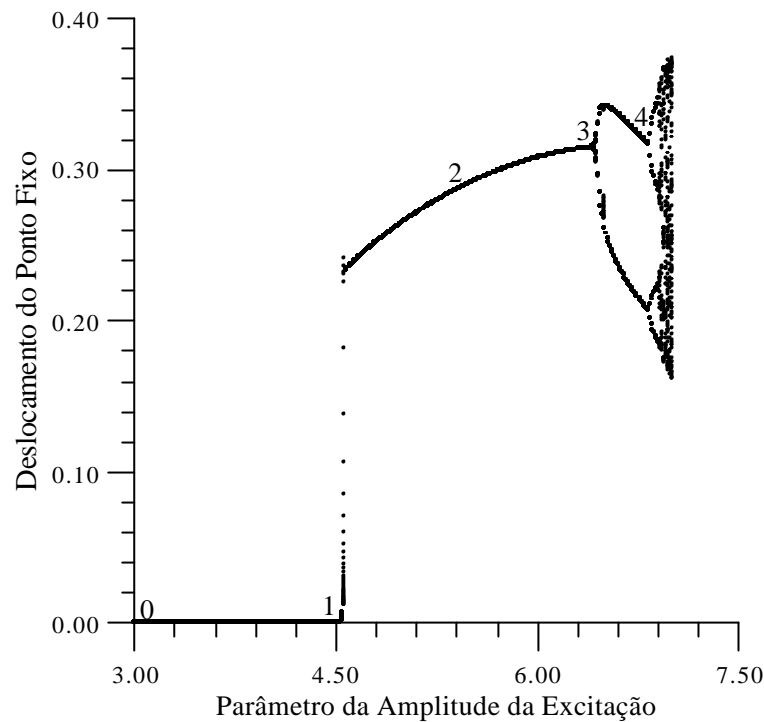
Mostra-se finalmente na Figura 5.16, a resposta do sistema e a forma da solução permanente no ponto 3, (4,0.964), que é um ponto próximo à curva de transição. Como mostra a Figura 5.16, este ponto está numa região instável. As Figuras 5.17.a e 5.17.b, mostram o espaço fase e o diagrama de Poincaré correspondentes à resposta permanente.

Verifica-se que nesta região a amplitude de vibração da resposta permanente cresce a medida que cresce o parâmetro da frequência da excitação. Assim, em um sistema com frequência de excitação variável, ao se entrar na região instável pela direita deve-se esperar um crescimento brusco da amplitude da resposta. Já próximo à fronteira esquerda a amplitude da resposta pode ser bastante pequena, podendo inclusive não causar qualquer dano ao sistema

A Figura 5.18 mostra o diagrama de bifurcação ainda na segunda região de ressonância paramétrica,  $\Omega/\omega \cong 1$ , fixando-se agora o parâmetro da frequência da excitação e variando-se o parâmetro de amplitude da excitação.

O ponto 1, (4.5,1), do diagrama de bifurcação da Figura 5.18 é um ponto próximo à curva de transição no diagrama de estabilidade da coluna, e verifica-se que após este ponto a amplitude do sistema cresce abruptamente dando origem a uma solução de período um cuja amplitude cresce suavemente até o ponto 3. A partir deste ponto verifica-se que há um dobramento de período, ou seja, o período da resposta é agora igual a duas vezes o período da excitação.

O crescimento da magnitude da excitação provoca um novo dobramento do período, e assim sucessivamente. Bifurcações sucessivas por dobramento de período conduzem usualmente o sistema a um atrator caótico. Aliás esta é a principal rota para o caos [35].



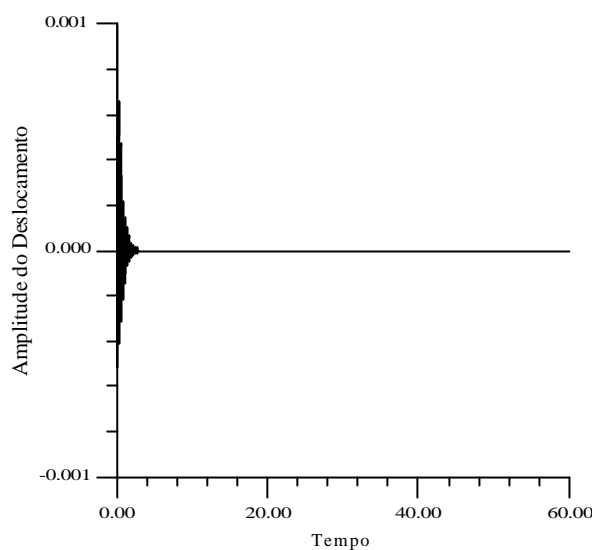
**Figura 5.18** - Diagrama de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades,

com o parâmetro da frequência da excitação  $\Omega/\omega = 1$ .

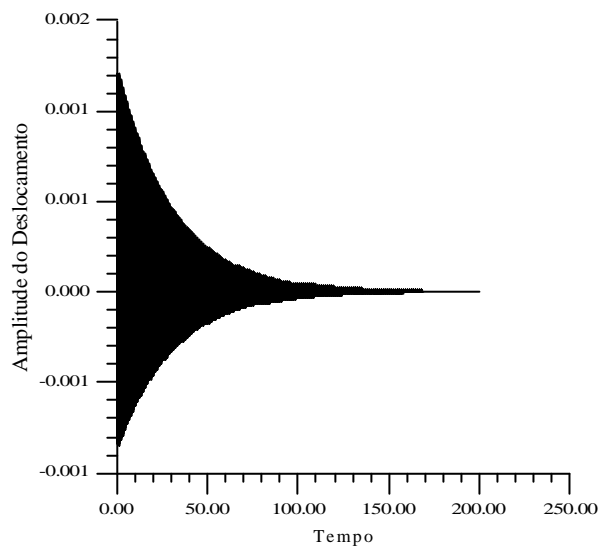
As vibrações caóticas apresentam um número infinito de pontos fixos que se instabilizaram em função dos dobramentos de período. Uma vibração caótica é, portanto, representada no diagrama de bifurcação por uma nuvem de pontos, que, entretanto, apresentam uma estrutura bastante definida conhecida como fractal. Nenhum deles representa um ponto fixo estável. A denominação caótica está associada exclusivamente à caracterização do movimento como sendo aperiódico.

Mostra-se na Figura 5.19, a resposta do sistema para o ponto 0 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18 que corresponde a uma configuração estável.

Como foi dito, o ponto 1 é um ponto próximo à curva de transição, mas ainda no interior da região estável. Mostra-se na Figura 5.20 a resposta do sistema neste ponto e verifica-se que o sistema oscilou por um longo período de tempo e depois voltou à posição



**Figura 5.19** - Resposta no tempo do sistema no ponto 0 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.

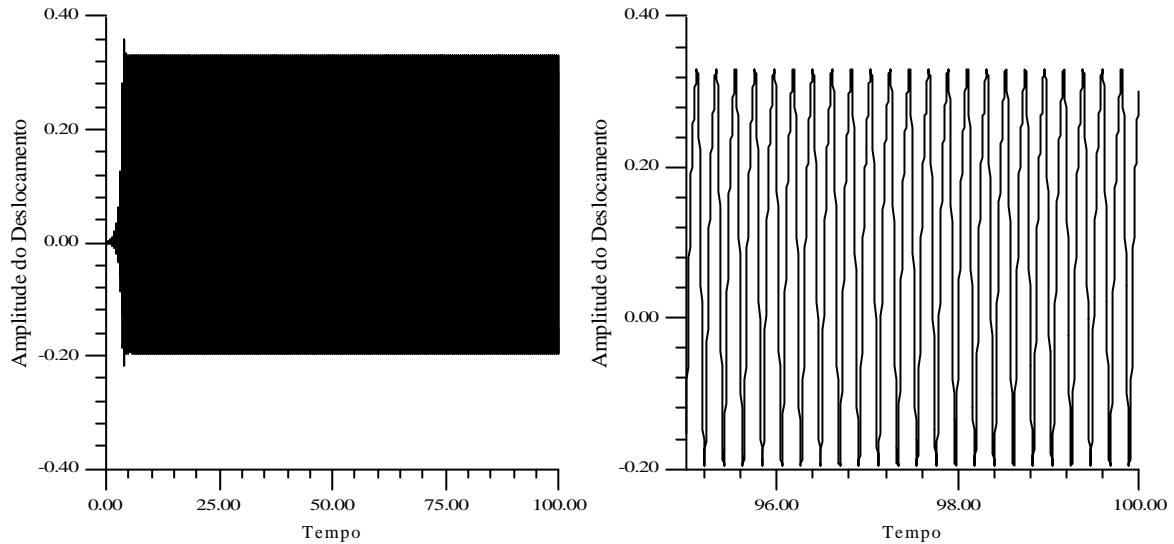


**Figura 5.20** - Resposta no tempo do sistema no ponto 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.

original de equilíbrio. Verifica-se assim que, quanto mais próximo da fronteira de estabilidade, mais longa é a resposta transiente.



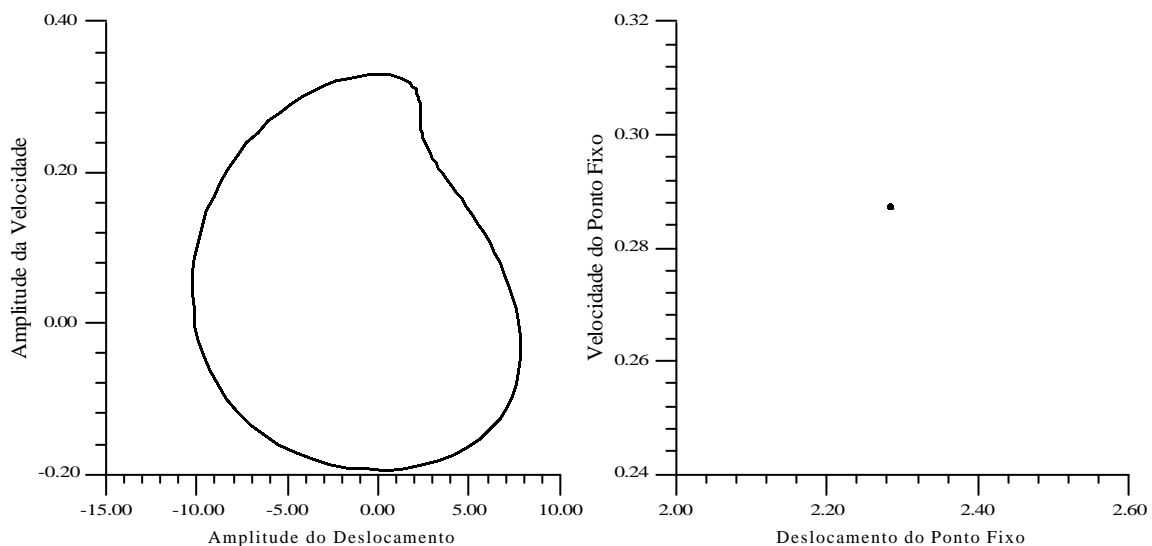
Mostra-se na Figura 5.21, a resposta do sistema no ponto 2, (5.4,1), do diagrama de bifurcação da Figura 5.18. Verifica-se que no ponto 2 do diagrama de bifurcação tem-se um ponto o que significa que o período da solução é igual o período da excitação.



a) Resposta no tempo do sistema.

b) Forma da resposta permanente.

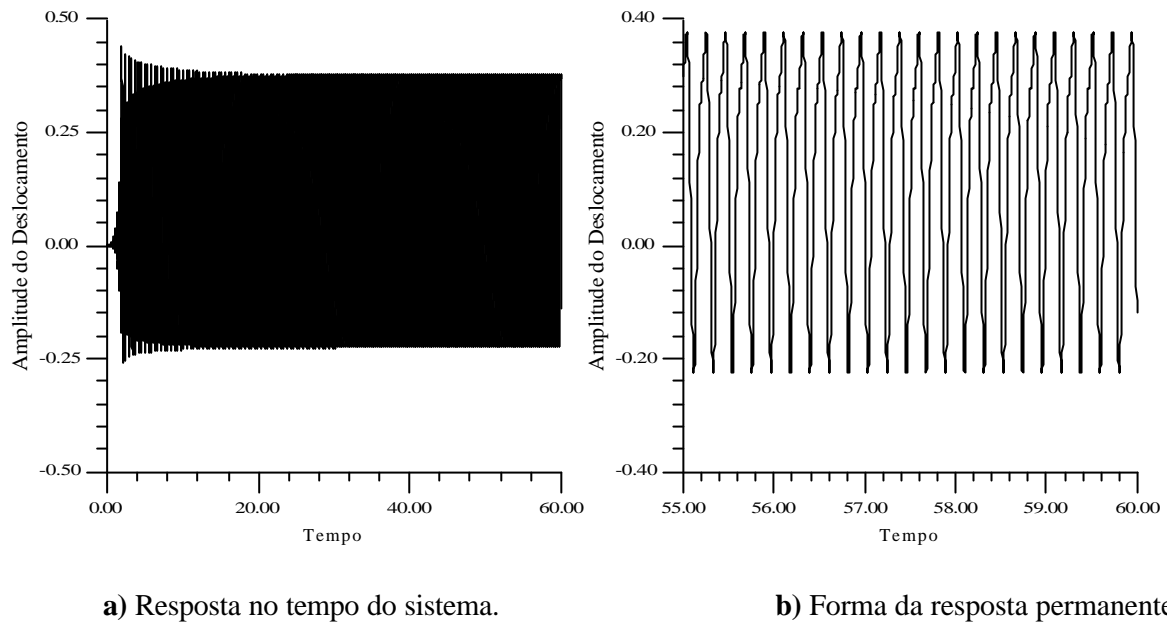
**Figura 5.21** - Resposta no tempo do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.



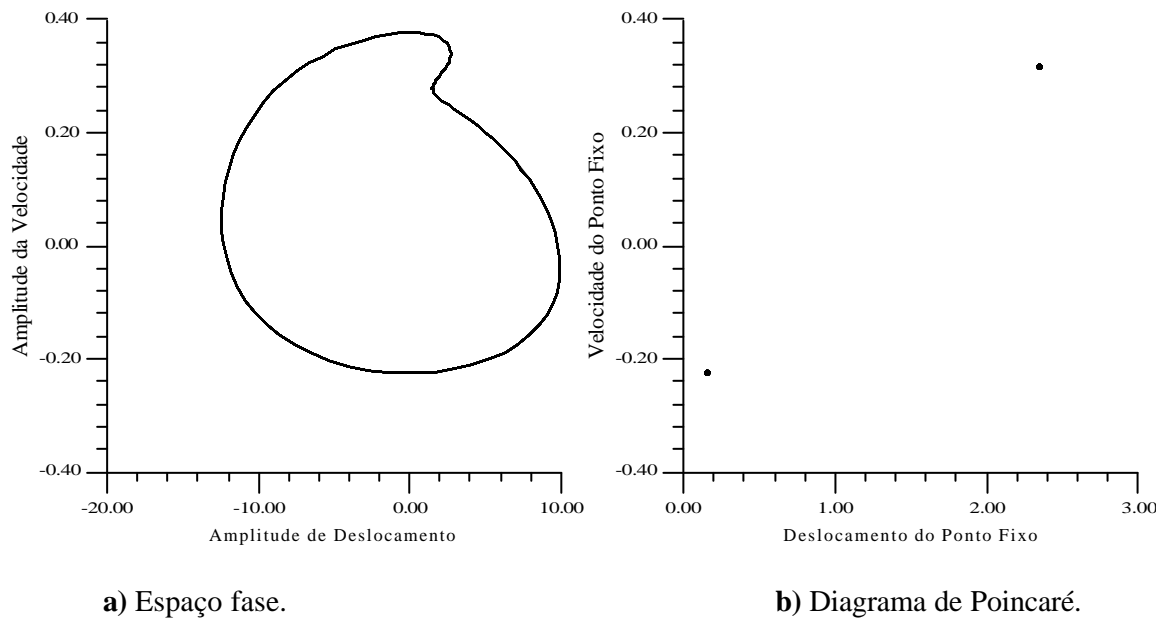
a) Espaço fase.

b) Diagrama de Poincaré.

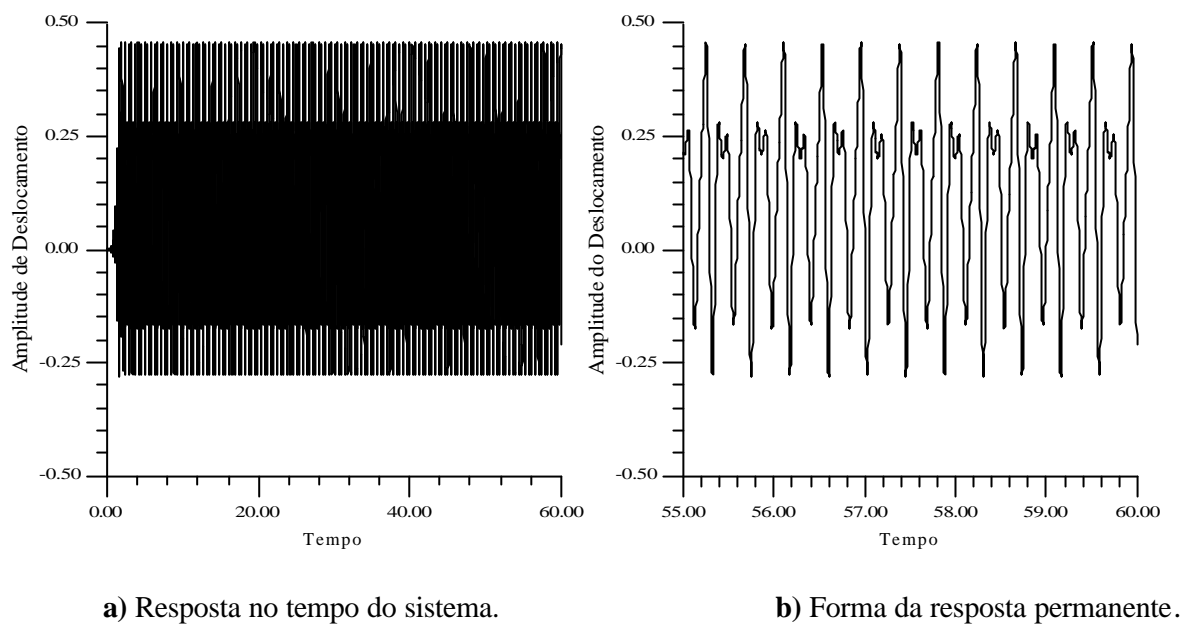
**Figura 5.22** - Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.



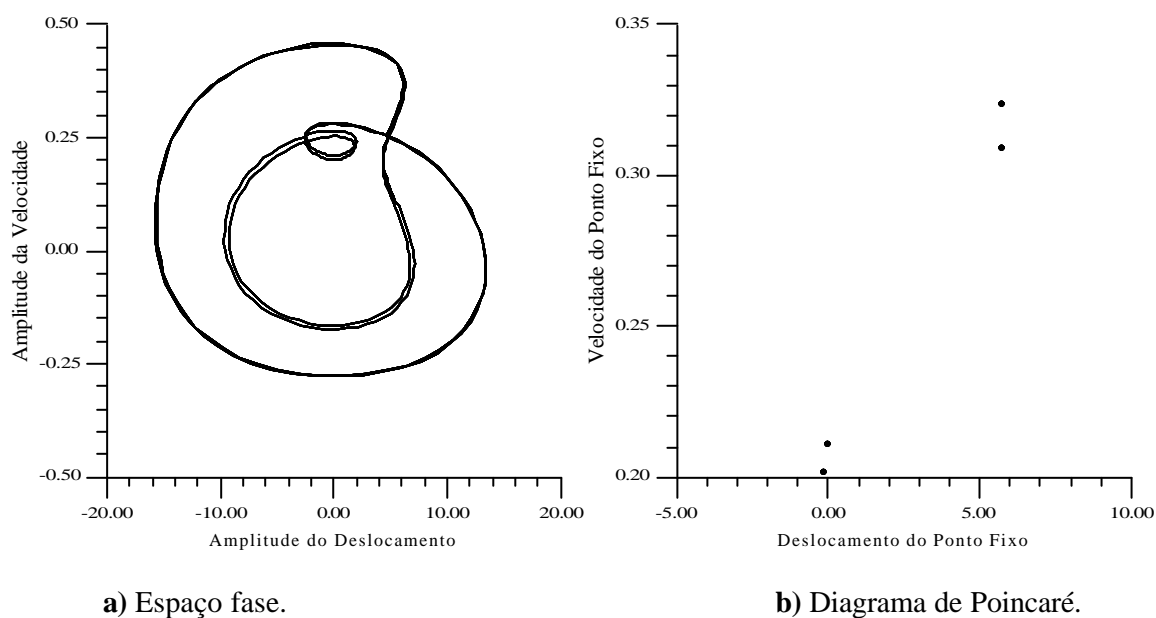
**Figura 5.23** - Resposta no tempo do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.



**Figura 5.24** - Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.



**Figura 5.25** - Resposta no tempo do sistema no ponto 4 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.



**Figura 5.26** - Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 4 do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.

Mostra-se na Figura 5.23, a resposta do sistema e a forma da solução permanente no ponto 3,  $(6.37,1)$ , do diagrama de bifurcação da Figura 5.18.

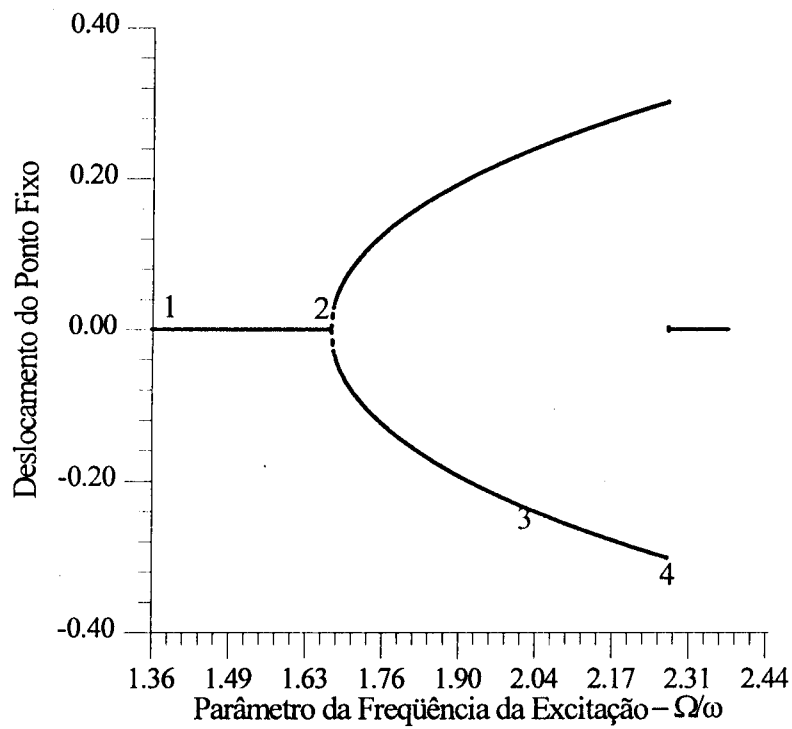
As Figuras 5.24.a e 5.24.b mostram o espaço fase e o diagrama de Poincaré do sistema correspondentes à resposta permanente no ponto 3, comprovando a existência de uma resposta com período  $2T_f$ , onde  $T_f$  é o período da força externa.

Mostra-se na Figura 5.25, a resposta da coluna no ponto 4,  $(6.84,1)$ , verifica-se novo dobramento de período. Neste ponto o período da resposta do sistema é quatro vezes o período da excitação, como está mostrado nas Figuras 5.26.a e 5.26.b, que representam o espaço fase e o diagrama de Poincaré do sistema. Como pode-se verificar a coluna pode exibir no interior da região instável diversos tipos de comportamento típicos de sistemas eminentemente não-lineares.

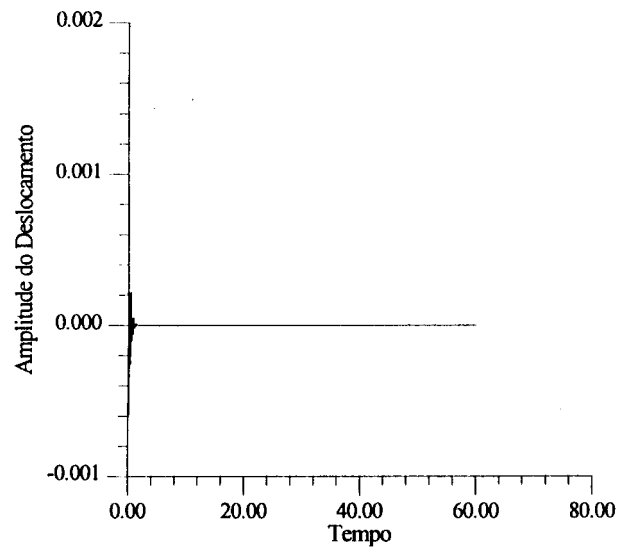
Um diagrama de bifurcação típico da primeira região de ressonância paramétrica, está mostrado na Figura 5.27, estando fixo o parâmetro da amplitude da excitação,  $\delta_2 = 3$ . Varia-se neste caso o parâmetro da frequência da excitação.

Variando-se o parâmetro de controle do ponto 1 até o ponto 2, verifica-se que a coluna está em equilíbrio. A partir do ponto 2, verifica-se que há uma bifurcação do tipo “flip” dando origem a uma solução cujo período é o dobro do período da força externa. As amplitudes crescem a partir do ponto 2 até um infinitésimo antes do ponto 4. A partir do ponto 4 entra-se novamente numa região estável

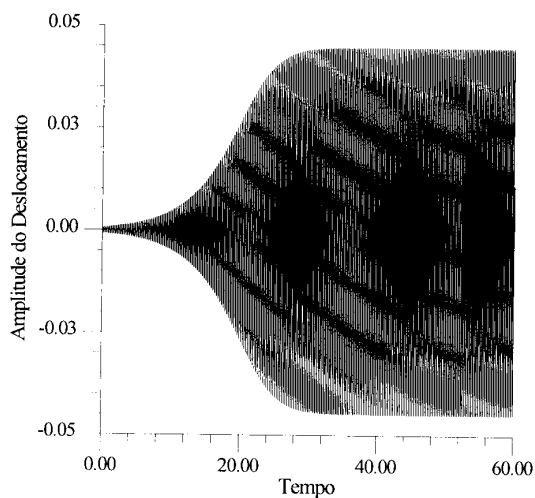
A Figura 5.28 mostra a resposta, considerando-se o par de parâmetros de controle, dentro da região estável, ou seja, o ponto 1,  $(3,1.36)$ .



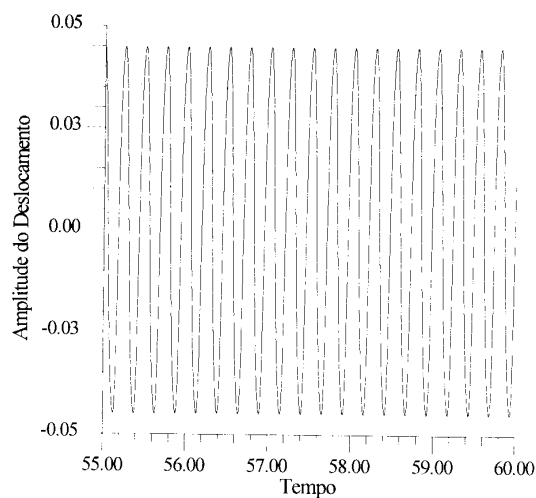
**Figura 5.27-** Diagrama de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades, com o parâmetro da amplitude da excitação,  $d_2 = 3$ .



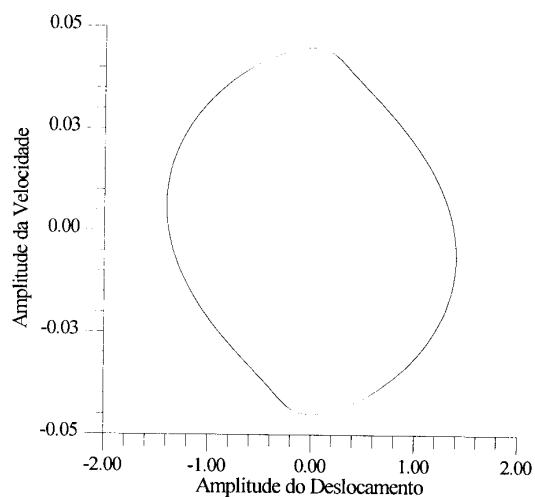
**Figura 5.28-** Resposta no tempo do sistema no ponto 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.27.



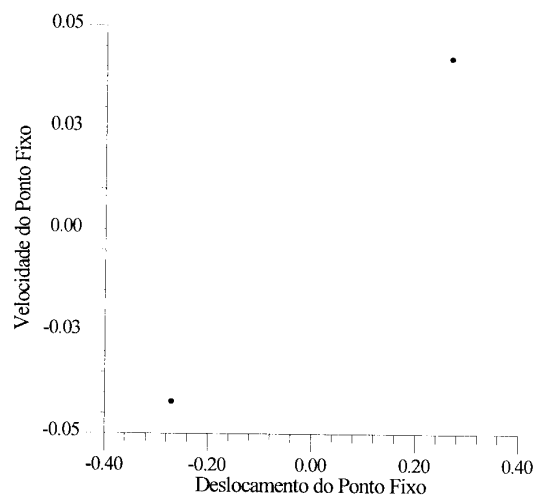
a) Resposta no tempo do sistema



b) Forma da resposta permanente

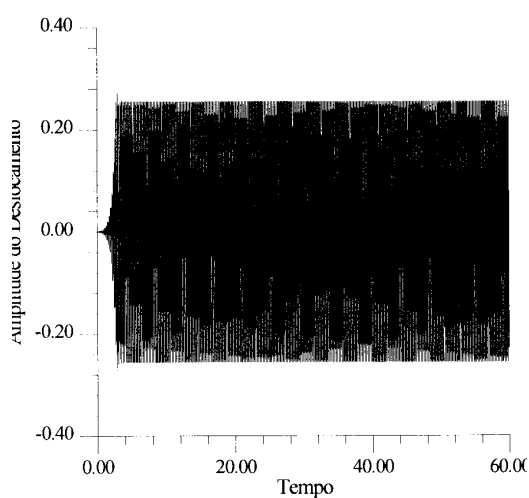
**Figura 5.29-** Resposta no tempo do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.27.

a) Espaço Fase.

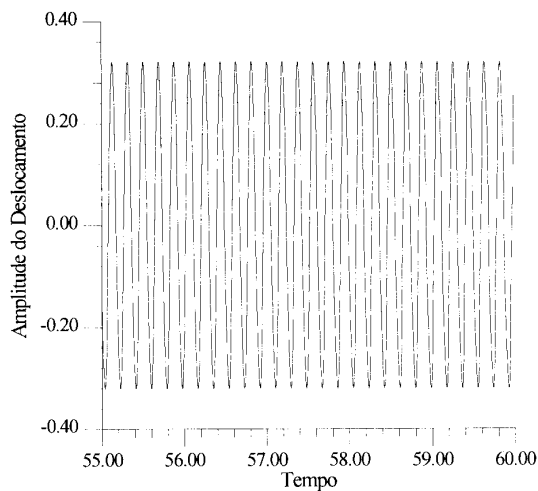


b) Diagrama de Poincaré.

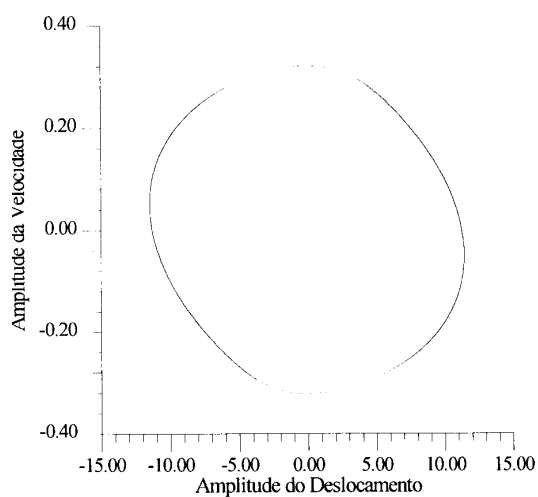
**Figura 5.30-** Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.27.



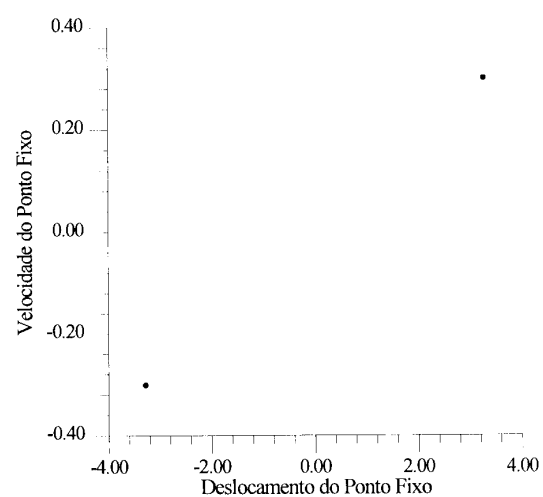
a) Resposta no tempo do sistema



b) Forma da resposta permanente

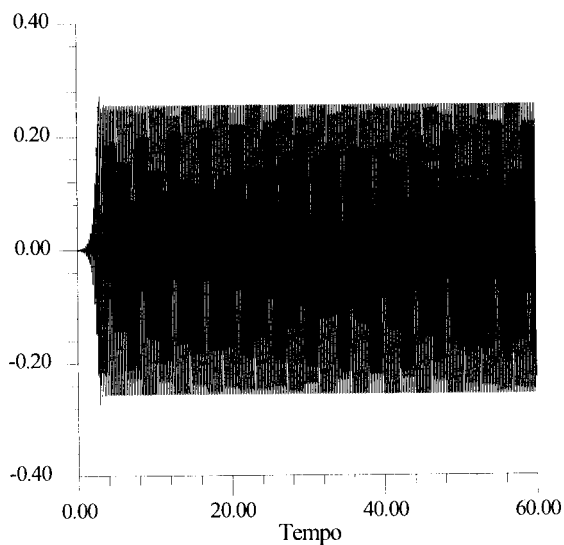
**Figura 5.31-** Resposta no tempo do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.27

a) Espaço Fase

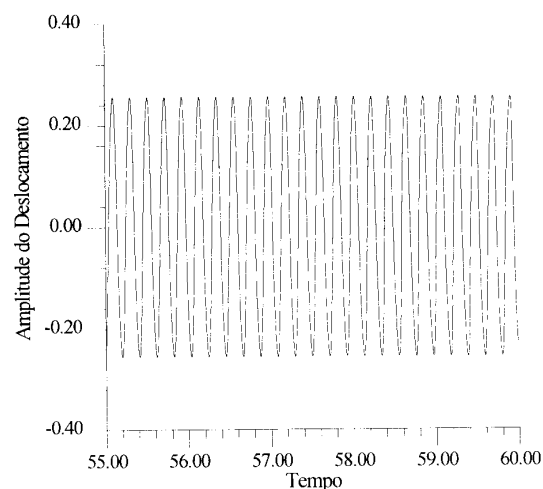


b) Diagrama de Poincaré

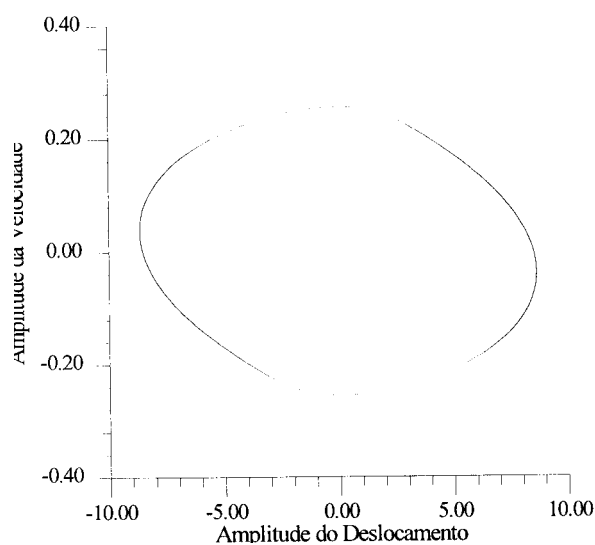
**Figura 5.32-** Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.27.



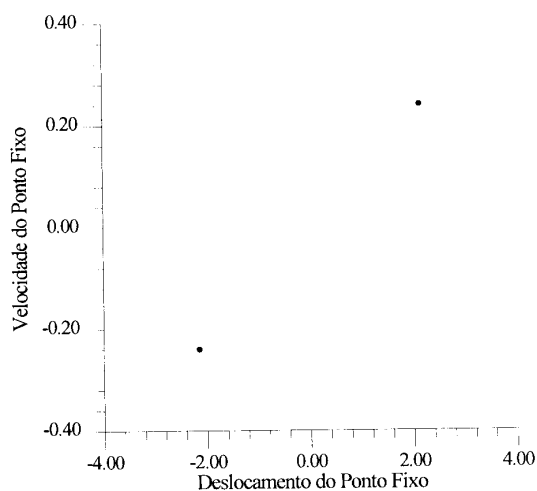
a) Resposta no tempo do sistema



b) Forma da resposta permanente

**Figura 5.33-** Resposta no tempo do sistema no ponto 4 do diagrama de bifurcação da Figura 5.27.

a) Espaço fase.



b) Diagrama de Poincaré.

**Figura 5.34-** Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 4 do diagrama de bifurcação da Figura 5.27.



O ponto 2, (3,1.68), como já foi dito, é um ponto logo após à bifurcação onde surge uma solução com o dobro do período do carregamento axial. Isto está ilustrado nas Figuras 5.29 e 5.30. O ponto 3, (3,2.036), pertence a uma região de instabilidade e a resposta do sistema, o espaço fase e o diagrama de Poincaré estão mostrados nas Figuras 5.31 e 5.32, sendo a resposta semelhante ao caso anterior.

O ponto 4, (3,2.27), ilustra o comportamento do sistema junto à fronteira de estabilidade. A solução, o espaço fase e o diagrama de Poincaré estão mostrados nas Figuras 5.33 e 5.34, respectivamente.

A Figura 3.35, mostra o diagrama de bifurcação na primeira região de ressonância paramétrica, fixando-se agora o parâmetro da frequência da excitação,  $\frac{W}{w}=2$ , que corresponde à frequência da excitação igual ao dobro da frequência natural do sistema. O parâmetro da amplitude do carregamento é agora o parâmetro de controle. Como se pode observar, este diagrama é semelhante ao mostrado na Figura 5.27, onde se nota novamente a presença de um ponto de bifurcação onde se origina uma solução periódica com período igual ao dobro do período da força harmônica externa.

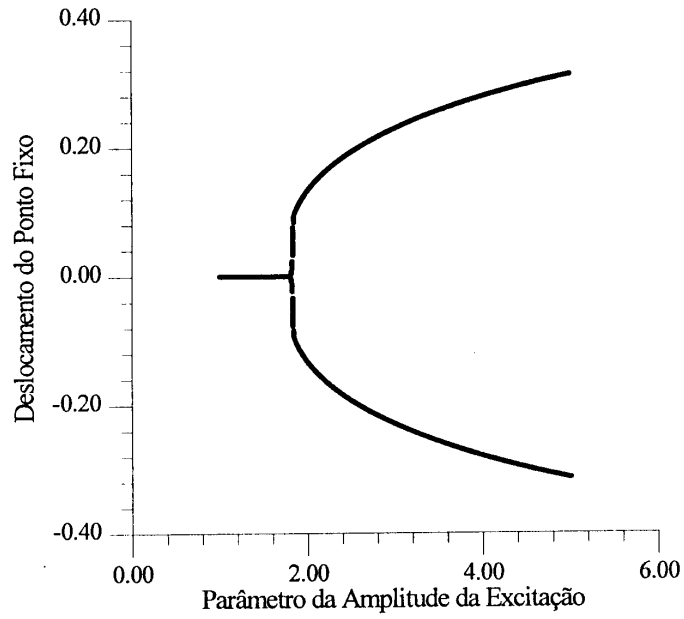
Mostra-se na Figura 5.36, o diagrama de bifurcação para a região 3, mostrada no diagrama de estabilidade da Figura 5.8. Esta região corresponde a uma frequência de excitação igual a uma fração da frequência natural do sistema. Embora tenha menor importância prática que as outras duas regiões já analisadas, apresenta também um comportamento bastante complexo, como pode-se observar neste diagrama. Vê-se na Figura 5.36, diversos tipos de bifurcação com aumento e diminuição de período, além de regiões com movimentos caóticos.

Novamente observa-se uma passagem suave da região estável para a instável quando, ao crescer o parâmetro da frequência, se cruza a fronteira esquerda da região de instabilidade e a existência de um salto dinâmico associado à fronteira direita. Verifica-se pelo diagrama de bifurcação da Figura 5.36 que, inicialmente, a coluna está em equilíbrio, e, ao variar-se o parâmetro de controle, ela entra na região 1, ou seja, o período da solução passa a ter o dobro do período da excitação. Mostra-se na Figura 5.37 a resposta do sistema para o ponto 1. O espaço fase e o diagrama de Poincaré estão mostrados na Figura 5.38. A complexidade da resposta se deve à contribuição dos vários harmônicos presentes na resposta não-linear da coluna.

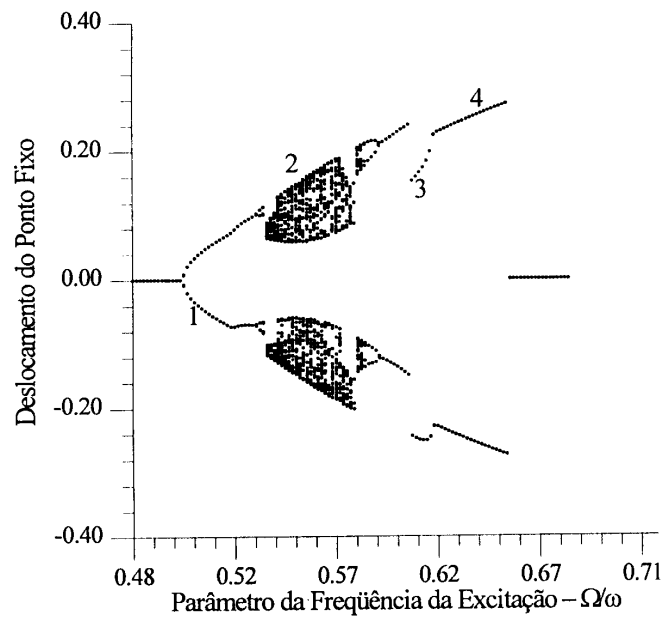
Escolheu-se na região 2, região onde tem-se o caos, o ponto (6,0.56). Verifica-se através das Figuras 5.39.a e 5.39.b a resposta do sistema e a forma da resposta permanente, respectivamente. A medida que aumenta o número de pontos no diagrama de Poincaré, a solução vai apresentando período cada vez mais longo até que a periodicidade desaparece (número infinito de pontos).

Verifica-se no diagrama de Poincaré da Figura 5.40.b uma infinidade de pontos o que evidencia o desaparecimento da periodicidade da solução.

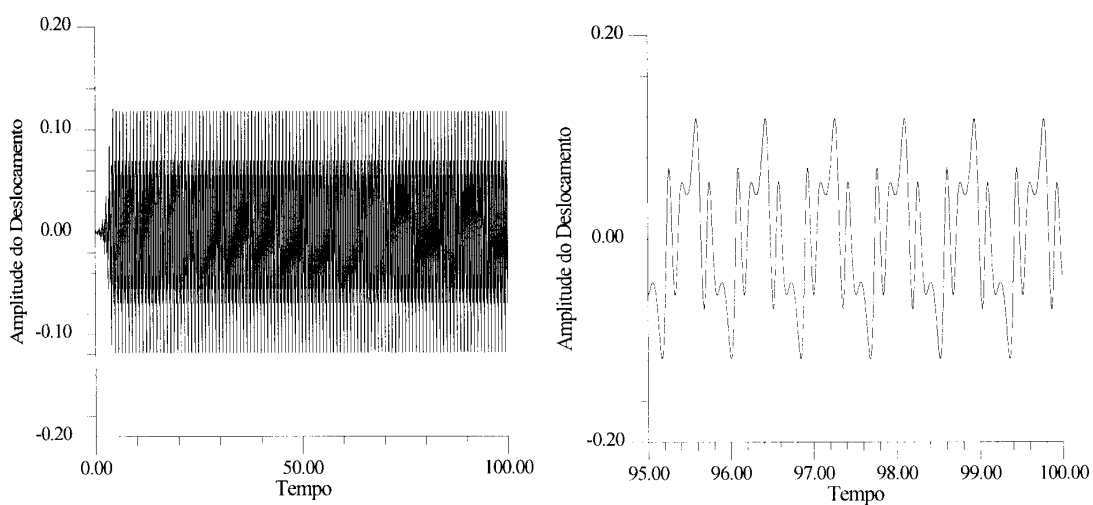
A seguir escolheu-se o ponto (6,0.61), na região 3, e verifica-se que a solução neste ponto tem novamente ordem 2, como mostra-se na Figura 5.42. Já na região 4 estudou-se o ponto (6,0.65), verificando-se os mesmos fenômenos mostrados no ponto (6,0.61).



**Figura 5.35-** Diagrama de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades, com o parâmetro da frequência da excitação,  $\frac{W}{w}=2$  .



**Figura 5.36 -** Diagrama de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades, com o parâmetro da amplitude da excitação,  $d_2 = 6$  .

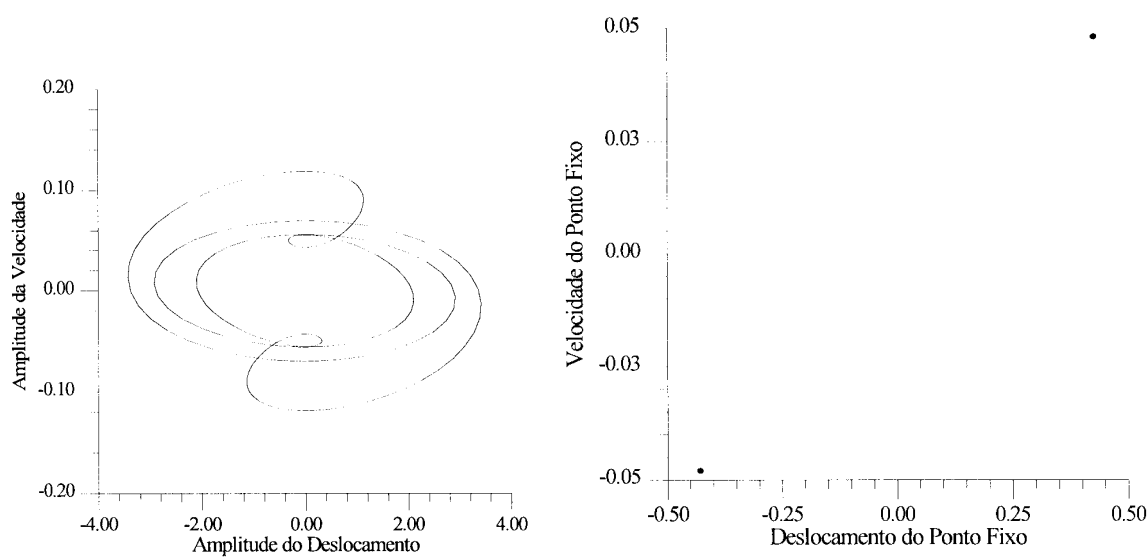


a) Resposta no tempo do sistema.

b) Forma da resposta permanente.

**Figura 5.37-** Resposta no tempo do sistema no ponto 1 do diagrama de bifurcação da

Figura 5.36.

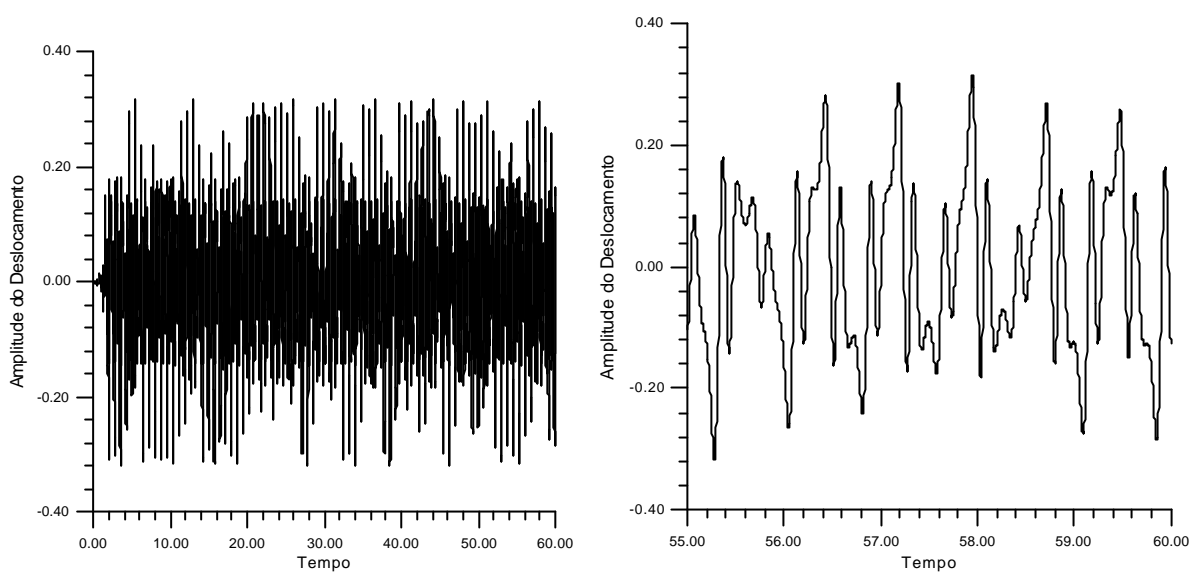


a) Espaço fase.

b) Diagrama de Poincaré.

**Figura 5.38-** Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 1 do diagrama de

bifurcação da Figura 5.36.

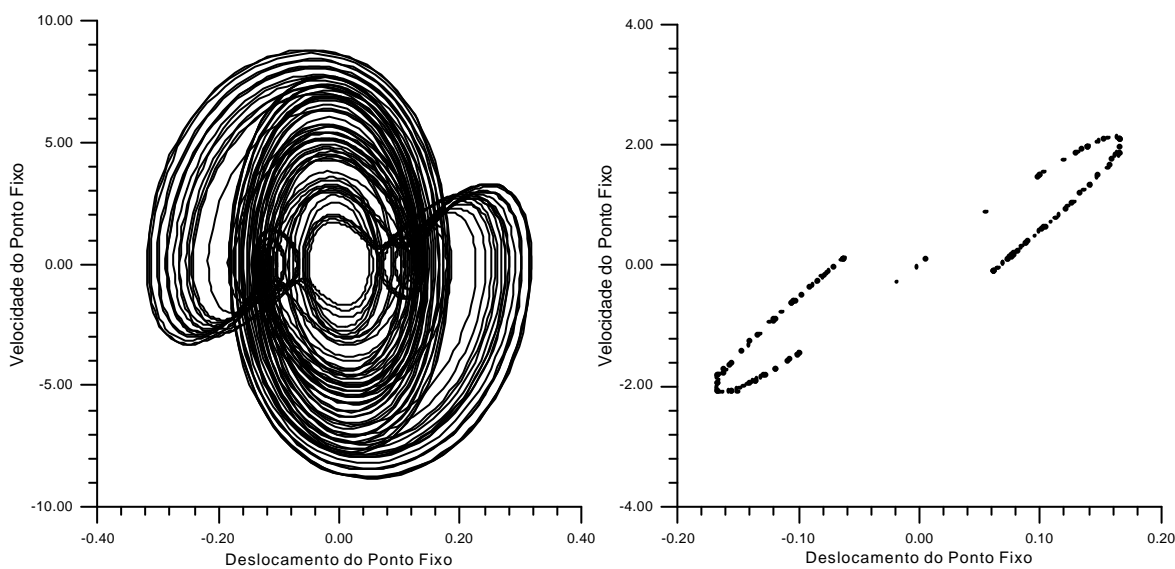


a) Resposta no tempo do sistema.

b) Forma da resposta permanente.

**Figura 5.39-** Resposta no tempo do sistema no ponto 2 do diagrama de bifurcação da

Figura 5.36.

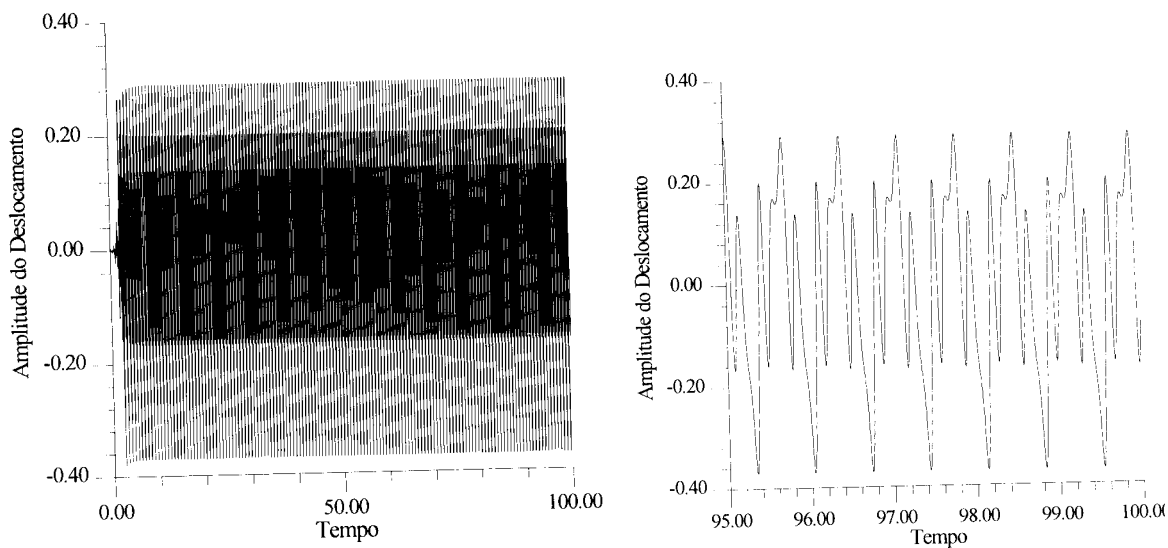


a) Espaço fase.

b) Diagrama de Poincaré.

**Figura 5.40-** Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 2 do diagrama de

bifurcação da Figura 5.36.

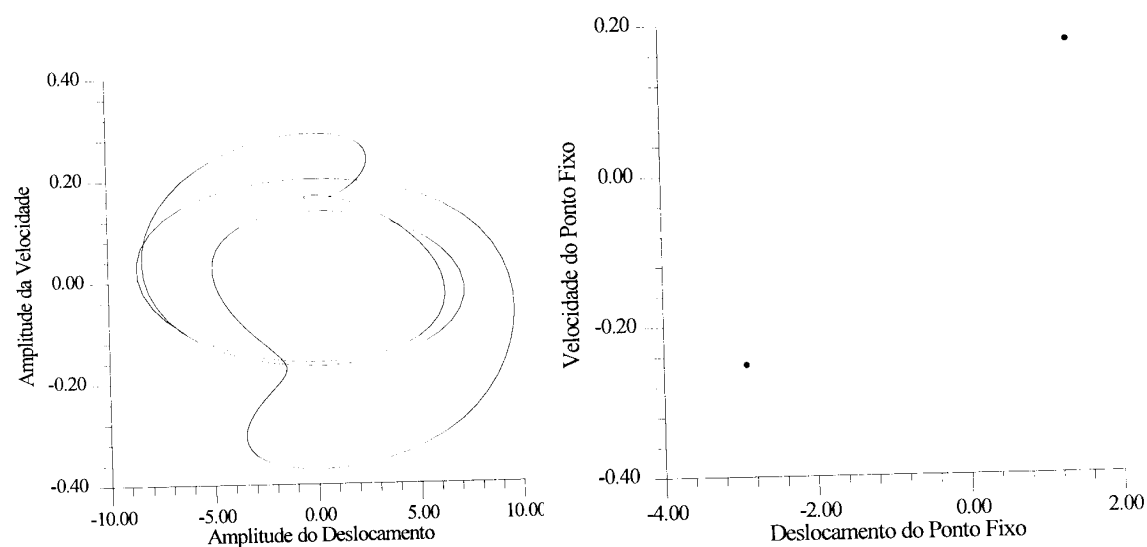


a) Resposta no tempo do sistema.

b) Forma da Resposta Permanente.

**Figura 5.41-** Resposta no tempo do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da

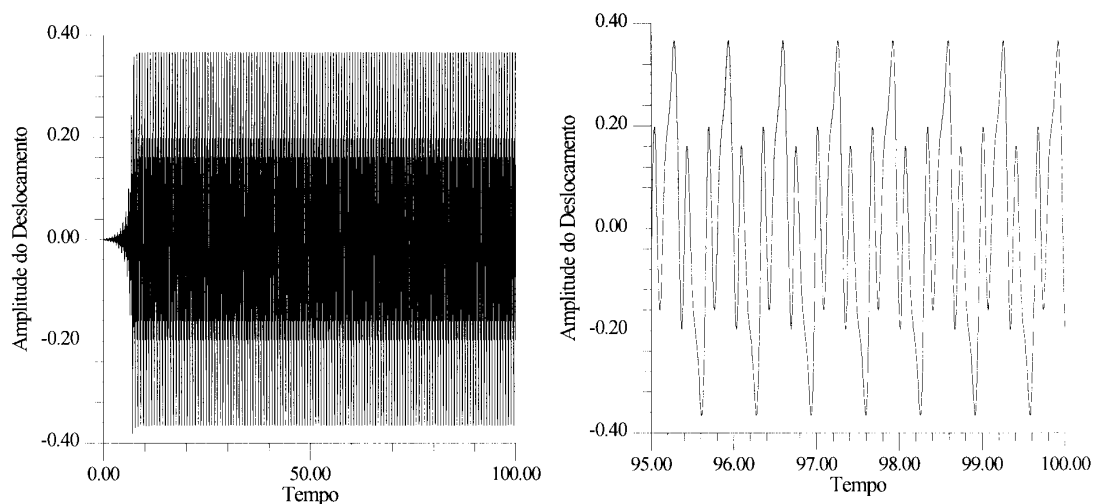
Figura 5.36.



a) Espaço fase.

b) Diagrama de Poincaré.

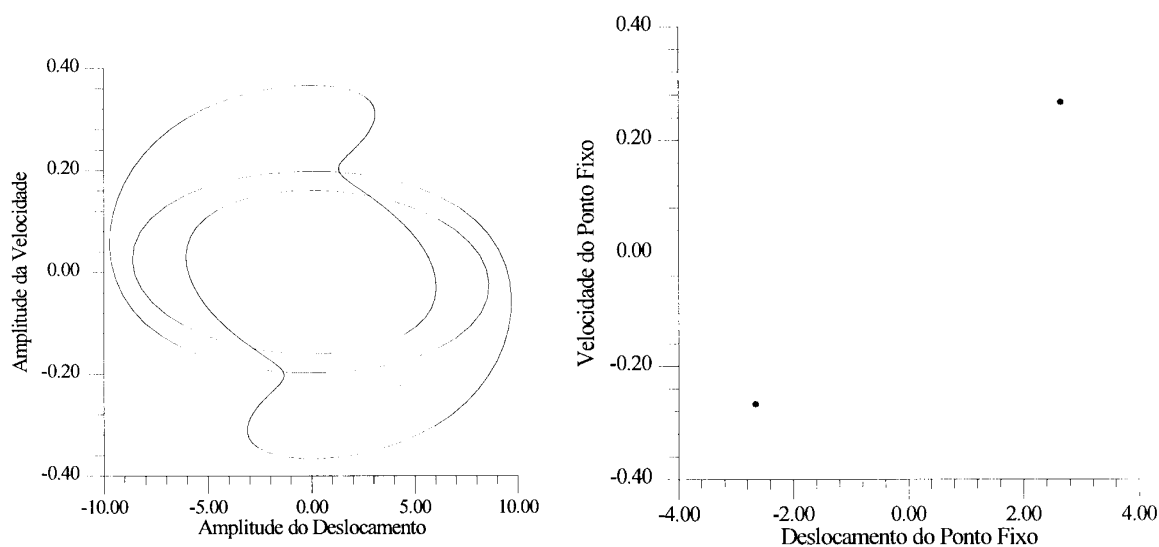
**Figura 5.42-** Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.36.



a) Resposta no tempo do sistema

b) Forma da resposta permanente.

**Figura 5.43-** Resposta no tempo do sistema no ponto 4 do diagrama de bifurcação da Figura 5.36.



a) Espaço fase.

b) Diagrama de Poincaré.

**Figura 5.44-** Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 4 do diagrama de bifurcação da Figura 5.36.

## 5.6- Efeito da Imperfeição Geométrica Inicial.

Analizou-se o efeito da imperfeição geométrica inicial sobre a resposta do sistema, traçando-se curvas que relacionam a maior amplitude do deslocamento no regime permanente e o parâmetro de controle que pode ser a frequência da excitação ou o parâmetro da amplitude do carregamento. Com as condições iniciais de deslocamento e velocidade expressas em (5.5) considerou-se aqui o caso da coluna para o modelo não-linear com um grau de liberdade e amortecimento viscoso  $c=0.3$ .

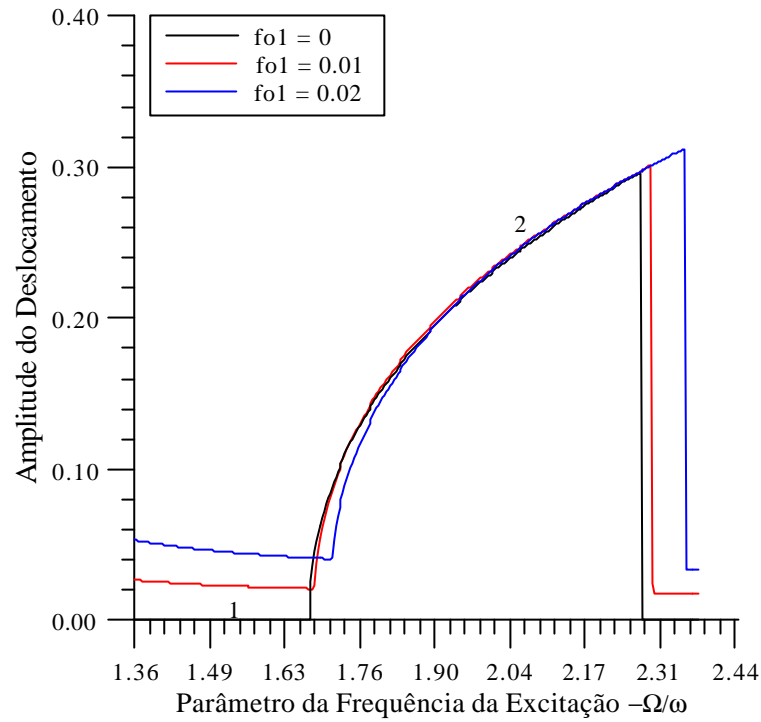
A Figura 5.45 mostra como variam as amplitudes da resposta no regime permanente na primeira região de ressonância paramétrica considerando-se como parâmetro de controle a frequência da excitação, estando fixo o parâmetro da amplitude do carregamento,  $\mathbf{d}_2 = 3$ .

As curvas da Figura 5.45 foram calculadas utilizando-se três valores para a amplitude da imperfeição geométrica inicial,  $f_{oI} = 0$ , que diz respeito ao caso perfeito e os casos onde considerou-se um pequeno valor da imperfeição geométrica inicial,  $f_{oI} = 0.01$  e  $f_{oI} = 0.02$ . Deve-se lembrar que a imperfeição geométrica está parametrizada em relação ao comprimento da coluna, ou seja,  $f_{oI} = \frac{F_{oI}}{L}$ . Verifica-se que, para o valor nulo da imperfeição geométrica e de acordo com o diagrama de bifurcação da Figura 5.27, a coluna volta a posição de equilíbrio estável até o ponto (3,1.68), a partir daí as amplitudes começam a crescer até um infinitésimo antes do ponto (2,2.27) voltando-se novamente a posição de equilíbrio estável a partir deste ponto.

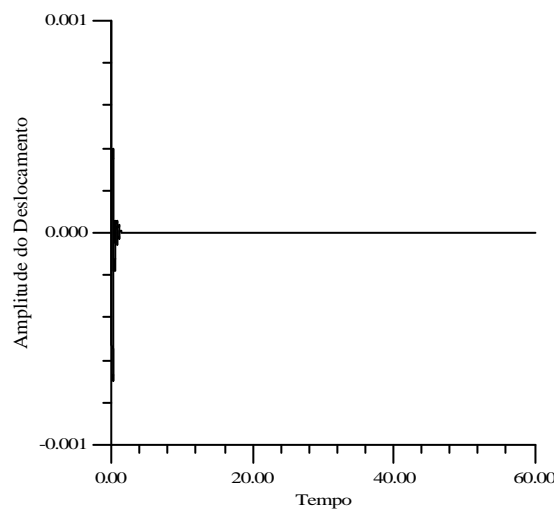
Ao se considerar um pequeno valor para a imperfeição geométrica, verifica-se através da Figura 5.45, que o sistema sempre possui uma certa amplitude na fase permanente. Isto porque ao



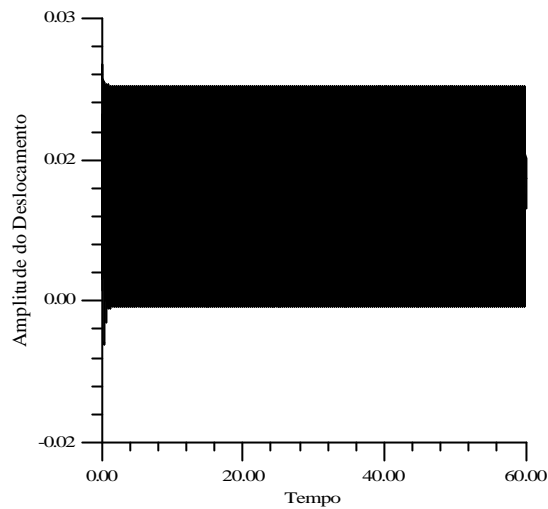
se considerar uma certa imperfeição, o sistema já está deslocado de sua posição de equilíbrio e a carga axial provoca conseqüentemente, desde o início, flexão na coluna.



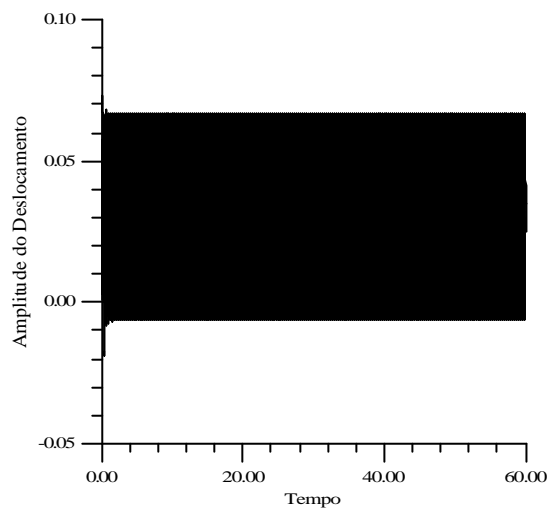
**Figura 5.45** - Influência das imperfeições geométricas na instabilidade paramétrica da coluna, parâmetro da amplitude do carregamento,  $\delta_2 = 3$ .



**Figura 5.46** - Resposta no tempo do sistema no ponto 1 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial,  $f_{01}=0$ .



**Figura 5.47** - Resposta no tempo do sistema no ponto 1 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial,  $f_{o1}=0.01$ .



**Figura 5.48** - Resposta no tempo do sistema no ponto 1 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial,  $f_{o1}=0.02$ .

Mostra-se nas Figuras 5.46, 5.47 e 5.48 a resposta no tempo para o ponto 1 (3,1.53) da Figura 5.45 considerando-se os valores da imperfeição geométrica,  $f_{o1}=0$ ,  $f_{o1}=0.01$  e  $f_{o1}=0.02$ , respectivamente.

Verifica-se na Figura 5.45 que na região entre os pontos (3,1.68) e (3,2.27) as amplitudes crescem paulatinamente e, como pode-se verificar no ponto 2 (3,2.036) para os três casos da

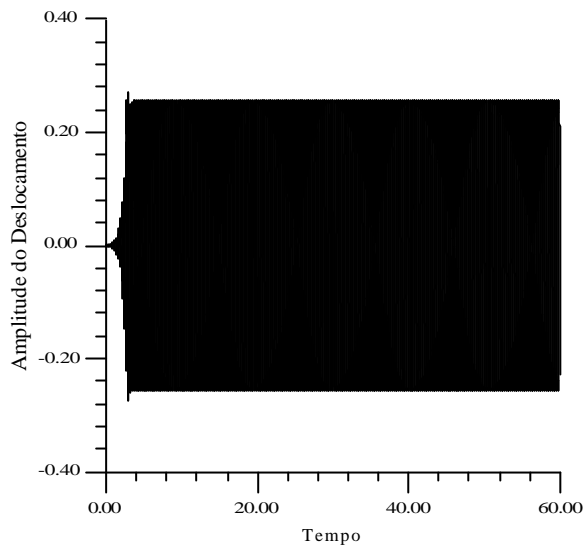
imperfeição considerados na Figura 5.45, as amplitudes máximas da fase permanente possuem aproximadamente o mesmo valor.

Mostra-se na Figura 5.49 a resposta do sistema no ponto 2 para o caso perfeito, ou seja,  $f_{o1}=0$ , o espaço fase e o diagrama de Poincaré estão mostrados nas Figuras 5.50.a e 5.50.b, respectivamente.

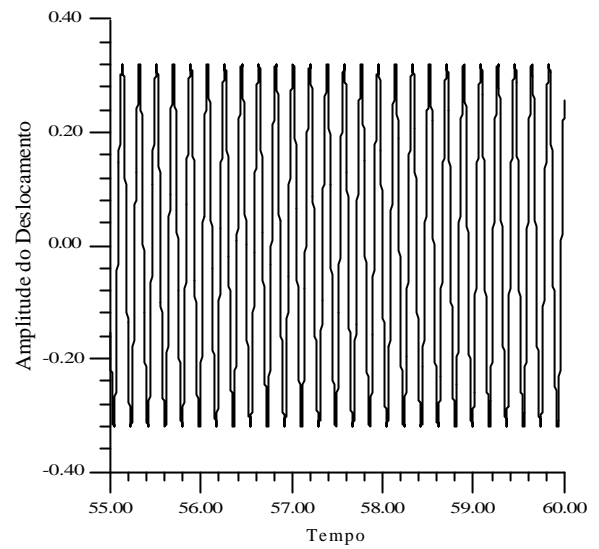
Mostra-se nas Figuras 5.51.a e 5.51.b a resposta no tempo do sistema no ponto 2, para o valor da imperfeição geométrica inicial,  $f_{o1}=0.01$ . O espaço fase e o diagrama de Poincaré no ponto 2 estão mostrados nas Figuras 5.52.a e 5.52.b.

A Figura 5.53 mostra a resposta do sistema no tempo do sistema no ponto 2, para o valor da imperfeição geométrica inicial,  $f_{o1}=0.02$ , o espaço fase e o diagrama de Poincaré estão mostrados na Figura 5.54. Verifica-se que em todos os casos o período da resposta é o dobro do período da excitação e que a forma da resposta no espaço fase é bastante semelhante.

Considerando-se agora como parâmetro de controle o parâmetro da amplitude do carregamento, mostra-se na Figura 5.55 a influência das imperfeições geométricas na primeira região de ressonância paramétrica,  $\frac{\Omega}{\omega} = 2$ . Verifica-se que, ao variar-se o parâmetro da amplitude,  $\delta_2$ , do valor 0 à 1.85 o sistema volta a posição de equilíbrio quando a coluna é perfeita, ou seja,  $f_{o1}=0$ . Já para o caso da coluna imperfeita onde se considerou  $f_{o1}=0.01$  e  $f_{o1}=0.02$  para os valores da imperfeição geométrica inicial, nota-se que mesmo com um pequeno valor do parâmetro da amplitude, o sistema já possui uma amplitude razoável no regime permanente. A partir do valor do parâmetro da amplitude,  $\delta_2 = 1.85$ , as amplitudes começam a crescer mais rapidamente, estando as amplitudes em uma mesma faixa de valores, notando-se que nas regiões de instabilidade paramétrica as amplitudes do sistema são bastante grandes.

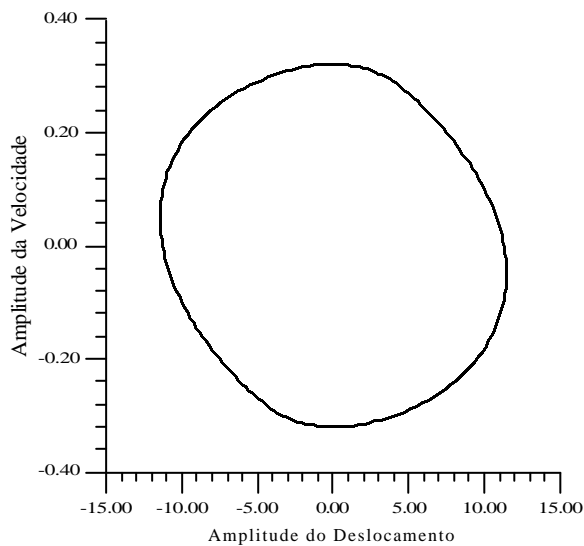


a) Resposta no tempo do sistema.

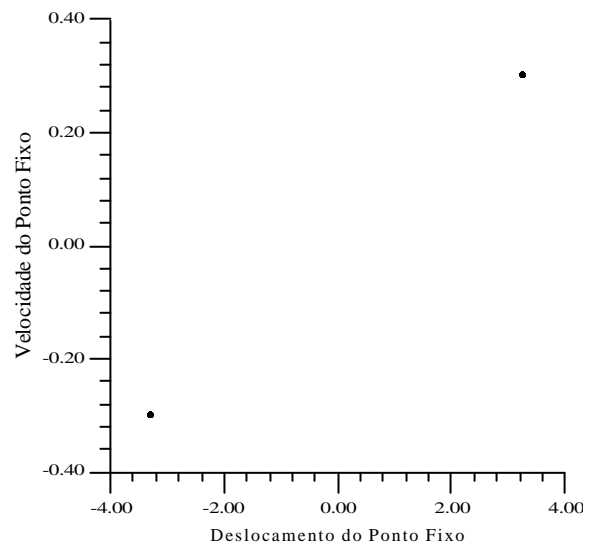


b) Forma da resposta permanente.

**Figura 5.49** - Resposta no tempo do sistema no ponto 2 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial,  $f_{o1}=0$ .

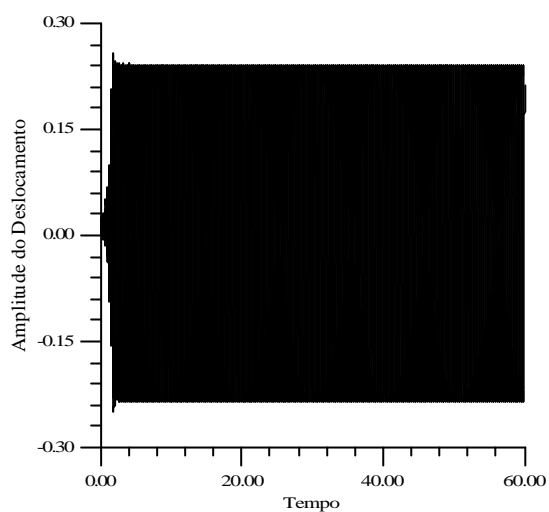


a) Espaço fase.

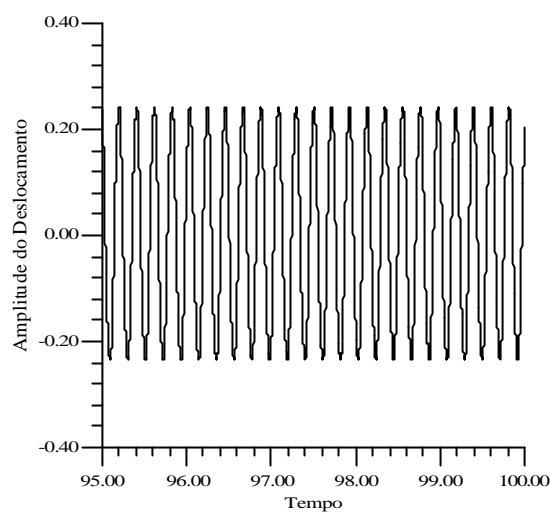


b) Diagrama de Poincaré.

**Figura 5.50** - Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 2 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial,  $f_{o1}=0$ .

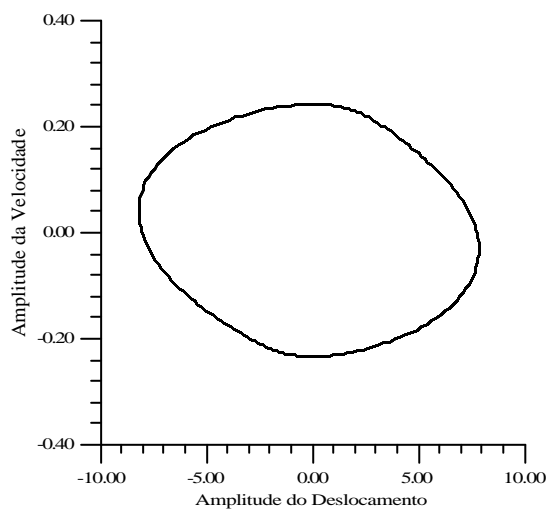


a) Resposta no tempo do sistema.

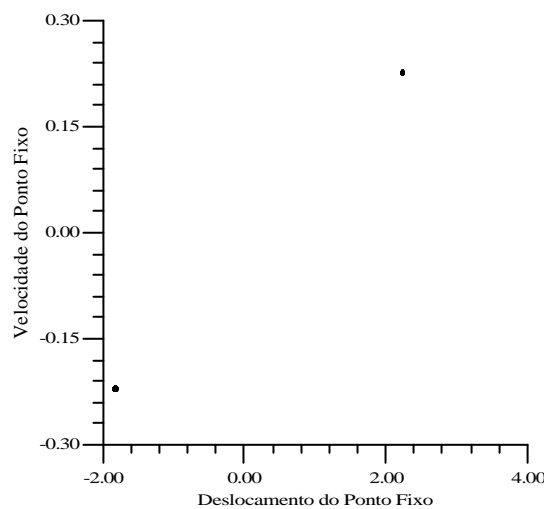


b) Forma da resposta permanente.

**Figura 5.51** - Resposta no tempo do sistema no ponto 2 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial,  $f_{o1}=0.01$ .

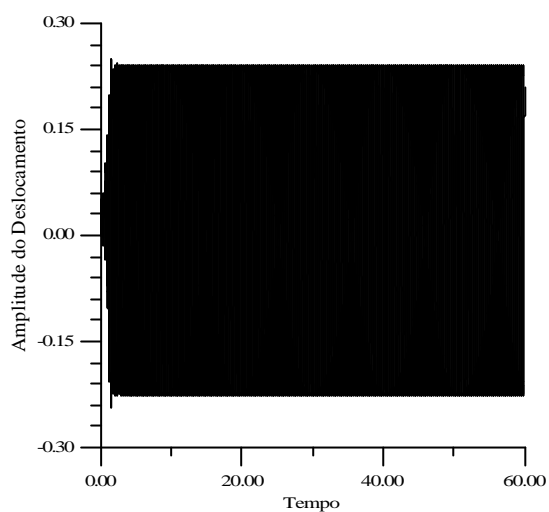


a) Espaço fase.

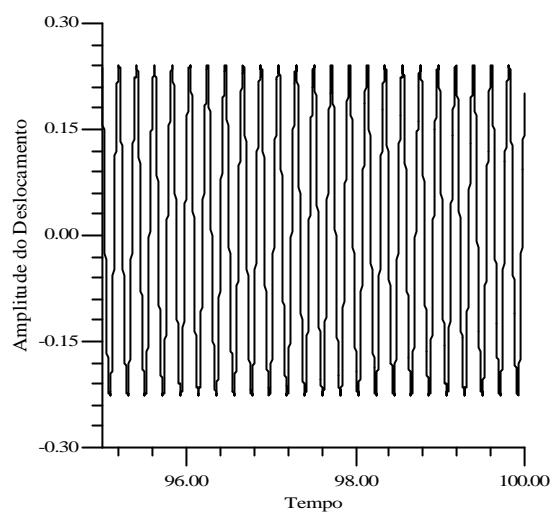


b) Diagrama de Poincaré.

**Figura 5.52** - Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 2 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial,  $f_{o1}=0.01$ .

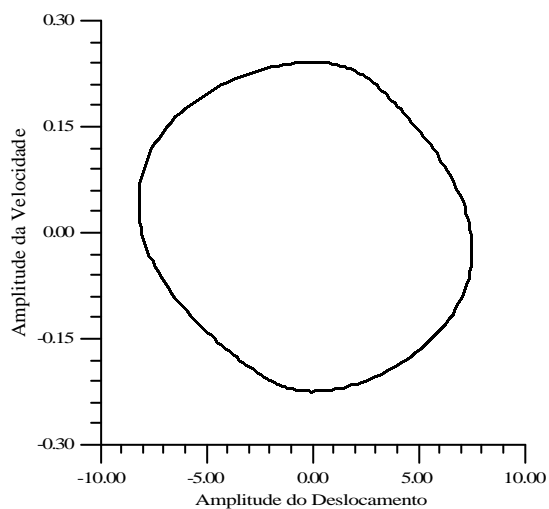


a) Resposta no tempo do sistema.

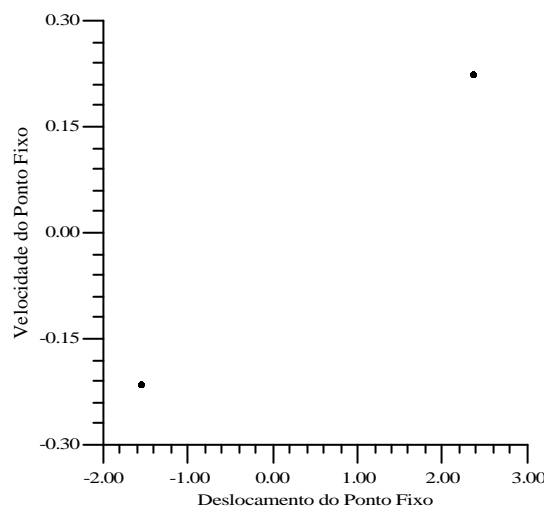


b) Forma da resposta permanente.

**Figura 5.53** - Resposta no tempo do sistema no ponto 2 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial,  $f_{01}=0.02$ .

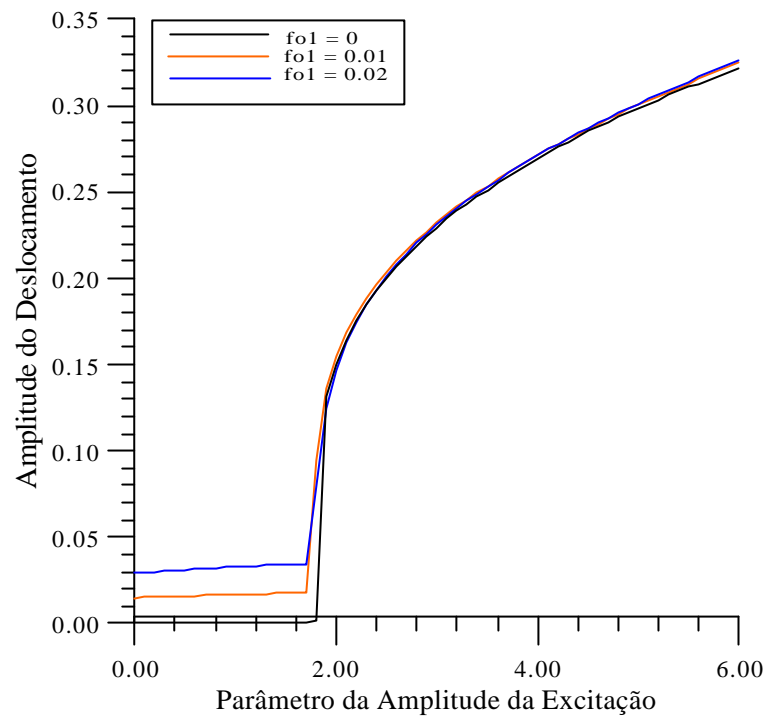


a) Espaço fase.



b) Diagrama de Poincaré.

**Figura 5.54** - Espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema no ponto 2 da Figura 5.45, considerando-se o valor da imperfeição geométrica inicial,  $f_{01}=0.02$ .

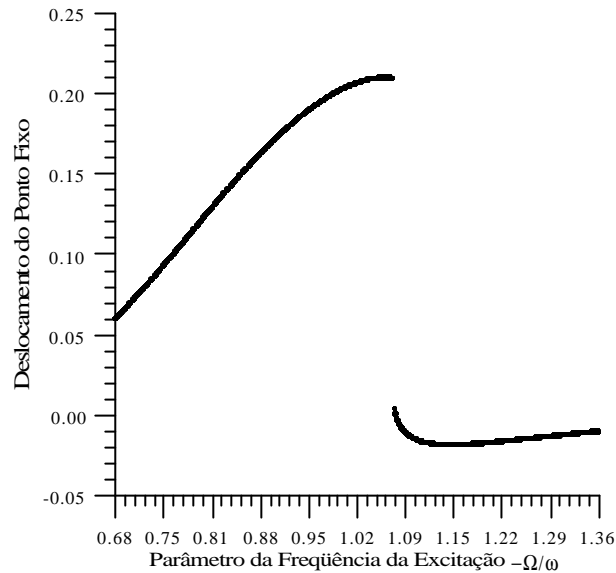


**Figura 5.55** - Influência das imperfeições geométricas na instabilidade paramétrica da coluna,

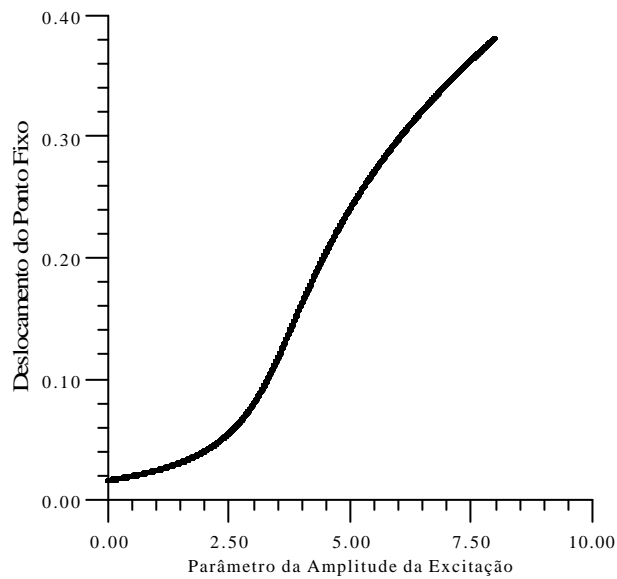
com o parâmetro da frequência da excitação,  $\Omega/\omega = 2$ .

A Figura 5.56 mostra o diagrama de bifurcação para uma coluna imperfeita com  $f_{o1}=0.01$  na região 2 da Figura 5.8. o parâmetro da amplitude da excitação é 4, sendo a frequência da excitação tomada como parâmetro de controle. Comparando com o diagrama mostrado na Figura 5.9 para a coluna perfeita, verifica-se que o aspecto geral não se altera. Tem-se que a amplitude da resposta cresce inicialmente com o parâmetro da frequência, atingindo um máximo quando esta é aproximadamente igual a 28. Já na Figura 5.57 mostra-se o diagrama de bifurcação nesta mesma região de instabilidade paramétrica, tendo agora a amplitude da excitação como parâmetro de controle. Comparando-se com a Figura 5.18, que mostra os resultados para a coluna perfeita, percebe-se que neste caso continua a haver um crescimento da resposta com a amplitude da força, mas, até o valor da amplitude analisada, não se verificou a presença de nenhuma cascata de bifurcação como observado para a coluna perfeita. No diagrama da Figura 5.56 nota-se a presença

de um salto dinâmico como no caso perfeito. Já na Figura 5.57, nota-se que, devido a imperfeição, não se observaram saltos dinâmicos como no caso perfeito. Nas regiões onde deveria existir o salto, nota-se apenas um aumento da declividade do diagrama de bifurcação.

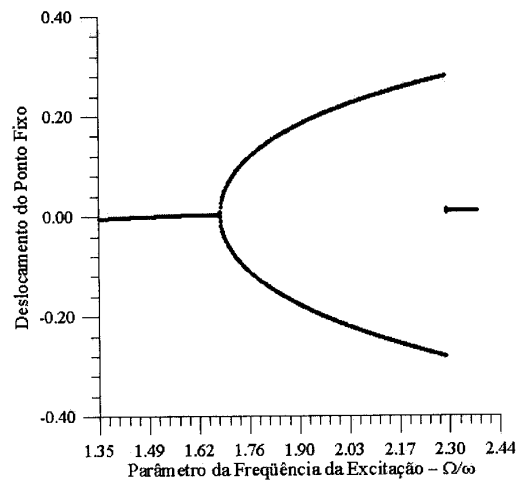


**Figura 5.56** - Diagrama de bifurcação da coluna com imperfeição geométrica inicial,  $f_{01}=0.01$ . O parâmetro de amplitude  $\delta_2 = 4$ .

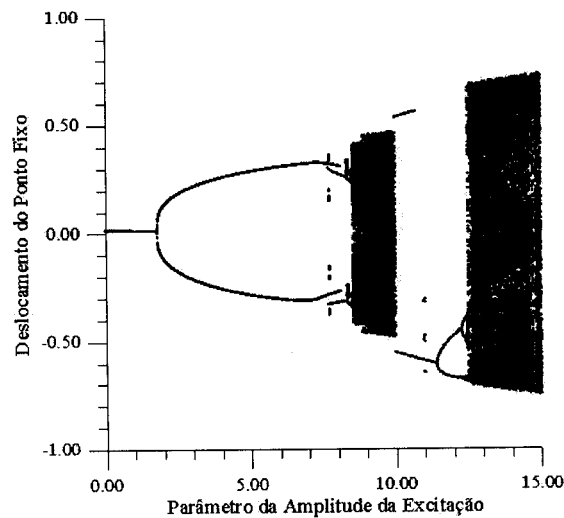


**Figura 5.57** - Diagrama de bifurcação da coluna com imperfeição geométrica inicial,  $f_{01}=0.01$ . O parâmetro da frequência da excitação  $\Omega/\omega = 1$ .





**Figura 5.58** - Diagrama de bifurcação da coluna com imperfeição geométrica inicial,  $f_{o1} = 0.01$ . O parâmetro de amplitude  $d_2 = 3$ .



**Figura 5.59** - Diagrama de bifurcação da coluna com imperfeição geométrica inicial,  $f_{o1} = 0.01$ . O parâmetro de amplitude  $\frac{W}{w} = 3$ .

Um diagrama de bifurcação para a coluna imperfeita na região principal de instabilidade paramétrica, tendo a frequência da excitação como parâmetro de controle, é mostrado na Figura 5.58. Este diagrama é bastante semelhante ao da Figura 5.27 obtido para a coluna perfeita, mostrando a existência de uma bifurcação com duplicação de período e um salto dinâmico na região onde a coluna volta a posição de equilíbrio estático. Deve-se observar que devido a presença da imperfeição a

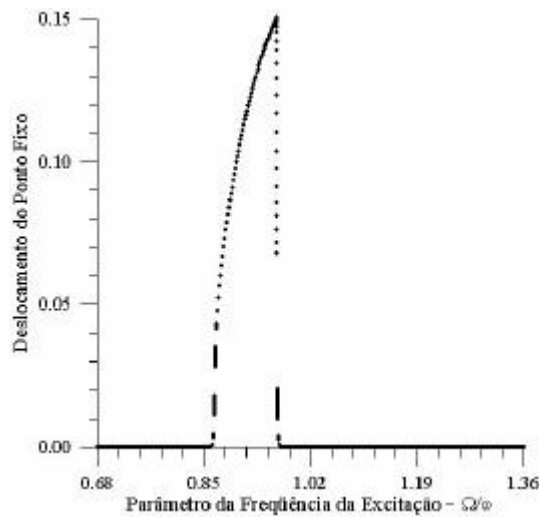
resposta permanente, ao contrário do caso perfeito, tem sempre uma amplitude não nula, verifica-se que o valor da amplitude quando o parâmetro da frequência da excitação,  $\frac{W}{w} = 1.36$ , é  $-0.00579$ . A Figura 5.59 mostra o diagrama de bifurcação nesta mesma região de instabilidade paramétrica, tendo agora a amplitude da excitação como parâmetro de controle. Comparando-se com a Fig. 5.35, que mostra os resultados para a coluna perfeita verifica-se uma semelhança entre os dois diagramas, e nota-se a presença de regiões caóticas na Figura 5.59 devido a faixa de valores para o parâmetro da amplitude ter sido bastante extensa.

## 5.7- Influência do Número de Graus de Liberdade na Resposta da Coluna

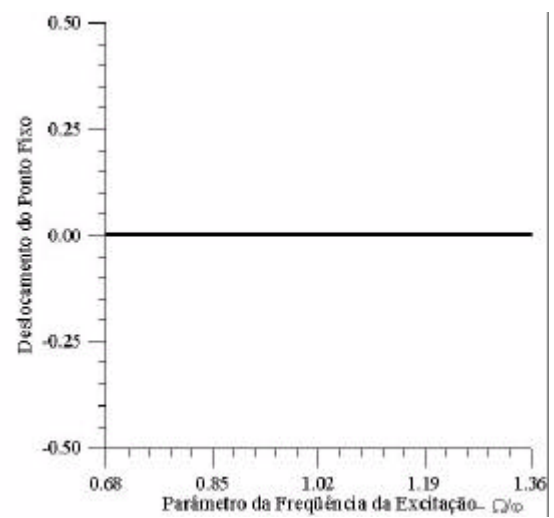
Os resultados anteriores foram obtidos usando o modelo não-linear com um grau de liberdade. Havia sido comentado anteriormente que o número de graus de liberdade não tinha influência na fronteira de estabilidade mostrada na Figura 5.2. Os resultados mostrados a seguir demonstram que o aumento no número de graus de liberdade, embora tenham um pequeno efeito sobre a amplitude total da resposta, não modifica a forma geral dos diagramas de bifurcação que continuam a apresentar as mesmas bifurcações e saltos detectados no modelo com um grau de liberdade.

A Figura 5.60 mostra a resposta relativa aos três graus de liberdade na Segunda região de ressonância paramétrica sendo a frequência da excitação o parâmetro de controle e o parâmetro da amplitude da excitação,  $d_2 = 4$ . Nota-se que o diagrama de bifurcação da coluna para o primeiro grau de liberdade mostrado na Figura 5.60 é idêntico ao mostrado na Figura 5.9, salvo pequenas variações na amplitude da resposta devido ao aumento do número de graus de liberdade.

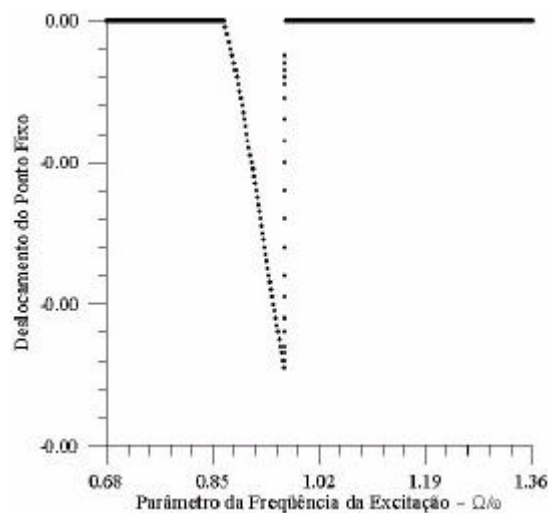
Mostra-se na Figura 5.60.b o diagrama de bifurcação da coluna para o segundo grau de liberdade, nota-se que o sistema não foi excitado para o segundo modo devido este ser simétrico. Caso fosse considerado uma certa imperfeição relativa ao segundo grau de liberdade o sistema apresentaria bifurcações associadas ao segundo grau de liberdade. Para o problema ora estudado o segundo modo da coluna sem imperfeições não é excitado.



a) Primeiro grau de liberdade



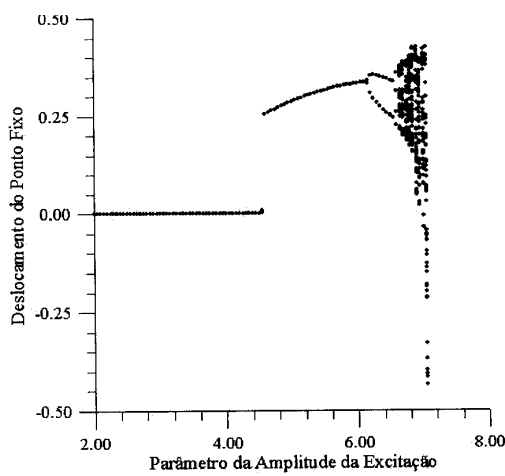
b) Segundo grau de liberdade



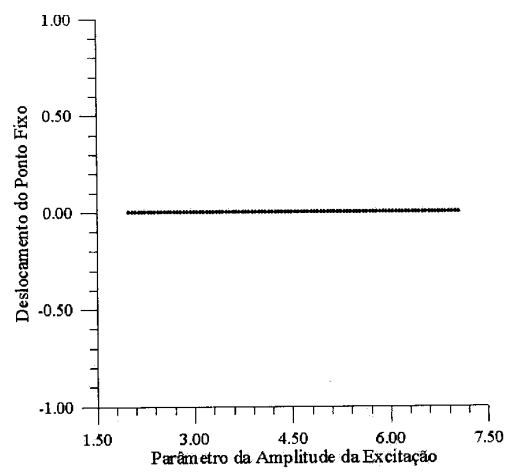
c) Terceiro grau de liberdade

**Figura 5.60** - Diagrama de bifurcação para o terceiro grau de liberdade da coluna com três graus de liberdade e não-linearidades com o parâmetro da amplitude da excitação,  $\delta_2 = 4$ .

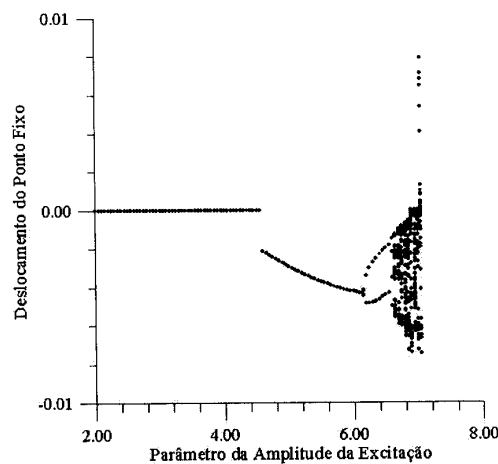
A Figura 5.61 mostra o diagrama de bifurcação da coluna com três graus de liberdade e não-linearidades ainda na segunda região de ressonância paramétrica, sendo a amplitude da excitação o parâmetro de controle e o parâmetro da frequência da excitação,  $\frac{W}{w} = 1$ , nota-se que a Figura 5.61.a é idêntica àquela mostrada na Figura 5.18 que representa o diagrama de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades.



a) Primeiro grau de liberdade.



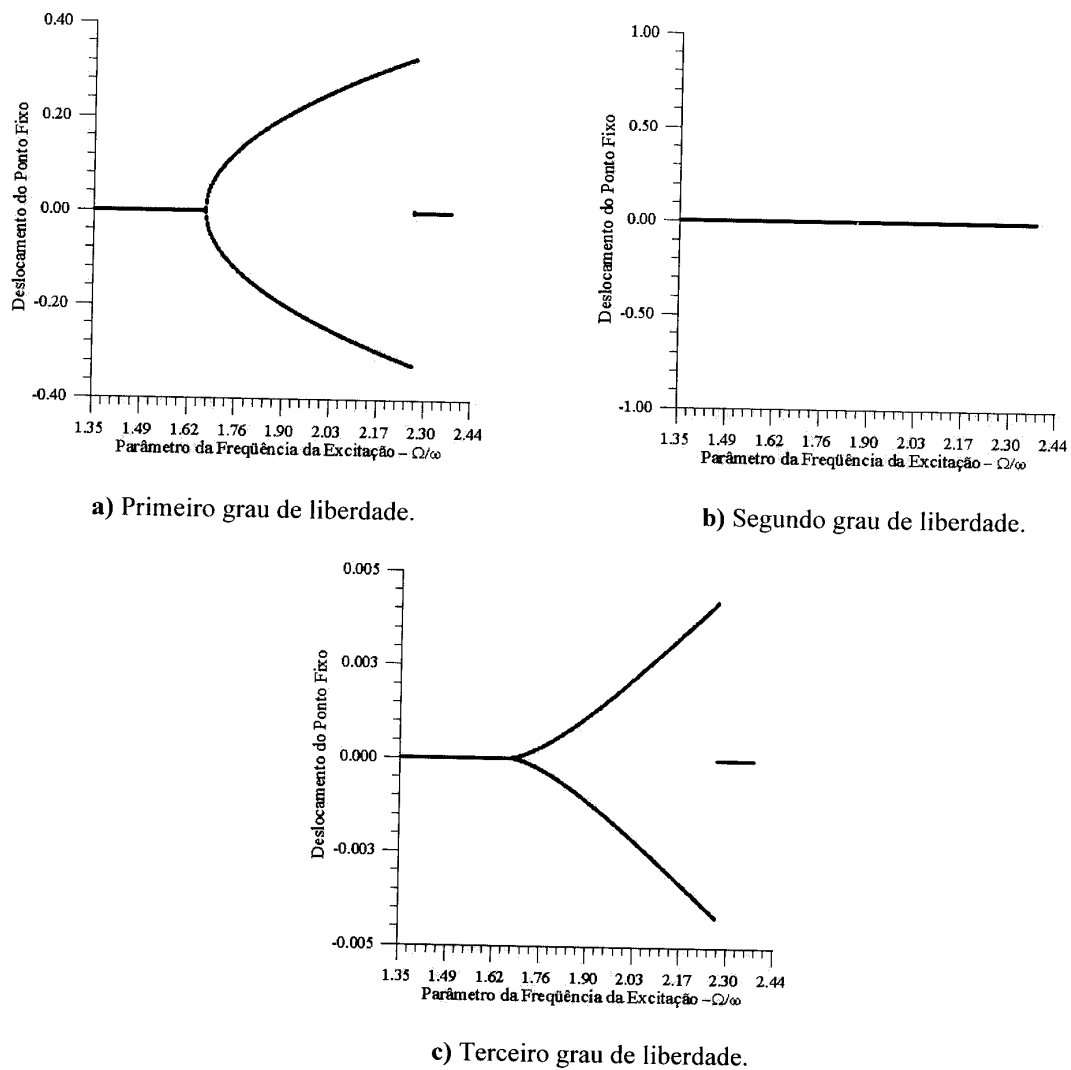
b) Segundo grau de liberdade.



c) Terceiro grau de liberdade.

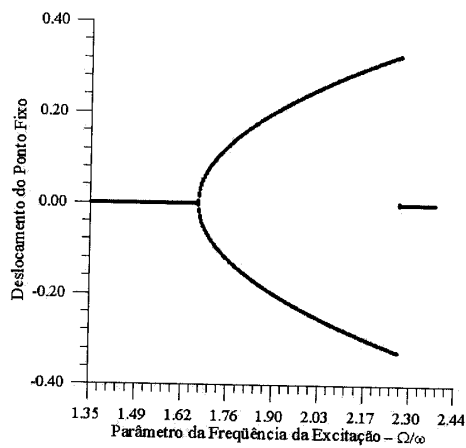
**Figura 5.61** – Diagrama de bifurcação da coluna com três graus de liberdade e não-linearidades com a frequência da excitação,  $\frac{W}{w} = 1$ .

A Figura 5.62 mostra os diagramas de bifurcação da coluna com três graus de liberdade e não-linearidades na primeira região de ressonância paramétrica, sendo o parâmetro de controle a frequência da excitação e o parâmetro da amplitude da excitação,  $d_2 = 3$ . Verifica-se que o diagrama de bifurcação da coluna para o primeiro grau de liberdade mostrado na Figura 5.62.a é semelhante ao mostrado na Figura 5.27, com algumas diferenças na amplitude do sistema.

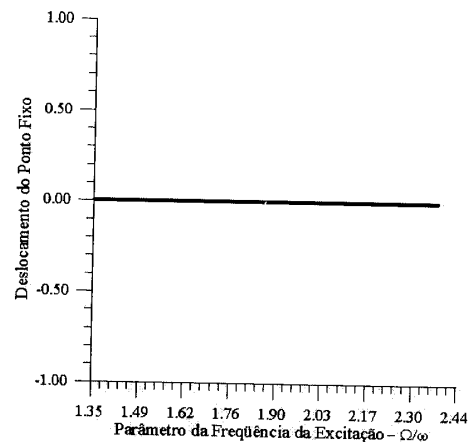


**Figura 5.62** – Diagrama de bifurcação da coluna com três graus de liberdade e não-linearidades com o parâmetro da amplitude da excitação,  $d_2 = 3$ .

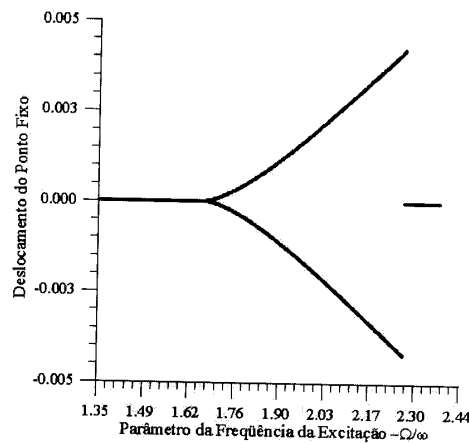
A Figura 5.63 mostra os diagramas de bifurcação da coluna com três graus de liberdade e não-linearidades ainda na primeira região de ressonância paramétrica, sendo o parâmetro de controle a amplitude da excitação e o parâmetro da frequência da excitação,  $\frac{W}{w} = 2$ , nota-se que o diagrama de bifurcação da coluna para o primeiro grau de liberdade mostrado na Figura 5.63.a é semelhante ao mostrado na Figura 5.35. As Figuras 5.63.b e 5.63.c mostram os diagramas de bifurcação para o segundo e terceiro grau de liberdade respectivamente.



a) Primeiro grau de liberdade.



b) Segundo grau de liberdade.



c) Terceiro grau de liberdade.

**Figura 5.63** – Diagrama de bifurcação da coluna com três graus de liberdade e não-linearidades com a frequência da excitação,  $\frac{W}{w} = 1$ .

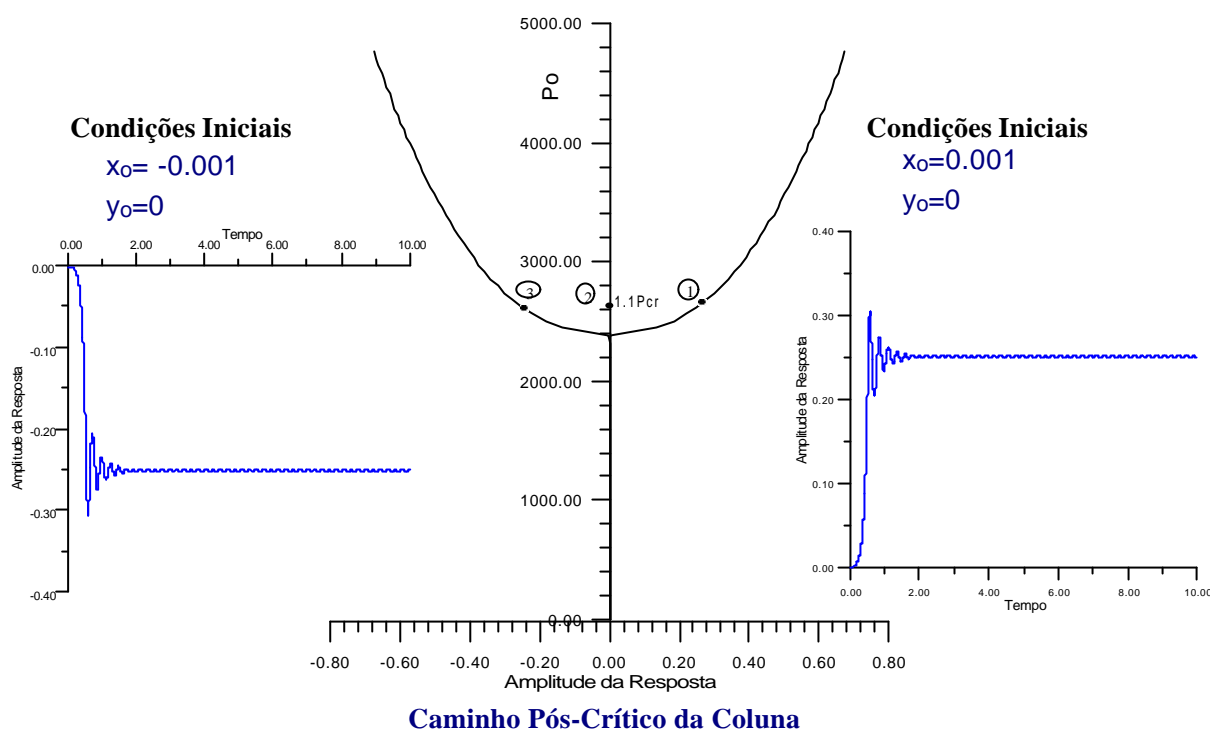
## 5.8- Análise da Resposta da Coluna para $P_o=1.1 P_{cr}$

Verificou-se o comportamento da coluna quando a parcela constante do carregamento axial,  $P_o = 1.1 P_{cr}$ . A Figura 5.64 mostra o caminho pós-crítico da coluna, o qual é simétrico estável, e nota-se que para valores da parcela constante do carregamento axial maiores que a carga crítica de Euler, a coluna pode ter três posições de equilíbrio pós-crítico, sendo as posições 1 e 3, posições de equilíbrio pós-crítico estável e a posição 2, posição de equilíbrio fundamental instável.

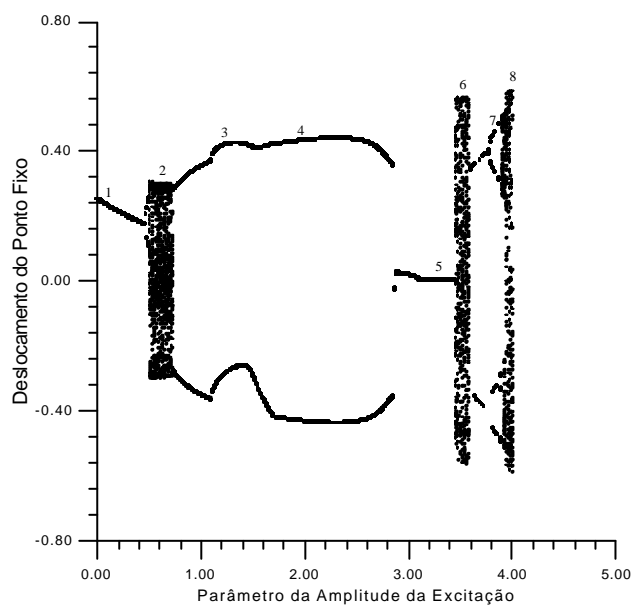
Mostra-se ainda na Figura 5.64 a resposta da coluna para dois conjuntos de condições iniciais e verifica-se que, ao se considerar para o deslocamento inicial um valor  $x_0=0.001$ , a coluna sai de sua posição de equilíbrio e fica oscilando com pequena amplitude em torno da posição 0.25 que é uma posição de equilíbrio pós-crítico estável. Já se for considerado para o deslocamento inicial  $x_0=-0.001$  verifica-se que a coluna sai de sua posição de equilíbrio e agora fica oscilando em torno de -0.25, que é também uma posição de equilíbrio pós-crítico estável.

Mostra-se na Figura 5.65 o diagrama de bifurcação da coluna tendo-se como parâmetro de controle o parâmetro da amplitude da excitação e a frequência da excitação está fixa no valor,  $\Omega = 29.47 \text{ rad/seg}$ .

Verifica-se através do diagrama de bifurcação da Figura 5.65 que a coluna sai da posição 1 que é uma posição de equilíbrio pós-crítico estável e, ao variar-se o parâmetro de controle, entra na região 2 onde verifica-se a presença de movimentos caóticos e nota-se que nesta região o sistema está oscilando em torno das três posições de equilíbrio pós-crítico. Verifica-se na região 3 a presença de soluções que possuem o dobro do período da excitação e ao variar-se ainda mais o parâmetro de controle verifica-se a presença de um salto dinâmico

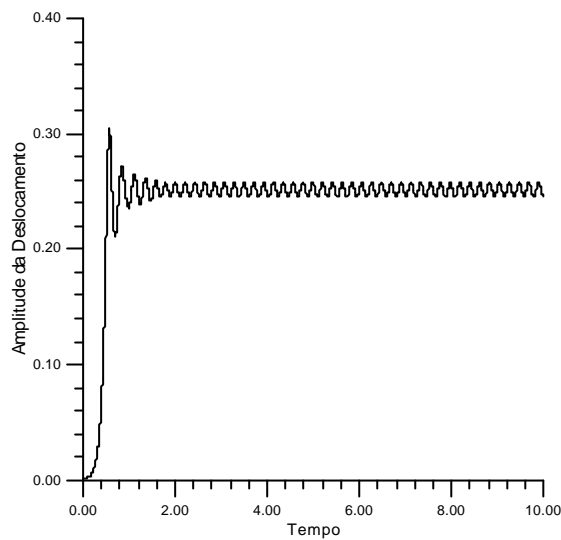


**Figura 5.64-** Caminho pós-crítico da coluna e resposta do sistema para dois conjuntos de condições iniciais.

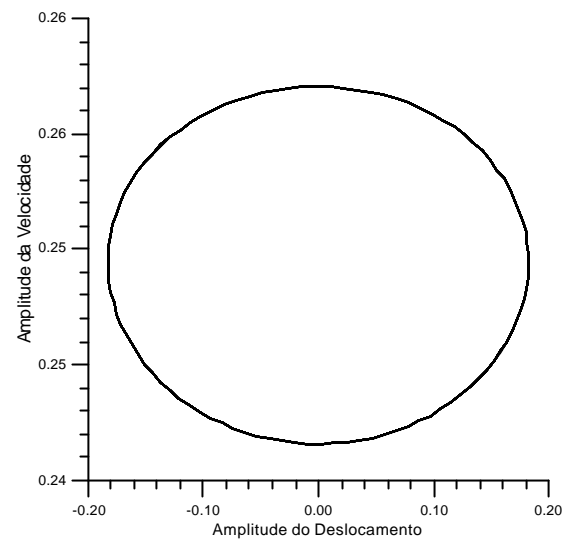


**Figura 5.65 -** Diagrama de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades, com a frequência da excitação,  $\Omega = 29.47 \text{ rad/seg}$ , e a parcela constante do carregamento axial,  $P_0 = 1.1P_{cr}$ .

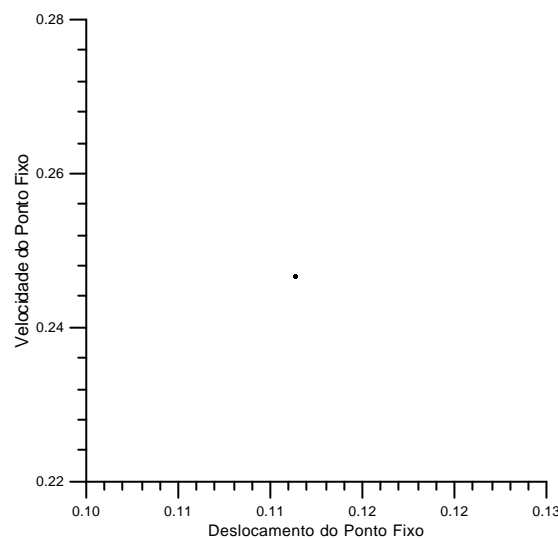




a) Resposta no tempo do sistema.



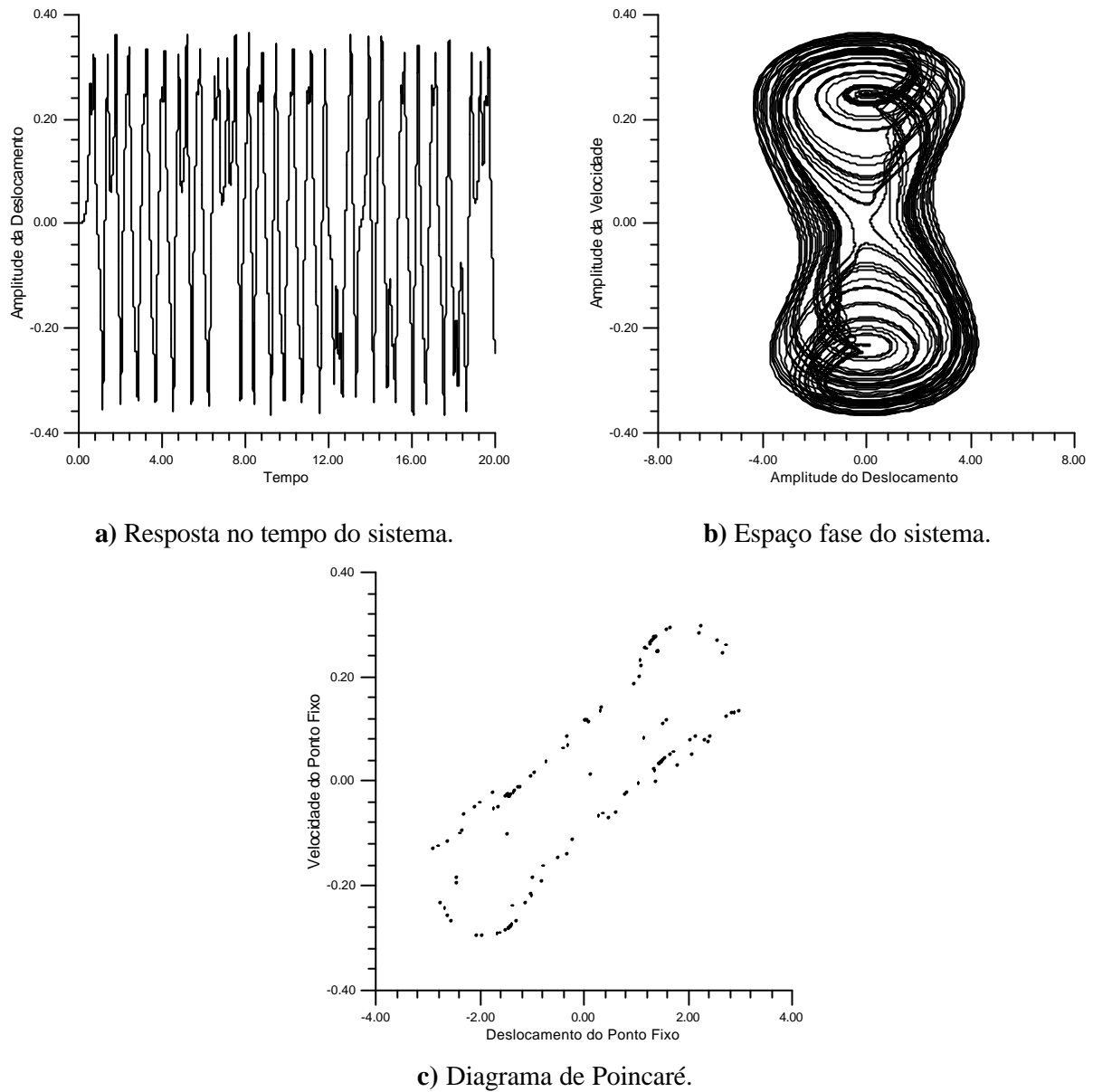
b) Espaço fase do sistema.



c) Diagrama de Poincaré.

**Figura 5.66** - Resposta no tempo, espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.64.

na passagem da região 4 para a região 5. Verificou-se na região 5 que a coluna volta a posição de equilíbrio vertical na faixa de 3.12 a 3.44 para o parâmetro da amplitude da excitação. Testou-se o mesmo modelo para outros tipos de condições notando-se o retorno da coluna a posição de equilíbrio na região 5. Na região 6 verifica-se novamente a presença de movimentos caóticos e na região 7 soluções com o dobro e com o quádruplo do período da

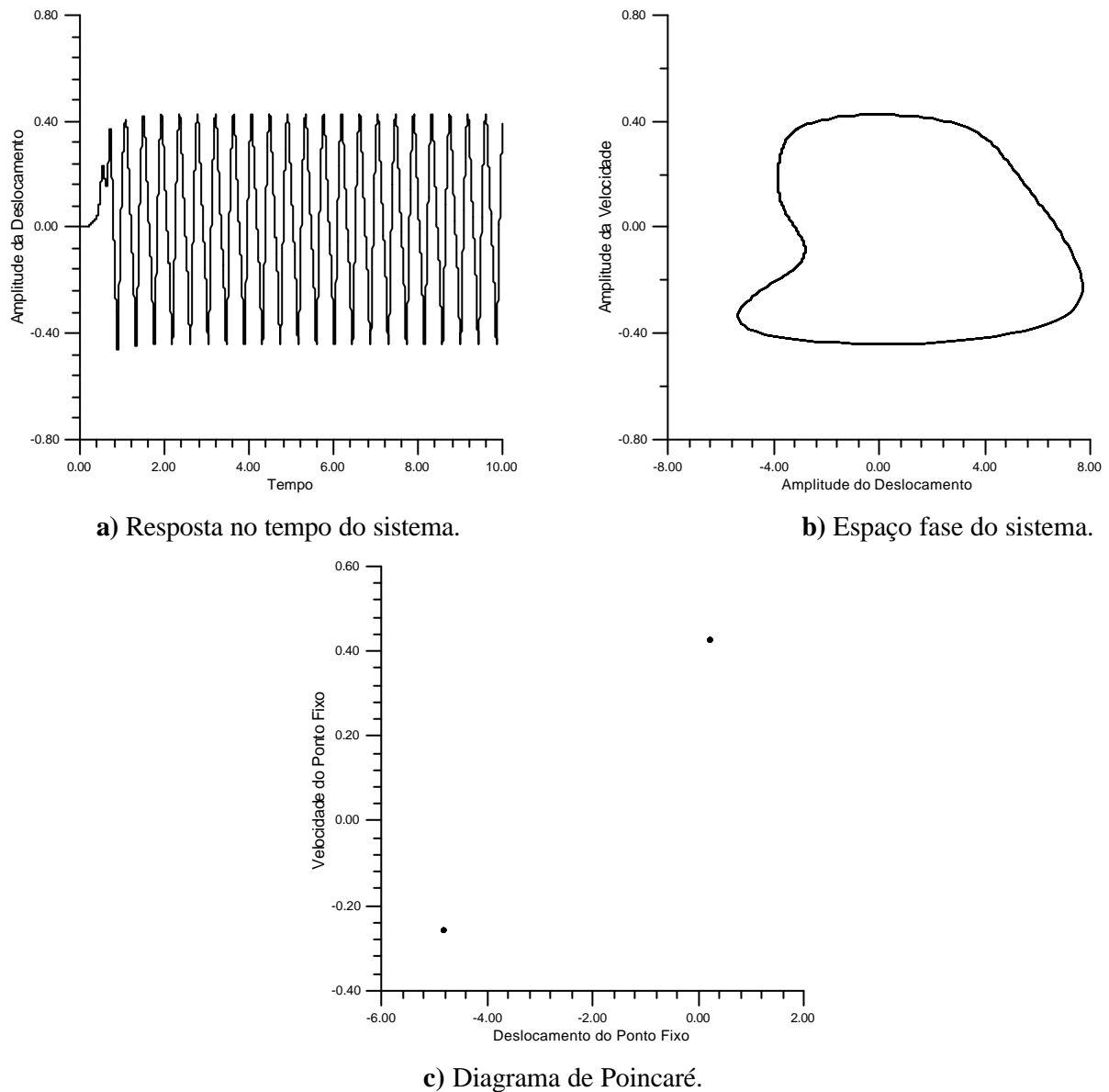


**Figura 5.67** - Resposta no tempo, espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 2 do diagrama de bifurcação da Figura 5.64.

excitação e ao variar-se parâmetro de controle, verifica-se novamente a presença de movimentos caóticos na região 8.

A Figura 5.66.a mostra a resposta no tempo do sistema em um ponto da região 1 do diagrama de bifurcação da Figura 5.65. O ponto escolhido possui o parâmetro da amplitude da excitação,  $\delta_2 = 0.03$  e a frequência da excitação,  $\Omega = 29.47 \text{ rad/seg}$ . Verifica-se através da

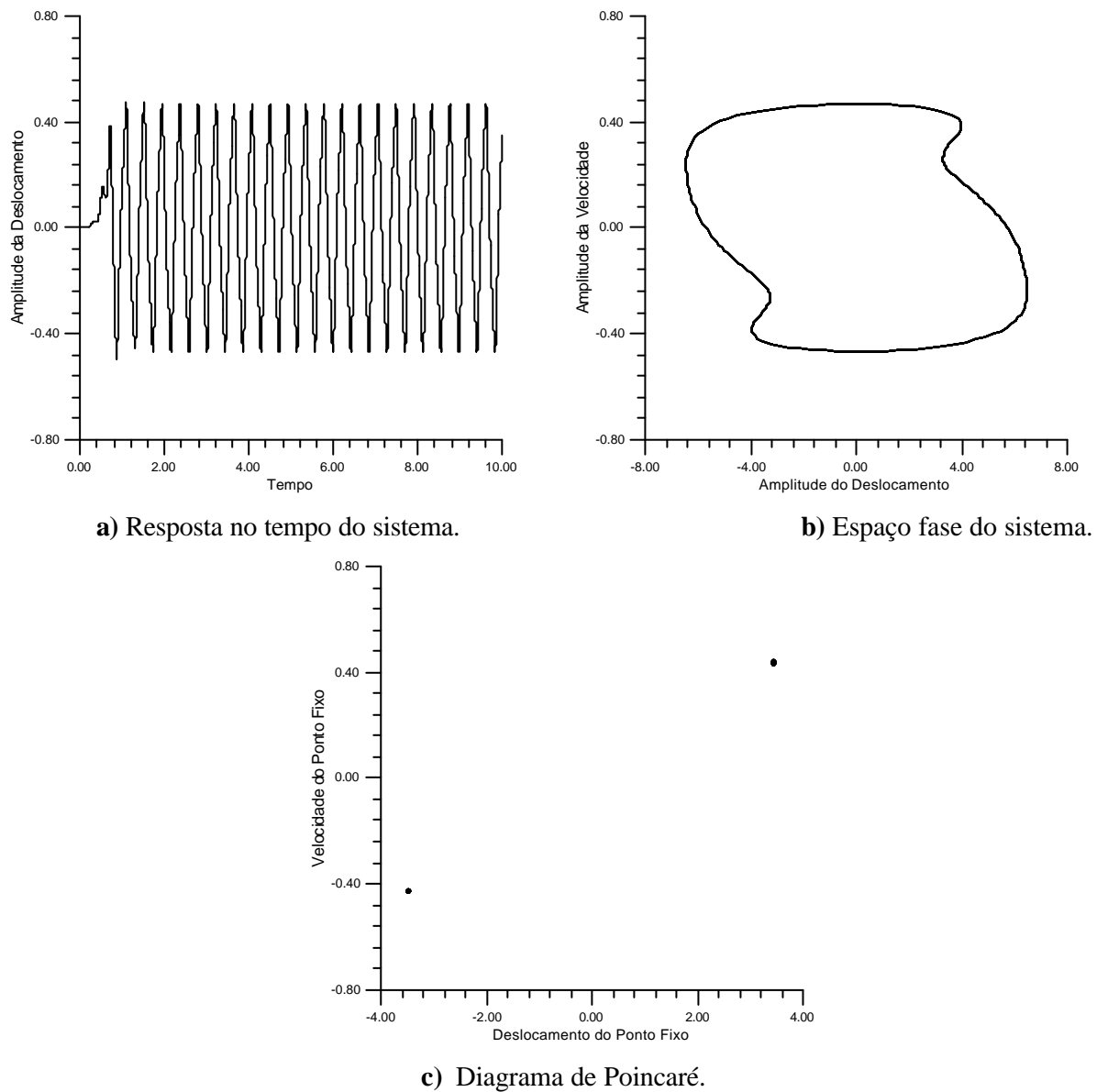
Figura 5.66.a que a coluna sai da posição de equilíbrio estável, perde a estabilidade e para em outra posição que é a posição de equilíbrio pós-crítico estável e continua vibrando em torno desta posição, pois após a perturbação a coluna já está fletida. Mostra-se nas Figuras 5.66.b e 5.66.c o espaço fase e o diagrama de Poincaré respectivamente para o mesmo ponto da região 1, verificando-se a presença de uma solução que possui o período igual ao período da excitação.



**Figura 5.68** - Resposta no tempo, espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 3 do diagrama de bifurcação da Figura 5.64.

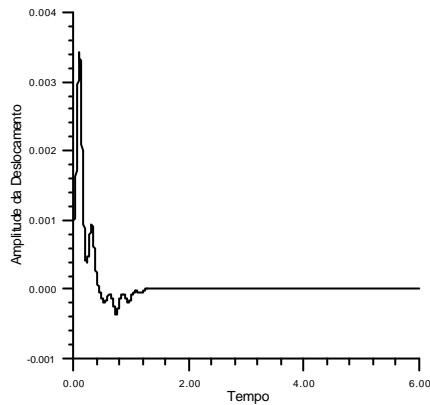
Mostra-se na Figura 5.67.a a resposta do sistema em um ponto na região 2 onde tem-se movimentos caóticos.

O ponto escolhido possui o parâmetro da amplitude da excitação,  $\delta_2 = 0.7$  e a frequência da excitação,  $\Omega = 29.47 \text{ rad/seg}$ . Verifica-se que o sistema fica oscilando em torno das três posições de equilíbrio pós-crítico, mostradas no gráfico da Figura 5.64 que representa o caminho pós-crítico da coluna.

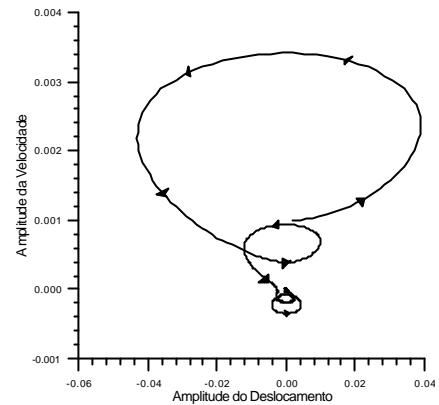


**Figura 5.69** - Resposta no tempo, espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 4 do

diagrama de bifurcação da Figura 5.64.

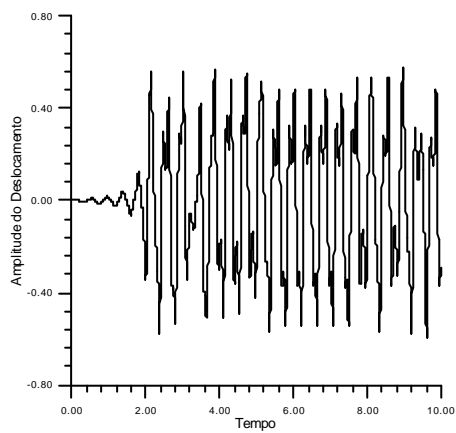


a) Resposta no Tempo.

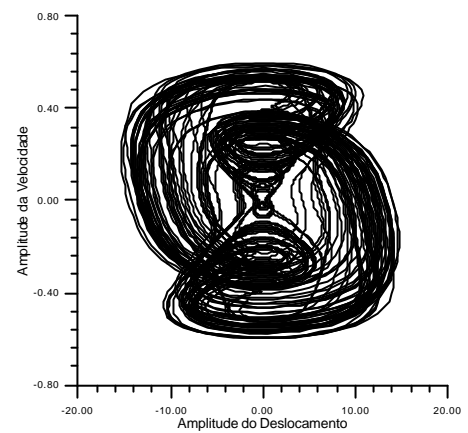


b) Espaço Fase

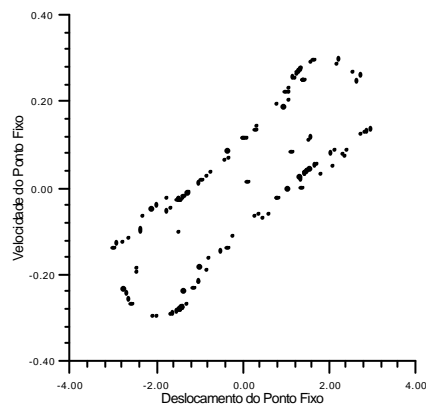
**Figura 5.70** - Resposta no tempo e espaço fase do sistema na região 5 do diagrama de bifurcação da Figura 5.64.



a) Resposta no tempo do sistema.

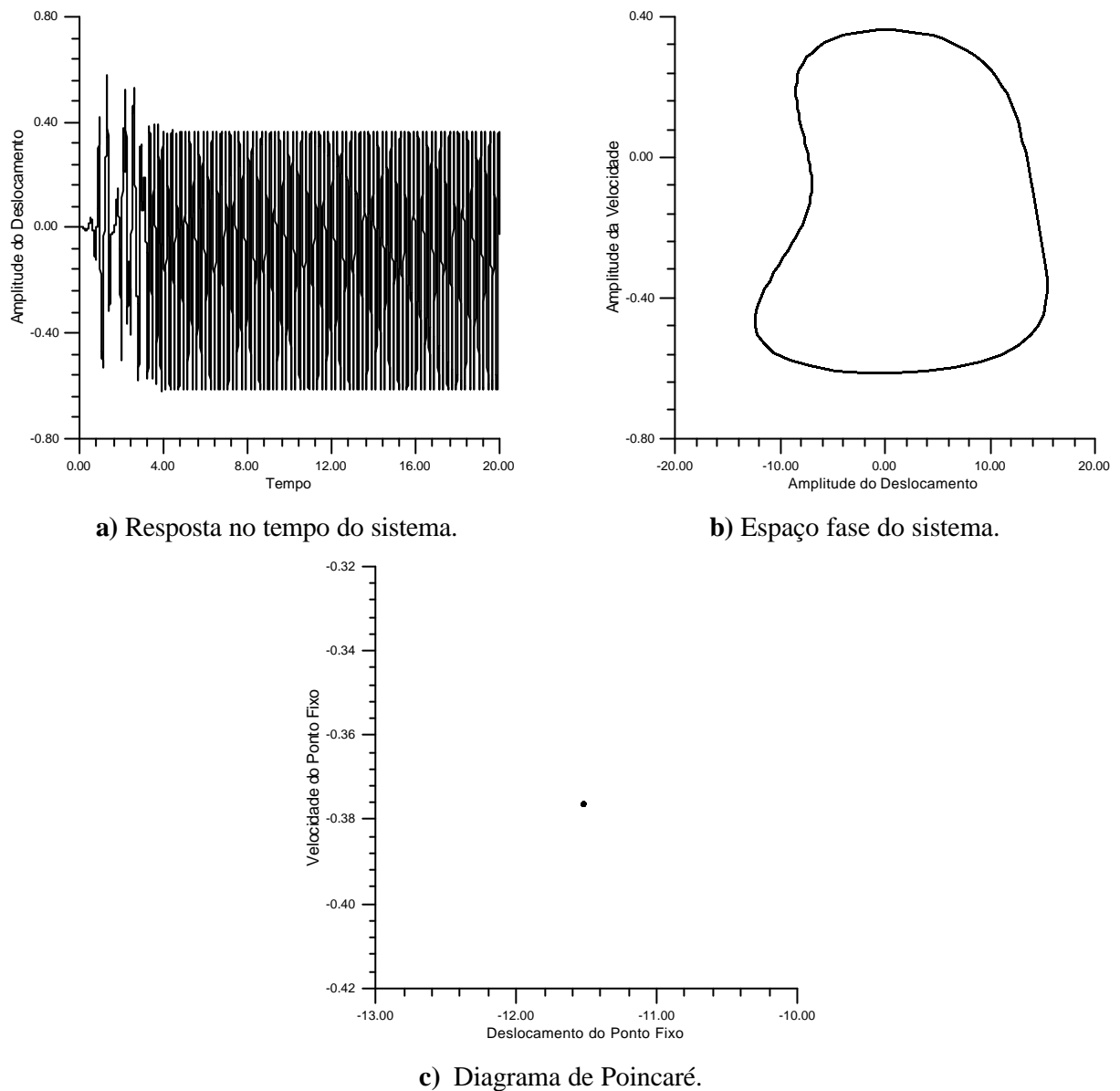


b) Espaço fase do sistema.



c) Diagrama de Poincaré.

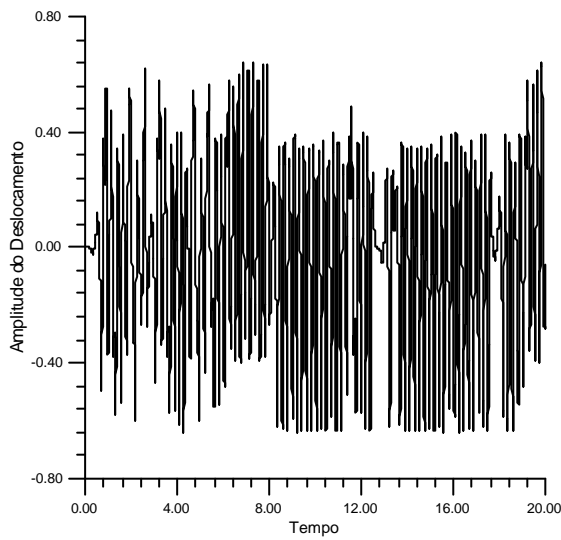
**Figura 5.71** - Resposta no tempo, espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 6 do diagrama de bifurcação da Figura 5.64.



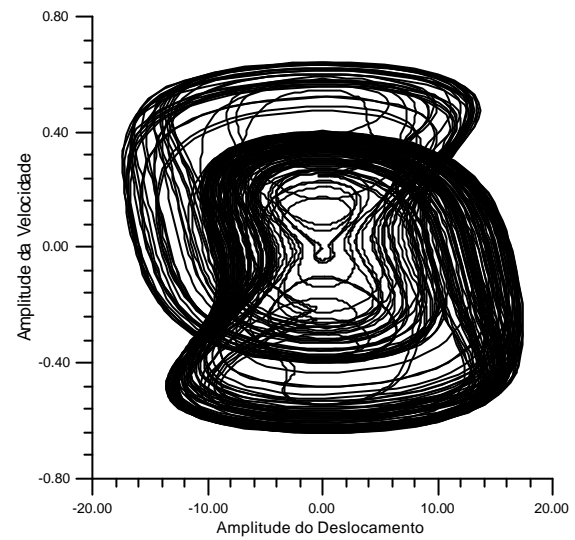
**Figura 5.72** - Resposta no tempo, espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 7 do diagrama de bifurcação da Figura 5.64.

As Figuras 5.67.b e 5.67.c mostram o espaço fase e o diagrama de Poincaré da coluna respectivamente e verifica-se através do diagrama de Poincaré mostrado na Figura 5.67.c que o período da resposta é bastante longo em relação ao período da excitação, pois o mesmo possui uma infinidade de pontos.

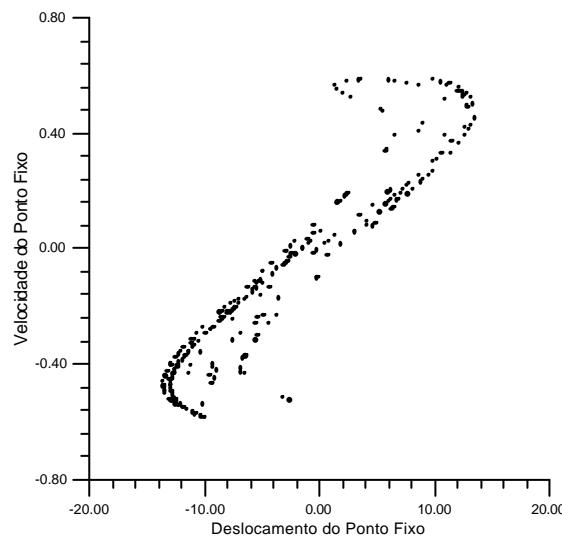
Mostra-se na Figura 5.68.a a resposta do sistema na região 3. As soluções da região 3 possuem resposta que tem o período igual ao dobro do período da excitação. O ponto escolhido possui o parâmetro da amplitude da excitação,  $\delta_2 = 1.4$  e a frequência da excitação,  $\Omega = 29.47 \text{ rad/seg}$ . As Figuras 5.68.b e 5.68.c mostram o espaço fase e o diagrama de Poincaré respectivamente para o mesmo ponto.



a) Resposta no tempo do sistema.



b) Espaço fase do sistema.



c) Diagrama de Poincaré.

**Figura 5.73** - Resposta no tempo, espaço fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 8 do

diagrama de bifurcação da Figura 5.64.

Mostra-se nas Figuras 5.69.a, 5.69.b e 5.69.c a resposta no tempo, o espaço fase e o diagrama de Poincaré em um ponto da região 4 respectivamente. O ponto escolhido possui o parâmetro da amplitude da excitação,  $\delta_2 = 2$  e a frequência da excitação,  $\Omega = 29.47 \text{ rad/seg}$ . Verifica-se através do diagrama de Poincaré mostrado na Figura 5.69.c que na região 4 o sistema possui respostas que apresentam o dobro do período da excitação.

Mostra-se nas Figuras 5.70.a e 5.70.b a resposta no tempo e o espaço fase em um ponto na região 5. O ponto escolhido possui o parâmetro da amplitude da excitação,  $\delta_2 = 3.2$  e a frequência da excitação,  $\Omega = 29.47 \text{ rad/seg}$ . Nota-se que o sistema perde a estabilidade e depois de um certo tempo o sistema volta a posição de equilíbrio vertical.

Mostra-se nas Figuras 5.71.a, 5.71.b e 5.71.c a resposta no tempo, o espaço fase e o diagrama de Poincaré respectivamente em um ponto na região 6, verifica-se na região 6 a presença de movimentos caóticos. O ponto escolhido possui o parâmetro da amplitude da excitação,  $\delta_2 = 3.5$  e a frequência da excitação,  $\Omega = 29.47 \text{ rad/seg}$ . Nota-se através do diagrama de Poincaré mostrado na Figura 5.71.c que o período da resposta é muito grande em relação ao período da excitação.

Escolheu-se na região 7 o ponto que possui como parâmetro da amplitude da excitação,  $\delta_2 = 3.7$  e a frequência da excitação,  $\Omega = 29.47 \text{ rad/seg}$ . Verifica-se através da resposta no tempo mostrada na Figura 5.72.a que depois de um certo tempo o sistema fica oscilando com a mesma amplitude em torno das três posições de equilíbrio pós-crítico da coluna. Verifica-se que o



período da resposta é igual ao período da excitação como mostra o diagrama de Poincaré da Figura 5.72.c.

Mostra-se nas Figuras 5.73.a, 5.73.b e 5.73.c a resposta no tempo, o espaço fase e o diagrama de Poincaré, respectivamente na região 8 onde tem-se caos. O ponto escolhido possui o parâmetro da amplitude da excitação,  $\delta_2 = 4$  e a frequência da excitação,  $\Omega = 29.47 \text{ rad/seg}$ .

### Conclusões e Sugestões

A instabilidade paramétrica de colunas foi analisada no presente trabalho que teve como objetivo de pesquisa o desenvolvimento de uma formulação e certas estratégias que permitiram a análise da perda de estabilidade de colunas esbeltas submetidas a carregamento axial periódico, fenômeno conhecido como ressonância paramétrica.

Desenvolvem-se nos capítulos anteriores procedimentos computacionais para:

- 1- Integração das equações de movimento da coluna com um ou três graus de liberdade, com ou sem não-linearidades e assim obteve-se o traçado da resposta, espaço fase e diagrama de Poincaré.
- 2- Traçado dos diagramas de bifurcação e verificação da influência dos parâmetros de controle nas regiões de estabilidade da coluna.
- 3- Traçado dos diagramas de estabilidade para a coluna, a partir de um programa que obteve os pares de transição,  $(\mathbf{d}_2, \mathbf{W})$ , da estabilidade para a instabilidade.
- 4- Traçado de curvas que mostraram a influência da imperfeição geométrica inicial, nas amplitudes do regime permanente.

A equação de movimento da coluna para o problema linear, nada mais é do que uma generalização da equação de Mathieu. Sabe-se que, no espaço dos parâmetros dessa equação existem regiões associadas a respostas que crescem indefinidamente com o tempo, conhecidas como regiões de ressonância paramétrica. O diagrama de Strutt é uma representação gráfica desse resultado e Capítulo III.

Na presença do amortecimento, as regiões de ressonância paramétrica diminuem, e podem desaparecer completamente da região de interesse prático. Portanto o aumento do coeficiente de amortecimento da estrutura é uma estratégia que pode ser usada com bastante eficiência para o controle ou eliminação da ressonância paramétrica.

Consideraram-se também as não-linearidades do sistema. Estas não-linearidades devem ser obrigatoriamente consideradas quando se estuda o movimento no interior das regiões instáveis. A teoria linear que prevê o crescimento da resposta, nas regiões de ressonância paramétrica, só descreve o fenômeno físico de maneira satisfatória se os deslocamentos forem pequenos o suficiente para que se possa desprezar o efeito das não-linearidades.

Mostra-se que pequenas variações nos parâmetros que definem a solicitação, produzem mudanças significativas na resposta do sistema, na forma de saltos dinâmicos que devem ser evitados já que estes podem ocasionar danos a estruturas.

Pode-se notar através dos diagramas de bifurcação uma diversidade na resposta da coluna nas regiões instáveis, as quais podem apresentar período igual ao período da força excitadora, ou até mesmo altos períodos que podem caracterizar movimentos caóticos.

Observa-se que devido a presença da imperfeição, a resposta permanente ao contrário do caso perfeito, tem sempre uma amplitude não nula, isto porque ao se considerar uma certa imperfeição, o sistema já está deslocado de sua posição de equilíbrio e a carga axial provoca consequentemente, desde o início flexão na coluna.

Com a finalidade de se dar prosseguimento a esta linha de pesquisa são apresentados a seguir algumas sugestões:

- Aprofundar a análise paramétrica identificando todos os fenômenos de bifurcação associados às fronteiras de estabilidade com a finalidade de discutir critérios de projeto para esta classe de problemas.
- Considerar, utilizando a mesma metodologia, outros tipos de condições de contorno e outros tipos de cargas axiais como, por exemplo impactos.

- Estudar o emprego dos diagramas de bifurcação, a fim de se prever problemas de instabilidade dinâmica e servir de auxílio no controle do comportamento da coluna.
- Fazer uma análise experimental, a fim de que se possa comparar os resultados numéricos, confirmando experimentalmente os complexos fenômenos não-linearidades detectados numericamente no presente trabalho.

**Funcional e Equações Não-Lineares da  
Coluna com Três Graus de Liberdade.**

## A.1 - Funcional da Coluna com Três Graus de Liberdade

$$\begin{aligned}
L := & -\frac{3}{4}f_1(t)3\pi^6f_3(t) - 4f_2(t)2\pi^4 - \frac{1}{4}f_1(t)2\pi^4 - \frac{81}{4}f_3(t)2\pi^4 - \frac{1}{128}f_1(t)6\pi^8 - \frac{729}{16}f_3(t)4\pi^6 \\
& + \frac{1}{4}\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}f_2(t)\right)^2 + \frac{1}{4}\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}f_3(t)\right)^2 + \frac{1}{4}\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}f_1(t)\right)^2 - 4f_2(t)4\pi^6 - 2f_2(t)6\pi^8 + \frac{1}{8}\delta_1\left(\frac{27}{2}f_1(t)2\pi^4f_3(t)2\right. \\
& + 54f_2(t)2\pi^4f_3(t)2 + \frac{3}{2}f_1(t)3\pi^4f_3(t) + 6f_1(t)2\pi^4f_2(t)2 + 6f_2(t)4\pi^4 + \frac{243}{8}f_3(t)4\pi^4 + 18\%1 \\
& \left. + \frac{3}{8}f_1(t)4\pi^4\right) - \frac{1}{16}f_1(t)4\pi^6 - \frac{6561}{128}f_3(t)6\pi^8 - \frac{1}{2}\eta\left(\frac{1}{4}f_1(t)2\pi^2 + \frac{9}{4}f_3(t)2\pi^2 + f_2(t)2\pi^2 + \frac{9}{4}\%1\right. \\
& + \frac{27}{16}f_1(t)2\pi^4f_3(t)2 + \frac{3}{4}f_1(t)2\pi^4f_2(t)2 + \frac{243}{64}f_3(t)4\pi^4 + \frac{3}{16}f_1(t)3\pi^4f_3(t) + \frac{3}{4}f_2(t)4\pi^4 \\
& \left. + \frac{27}{4}f_2(t)2\pi^4f_3(t)2 + \frac{3}{64}f_1(t)4\pi^4\right)^2 - \frac{2673}{16}f_2(t)2\pi^8f_3(t)4 + \frac{1}{8}\delta_2\cos(\Omega t)\left(\frac{27}{2}f_1(t)2\pi^4f_3(t)2\right. \\
& + 54f_2(t)2\pi^4f_3(t)2 + \frac{3}{2}f_1(t)3\pi^4f_3(t) + 6f_1(t)2\pi^4f_2(t)2 + 6f_2(t)4\pi^4 + \frac{243}{8}f_3(t)4\pi^4 + 18\%1 \\
& \left. + \frac{3}{8}f_1(t)4\pi^4\right) - \frac{459}{8}f_3(t)2\pi^8f_2(t)4 - \frac{117}{2}f_2(t)2\pi^6f_3(t)2 - \frac{27}{8}f_1(t)2\pi^8f_2(t)4 - \frac{4617}{128}f_3(t)4\pi^8f_1(t)2 \\
& + \frac{1}{4}\pi^2\delta_1f_1(t)2 - \frac{45}{4}f_1(t)2\pi^6f_3(t)2 - \frac{297}{128}f_1(t)4\pi^8f_3(t)2 + \pi^2\delta_1f_2(t)2 - \frac{405}{64}f_3(t)3\pi^8f_1(t)3 \\
& - \frac{21}{32}f_1(t)4\pi^8f_2(t)2 - \frac{5}{2}f_1(t)2\pi^6f_2(t)2 - \frac{21}{128}f_1(t)5\pi^8f_3(t) + \pi^2\delta_2\cos(\Omega t)f_2(t)2 \\
& - \frac{27}{2}f_1(t)\pi^6f_2(t)2f_3(t) + \frac{1}{4}\pi^2\delta_2\cos(\Omega t)f_1(t)2 + \frac{9}{4}\pi^2\delta_2\cos(\Omega t)f_3(t)2 - \frac{729}{8}f_3(t)3\pi^8f_1(t)f_2(t)2 \\
& - \frac{39}{2}f_1(t)\pi^8f_2(t)4f_3(t) - \frac{945}{16}f_1(t)2\pi^8f_2(t)2f_3(t)2 - \frac{75}{8}f_1(t)3\pi^8f_2(t)2f_3(t) + \frac{9}{4}\pi^2\delta_1f_3(t)2 \\
& \%1 := f_1(t)\pi^4f_2(t)2f_3(t)
\end{aligned}$$

## A.2 - Equações de Movimento Não-lineares da Coluna com Três Graus de Liberdade

### A.2.1 - Equação de Movimento Relativa ao Primeiro Grau de Liberdade

$$\begin{aligned}
& \frac{1215}{64}f_3(t)3\pi^8f_1(t)2 + \frac{21}{8}f_1(t)3\pi^8f_2(t)2 + \frac{105}{128}f_1(t)4\pi^8f_3(t) + \frac{27}{4}f_1(t)\pi^8f_2(t)4 + \frac{9}{1024}\eta f_1(t)7\pi^8 \\
& + \frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_1(t)\right) + \frac{1}{2}f_1(t)\pi^4 + \frac{1}{2}c\left(\frac{\partial}{\partial t}f_1(t)\right) + 5f_1(t)\pi^6f_2(t)2 + \frac{9}{128}\eta f_1(t)5\pi^6 - \frac{1}{2}\pi^2\delta_1f_1(t) \\
& + \frac{45}{2}f_1(t)\pi^6f_3(t)2 + \frac{4617}{64}f_3(t)4\pi^8f_1(t) + \frac{9}{4}f_1(t)2\pi^6f_3(t) + \frac{1}{8}\eta f_1(t)3\pi^4 + \frac{27}{2}\pi^6f_2(t)2f_3(t) \\
& - \frac{3}{16}\delta_1f_1(t)3\pi^4 + \frac{729}{8}f_3(t)3\pi^8f_2(t)2 + \frac{39}{2}\pi^8f_2(t)4f_3(t) + \frac{297}{32}f_1(t)3\pi^8f_3(t)2 + \frac{3}{64}f_1(t)5\pi^8 \\
& + \frac{1}{4}f_1(t)3\pi^6 + \frac{945}{8}f_1(t)\pi^8f_2(t)2f_3(t)2 - \frac{3}{2}\delta_2\cos(\Omega t)f_1(t)\pi^4f_2(t)2 - \frac{9}{4}\delta_2\cos(\Omega t)\pi^4f_2(t)2f_3(t) \\
& - \frac{3}{16}\delta_2\cos(\Omega t)f_1(t)3\pi^4 - \frac{3}{2}\delta_1f_1(t)\pi^4f_2(t)2 - \frac{9}{4}\pi^4f_2(t)2f_3(t) - \frac{9}{16}\delta_1f_1(t)2\pi^4f_3(t) \\
& - \frac{9}{16}\delta_2\cos(\Omega t)f_1(t)2\pi^4f_3(t) + \frac{81}{64}\eta f_3(t)3\pi^6f_1(t)2 + \frac{135}{64}\eta f_1(t)3\pi^6f_3(t)2 \\
& + \frac{567}{32}\eta f_1(t)\pi^8f_2(t)4f_3(t)2 + \frac{243}{16}\eta f_1(t)2\pi^8f_2(t)2f_3(t)3 + \frac{351}{64}\eta f_1(t)2\pi^8f_2(t)4f_3(t) \\
& + \frac{81}{8}\eta f_3(t)2\pi^6f_1(t)f_2(t)2 + \frac{15}{8}\eta f_2(t)4\pi^6f_1(t) + \frac{6561}{1024}\eta f_1(t)3\pi^8f_3(t)4 + \frac{405}{256}\eta f_1(t)4\pi^8f_3(t)3 \\
& + \frac{9}{2}\eta f_1(t)2\pi^6f_2(t)2f_3(t) + \frac{513}{64}\eta f_1(t)3\pi^8f_2(t)2f_3(t)2 + \frac{81}{16}\eta f_3(t)3\pi^6f_2(t)2 + \frac{15}{16}\eta f_1(t)3\pi^6f_2(t)2 \\
& + \frac{15}{64}\eta f_1(t)4\pi^6f_3(t) + \frac{27}{16}\eta f_2(t)6\pi^8f_3(t) + \frac{9}{8}\eta f_2(t)6\pi^8f_1(t) + \frac{243}{16}\eta f_2(t)4\pi^8f_3(t)3 \\
& + \frac{3645}{128}\eta f_3(t)4\pi^8f_1(t)f_2(t)2 + \frac{63}{1024}\eta f_1(t)6\pi^8f_3(t) + \frac{297}{512}\eta f_1(t)5\pi^8f_3(t)2 + \frac{81}{64}\eta f_1(t)3\pi^8f_2(t)4 \\
& + \frac{27}{128}\eta f_1(t)5\pi^8f_2(t)2 + \frac{315}{256}\eta f_1(t)4\pi^8f_2(t)2f_3(t) + \frac{9}{4}\eta f_2(t)4\pi^6f_3(t) + \frac{2187}{256}\eta f_3(t)5\pi^8f_2(t)2 \\
& + \frac{2187}{1024}\eta f_3(t)5\pi^8f_1(t)2 + \frac{225}{8}f_1(t)2\pi^8f_2(t)2f_3(t) - \frac{1}{2}\pi^2\delta_2\cos(\Omega t)f_1(t) \\
& - \frac{27}{8}\delta_2\cos(\Omega t)f_1(t)\pi^4f_3(t)2 - \frac{27}{8}\delta_1f_1(t)\pi^4f_3(t)2 + \frac{1215}{128}\eta f_3(t)4\pi^6f_1(t) + \frac{1}{2}\eta f_1(t)\pi^4f_2(t)2 \\
& + \frac{9}{8}\eta f_1(t)\pi^4f_3(t)2 + \frac{6561}{512}\eta f_3(t)6\pi^8f_1(t) = 0
\end{aligned}$$

### A.2.2 - Equação de Movimento Relativa ao Segundo Grau de Liberdade

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{2} \eta f_2(t) 5 \pi^6 - 3 \delta_1 f_2(t) 3 \pi^4 + 12 f_2(t) 5 \pi^8 + 8 f_2(t) \pi^4 + \frac{1}{2} \tau \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_2(t) \right) + \frac{1}{2} c \left( \frac{\partial}{\partial t} f_2(t) \right) + \frac{9}{4} \eta f_2(t) 7 \pi^8 \\
& + 5 f_1(t) 2 \pi^6 f_2(t) + 117 f_2(t) \pi^6 f_3(t) 2 + 2 \eta f_2(t) 3 \pi^4 - 2 \pi^2 \delta_1 f_2(t) + \frac{27}{2} f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 3 \\
& + \frac{459}{2} f_3(t) 2 \pi^8 f_2(t) 3 + \frac{2673}{8} f_2(t) \pi^8 f_3(t) 4 + \frac{21}{16} f_1(t) 4 \pi^8 f_2(t) + 16 f_2(t) 3 \pi^6 + \frac{117}{16} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) 3 f_3(t) \\
& - 2 \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t) + 27 f_1(t) \pi^6 f_2(t) f_3(t) + \frac{945}{8} f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) f_3(t) 2 + \frac{75}{4} f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) f_3(t) \\
& + \frac{729}{4} f_3(t) 3 \pi^8 f_1(t) f_2(t) + 78 f_1(t) \pi^8 f_2(t) 3 f_3(t) + \frac{6561}{128} \eta f_3(t) 6 \pi^8 f_2(t) + \frac{243}{8} \eta f_2(t) 5 \pi^8 f_3(t) 2 \\
& + \frac{15}{4} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_2(t) 3 - 3 \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t) 3 \pi^4 - \frac{9}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_3(t) \\
& - \frac{3}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) 2 \pi^4 f_2(t) - \frac{9}{2} \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_3(t) + \frac{6561}{64} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_2(t) 3 + \frac{3}{2} \eta f_1(t) 3 \pi^6 f_2(t) f_3(t) \\
& - \frac{27}{2} \delta_1 f_2(t) \pi^4 f_3(t) 2 - \frac{3}{2} \delta_1 f_1(t) 2 \pi^4 f_2(t) - \frac{27}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t) \pi^4 f_3(t) 2 + 9 \eta f_2(t) 3 \pi^6 f_1(t) f_3(t) \\
& + \frac{81}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 5 f_3(t) + \frac{81}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_2(t) f_3(t) 2 + \frac{243}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 3 f_3(t) 3 \\
& + \frac{81}{8} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 3 f_2(t) + \frac{513}{128} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_3(t) 2 f_2(t) + \frac{15}{32} \eta f_1(t) 4 \pi^6 f_2(t) + \frac{135}{4} \eta f_3(t) 2 \pi^6 f_2(t) 3 \\
& + \frac{1215}{32} \eta f_3(t) 4 \pi^6 f_2(t) + \frac{81}{64} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_2(t) 3 + \frac{27}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 5 + \frac{1}{2} \eta f_1(t) 2 \pi^4 f_2(t) \\
& + \frac{9}{2} \eta f_2(t) \pi^4 f_3(t) 2 + \frac{9}{128} \eta f_1(t) 6 \pi^8 f_2(t) + \frac{63}{128} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_3(t) f_2(t) + \frac{3645}{128} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 4 f_2(t) \\
& + \frac{2187}{128} \eta f_3(t) 5 \pi^8 f_1(t) f_2(t) + \frac{567}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 3 f_3(t) 2 + \frac{81}{8} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_1(t) f_2(t) = 0
\end{aligned}$$

### A.2.3 - Equação de Movimento Relativa ao Terceiro Grau de Liberdade

$$\begin{aligned}
& \frac{4617}{32} f_3(t) 3 \pi^8 f_1(t) 2 + \frac{75}{8} f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) 2 + \frac{297}{64} f_1(t) 4 \pi^8 f_3(t) + \frac{39}{2} f_1(t) \pi^8 f_2(t) 4 + \frac{9}{1024} \eta f_1(t) 7 \pi^8 \\
& + \frac{27}{2} f_1(t) \pi^6 f_2(t) 2 + \frac{3}{64} \eta f_1(t) 5 \pi^6 + \frac{45}{2} f_1(t) 2 \pi^6 f_3(t) + \frac{81}{8} \eta f_3(t) 3 \pi^4 + 117 \pi^6 f_2(t) 2 f_3(t) \\
& - \frac{3}{16} \delta_1 f_1(t) 3 \pi^4 + \frac{2673}{4} f_3(t) 3 \pi^8 f_2(t) 2 + \frac{459}{4} \pi^8 f_2(t) 4 f_3(t) + \frac{1215}{64} f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 2 + \frac{59049}{1024} \eta f_3(t) 7 \pi^8 \\
& + \frac{6561}{128} \eta f_3(t) 5 \pi^6 - \frac{9}{2} \pi^2 \delta_1 f_3(t) + \frac{21}{128} f_1(t) 5 \pi^8 + \frac{3}{4} f_1(t) 3 \pi^6 - \frac{243}{16} \delta_1 f_3(t) 3 \pi^4 \\
& + \frac{2187}{8} f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_3(t) 2 - \frac{9}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_2(t) 2 - \frac{27}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_2(t) 2 f_3(t) \\
& - \frac{3}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) 3 \pi^4 - \frac{9}{4} \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_2(t) 2 - \frac{27}{2} \delta_1 \pi^4 f_2(t) 2 f_3(t) - \frac{27}{8} \delta_1 f_1(t) 2 \pi^4 f_3(t) \\
& - \frac{27}{8} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) 2 \pi^4 f_3(t) + \frac{81}{2} f_3(t) \pi^4 + \frac{729}{4} f_3(t) 3 \pi^6 + \frac{19683}{64} f_3(t) 5 \pi^8 + \frac{1}{2} \tau \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_3(t) \right) \\
& + \frac{1}{2} c \left( \frac{\partial}{\partial t} f_3(t) \right) + \frac{1215}{64} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_1(t) 2 + \frac{81}{64} \eta f_1(t) 3 \pi^6 f_3(t) 2 + \frac{729}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 4 f_3(t) 2 \\
& + \frac{3645}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 2 f_3(t) 3 + \frac{567}{32} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 4 f_3(t) + \frac{243}{16} \eta f_3(t) 2 \pi^6 f_1(t) f_2(t) 2 \\
& + \frac{9}{4} \eta f_2(t) 4 \pi^6 f_1(t) + \frac{3645}{1024} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 4 + \frac{6561}{1024} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_3(t) 3 + \frac{81}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_2(t) 2 f_3(t) \\
& + \frac{243}{16} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) 2 f_3(t) 2 + \frac{1215}{16} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_2(t) 2 + \frac{3}{4} \eta f_1(t) 3 \pi^6 f_2(t) 2 + \frac{135}{128} \eta f_1(t) 4 \pi^6 f_3(t) \\
& + \frac{81}{8} \eta f_2(t) 6 \pi^8 f_3(t) + \frac{27}{16} \eta f_2(t) 6 \pi^8 f_1(t) + \frac{6561}{64} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_3(t) 3 + \frac{10935}{256} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_1(t) f_2(t) 2 \\
& + \frac{99}{512} \eta f_1(t) 6 \pi^8 f_3(t) + \frac{243}{256} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_3(t) 2 + \frac{117}{64} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) 4 + \frac{63}{256} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_2(t) 2 \\
& + \frac{513}{128} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_2(t) 2 f_3(t) + \frac{135}{8} \eta f_2(t) 4 \pi^6 f_3(t) + \frac{19683}{128} \eta f_3(t) 5 \pi^8 f_2(t) 2 + \frac{19683}{512} \eta f_3(t) 5 \pi^8 f_1(t) 2 \\
& + \frac{945}{8} f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 2 f_3(t) - \frac{9}{2} \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_3(t) + \frac{9}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^4 f_3(t) + \frac{9}{2} \eta \pi^4 f_2(t) 2 f_3(t) \\
& - \frac{243}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) f_3(t) 3 \pi^4 = 0
\end{aligned}$$



**Funcional e Equações Não-Lineares da  
Coluna com Três Graus de Liberdade,  
considerando-se uma Imperfeição  
Geométrica Inicial**

## B.1 - Funcional da Coluna com Três Graus de Liberdade, Considerando-se uma Imperfeição Geométrica Inicial<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
L := & -\frac{21}{64}f_1(t)5\pi^8f_3(t)-\frac{117}{2}f_3(t)2\pi^6f_2(t)2-\frac{21}{16}f_1(t)4\pi^8f_2(t)2-\frac{4617}{64}f_3(t)4\pi^8f_{oI}2-\frac{27}{4}f_1(t)2\pi^8f_2(t)4-24f_{o2}2\pi^6f_2(t)2 \\
& -4f_{oI}2\pi^6f_2(t)2-\frac{9}{64}f_{oI}4\pi^8f_1(t)2-\frac{19683}{32}f_3(t)5\pi^8f_{o3}-\frac{3}{8}f_1(t)3\pi^6f_{oI}-f_{o2}2\pi^6f_1(t)2-243f_{o3}4\pi^8f_2(t)2+\pi^2\delta_1f_2(t)2 \\
& -\frac{729}{64}f_1(t)3\pi^8f_{o3}3-\frac{27}{4}f_2(t)4\pi^8f_{oI}2-\frac{3159}{64}f_{o3}4\pi^8f_1(t)2-\frac{279}{64}f_{oI}4\pi^8f_3(t)2-\frac{98415}{64}f_3(t)4\pi^8f_{o3}2-\frac{405}{32}f_1(t)3\pi^8f_3(t)3 \\
& -\frac{297}{64}f_1(t)4\pi^8f_{o3}2-\frac{3}{4}f_1(t)3\pi^6f_3(t)-\frac{45}{4}f_1(t)2\pi^6f_3(t)2-\frac{3}{32}f_1(t)5\pi^8f_{oI}-\frac{81}{4}f_{oI}2\pi^6f_3(t)2+\frac{1}{4}\pi^2\delta_1f_1(t)2-\frac{2187}{8}f_3(t)3\pi^6f_{o3} \\
& -\frac{459}{4}f_2(t)4\pi^8f_3(t)2-60f_2(t)4\pi^8f_{o2}2-\frac{297}{64}f_1(t)4\pi^8f_3(t)2-\frac{459}{4}f_2(t)4\pi^8f_{o3}2-\frac{1}{2}\eta\left(\frac{27}{4}f_2(t)2\pi^4f_{o3}2+\frac{3}{4}f_1(t)2\pi^4f_2(t)2\right. \\
& +\frac{3}{16}f_1(t)3\pi^4f_{oI}+\frac{9}{2}f_2(t)2\pi^4f_{o2}2+\frac{243}{16}f_3(t)\pi^4f_{o3}3+\frac{243}{16}f_3(t)3\pi^4f_{o3}+\frac{27}{16}f_1(t)2\pi^4f_{o3}2+\frac{1}{2}f_1(t)\pi^2f_{oI}+2f_2(t)\pi^2f_{o2} \\
& +\frac{3}{16}f_1(t)3\pi^4f_{o3}+\frac{9}{32}f_1(t)2\pi^4f_{oI}2+\frac{27}{16}f_1(t)2\pi^4f_3(t)2+\frac{3}{4}f_2(t)2\pi^4f_{oI}2+\frac{1}{4}f_1(t)2\pi^2+\frac{9}{4}f_3(t)2\pi^2+\frac{3}{16}f_1(t)3\pi^4f_3(t)+\frac{9}{2}f_3(t)\pi^2f_{o3} \\
& +\frac{729}{32}f_3(t)2\pi^4f_{o3}2+\frac{27}{4}f_3(t)2\pi^4f_{o2}2+3f_2(t)\pi^4f_{o2}3+\frac{3}{16}f_3(t)\pi^4f_{oI}3+\frac{27}{4}f_2(t)2\pi^4f_3(t)2+3f_2(t)3\pi^4f_{o2}+\frac{3}{4}f_1(t)2\pi^4f_{o2}2 \\
& +\frac{27}{16}f_3(t)2\pi^4f_{oI}2+f_2(t)2\pi^2+\frac{3}{16}f_1(t)\pi^4f_{o3}3+\frac{3}{4}f_2(t)4\pi^4+\frac{243}{64}f_3(t)4\pi^4+\frac{3}{64}f_1(t)4\pi^4+\frac{9}{4}f_2(t)2\pi^4f_{oI}f_{o3}+\frac{9}{2}f_2(t)\pi^4f_{oI}f_{o2}f_{o3} \\
& +\frac{3}{2}f_1(t)2\pi^4f_2(t)f_{o2}+\frac{9}{16}f_1(t)2\pi^4f_3(t)f_{oI}+\frac{27}{2}f_2(t)\pi^4f_{o2}f_{o3}2+\frac{9}{2}f_1(t)\pi^4f_2(t)f_{o2}f_{o3}+3f_1(t)\pi^4f_2(t)f_{oI}f_{o2}+\frac{27}{8}f_1(t)\pi^4f_{oI}f_{o3}2 \\
& +\frac{9}{4}f_1(t)\pi^4f_2(t)f_{o3}+\frac{9}{4}f_1(t)\pi^4f_{o2}2f_{o3}+\frac{27}{4}f_1(t)\pi^4f_3(t)f_{oI}f_{o3}+27f_2(t)\pi^4f_3(t)f_{o2}f_{o3}+\frac{27}{8}f_1(t)2\pi^4f_3(t)f_{o3}+\frac{3}{2}f_1(t)\pi^4f_{oI}f_{o2}2 \\
& +\frac{27}{2}f_2(t)\pi^4f_3(t)f_{o2}+\frac{9}{16}f_1(t)\pi^4f_{oI}2f_{o3}+\frac{3}{2}f_2(t)\pi^4f_{oI}2f_{o2}+\frac{9}{16}f_1(t)\pi^4f_3(t)f_{oI}2+\frac{9}{16}f_1(t)2\pi^4f_{oI}f_{o3}+\frac{9}{4}f_2(t)2\pi^4f_3(t)f_{oI} \\
& +\frac{27}{2}f_2(t)2\pi^4f_3(t)f_{o3}+\frac{9}{4}f_3(t)\pi^4f_{oI}f_{o2}2+\frac{27}{2}f_3(t)\pi^4f_{o2}2f_{o3}+\frac{9}{4}f_1(t)\pi^4f_2(t)2f_3(t)+\frac{27}{8}f_1(t)\pi^4f_3(t)2f_{oI}+\frac{9}{2}f_1(t)\pi^4f_2(t)f_3(t)f_{o2} \\
& +\frac{27}{8}f_3(t)\pi^4f_{oI}2f_{o3}+\frac{9}{2}f_2(t)\pi^4f_3(t)f_{oI}f_{o2}+\frac{9}{4}f_1(t)\pi^4f_3(t)f_{o2}2+\frac{3}{2}f_1(t)\pi^4f_2(t)2f_{oI}\Big)^2-\frac{1}{64}f_1(t)6\pi^8-36f_{o3}2\pi^6f_2(t)2 \\
& -\frac{3}{8}f_1(t)3\pi^6f_{o3}-f_{oI}4\pi^8f_2(t)2-\frac{729}{64}f_3(t)3\pi^8f_{oI}3-\frac{2673}{8}f_3(t)4\pi^8f_{o2}2-24f_2(t)3\pi^6f_{o2}-4f_2(t)6\pi^8-\frac{4617}{64}f_1(t)2\pi^8f_3(t)4 \\
& -\frac{81}{4}f_3(t)2\pi^4-81f_{o2}2\pi^6f_3(t)2-24f_2(t)5\pi^8f_{o2}-\frac{5}{2}f_1(t)2\pi^6f_2(t)2-\frac{387}{4}f_{o2}4\pi^8f_3(t)2+\frac{1}{4}\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}f_3(t)\right)^2-\frac{2187}{8}f_{o3}2\pi^6f_3(t)2 \\
& -\frac{729}{16}f_3(t)4\pi^6-72f_2(t)3\pi^8f_{o2}3-\frac{15}{64}f_1(t)4\pi^8f_{oI}2-\frac{19}{4}f_{o2}4\pi^8f_1(t)2-\frac{21}{16}f_1(t)4\pi^8f_{o2}2+\frac{9}{4}\pi^2\delta_1f_3(t)2-\frac{9}{32}f_1(t)3\pi^8f_{oI}3 \\
& -\frac{2673}{8}f_2(t)2\pi^8f_3(t)4-\frac{9}{4}f_{o3}2\pi^6f_1(t)2-\frac{21}{64}f_1(t)5\pi^8f_{o3}-36f_{o2}4\pi^8f_2(t)2-\frac{3}{8}f_{oI}2\pi^6f_1(t)2-\frac{1}{16}f_1(t)4\pi^6+\frac{1}{4}\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}f_2(t)\right)^2 \\
& -\frac{59049}{64}f_{o3}4\pi^8f_3(t)2-\frac{1}{4}f_1(t)2\pi^4+\frac{1}{4}\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}f_1(t)\right)^2-\frac{59049}{32}f_3(t)3\pi^8f_{o3}3-4f_2(t)2\pi^4-4f_2(t)4\pi^6-\frac{6561}{64}f_3(t)6\pi^8 \\
& +\frac{1}{2}\pi^2\delta_2\cos(\Omega t)f_1(t)f_{oI}+2\pi^2\delta_1f_2(t)f_{o2}-\frac{13851}{32}f_1(t)2\pi^8f_3(t)2f_{o3}2-\frac{99}{4}f_3(t)\pi^6f_{o3}f_1(t)2-\frac{75}{2}f_1(t)3\pi^8f_2(t)f_{o2}f_{o3} \\
& -25f_2(t)3\pi^8f_{oI}2f_{o2}-102f_{o2}3\pi^8f_{o3}f_1(t)f_2(t)+\frac{9}{2}\pi^2\delta_1f_3(t)f_{o3}+\frac{9}{2}\pi^2\delta_2\cos(\Omega t)f_3(t)f_{o3}+\frac{9}{4}\pi^2\delta_2\cos(\Omega t)f_3(t)2 \\
& -\frac{207}{2}f_1(t)2\pi^8f_2(t)f_{o2}f_{o3}f_{oI}-\frac{2187}{2}f_1(t)\pi^8f_2(t)f_3(t)2f_{o2}f_{o3}-\frac{243}{8}f_{oI}2\pi^8f_{o2}2f_1(t)f_3(t)-\frac{105}{32}f_1(t)3\pi^8f_3(t)f_{oI}2
\end{aligned}$$

<sup>1</sup> Considera-se uma imperfeição descrita pelos três primeiros modos da série de série de Fourier (2.52).

$$\begin{aligned}
 & (\delta_1 + \delta_2 \cos(\Omega t)) \left( \frac{27}{4} f_2(t) 2 \pi^4 f_{o3}^2 + \frac{3}{4} f_1(t) 2 \pi^4 f_2(t) 2 + \frac{3}{16} f_1(t) 3 \pi^4 f_{o1} + \frac{9}{2} f_2(t) 2 \pi^4 f_{o2}^2 + \frac{243}{16} f_3(t) \pi^4 f_{o3}^3 + \frac{243}{16} f_3(t) 3 \pi^4 f_{o3} \right. \\
 & + \frac{27}{16} f_1(t) 2 \pi^4 f_{o3}^2 + \frac{3}{16} f_1(t) 3 \pi^4 f_{o3} + \frac{9}{32} f_1(t) 2 \pi^4 f_{o1}^2 + \frac{27}{16} f_1(t) 2 \pi^4 f_3(t) 2 + \frac{3}{4} f_2(t) 2 \pi^4 f_{o1}^2 + \frac{3}{16} f_1(t) 3 \pi^4 f_3(t) + \frac{729}{32} f_3(t) 2 \pi^4 f_{o3}^2 \\
 & + \frac{27}{4} f_3(t) 2 \pi^4 f_{o2}^2 + 3 f_2(t) \pi^4 f_{o2}^3 + \frac{3}{16} f_3(t) \pi^4 f_{o1}^3 + \frac{27}{4} f_2(t) 2 \pi^4 f_3(t) 2 + 3 f_2(t) 3 \pi^4 f_{o2}^2 + \frac{3}{4} f_1(t) 2 \pi^4 f_{o2}^2 + \frac{27}{16} f_3(t) 2 \pi^4 f_{o1}^2 \\
 & + \frac{3}{16} f_1(t) \pi^4 f_{o1}^3 + \frac{3}{4} f_2(t) 4 \pi^4 + \frac{243}{64} f_3(t) 4 \pi^4 + \frac{3}{64} f_1(t) 4 \pi^4 + \frac{9}{4} f_2(t) 2 \pi^4 f_{o1} f_{o3} + \frac{9}{2} f_2(t) \pi^4 f_{o1} f_{o2} f_{o3} + \frac{3}{2} f_1(t) 2 \pi^4 f_2(t) f_{o2} \\
 & + \frac{9}{16} f_1(t) 2 \pi^4 f_3(t) f_{o1} + \frac{27}{2} f_2(t) \pi^4 f_{o2} f_{o3}^2 + \frac{9}{2} f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_{o2} f_{o3} + 3 f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{27}{8} f_1(t) \pi^4 f_{o1} f_{o3}^2 + \frac{9}{4} f_1(t) \pi^4 f_2(t) 2 f_{o3} \\
 & + \frac{9}{4} f_1(t) \pi^4 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{27}{4} f_1(t) \pi^4 f_3(t) f_{o1} f_{o3} + 27 f_2(t) \pi^4 f_3(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{27}{8} f_1(t) 2 \pi^4 f_3(t) f_{o3} + \frac{3}{2} f_1(t) \pi^4 f_{o1} f_{o2}^2 + \frac{27}{2} f_2(t) \pi^4 f_3(t) 2 f_{o2} \\
 & + \frac{9}{16} f_1(t) \pi^4 f_{o1}^2 f_{o3} + \frac{3}{2} f_2(t) \pi^4 f_{o1}^2 f_{o2} + \frac{9}{16} f_1(t) \pi^4 f_3(t) f_{o1}^2 + \frac{9}{16} f_1(t) 2 \pi^4 f_{o1} f_{o3} + \frac{9}{4} f_2(t) 2 \pi^4 f_3(t) f_{o1} + \frac{27}{2} f_2(t) 2 \pi^4 f_3(t) f_{o3} \\
 & + \frac{9}{4} f_3(t) \pi^4 f_{o1} f_{o2}^2 + \frac{27}{2} f_3(t) \pi^4 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{9}{4} f_1(t) \pi^4 f_2(t) 2 f_3(t) + \frac{27}{8} f_1(t) \pi^4 f_3(t) 2 f_{o1} + \frac{9}{2} f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{27}{8} f_3(t) \pi^4 f_{o1}^2 f_{o3} \\
 & + \frac{9}{2} f_2(t) \pi^4 f_3(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{9}{4} f_1(t) \pi^4 f_3(t) f_{o2}^2 + \frac{3}{2} f_1(t) \pi^4 f_2(t) 2 f_{o1} \Big) + 2 \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t) f_{o2} + \frac{1}{2} \pi^2 \delta_1 f_1(t) f_{o1} \\
 & - 219 f_2(t) 2 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o2}^2 - \frac{1341}{16} f_{o1}^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_3(t) 2 - \frac{6075}{4} f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{o3}^3 f_{o2} - \frac{225}{2} f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o1} f_{o2} \\
 & - \frac{2673}{16} f_3(t) 3 \pi^8 f_{o1} f_{o2}^2 - 15 f_{o2} \pi^6 f_{o3} f_1(t) f_2(t) - \frac{63}{64} f_{o1} 4 \pi^8 f_1(t) f_3(t) - \frac{21}{8} f_1(t) 4 \pi^8 f_2(t) f_{o2} - \frac{8019}{4} f_2(t) 2 \pi^8 f_3(t) 2 f_{o3}^2 \\
 & - \frac{945}{8} f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 2 f_{o2}^2 - \frac{105}{64} f_1(t) 4 \pi^8 f_3(t) f_{o1} - 441 f_2(t) \pi^8 f_3(t) 2 f_{o2}^3 - \frac{153}{8} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^3 f_{o3} - \frac{297}{16} f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1} \\
 & - \frac{5427}{8} f_{o1} \pi^8 f_{o2} f_{o3}^2 f_2(t) f_3(t) - \frac{2673}{16} f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3}^3 - \frac{9963}{8} f_2(t) 2 \pi^8 f_3(t) f_{o3}^3 - \frac{1215}{32} f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 3 f_{o1} - \frac{75}{4} f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3} \\
 & - 39 f_2(t) 4 \pi^8 f_3(t) f_{o1} - 156 f_2(t) 3 \pi^8 f_1(t) f_3(t) f_{o2} - \frac{945}{8} f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 2 f_3(t) 2 - 819 f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o2} f_{o3} f_{o1} \\
 & - \frac{585}{32} f_1(t) \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1}^3 - \frac{2025}{2} f_2(t) \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1} f_{o3} f_{o2} - \frac{945}{8} f_2(t) 2 \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1}^2 - \frac{729}{4} f_2(t) 2 \pi^8 f_3(t) 3 f_1(t) - \frac{8505}{32} f_3(t) 3 \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3} \\
 & - \frac{9963}{8} f_{o2}^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_3(t) 2 - 459 f_2(t) 3 \pi^8 f_3(t) 2 f_{o2} - 132 f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o1} f_{o3} - \frac{75}{4} f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) 2 f_3(t) - \frac{8505}{32} f_{o1}^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_3(t) 2 \\
 & - \frac{4617}{16} f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 3 f_{o3} - \frac{55}{4} f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) f_{o1}^2 f_{o2} - \frac{729}{2} f_2(t) \pi^8 f_3(t) 3 f_{o1} f_{o2} - 39 f_2(t) 4 \pi^8 f_{o1} f_{o3} - \frac{3}{4} f_{o1} \pi^6 f_{o3} f_1(t) 2 \\
 & - 10 f_2(t) \pi^6 f_1(t) f_{o1} f_{o2} - \frac{729}{4} f_3(t) 3 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o1} - \frac{2025}{2} f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o3}^2 f_{o2} - \frac{2367}{2} f_2(t) 2 \pi^8 f_3(t) f_{o2}^2 f_{o3} \\
 & - \frac{2187}{32} f_{o1}^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_1(t) f_3(t) - 81 f_{o1}^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_2(t) 2 - \frac{6561}{64} f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3}^2 - \frac{225}{4} f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 2 f_3(t) f_{o1} - 15 f_{o2}^2 \pi^6 f_1(t) f_3(t) \\
 & - 156 f_2(t) 3 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o2} - \frac{945}{8} f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3}^2 - \frac{297}{8} f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3} - 441 f_2(t) 3 \pi^8 f_{o3}^2 f_{o2} - \frac{105}{64} f_1(t) 4 \pi^8 f_{o1} f_{o3} \\
 & - \frac{549}{8} f_{o1}^2 \pi^8 f_{o2} f_{o3} f_1(t) f_2(t) - \frac{225}{4} f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_3(t) f_{o1}^2 - \frac{21}{2} f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o2} - \frac{945}{4} f_2(t) 2 \pi^8 f_3(t) 2 f_1(t) f_{o1} \\
 & - \frac{8505}{32} f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) f_{o3}^3 - \frac{1377}{2} f_2(t) 2 \pi^8 f_3(t) 2 f_{o2}^2 - \frac{3447}{16} f_2(t) 2 \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 f_{o3} - \frac{279}{8} f_{o1} \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} f_1(t) 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2025}{8}f_{o2}\pi^8f_{o3}^3f_1(t)f_2(t)-\frac{1503}{32}f_1(t)^2\pi^8f_3(t)f_{o1}^2f_{o3}-54f_1(t)\pi^8f_2(t)^3f_{o1}f_{o2}-\frac{27}{2}f_1(t)\pi^8f_2(t)^4f_{o1}-\frac{51}{2}f_3(t)\pi^6f_{o1}f_2(t)^2 \\
 & -\frac{7371}{16}f_2(t)^2\pi^8f_3(t)f_{o1}f_{o3}^2-\frac{729}{2}f_2(t)\pi^8f_3(t)^3f_1(t)f_{o2}-81f_{o1}\pi^8f_{o3}^3f_2(t)^2-\frac{2187}{4}f_2(t)^2\pi^8f_3(t)^2f_{o1}f_{o3}-\frac{297}{32}f_1(t)^4\pi^8f_3(t)f_{o3} \\
 & -\frac{279}{16}f_2(t)^2\pi^8f_3(t)f_{o1}^3-102f_{o1}\pi^8f_{o2}^3f_2(t)f_3(t)-156f_1(t)\pi^8f_2(t)^3f_{o2}f_{o3}-\frac{729}{32}f_{o1}\pi^8f_{o3}^3f_1(t)^2-\frac{891}{32}f_1(t)^2\pi^8f_3(t)^2f_{o1}^2 \\
 & -\frac{4617}{8}f_3(t)^3\pi^8f_1(t)f_{o1}f_{o3}-\frac{2187}{4}f_1(t)\pi^8f_2(t)^2f_3(t)f_{o3}^2-\frac{873}{4}f_1(t)^2\pi^8f_2(t)f_{o2}f_{o3}^2-\frac{9963}{8}f_3(t)^3\pi^8f_{o2}^2f_{o3} \\
 & -234f_3(t)\pi^6f_2(t)f_{o3}f_{o2}-\frac{21}{4}f_1(t)^3\pi^8f_2(t)^2f_{o1}-\frac{189}{64}f_1(t)^2\pi^8f_3(t)f_{o1}^3-\frac{945}{2}f_1(t)\pi^8f_2(t)^2f_3(t)f_{o1}f_{o3}-9f_{o1}^3\pi^8f_{o3}f_2(t)^2 \\
 & -\frac{47}{8}f_{o1}^3\pi^8f_{o2}f_1(t)f_2(t)-\frac{33}{8}f_3(t)\pi^6f_{o1}f_1(t)^2-\frac{1089}{4}f_{o1}\pi^8f_{o2}^2f_{o3}f_1(t)f_3(t)-\frac{945}{4}f_2(t)^2\pi^8f_3(t)f_1(t)^2f_{o3}-\frac{279}{16}f_1(t)^3\pi^8f_{o2}^2f_{o3} \\
 & -39f_1(t)\pi^8f_2(t)^4f_{o3}-\frac{79}{16}f_1(t)\pi^8f_2(t)^2f_{o1}^3-\frac{7371}{16}f_3(t)^2\pi^8f_1(t)f_{o2}^2f_{o3}-\frac{459}{2}f_2(t)^4\pi^8f_3(t)f_{o3}-\frac{27}{2}f_1(t)\pi^6f_2(t)^2f_{o3} \\
 & -\frac{189}{64}f_1(t)^3\pi^8f_{o1}^2f_{o3}-219f_1(t)\pi^8f_2(t)^2f_{o2}^2f_{o3}-\frac{143}{2}f_1(t)\pi^8f_2(t)^2f_{o1}f_{o2}^2-12f_{o1}\pi^6f_{o3}f_2(t)^2-\frac{2673}{8}f_1(t)\pi^8f_3(t)f_{o3}^3f_{o1} \\
 & -\frac{7047}{2}f_2(t)\pi^8f_3(t)^2f_{o3}^2f_{o2}-\frac{765}{16}f_1(t)\pi^8f_2(t)^2f_{o1}^2f_{o3}-31f_1(t)\pi^8f_2(t)f_{o1}f_{o2}^3-2673f_2(t)\pi^8f_3(t)^3f_{o2}f_{o3} \\
 & -\frac{945}{2}f_1(t)\pi^8f_2(t)f_3(t)^2f_{o1}f_{o2}-198f_3(t)^2\pi^6f_{o2}f_2(t)-\frac{79}{16}f_1(t)^3\pi^8f_{o2}^2f_{o1}-\frac{585}{32}f_1(t)^3\pi^8f_{o3}^2f_{o1}-25f_1(t)^2\pi^8f_2(t)f_{o2}^3 \\
 & -\frac{2673}{2}f_2(t)^2\pi^8f_3(t)^3f_{o3}-918f_2(t)^3\pi^8f_3(t)f_{o2}f_{o3}-\frac{3519}{16}f_1(t)\pi^8f_2(t)^2f_{o1}f_{o3}^2-\frac{729}{32}f_{o1}^3\pi^8f_{o3}^3f_3(t)^2-\frac{585}{32}f_{o1}^2\pi^8f_{o3}^2f_1(t)^2 \\
 & -\frac{171}{4}f_3(t)^2\pi^6f_{o1}f_1(t)-\frac{79}{16}f_{o1}^2\pi^8f_{o2}^2f_1(t)^2-\frac{75}{4}f_1(t)^3\pi^8f_3(t)f_{o2}^2-\frac{207}{8}f_{o1}^3\pi^8f_{o2}f_2(t)f_3(t)-9f_1(t)\pi^6f_{o1}f_2(t)^2 \\
 & +\pi^2\delta_2\cos(\Omega t)f_2(t)^2-234f_1(t)\pi^8f_2(t)^2f_3(t)f_{o2}^2-45f_3(t)\pi^6f_1(t)f_{o3}f_{o1}-\frac{3645}{32}f_1(t)^2\pi^8f_3(t)^2f_{o1}f_{o3}-441f_{o2}^2\pi^8f_{o3}^2f_2(t)^2 \\
 & -\frac{2223}{8}f_{o1}\pi^8f_{o2}f_{o3}^2f_1(t)f_2(t)-\frac{75}{2}f_1(t)^3\pi^8f_2(t)f_3(t)f_{o2}-39f_2(t)^4\pi^8f_3(t)f_1(t)-\frac{945}{4}f_2(t)\pi^8f_3(t)^2f_1(t)^2f_{o2} \\
 & -495f_2(t)\pi^8f_3(t)f_{o2}^3f_{o3}-132f_2(t)^3\pi^8f_{o2}f_{o3}f_{o1}-27f_1(t)^2\pi^8f_2(t)^3f_{o2}-\frac{81}{2}f_1(t)^2\pi^8f_2(t)^2f_{o2}^2-\frac{6561}{64}f_1(t)\pi^8f_3(t)^2f_{o1}^2f_{o3} \\
 & -25f_{o1}^2\pi^8f_{o2}^2f_2(t)^2-\frac{4617}{32}f_1(t)\pi^8f_3(t)^4f_{o1}-\frac{2349}{8}f_{o2}^2\pi^8f_{o3}^2f_1(t)f_3(t)-\frac{2187}{4}f_1(t)\pi^8f_3(t)^2f_2(t)^2f_{o3}-\frac{729}{4}f_1(t)\pi^8f_3(t)^3f_{o2}^2 \\
 & -\frac{225}{4}f_1(t)^2\pi^8f_2(t)^2f_{o1}f_{o3}-\frac{3519}{16}f_1(t)\pi^8f_3(t)^2f_{o1}f_{o2}^2-\frac{2151}{8}f_{o1}^2\pi^8f_{o2}f_{o3}f_2(t)f_3(t)-\frac{2673}{8}f_{o1}\pi^8f_{o2}^2f_{o3}f_3(t)^2 \\
 & -\frac{15}{4}f_{o1}^2\pi^6f_1(t)f_3(t)-\frac{24543}{32}f_1(t)\pi^8f_3(t)^2f_{o1}f_{o3}^2-\frac{765}{16}f_3(t)\pi^8f_1(t)^2f_{o1}f_{o2}^2-\frac{27}{2}f_1(t)\pi^6f_3(t)f_2(t)^2-\frac{2673}{4}f_3(t)^4\pi^8f_2(t)f_{o2} \\
 & -42f_1(t)\pi^6f_{o2}f_2(t)f_3(t)-\frac{207}{2}f_1(t)\pi^8f_2(t)f_3(t)f_{o1}^2f_{o2}-\frac{63}{8}f_1(t)^2\pi^8f_2(t)^2f_{o1}^2-6f_2(t)\pi^6f_{o2}f_1(t)^2-\frac{3447}{16}f_1(t)^2\pi^8f_3(t)f_{o2}^2f_{o3} \\
 & -\frac{1215}{32}f_1(t)^3\pi^8f_3(t)f_{o3}^2-15f_{o2}^4\pi^8f_1(t)f_3(t)-\frac{873}{4}f_2(t)\pi^8f_3(t)^2f_{o1}^2f_{o2}-\frac{63}{32}f_{o1}^3\pi^8f_{o3}f_1(t)^2-\frac{1215}{32}f_1(t)\pi^8f_3(t)^3f_{o1}^2 \\
 & -153f_2(t)^2\pi^6f_{o3}f_3(t)-39f_{o1}\pi^6f_{o2}f_2(t)f_3(t)-\frac{1269}{16}f_{o2}^2\pi^8f_{o3}^2f_1(t)^2-\frac{1215}{32}f_1(t)^3\pi^8f_3(t)^2f_{o3}-\frac{945}{2}f_1(t)^2\pi^8f_2(t)f_3(t)f_{o2}f_{o3} \\
 & +\frac{1}{4}\pi^2\delta_2\cos(\Omega t)f_1(t)^2-132f_3(t)\pi^8f_1(t)f_2(t)f_{o2}^3
 \end{aligned}$$

## B.2 - Equações de Movimento para a Coluna com Imperfeição Geométrica

### B.2.1 - Equação de Movimento Relativa ao Primeiro Grau de Liberdade

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{2}\delta_1 f_1(t) \pi^4 f_2(t)^2 - \frac{27}{8}\delta_1 f_1(t) \pi^4 f_3(t)^2 + \frac{729}{8}\eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} f_3(t)^2 + \frac{63}{4}\eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o2}^4 f_1(t) - \frac{9}{16}\delta_1 f_1(t)^2 \pi^4 f_3(t) \\
& + \frac{1215}{8}\eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3}^2 f_3(t) + \frac{351}{32}\eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^4 f_{o3} f_{o1} + \frac{10935}{256}\eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o3}^3 f_1(t) f_{o1} - \frac{27}{8}\delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_{o3}^2 \\
& + \frac{225}{2}f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_3(t) f_{o1} + \frac{999}{16}\eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_{o1} f_{o2}^2 + \frac{9}{4}\eta f_1(t) \pi^4 f_3(t) f_{o3} - \frac{9}{16}\delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_{o1}^2 \\
& + \frac{765}{8}f_3(t) \pi^8 f_1(t) f_{o1} f_{o2}^2 - 3\delta_1 \pi^4 f_2(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{549}{8}f_{o1}^2 \pi^8 f_{o2} f_{o3} f_2(t) + \frac{81}{16}\eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^4 f_3(t) + \frac{945}{2}f_2(t) \pi^8 f_3(t)^2 f_1(t) f_{o2} \\
& + \frac{3645}{128}\eta f_3(t)^4 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) + \frac{3447}{8}f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{81}{32}\eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_{o1}^3 + \frac{189}{256}\eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^5 f_{o3} + \frac{1485}{256}\eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_3(t)^2 \\
& + \frac{351}{8}\eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^3 f_{o3} f_{o1} f_{o2} + \frac{405}{64}\eta f_1(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1}^3 - \frac{9}{8}\delta_1 f_1(t) \pi^4 f_3(t) f_{o1} + \frac{105}{64}f_1(t)^4 \pi^8 f_{o3} + \frac{135}{64}\eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_1(t)^2 \\
& + \frac{729}{8}\eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o2}^2 f_2(t)^2 - \frac{9}{8}\delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_{o1} f_{o3} + \frac{279}{4}f_{o1} \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} f_1(t) + \frac{1089}{4}f_{o1} \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} f_3(t) \\
& + \frac{6561}{32}f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3}^2 + 945f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{3645}{16}\eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} f_{o3}^3 f_3(t) f_{o1} + \frac{9}{4}\eta \pi^4 f_3(t) f_{o1} f_{o3} \\
& + \frac{2025}{2}\pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o3}^2 f_{o2} + \frac{3645}{16}\eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} f_{o3}^3 f_1(t) f_3(t) + \frac{81}{32}\eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^4 f_{o3}^2 + 207f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} f_{o1} \\
& + \frac{3645}{16}\eta f_2(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o2} f_{o3} f_{o1} - \frac{9}{4}\delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{9}{8}\eta f_3(t) \pi^6 f_{o1}^2 f_{o2}^2 + 225f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o1} f_{o2} \\
& - \frac{3}{2}\delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_{o2}^2 - \frac{1}{2}\pi^2 \delta_1 f_1(t) + \frac{2187}{64}f_1(t)^2 \pi^8 f_{o3}^3 + \frac{9}{4}f_1(t)^2 \pi^6 f_3(t) + 39f_2(t)^4 \pi^8 f_3(t) + 5f_1(t) \pi^6 f_2(t)^2 \\
& + \frac{105}{64}f_1(t)^4 \pi^8 f_3(t) - \frac{9}{4}\delta_1 \pi^4 f_2(t)^2 f_{o3} + \frac{27}{2}\pi^6 f_3(t) f_2(t)^2 + \frac{1}{8}\eta f_1(t)^3 \pi^4 + \frac{1215}{32}f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t)^3 + \frac{27}{2}f_1(t) \pi^8 f_2(t)^4 + \frac{9}{128}\eta f_1(t)^5 \pi^6 \\
& + \frac{21}{4}f_1(t)^3 \pi^8 f_2(t)^2 + \frac{45}{2}\eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o2}^3 f_1(t) + 9\eta f_2(t)^3 \pi^6 f_{o2} f_{o3} + \frac{513}{64}\eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_3(t)^2 + \frac{945}{2}f_2(t)^2 \pi^8 f_3(t) f_1(t) f_{o3} \\
& + \frac{32805}{128}\eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o3}^3 f_1(t) + \frac{81}{4}\eta f_3(t)^2 \pi^6 f_1(t) f_2(t) f_{o2} + \frac{4131}{16}\eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3}^2 f_3(t) + \frac{1539}{64}\eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1} f_{o3}^2 f_2(t)^2 \\
& + \frac{21}{32}\eta f_1(t)^3 \pi^6 f_{o1}^2 - \frac{9}{16}\delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_{o1}^2 f_{o3} - \frac{9}{16}\delta_1 f_1(t) \pi^4 f_{o1}^2 + \frac{81}{32}\eta f_3(t) \pi^6 f_{o3}^2 f_{o1}^2 - \frac{9}{16}\delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_3(t) f_{o1}^2 \\
& + \frac{243}{16}\eta f_2(t)^4 \pi^8 f_{o3}^3 + \frac{873}{2}f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3}^2 + \frac{135}{32}\eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_1(t)^3 + \frac{81}{8}\eta f_2(t)^5 \pi^8 f_{o2} f_{o3} + 819\pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o2} f_{o3} f_{o1} \\
& + \frac{19683}{256}\eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3}^3 + \frac{45}{128}\eta f_1(t)^4 \pi^6 f_{o1} - \frac{9}{2}\delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_2(t) f_{o2} f_{o3} - \frac{9}{4}\delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_2(t)^2 f_{o3} \\
& + \frac{513}{32}\eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} f_{o3}^2 f_1(t)^3 + \frac{3645}{64}\eta f_3(t)^4 \pi^8 f_1(t) f_2(t) f_{o2} + \frac{315}{256}\eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o1}^3 f_3(t) + \frac{39}{4}\eta f_2(t)^2 \pi^6 f_{o2}^2 f_{o1} \\
& + \frac{81}{8}\eta f_3(t) \pi^6 f_{o3}^2 f_{o2}^2 + \frac{945}{2}\pi^8 f_2(t) f_3(t)^2 f_{o1} f_{o2} - \frac{9}{8}\delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_3(t) f_{o1} + \frac{9}{8}\eta f_1(t) \pi^4 f_3(t)^2 + \frac{3645}{16}f_1(t) \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1} f_{o3} \\
& + \frac{243}{4}\eta f_2(t)^3 \pi^8 f_3(t)^3 f_{o2} + \frac{1}{2}\eta f_1(t) \pi^4 f_2(t)^2 + \frac{9}{1024}\eta f_1(t)^7 \pi^8 + \frac{297}{16}f_1(t)^3 \pi^8 f_3(t)^2 + \frac{729}{4}f_2(t)^2 \pi^8 f_3(t)^3 + \frac{4617}{32}f_1(t) \pi^8 f_3(t)^4 \\
& + \frac{243}{16}\eta f_2(t)^4 \pi^8 f_3(t)^3 - \frac{3}{16}\delta_1 f_1(t)^3 \pi^4 + \frac{45}{2}f_1(t) \pi^6 f_3(t)^2 + \frac{4617}{32}\pi^8 f_3(t)^4 f_{o1} + \frac{9}{2}f_{o3}^2 \pi^6 f_1(t) + \frac{79}{16}\pi^8 f_2(t)^2 f_{o1}^3 + \frac{9}{8}f_1(t)^2 \pi^6 f_{o1} \\
& + \frac{459}{512}\eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^4 f_3(t) + \frac{27}{2}\pi^6 f_2(t)^2 f_{o3} + \frac{9}{4}\eta f_1(t)^2 \pi^6 f_2(t)^2 f_3(t) + \frac{567}{32}\eta f_2(t)^4 \pi^8 f_1(t) f_3(t)^2 + \frac{3}{16}\eta f_1(t) \pi^6 f_{o1}^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{351}{64} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_1(t) 2 f_3(t) + 39 \pi^8 f_2(t) 4 f_{o3} + 15 f_{o2}^2 \pi^6 f_3(t) + \frac{1215}{32} \pi^8 f_3(t) 3 f_{o1}^2 + \frac{27}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o1}^5 + \frac{9}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_{o1}^3 \\
& + \frac{3}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^4 f_{o1} - \frac{9}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_2(t) 2 f_3(t) - \frac{3}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_2(t) 2 - \frac{27}{8} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_3(t) 2 \\
& - \frac{9}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) 2 \pi^4 f_3(t) + \frac{15}{32} f_1(t) 4 \pi^8 f_{o1} + 15 f_{o2}^4 \pi^8 f_3(t) + \frac{6561}{1024} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_{o1}^3 + \frac{63}{1024} \eta f_1(t) 6 \pi^8 f_{o3} + \frac{153}{512} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o1}^4 \\
& - \frac{1}{2} \pi^2 \delta_1 f_{o1} + \frac{9}{256} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^6 + \frac{9}{8} f_1(t) 2 \pi^6 f_{o3} + \frac{2187}{1024} \eta f_3(t) 5 \pi^8 f_{o1}^2 + \frac{81}{8} \eta f_3(t) 2 \pi^6 f_1(t) f_2(t) 2 + \frac{9}{8} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o2}^4 \\
& + \frac{729}{128} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o3}^4 + \frac{405}{256} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_{o3}^3 + \frac{9}{8} \eta f_2(t) 6 \pi^8 f_{o1} + \frac{189}{1024} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_{o1}^2 + \frac{2187}{256} \eta f_3(t) 5 \pi^8 f_{o2}^2 \\
& - 3 \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_{o2} + \frac{9}{4} \eta f_2(t) 4 \pi^6 f_{o3} + \frac{15}{8} \eta f_2(t) 4 \pi^6 f_{o1} + \frac{2673}{16} \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3}^3 + \frac{27}{16} \eta f_2(t) 6 \pi^8 f_{o3} \\
& + \frac{55}{2} f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o1}^2 f_{o2} + \frac{729}{4} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2}^3 f_2(t) f_{o3} + \frac{1377}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) f_{o1}^2 + \frac{19683}{1024} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_1(t) 2 f_{o1} \\
& + \frac{2187}{8} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2}^2 f_2(t) 2 f_{o3} + \frac{3645}{32} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o1} f_{o3} + \frac{9477}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) f_{o3}^2 + \frac{405}{64} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o3}^3 f_{o1} \\
& + \frac{2187}{128} \eta f_3(t) 5 \pi^8 f_2(t) f_{o2} + \frac{297}{512} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_3(t) 2 + \frac{63}{1024} \eta f_1(t) 6 \pi^8 f_3(t) + \frac{81}{16} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3}^2 f_1(t) f_{o1} \\
& + \frac{1701}{16} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) f_3(t) 2 + \frac{81}{64} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_1(t) 2 + \frac{81}{16} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_2(t) 2 + \frac{15}{64} \eta f_1(t) 4 \pi^6 f_3(t) - \frac{9}{2} \delta_1 \pi^4 f_2(t) f_{o2} f_{o3} \\
& + \frac{243}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o3}^3 f_2(t) f_{o2} + \frac{243}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 3 f_{o1} f_{o2} - \frac{27}{4} \delta_1 \pi^4 f_3(t) f_{o1} f_{o3} + \frac{27}{16} \eta f_2(t) 6 \pi^8 f_3(t) + \frac{81}{4} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3}^2 f_2(t) f_{o2} \\
& - 3 \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_{o2} + \frac{81}{4} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_1(t) f_2(t) 2 + \frac{81}{4} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_2(t) 2 f_{o1} + \frac{567}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 4 f_{o3} f_3(t) \\
& + \frac{945}{128} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o1}^2 f_2(t) 2 f_3(t) + \frac{1539}{64} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o1}^2 f_1(t) f_3(t) 2 + \frac{243}{16} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o1}^2 f_1(t) f_{o2} + \frac{27}{2} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_1(t) f_{o2}^2 \\
& + \frac{79}{8} f_{o1}^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) - \frac{9}{2} \delta_1 \pi^4 f_2(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{351}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 3 f_{o3} f_{o2} - \frac{9}{8} \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_{o1} f_{o3} + \frac{729}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3}^2 f_3(t) \\
& - \frac{27}{4} \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_3(t) f_{o3} + \frac{2223}{8} f_{o1} \pi^8 f_{o2} f_{o3}^2 f_2(t) + \frac{10935}{512} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3}^3 f_1(t) 2 + \frac{10935}{32} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3}^2 f_1(t) f_2(t) f_{o2} \\
& + \frac{1}{2} \eta \pi^4 f_2(t) 2 f_{o1} - \frac{27}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_3(t) f_{o3} + \frac{10935}{128} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3}^3 f_2(t) 2 + \frac{81}{2} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_1(t) f_2(t) f_{o2} + \frac{9}{4} \eta f_2(t) 4 \pi^6 f_3(t) \\
& + \frac{351}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 3 f_{o1} f_{o2} f_3(t) + \frac{243}{16} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2}^4 f_1(t) + \frac{891}{8} f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3} - \frac{3}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_2(t) 2 f_{o1} \\
& + \frac{9}{8} \eta f_2(t) 6 \pi^8 f_1(t) - \frac{27}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_3(t) f_{o1} f_{o3} + \frac{243}{16} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_3(t) 3 f_{o1}^2 + \frac{225}{2} f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{3}{32} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o1}^4 \\
& + \frac{1215}{256} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_{o3}^2 f_3(t) + \frac{81}{16} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o2} - \frac{9}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) 2 \pi^4 f_{o1} + \frac{225}{4} f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) f_{o2}^2 + \frac{2187}{256} \eta f_3(t) 5 \pi^8 f_2(t) 2 \\
& + \frac{6561}{512} \eta f_3(t) 6 \pi^8 f_1(t) + \frac{45}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_{o2}^2 f_3(t) + \frac{729}{32} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3}^3 f_{o1} + \frac{1}{4} \eta f_1(t) \pi^4 f_{o1}^2 - \frac{9}{4} \delta_1 \pi^4 f_2(t) 2 f_3(t) \\
& + \frac{6561}{256} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o3} + \frac{567}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 3 f_{o3}^2 f_{o2} + \frac{27}{32} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o1}^4 f_{o3} + \frac{135}{4} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3} \\
& - \frac{9}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) 2 \pi^4 f_{o3} + \frac{45927}{256} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3}^4 f_1(t) + \frac{945}{2} \pi^8 f_2(t) 2 f_3(t) f_{o1} f_{o3} + \frac{32805}{128} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o3}^3 f_{o1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{27}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} f_{o3}^2 f_1(t) - \frac{27}{8} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_3(t) 2 f_{o1} + \frac{513}{32} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3} f_3(t) - \frac{9}{16} \delta_1 f_1(t) 2 \pi^4 f_{o3} + \frac{63}{2} f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o2} \\
& - \frac{27}{8} \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_{o3}^2 + \frac{135}{128} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o1} - \frac{3}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_{o1} f_{o2}^2 + \frac{1539}{32} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3} f_3(t) f_{o1} \\
& + \frac{1503}{16} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 f_{o3} + \frac{1}{2} \tau \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_1(t) \right) - \frac{3}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) 3 \pi^4 + \frac{1}{2} c \left( \frac{\partial}{\partial t} f_1(t) \right) + \frac{3}{32} f_1(t) 5 \pi^8 + \frac{1215}{32} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_{o3} f_{o1} \\
& + \frac{207}{32} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o2}^2 + \frac{135}{64} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o1}^2 f_1(t) 3 + \frac{27}{8} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^2 f_{o2}^4 - 3 \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_2(t) f_{o1} f_{o2} \\
& + \frac{225}{2} f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_{o1} f_{o3} + \frac{2187}{2} \pi^8 f_2(t) f_3(t) 2 f_{o2} f_{o3} + 9 \pi^6 f_{o1} f_2(t) 2 + \frac{19683}{256} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 3 f_{o1} f_{o3} + \frac{135}{8} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) \\
& + \frac{1215}{256} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o3}^2 + \frac{207}{2} \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o1}^2 f_{o2} + \frac{81}{16} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o3}^2 + \frac{9}{8} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} f_{o1}^3 - \frac{3}{2} \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_{o2}^2 \\
& - \frac{9}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_2(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{1053}{256} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o1}^4 f_{o3} + \frac{1053}{32} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} f_2(t) 2 + \frac{1}{2} f_1(t) \pi^4 + \frac{39}{16} \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_{o1}^2 f_1(t) \\
& + \frac{9}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2}^3 f_{o1} + \frac{405}{512} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o1}^4 f_{o3} + \frac{15}{2} \eta f_2(t) 3 \pi^6 f_{o2} f_1(t) + \frac{81}{16} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_{o2}^2 + \frac{9}{32} f_{o1} 4 \pi^8 f_1(t) \\
& + \frac{567}{16} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3} + \frac{9}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2}^3 f_{o3} + \frac{10935}{512} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o3}^2 f_1(t) 2 + \frac{27}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_1(t) f_{o3}^2 \\
& + \frac{567}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 3 f_{o3} f_3(t) f_{o2} + \frac{9}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2}^3 f_1(t) + \frac{9}{8} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o1}^4 f_3(t) + \frac{729}{32} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o3}^4 f_{o1} \\
& + \frac{10935}{128} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o3}^2 f_2(t) 2 + \frac{225}{2} f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{27}{4} \eta f_2(t) 5 \pi^8 f_1(t) f_{o2} + \frac{1}{4} f_1(t) 3 \pi^6 - \frac{9}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_3(t) f_{o2}^2 \\
& + \frac{729}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3} f_3(t) 2 + 81 f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_{o2}^2 + \frac{1215}{256} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_{o3} f_3(t) 2 + \frac{81}{32} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_1(t) f_{o1} \\
& + \frac{10935}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3}^2 f_1(t) f_2(t) 2 + \frac{2187}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^3 f_{o1} f_{o2}^2 + \frac{2349}{8} f_{o2}^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_3(t) + \frac{6561}{128} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^5 f_{o1} \\
& + \frac{24543}{32} \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1} f_{o3}^2 + \frac{2187}{64} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^4 f_{o2}^2 + \frac{2187}{256} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^4 f_1(t) 2 + \frac{1539}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} f_3(t) f_{o1} \\
& + \frac{10935}{512} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_1(t) f_{o1} f_{o3} + \frac{513}{64} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 2 f_2(t) 2 + \frac{243}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 3 f_2(t) 2 + \frac{1269}{8} f_{o2}^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_1(t) \\
& + \frac{63}{16} f_{o1} 3 \pi^8 f_{o3} f_1(t) + \frac{3519}{16} \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1} f_{o2}^2 - \frac{1}{2} \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_{o1} + 12 f_2(t) \pi^6 f_{o2} f_1(t) + \frac{19683}{256} \eta f_3(t) 5 \pi^8 f_{o1} f_{o3} \\
& + \frac{315}{256} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3} + \frac{729}{4} \pi^8 f_3(t) 3 f_{o2}^2 + \frac{171}{4} f_3(t) 2 \pi^6 f_{o1} + \frac{729}{32} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o3}^4 f_1(t) + \frac{27}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^5 f_3(t) \\
& + \frac{98415}{512} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_{o3}^2 f_1(t) + \frac{63}{4} f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_{o1}^2 + \frac{9}{4} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_2(t) 2 f_{o3} + \frac{19683}{1024} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_1(t) f_{o1}^2 + \frac{9}{2} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^5 f_1(t) \\
& + \frac{6561}{128} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^5 f_1(t) + \frac{2187}{4} \pi^8 f_3(t) 2 f_2(t) 2 f_{o3} + \frac{567}{8} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o1} f_{o2} f_{o3}^2 + \frac{945}{4} f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3}^2 + \frac{6561}{64} \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1}^2 f_{o3} \\
& + \frac{10935}{128} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{81}{8} \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_3(t) 2 f_{o1} + \frac{81}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o2}^4 f_{o1} + \frac{243}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_3(t) 3 f_{o1} \\
& + \frac{567}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 3 f_3(t) 2 f_{o2} + \frac{3645}{32} f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) f_{o3}^2 + 9 \eta f_2(t) 3 \pi^6 f_3(t) f_{o2} + \frac{45}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{15}{2} \eta f_2(t) 3 \pi^6 f_{o1} f_{o2} \\
& + \frac{351}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o2}^3 f_3(t) + \frac{1215}{16} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3}^3 + \frac{297}{256} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_{o3} f_3(t) + \frac{10935}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3}^3 f_2(t) f_{o2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{9}{16}\delta_1\pi^4 f_{oI}^2 f_{o3} + \frac{891}{16}f_1(t)2\pi^8 f_3(t)2f_{oI} + \frac{297}{16}\eta f_2(t)\pi^8 f_{o2}^3 f_3(t)f_{oI}^2 + \frac{315}{128}\eta f_1(t)4\pi^8 f_2(t)f_{o2}f_3(t) + \frac{315}{256}\eta f_1(t)4\pi^8 f_3(t)f_2(t)2 \\
 & + 15f_{o2}\pi^6 f_{o3}f_2(t) + \frac{27}{4}\eta f_3(t)2\pi^6 f_{o2}^2 f_1(t) + \frac{21}{2}f_1(t)3\pi^8 f_2(t)f_{o2} + \frac{729}{16}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o2}^4 f_{o3} + \frac{315}{128}\eta f_1(t)4\pi^8 f_2(t)f_{o2}f_{o3} \\
 & + \frac{2673}{64}\eta f_2(t)2\pi^8 f_{oI}^2 f_{o3}^2 f_3(t) + \frac{3645}{128}\eta f_3(t)4\pi^8 f_{o2}^2 f_{oI} + \frac{207}{16}\eta f_1(t)\pi^8 f_2(t)f_{oI}^2 f_{o2}^3 + \frac{243}{16}\eta f_3(t)3\pi^8 f_{o2}^2 f_{oI}^2 \\
 & + \frac{243}{4}\eta f_3(t)3\pi^8 f_{o2}^3 f_2(t) + \frac{27}{16}\eta f_2(t)2\pi^6 f_{oI}^2 f_{o3} + \frac{63}{32}\eta f_1(t)\pi^8 f_2(t)f_{oI}^4 f_{o2} + \frac{9}{2}\eta f_1(t)2\pi^6 f_2(t)f_3(t)f_{o2} + \frac{351}{64}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o2}^2 f_{oI}^3 \\
 & + \frac{513}{32}\eta f_2(t)\pi^8 f_3(t)2f_{oI}^3 f_{o2} + \frac{27}{16}\eta f_2(t)2\pi^6 f_3(t)f_{oI}^2 + \frac{3645}{32}f_1(t)2\pi^8 f_3(t)2f_{o3} + \frac{45}{16}\eta f_2(t)2\pi^6 f_1(t)2f_{oI} \\
 & + \frac{729}{128}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o2}^2 f_{oI}^2 f_{o3} + \frac{513}{64}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o2}^2 f_1(t)^3 + \frac{1215}{64}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o2}^2 f_{oI} f_{o3}^2 + \frac{693}{32}\eta f_1(t)\pi^8 f_2(t)2f_{oI}^2 f_{o2}^2 \\
 & + \frac{351}{16}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o2}^3 f_2(t)f_3(t) + \frac{351}{64}\eta f_2(t)4\pi^8 f_{oI}^2 f_{o3} + \frac{135}{8}\eta f_2(t)4\pi^8 f_{oI} f_{o2}^2 + 102f_{o2}^3 \pi^8 f_{o3}f_2(t) + \frac{243}{64}\eta f_2(t)4\pi^8 f_1(t)2f_{oI} \\
 & + \frac{81}{8}\eta f_2(t)5\pi^8 f_3(t)f_{o2} + \frac{1539}{64}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o2}^2 f_3(t)2f_{oI} + \frac{891}{32}\eta f_2(t)2\pi^8 f_{oI}^2 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{243}{8}\eta f_3(t)2\pi^6 f_{o3}f_2(t)f_{o2} \\
 & + \frac{27}{2}\eta f_3(t)\pi^6 f_{o3}f_{oI}f_{o2}^2 + \frac{135}{32}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{oI}^3 f_2(t)f_{o2} + \frac{27}{2}\eta f_2(t)\pi^6 f_{o2}f_{oI}f_{o3}^2 + \frac{999}{32}\eta f_2(t)2\pi^8 f_{oI}^2 f_3(t)f_{o2}^2 \\
 & + \frac{351}{16}\eta f_2(t)3\pi^8 f_{oI}^2 f_3(t)f_{o2} + \frac{315}{64}\eta f_2(t)2\pi^8 f_{oI}^3 f_1(t)f_3(t) + \frac{27}{8}\eta f_2(t)\pi^6 f_{o2}f_{oI}^2 f_{o3} + \frac{567}{32}\eta f_2(t)4\pi^8 f_3(t)2f_{oI} \\
 & + \frac{891}{128}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o2}^2 f_3(t)f_{oI}^2 + \frac{27}{4}\eta f_2(t)5\pi^8 f_{oI}f_{o2} + \frac{405}{16}\eta f_2(t)4\pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{567}{32}\eta f_2(t)4\pi^8 f_{oI}f_{o3}^2 \\
 & + \frac{315}{64}\eta f_1(t)3\pi^8 f_{o2}^2 f_3(t)f_{oI} + \frac{243}{16}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o2}^3 f_2(t)f_{oI} + \frac{2187}{1024}\eta f_3(t)5\pi^8 f_1(t)^2 + \frac{99}{2}f_3(t)\pi^6 f_{o3}f_1(t) + \frac{45927}{256}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o3}^4 f_{oI} \\
 & + \frac{45}{8}\eta f_2(t)\pi^6 f_{o2}^2 f_1(t)2f_{oI} + \frac{351}{64}\eta f_2(t)4\pi^8 f_3(t)f_{oI}^2 + \frac{9}{2}\eta f_1(t)3\pi^8 f_{o2}^2 f_{o3}f_{oI} + \frac{3159}{64}\eta f_3(t)2\pi^6 f_{o3}^2 f_1(t) + \frac{9}{4}\eta f_1(t)\pi^6 f_{o2}^2 f_{o3}f_{oI} \\
 & - \frac{9}{4}\delta_1\pi^4 f_{o2}^2 f_{o3} - \frac{27}{8}\delta_1\pi^4 f_3(t)2f_{oI} + \frac{7047}{256}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{oI}^2 f_{o3}^2 f_3(t) + \frac{243}{16}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o2}^4 f_{oI} + \frac{243}{8}\eta f_1(t)\pi^8 f_{o2}^4 f_{o3}f_3(t) \\
 & + 2f_{o2}^2 \pi^6 f_1(t) + \frac{3}{4}f_{oI}^2 \pi^6 f_1(t) + \frac{16767}{512}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o3}^2 f_{oI}^3 + \frac{27}{8}\eta f_1(t)\pi^6 f_{oI}f_3(t)f_{o2}^2 + \frac{10935}{512}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o3}^3 f_{oI}^2 \\
 & + \frac{10935}{128}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o3}^3 f_{o2}^2 + \frac{39}{8}\eta f_1(t)\pi^6 f_{oI}^2 f_2(t)f_{o2} + \frac{6561}{1024}\eta f_3(t)4\pi^8 f_1(t)^3 - \frac{3}{16}\delta_1\pi^4 f_{oI}^3 + \frac{297}{64}\eta f_1(t)\pi^8 f_2(t)2f_{o3}f_{oI}^3 \\
 & + \frac{81}{4}\eta f_3(t)2\pi^6 f_2(t)f_{oI}f_{o2} + \frac{56133}{512}\eta f_1(t)\pi^8 f_{oI}^2 f_{o3}^2 f_3(t)2 + \frac{405}{16}\eta f_2(t)4\pi^8 f_3(t)f_{o2}^2 + \frac{1215}{64}\eta f_1(t)3\pi^8 f_{o3}^2 f_3(t)f_{oI} \\
 & + \frac{243}{32}\eta f_3(t)2\pi^6 f_{o3}f_1(t)f_{oI} + 132f_3(t)\pi^8 f_2(t)f_{o2}^3 + \frac{27}{8}\eta f_2(t)\pi^6 f_{o2}^2 f_3(t)f_{oI}^2 + \frac{9}{256}\eta f_3(t)\pi^8 f_{oI}^6 + \frac{39}{4}\eta f_2(t)2\pi^6 f_{o2}^2 f_1(t) \\
 & + \frac{19683}{512}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o3}^2 f_1(t)^3 + \frac{315}{32}f_1(t)2\pi^8 f_3(t)f_{oI}^2 - \frac{3}{2}\delta_1\pi^4 f_{oI}f_{o2}^2 - \frac{9}{16}\delta_1\pi^4 f_3(t)f_{oI}^2 + \frac{1539}{64}\eta f_1(t)2\pi^8 f_3(t)2f_2(t)2f_{oI} \\
 & + \frac{81}{2}\eta f_1(t)\pi^8 f_3(t)f_{oI}^2 f_{o3}f_{o2}^2 + \frac{2187}{32}\eta f_1(t)\pi^8 f_3(t)f_{oI}f_{o3}^2 f_{o2}^2 + \frac{3}{4}\eta f_1(t)3\pi^6 f_{o2}^2 + \frac{2673}{32}\eta f_1(t)\pi^8 f_3(t)2f_{oI}f_{o3}f_{o2}^2 \\
 & + \frac{315}{64}\eta f_1(t)3\pi^8 f_3(t)f_{oI}f_2(t)^2 + \frac{10935}{512}\eta f_3(t)3\pi^8 f_{o3}^2 f_{oI}^2 + \frac{729}{8}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o3}^2 f_2(t)f_3(t)f_{o2} + \frac{13851}{16}f_1(t)\pi^8 f_3(t)^2 f_{o3}^2 \\
 & + \frac{98415}{512}\eta f_3(t)4\pi^8 f_{o3}^2 f_{oI} + 42\pi^6 f_{o2}f_2(t)f_3(t) + \frac{405}{32}\eta f_1(t)2\pi^6 f_3(t)f_{oI}f_{o3} + \frac{3159}{64}\eta f_3(t)2\pi^6 f_{oI}f_{o3}^2 + \frac{243}{16}\eta f_3(t)2\pi^6 f_{o2}^2 f_{o3}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \frac{243}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1} f_2(t) f_{o2} + \frac{945}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1} f_2 f_2(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{3}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} f_2 f_{o2} + \frac{351}{64} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} f_2 f_3(t)^2 \\
 & + \frac{21}{32} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} f_3 f_3(t) + \frac{3645}{16} \eta f_2(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o2} f_{o3} f_1(t) + \frac{16767}{256} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_2 f_{o3} + \frac{27}{128} \eta f_1(t)^5 \pi^8 f_{o2} + \frac{27}{2} \pi^8 f_2(t)^4 f_{o1} \\
 & + \frac{27}{4} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_{o1} f_{o2} + \frac{81}{2} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_2(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{2025}{128} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_3 f_{o3} + \frac{153}{128} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o3} f_{o1} f_3 \\
 & + \frac{675}{128} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_4 f_{o3} + \frac{81}{64} \eta f_3(t)^3 \pi^6 f_{o1} f_2 + \eta f_1(t) \pi^4 f_2(t)^2 f_{o2} + \frac{27}{4} \eta f_2(t)^2 \pi^6 f_{o1} f_{o3} + \frac{15}{16} \eta f_1(t)^3 \pi^6 f_{o3} f_{o1} \\
 & + \frac{9}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^6 f_{o1} f_3 + \frac{2349}{128} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1} f_3 f_{o3} + \frac{3645}{128} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1} f_2 f_{o3} + \frac{351}{32} \eta f_1(t) \pi^6 f_3(t) f_{o1} f_2 f_{o3} \\
 & + \frac{27}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} f_5 f_{o3} + \frac{135}{128} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o1} + \frac{1485}{256} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3} + \frac{10935}{1024} \eta f_3(t)^4 \pi^8 f_1(t)^2 f_{o3} \\
 & + \frac{3645}{256} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3} f_3 f_{o1} f_3 + \frac{729}{16} \eta f_2(t)^4 \pi^8 f_3(t)^2 f_{o3} + \frac{19683}{256} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1} f_2 f_{o3} + \eta \pi^4 f_2(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{27}{4} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o3} f_2 f_{o2} \\
 & + \frac{243}{64} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_{o1} f_2 f_{o3} + \frac{297}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2} f_3 f_2(t) f_{o1} + \frac{1539}{32} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o3} f_2 f_2(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{27}{128} \eta f_1(t)^5 \pi^8 f_2(t)^2 \\
 & + \frac{81}{64} \eta f_2(t)^4 \pi^8 f_1(t)^3 + \frac{15}{8} \eta f_2(t)^4 \pi^6 f_1(t) + \frac{1485}{512} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_{o1} f_{o3} + \frac{351}{64} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o1} f_2 f_{o3} + \frac{27}{8} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} f_2 f_{o3} \\
 & - \frac{27}{8} \delta_1 \pi^4 f_{o1} f_{o3} - \frac{9}{4} \delta_1 \pi^4 f_3(t) f_{o2} + \frac{15}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^6 f_1(t)^3 + \frac{1215}{128} \eta f_3(t)^4 \pi^6 f_1(t) + \frac{1539}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_3(t) f_{o1} f_2 \\
 & + \frac{729}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_3(t)^2 f_{o1} + \frac{1701}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_3(t) f_{o2} + \frac{81}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_{o1} f_2 f_3(t) + \frac{729}{16} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} f_{o3} f_1(t) \\
 & + \frac{1377}{64} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_2 f_{o1} + \frac{729}{4} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o2} f_{o3} f_3(t) + \frac{9}{16} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} f_3 f_{o3} + \frac{243}{64} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} f_3 f_{o3} \\
 & + \frac{405}{256} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} f_4 f_{o3} + \frac{729}{64} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} f_2 f_{o3} + \frac{81}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_{o1} f_{o3} + \frac{315}{256} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_{o2} f_2 f_{o3} + \frac{2187}{256} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o3} f_3 f_{o1} f_2 \\
 & + \frac{2187}{128} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o3} f_4 f_{o1} + \frac{729}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o3} f_3 f_{o2} + \frac{1485}{128} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_2 f_{o3} + \frac{81}{8} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_2 f_2(t)^2 \\
 & + \frac{81}{32} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_2 f_1(t)^2 + \frac{6561}{256} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o3} f_3 f_3(t) + \frac{9}{4} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_{o2} f_{o1} + \frac{27}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2} f_4 f_{o1} + \frac{27}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2} f_2 f_{o1} f_3 \\
 & + \frac{81}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2} f_4 f_{o3} + \frac{27}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_3(t) f_{o2} + \frac{513}{32} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_3(t)^2 f_2(t) f_{o2} + \frac{243}{64} \eta f_2(t)^4 \pi^8 f_{o1} f_2 f_1(t) \\
 & + \frac{2943}{256} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_3 f_{o3} + \frac{729}{32} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_3 f_1(t) + \frac{315}{32} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} f_{o1} + \frac{729}{16} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} f_{o3} f_4 f_{o1} \\
 & + 9 \eta f_1(t) \pi^6 f_2(t) f_{o2} f_{o3} f_{o1} + \frac{297}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} f_{o1} f_3 + \frac{243}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} f_3 f_{o1} + \frac{63}{64} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1} f_4 f_1(t) \\
 & + \frac{1053}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o2} f_2 f_1(t) f_3(t) f_{o1} + \frac{15}{16} \eta f_1(t)^3 \pi^6 f_3(t) f_{o1} + \frac{81}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_{o1} f_2 f_{o3} + \frac{315}{64} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_{o1} \\
 & + \frac{9}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_2(t)^2 f_{o3} f_{o1} + \frac{15}{8} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} f_1(t)^3 + \frac{9}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} f_3 f_3(t) + \frac{1539}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_2 f_{o2} + \frac{189}{8} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o2} f_4 f_3(t) \\
 & + \frac{243}{32} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o2} f_2 f_1(t)^3 + \frac{945}{128} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1} f_2 f_{o3} f_1(t)^2 + \frac{351}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_3 f_{o3} + \frac{243}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t)^3 f_2(t) f_{o2} \\
 & + \frac{63}{32} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o2} f_2 f_{o1} + \frac{1215}{64} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o3} f_3(t)^2 f_{o1} + \frac{729}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} f_{o3} f_2 f_2(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{513}{64} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{351}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t)^4 f_{o3} + \frac{315}{256} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_{o2}^2 f_3(t) + \frac{729}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1}^2 f_{o2} f_{o3}^3 + \frac{3645}{64} \eta f_3(t)^4 \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o2} \\
 & + \frac{243}{64} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_1(t)^2 f_{o3} + \frac{999}{64} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o3} f_3(t) + \frac{729}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3} f_3(t)^2 + \frac{351}{16} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3} f_{o2} \\
 & + \frac{81}{2} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1} f_{o2}^3 f_{o3}^2 + \frac{513}{32} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o3} f_3(t) f_{o2}^2 + \frac{1053}{32} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o2}^2 f_3(t) + \frac{81}{16} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o2}^3 f_2(t) \\
 & + \frac{243}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3}^3 + \frac{567}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^4 f_{o3}^2 + \frac{729}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t)^2 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{261}{64} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^3 f_3(t) f_{o2}^2 \\
 & + \frac{945}{1024} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3} + \frac{15}{64} \eta f_1(t)^4 \pi^6 f_{o3} + \frac{243}{8} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3}^3 + \frac{243}{8} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) f_{o1} + \frac{567}{8} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o2}^3 f_2(t) f_{o1} \\
 & + \frac{1215}{32} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o1}^2 f_{o3} + \frac{1539}{32} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_3(t)^2 f_{o1} + \frac{2673}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} f_{o3}^2 f_3(t) f_{o1}^2 \\
 & + \frac{729}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3}^2 f_2(t)^2 + \frac{81}{256} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^5 f_3(t) + \frac{10935}{64} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o3}^2 f_2(t) f_{o2} + \frac{27}{128} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^5 f_{o3} \\
 & + \frac{9}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^4 f_{o2}^2 + \frac{1485}{256} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1}^2 + \frac{189}{512} \eta f_1(t)^5 \pi^8 f_3(t) f_{o1} + \frac{351}{32} \eta f_2(t)^4 \pi^8 f_1(t) f_3(t) f_{o1} - \frac{9}{16} \delta_1 f_1(t)^2 \pi^4 f_{o1} \\
 & + \frac{351}{128} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^4 f_3(t)^2 + \frac{945}{1024} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 + \frac{9477}{64} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o1} f_{o3}^2 + \frac{9}{2} \eta f_2(t)^2 \pi^6 f_1(t) f_3(t) f_{o1} \\
 & + \frac{135}{32} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_2(t) f_{o1}^2 f_{o2} + \frac{135}{64} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{189}{16} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1}^2 f_{o2}^3 f_{o3} + \frac{1215}{32} \eta f_3(t)^3 \pi^6 f_1(t) f_{o3} \\
 & + \frac{27}{16} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1}^4 f_{o2} f_{o3} + \frac{81}{8} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1}^3 f_{o2} f_{o3}^2 + \frac{243}{16} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_2(t)^2 f_{o3} + \frac{27}{64} \eta f_1(t)^5 \pi^8 f_2(t) f_{o2} \\
 & + \frac{59049}{512} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_3(t)^2 f_{o1} + \frac{315}{32} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_3(t) f_{o1} + \frac{10935}{256} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o3}^2 f_1(t) f_{o1} \\
 & + \frac{3321}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1} f_{o2}^2 f_{o3} f_3(t) + \frac{1485}{512} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1} + \frac{1215}{128} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1}^2 + \frac{2673}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_3(t) f_{o2}^2 \\
 & + \frac{9}{8} \pi^4 f_3(t)^2 f_{o1} - \frac{3}{2} \delta_1 \pi^4 f_2(t)^2 f_{o1} + \frac{945}{64} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1}^2 f_{o2} f_{o3} f_1(t)^2 + \frac{729}{32} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t)^2 f_{o1} \\
 & + \frac{1701}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_3(t)^2 f_{o1} + \frac{243}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t)^3 f_{o2}^2 + \frac{135}{64} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_1(t)^3 + \frac{405}{256} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_3(t)^3 \\
 & + \frac{999}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1}^3 f_{o2} f_{o3} f_3(t) + \frac{729}{8} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1}^2 f_{o2} f_{o3} f_3(t)^2 + \frac{729}{8} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o1} f_{o3}^2 + \frac{405}{64} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1} \\
 & + \frac{567}{4} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o1} f_{o3} f_3(t) f_{o2} + \frac{513}{16} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o3} f_2(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{2187}{512} \eta f_3(t)^5 \pi^8 f_1(t) f_{o1} + \frac{10935}{1024} \eta f_3(t)^4 \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3} \\
 & + \frac{10935}{128} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o3}^2 f_{o2}^2 + \frac{10935}{256} \eta f_3(t)^4 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{567}{8} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o2}^3 f_1(t) f_2(t) + \frac{729}{64} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3}^3 \\
 & + \frac{3645}{32} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) f_{o3} + \frac{1053}{8} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1} f_{o2}^3 f_{o3} f_3(t) + \frac{9}{2} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_2(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{189}{512} \eta f_1(t)^5 \pi^8 f_{o3} f_{o1} \\
 & - \frac{27}{8} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_{o1} f_{o3}^2 + \frac{945}{4} f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_3(t)^2 + \frac{15}{4} f_{o1}^2 \pi^6 f_3(t) + \frac{3645}{128} \eta f_3(t)^4 \pi^8 f_1(t) f_2(t)^2 - \frac{1}{2} \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \\
 & + \frac{63}{64} f_{o1}^4 \pi^8 f_3(t) + \frac{297}{16} f_1(t)^3 \pi^8 f_{o3}^2 + \frac{21}{4} f_1(t)^3 \pi^8 f_{o2}^2 + \frac{225}{4} f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^2 f_3(t) + \frac{105}{16} f_1(t)^3 \pi^8 f_{o1} f_{o3} + 10 f_2(t) \pi^6 f_{o1} f_{o2} \\
 & + \frac{2187}{32} f_{o1}^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_3(t) + \frac{585}{32} \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1}^3 - \frac{3}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_{o1}^3 + \frac{27}{32} f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 + 234 \pi^8 f_2(t)^2 f_3(t) f_{o2}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{19}{2} f_{o2}^4 \pi^8 f_1(t) + \frac{9}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^2 f_{o2}^4 + \frac{243}{8} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o2}^4 f_{o3}^2 + \frac{243}{8} \eta f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 f_{o2} + \frac{6561}{256} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o3} \\
 & + \frac{405}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2}^3 f_{o3}^2 + 54 f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2}^3 f_{o3} + \frac{3645}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{o3} f_{o1} + \frac{729}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{o3} f_{o2} \\
 & + \frac{405}{16} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1} f_{o2}^4 f_{o3} + 156 \pi^8 f_2(t) f_{o2}^3 f_{o3} + \frac{4617}{8} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o3} + \frac{9}{2} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^5 f_{o1} + \frac{19683}{256} \eta f_3(t) \pi^8 f_1(t) f_{o3} \\
 & + \frac{2187}{256} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^4 f_{o1}^2 + \frac{81}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2}^3 f_{o3} + \frac{3645}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{o3} f_{o1} + \frac{729}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3}^2 f_{o2}^2 \\
 & + \frac{1539}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o1}^2 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{2187}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^3 f_1(t) f_{o2}^2 + \frac{2187}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^4 f_2(t) f_{o2} + \frac{315}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o1}^3 f_{o2}^2 f_{o3}(t) \\
 & + \frac{567}{64} f_1(t) \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3} + \frac{1377}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3}^2 f_2(t) f_{o2} + \frac{567}{8} \eta f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 f_{o2} + \frac{3645}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^3 f_1(t) f_2(t)^2 \\
 & + \frac{2187}{128} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^4 f_1(t) f_{o1} + \frac{3645}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_1(t) f_{o3} + \frac{10935}{256} \eta f_3(t) \pi^8 f_2(t) f_{o3} + 54 \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o2} \\
 & + \frac{8505}{16} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o3}^3 + \frac{225}{4} \pi^8 f_2(t) f_{o2}^2 f_{o3} f_{o1}^2 + \frac{837}{16} f_1(t) \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{297}{8} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o3} + \frac{3645}{128} \eta f_3(t) \pi^8 f_2(t) f_{o1}^2 f_{o3} \\
 & + 9 \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} f_2(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{7371}{16} f_3(t) \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{45}{64} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^4 f_{o2}^2 + 50 f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2}^3 + \frac{729}{2} f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{o3} f_{o2} \\
 & + \frac{2025}{8} f_{o2} \pi^8 f_{o3}^3 f_2(t) + \frac{33}{4} f_3(t) \pi^6 f_{o1} f_1(t) + \frac{405}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3}^2 f_{o1}^2 + \frac{27}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^4 f_{o3} f_{o1} + \frac{2187}{64} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^4 f_2(t)^2 \\
 & + \frac{63}{4} f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o1}^2 f_{o3} + \frac{9}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1}^5 f_{o2} + \frac{81}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} f_{o1}^3 + \frac{1539}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 f_{o3} f_2(t) f_{o2} \\
 & + \frac{243}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3}^3 f_{o1} + 31 \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o2}^3 + \frac{567}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3} f_2(t) f_3(t) + \frac{3519}{16} \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o3}^2 + \frac{45}{16} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^3 f_{o1}^3 \\
 & + \frac{2673}{8} \pi^8 f_3(t) f_{o3}^3 f_{o1} + \frac{585}{16} f_{o1}^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_1(t) + \frac{237}{16} f_1(t) \pi^8 f_{o2}^2 f_{o1} + 219 \pi^8 f_2(t) f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{2187}{4} \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o3}^2 \\
 & + \frac{189}{8} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^4 f_{o3} + \frac{243}{8} f_{o1}^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_3(t) + \frac{63}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^4 f_{o1} + \frac{765}{16} \pi^8 f_2(t) f_{o1}^2 f_{o3} + \frac{1755}{32} f_1(t) \pi^8 f_{o3}^2 f_{o1} \\
 & + \frac{143}{2} \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o2}^2 + \frac{4617}{8} f_3(t) \pi^8 f_{o1} f_{o3} + \frac{945}{4} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o2}^2 + \frac{1215}{16} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} + \frac{105}{16} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} \\
 & + \frac{135}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^3 f_3(t) + \frac{2997}{64} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} f_3(t) f_{o1} + \frac{45}{2} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^3 f_{o1} + 156 f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{o2} + 45 f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_{o1} \\
 & + \frac{153}{8} \pi^8 f_3(t) f_{o1}^3 f_{o3} + \frac{225}{4} f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o3} + \frac{189}{32} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^3 + \frac{27}{16} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o3}^2 + \frac{243}{16} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o2}^4 + \frac{6561}{512} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o1} \\
 & + \frac{405}{256} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^4 + \frac{63}{1024} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} + \frac{10935}{64} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^2 f_2(t) f_{o1} + \frac{315}{1024} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^3 + \frac{47}{8} f_{o1}^3 \pi^8 f_{o2}^2 f_2(t) \\
 & + \frac{1215}{128} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o1} + \frac{9}{64} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1}^5 + \frac{351}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2}^3 f_3(t) + \frac{3}{2} f_{o1} \pi^6 f_{o3} f_1(t) + \frac{81}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^4 f_{o3}^2 \\
 & + \frac{405}{64} \eta f_3(t) \pi^6 f_1(t) f_{o1}^2 f_{o2} + \frac{27}{16} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{81}{8} \eta f_3(t) \pi^6 f_2(t) f_{o2} + \frac{81}{64} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1}^3 + \frac{297}{512} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o3}^2 \\
 & + \frac{81}{512} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^5 + \frac{729}{16} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o3}^2 f_3(t) + \frac{9}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^4 f_{o2} + \frac{297}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^3 f_{o3} f_{o2}^2 + \frac{243}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o3}^3 f_{o1} \\
 & + \frac{10935}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^2 f_2(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{243}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3}^3 + \frac{945}{4} f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} + \frac{729}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3} f_2(t) f_{o2} \\
 & + \frac{729}{16} f_{o1} \pi^8 f_{o3}^3 f_1(t) + \frac{891}{16} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 + \frac{15}{16} f_1(t) \pi^8 f_{o1}^2 + \frac{3159}{32} f_{o3}^4 \pi^8 f_1(t) + \frac{81}{64} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o1}^3 = 0
 \end{aligned}$$

### B.2.2 - Equação de Movimento Relativa ao Segundo Grau de Liberdade

$$\begin{aligned}
& -2\pi^2 \delta_1 f_2(t) + 216f_2(t)2\pi^8 f_{o2}^3 + 72f_2(t)2\pi^6 f_{o2} + \frac{2673}{4}f_2(t)\pi^8 f_3(t)4 + 72f_{o3}2\pi^6 f_2(t) + 25f_1(t)2\pi^8 f_{o2}^3 + 6\pi^6 f_{o2}f_1(t)2 \\
& + \frac{9}{4}\eta f_2(t)7\pi^8 + 27f_1(t)2\pi^8 f_2(t)3 + 72f_{o2}4\pi^8 f_2(t) + 5f_1(t)2\pi^6 f_2(t) + \frac{21}{8}f_1(t)4\pi^8 f_{o2} + 117f_3(t)2\pi^6 f_2(t) - 2\pi^2 \delta_1 f_{o2} \\
& + 2\eta f_2(t)3\pi^4 + \frac{21}{8}f_1(t)4\pi^8 f_2(t) + \frac{2673}{4}f_3(t)4\pi^8 f_{o2} + 8f_{o1}2\pi^6 f_2(t) + 240f_2(t)3\pi^8 f_{o2}^2 + 8f_2(t)\pi^4 + 459f_2(t)3\pi^8 f_{o3}^2 \\
& + 48f_{o2}2\pi^6 f_2(t) + \frac{9}{2}\eta f_2(t)5\pi^6 + 27f_2(t)3\pi^8 f_{o1}^2 + 198f_3(t)2\pi^6 f_{o2} - 3\delta_1 f_2(t)3\pi^4 + 441\pi^8 f_3(t)2f_{o2}^3 + 459f_2(t)3\pi^8 f_3(t)2 \\
& + 2f_{o1}4\pi^8 f_2(t) + 486f_{o3}4\pi^8 f_2(t) + 16f_2(t)3\pi^6 + 120f_2(t)4\pi^8 f_{o2} - 3\delta_1 \pi^4 f_{o2}^3 + 24f_2(t)5\pi^8 + \frac{1}{2}c\left(\frac{\partial}{\partial t}f_2(t)\right) + \frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_2(t)\right) \\
& + \frac{729}{2}\pi^8 f_3(t)3f_{o1}f_{o2} + \frac{55}{4}f_1(t)2\pi^8 f_{o1}^2 f_{o2} + 156f_2(t)3\pi^8 f_{o1}f_{o3} + 162f_{o1}^2\pi^8 f_{o3}^2 f_2(t) + 1323f_2(t)2\pi^8 f_{o3}^2 f_{o2} \\
& + \frac{945}{4}f_1(t)2\pi^8 f_2(t)f_{o3}^2 + 468f_2(t)2\pi^8 f_3(t)f_{o1}f_{o2} + 81f_1(t)2\pi^8 f_2(t)f_{o2} + 819f_1(t)\pi^8 f_3(t)f_{o2}f_{o3}f_{o1} + \frac{225}{2}f_1(t)2\pi^8 f_2(t)f_3(t)f_{o1} \\
& + \frac{945}{4}\pi^8 f_3(t)2f_1(t)2f_{o2} + 156f_2(t)3\pi^8 f_3(t)f_1(t) + \frac{75}{2}f_1(t)3\pi^8 f_3(t)f_{o2} + \frac{2223}{8}f_{o1}\pi^8 f_{o2}f_{o3}^2 f_1(t) + 50f_{o1}^2\pi^8 f_{o2}^2 f_2(t) \\
& + 81f_1(t)2\pi^8 f_2(t)f_{o2}^2 + 396f_2(t)2\pi^8 f_{o2}f_{o3}f_{o1} + 882f_{o2}^2\pi^8 f_{o3}^2 f_2(t) + \frac{2187}{2}f_1(t)\pi^8 f_3(t)2f_2(t)f_{o3} + 495\pi^8 f_3(t)f_{o2}^3 f_{o3} \\
& + \frac{225}{2}f_1(t)2\pi^8 f_2(t)f_{o1}f_{o3} + \frac{2151}{8}f_{o1}^2\pi^8 f_{o2}f_{o3}f_3(t) + 42f_1(t)\pi^6 f_{o2}f_3(t) + \frac{63}{4}f_1(t)2\pi^8 f_2(t)f_{o1}^2 + 27f_1(t)\pi^6 f_3(t)f_2(t) \\
& + 306f_2(t)\pi^6 f_{o3}f_3(t) + \frac{945}{2}f_1(t)2\pi^8 f_3(t)f_{o2}f_{o3} + \frac{207}{2}f_1(t)\pi^8 f_3(t)f_{o1}^2 f_{o2} + \frac{207}{2}f_1(t)2\pi^8 f_{o2}f_{o3}f_{o1} + \frac{279}{8}f_2(t)\pi^8 f_3(t)f_{o1}^3 \\
& + 132f_3(t)\pi^8 f_1(t)f_{o2}^3 + 18f_1(t)\pi^6 f_{o1}f_2(t) + \frac{873}{4}\pi^8 f_3(t)2f_{o1}^2 f_{o2} + 102f_{o2}^3\pi^8 f_{o3}f_1(t) + 75f_2(t)2\pi^8 f_{o1}^2 f_{o2} \\
& - 2\pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t)f_2(t) + \frac{225}{2}f_1(t)2\pi^8 f_3(t)f_{o1}f_{o2} + 438f_2(t)\pi^8 f_3(t)f_{o1}f_{o2}^2 + \frac{75}{2}f_1(t)3\pi^8 f_{o2}f_{o3} + \frac{2187}{2}f_1(t)\pi^8 f_3(t)2f_{o2}f_{o3} \\
& + \frac{6075}{4}\pi^8 f_3(t)f_{o3}^3 f_{o2} + \frac{8019}{2}f_2(t)\pi^8 f_3(t)2f_{o3}^2 + 15f_{o2}\pi^6 f_{o3}f_1(t) + \frac{5427}{8}f_{o1}\pi^8 f_{o2}f_{o3}^2 f_3(t) + 39f_{o1}\pi^6 f_{o2}f_3(t) \\
& + \frac{9963}{4}f_2(t)\pi^8 f_3(t)f_{o3}^3 + \frac{2673}{8}f_1(t)\pi^8 f_2(t)f_{o3}^3 + \frac{10935}{64}\eta f_3(t)3\pi^8 f_{o3}^2 f_2(t)f_{o1} + \frac{10935}{64}\eta f_3(t)3\pi^8 f_{o3}^2 f_{o1}f_{o2} \\
& + \frac{567}{4}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o2}^4 f_2(t) + \frac{98415}{128}\eta f_3(t)4\pi^8 f_{o3}^2 f_2(t) + \frac{3645}{128}\eta f_3(t)4\pi^8 f_2(t)f_{o1}^2 + \frac{45927}{64}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o3}^4 f_2(t) \\
& + \frac{19683}{32}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o3}^2 f_2(t)^3 + \frac{2187}{128}\eta f_3(t)5\pi^8 f_1(t)f_{o2} + \frac{3645}{64}\eta f_3(t)4\pi^8 f_1(t)f_2(t)f_{o1} + \frac{2187}{128}\eta f_3(t)5\pi^8 f_{o1}f_{o2} \\
& + \frac{2187}{128}\eta f_3(t)5\pi^8 f_1(t)f_2(t) + \frac{2187}{128}\eta f_3(t)5\pi^8 f_2(t)f_{o1} + \frac{59049}{32}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o3}^2 f_2(t)f_{o2} + \frac{32805}{32}\eta f_3(t)3\pi^8 f_{o3}^3 f_2(t) \\
& + \frac{10935}{64}\eta f_3(t)3\pi^8 f_{o3}^2 f_1(t)f_2(t) + \frac{243}{4}\eta f_3(t)3\pi^8 f_{o2}^3 f_1(t) + \frac{135}{8}\eta f_2(t)4\pi^8 f_1(t)2f_{o2} + \frac{9477}{64}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o3}^2 f_2(t)f_{o1}^2 \\
& + \frac{135}{2}\eta f_2(t)3\pi^8 f_{o2}^2 f_1(t)f_{o1} + \frac{405}{4}\eta f_2(t)2\pi^8 f_{o2}^3 f_3(t)f_{o1} + \frac{1539}{64}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o1}^2 f_2(t)f_3(t) + \frac{3645}{32}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o3}^3 f_2(t)f_3(t) \\
& + \frac{729}{32}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o3}^4 f_2(t) + \frac{19683}{64}\eta f_3(t)4\pi^8 f_2(t)f_{o2} + \frac{19683}{64}\eta f_3(t)5\pi^8 f_2(t)f_{o3} + \frac{243}{8}\eta f_1(t)3\pi^8 f_{o3}^2 f_2(t)f_3(t) \\
& + \frac{405}{4}\eta f_2(t)3\pi^8 f_{o2}^2 f_1(t)f_3(t) + \frac{567}{2}\eta f_2(t)3\pi^8 f_{o2}^2 f_{o3}^2 + \frac{405}{4}\eta f_2(t)2\pi^8 f_{o2}^3 f_1(t)f_3(t) + \frac{1701}{8}\eta f_1(t)\pi^8 f_2(t)2f_{o1}f_{o2}f_3(t)2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{999}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o1} 2 f_{o2} 2 f_3(t) + \frac{243}{8} \eta f_2(t) 5 \pi^8 f_{o3} 2 + 9 \eta f_2(t) 3 \pi^6 f_3(t) f_{o1} + 9 \eta f_2(t) 3 \pi^6 f_1(t) f_3(t) + \frac{1215}{4} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o2} 2 f_3(t) 2 \\
 & + \frac{243}{4} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o2} 3 f_{o1} + \frac{1539}{16} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2} 2 f_2(t) f_{o1} 2 + \frac{1053}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o1} f_{o2} f_3(t) + \frac{1215}{2} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o2} 2 f_3(t) f_{o3} \\
 & + \frac{405}{4} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o2} 2 f_3(t) f_{o1} + \frac{729}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} f_{o3} 4 f_2(t) + \frac{1377}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o1} 2 f_{o3} 2 f_2(t) + \frac{81}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} 3 f_{o3} 2 f_2(t) \\
 & + \frac{729}{4} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o2} 2 f_1(t) f_2(t) + \frac{19683}{16} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o2} 2 f_2(t) f_{o3} + \frac{81}{8} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_1(t) f_{o2} + \frac{81}{8} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_{o1} f_{o2} \\
 & + \frac{27}{8} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} 2 f_2(t) f_3(t) + \frac{27}{8} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} 2 f_3(t) f_{o2} + \frac{15}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} f_2(t) 3 + \frac{3645}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) 3 f_{o1} f_{o3} 2 f_2(t) \\
 & + \frac{56133}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} 2 f_{o3} 2 f_3(t) 2 + \frac{63}{128} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_3(t) f_2(t) + \frac{315}{128} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{513}{64} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_3(t) f_2(t) f_{o3} \\
 & + \frac{16767}{16} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} 2 f_{o3} 3 f_3(t) + \frac{513}{64} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_3(t) f_{o2} f_{o3} + 81 \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} 4 f_{o3} 2 + \frac{3}{2} \eta f_1(t) 3 \pi^6 f_3(t) f_{o2} + \frac{81}{8} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 3 f_{o2} \\
 & + \frac{117}{16} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) f_{o2} 3 + \frac{81}{4} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} f_2(t) f_3(t) 2 + \frac{27}{4} \eta f_3(t) 2 \pi^6 f_2(t) f_{o1} 2 + \frac{10935}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1} f_{o3} 2 f_2(t) \\
 & + \frac{729}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1} 2 f_{o3} f_2(t) + \frac{189}{4} \eta f_2(t) 5 \pi^8 f_{o2} 2 + \frac{10935}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3} 3 f_2(t) f_{o1} + \frac{10935}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3} 2 f_1(t) 2 f_2(t) \\
 & + \frac{567}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3} f_2(t) 3 + \frac{32805}{32} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o3} 3 f_{o2} + \frac{1701}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3} f_2(t) 2 f_{o2} + \frac{729}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1} 2 f_{o3} f_{o2} \\
 & + \frac{999}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} 3 f_{o3} f_2(t) + \frac{3645}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3} 3 f_2(t) + \frac{729}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} 2 f_{o3} 4 + \frac{3645}{8} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1} f_{o2} 2 f_{o3} 2 f_3(t) \\
 & + \frac{27}{2} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1} 3 f_{o2} 2 f_{o3} + \frac{243}{2} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1} f_{o2} 2 f_{o3} 3 + \frac{243}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1} 2 f_{o2} 2 f_{o3} 2 + 27 \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1} f_{o2} 4 f_{o3} \\
 & + \frac{3645}{128} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_1(t) 2 f_2(t) + \frac{2187}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o1} f_{o3} f_3(t) 2 f_{o2} + \frac{63}{128} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_{o3} f_2(t) + \frac{729}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o1} f_{o3} 3 f_{o2} \\
 & + \frac{243}{8} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o3} 2 f_3(t) f_{o2} + \frac{243}{8} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o3} f_3(t) 2 f_{o2} + \frac{513}{128} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_{o3} 2 f_{o2} + \frac{243}{8} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o1} 2 f_{o3} 2 \\
 & + \frac{315}{128} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_{o3} f_{o1} f_{o2} + \frac{10935}{128} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_1(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{3645}{64} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_1(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{10935}{128} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_1(t) f_2(t) f_{o3} \\
 & + \frac{3645}{128} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_{o1} 2 f_{o2} + \frac{19683}{64} \eta f_3(t) 5 \pi^8 f_{o2} f_{o3} + \frac{10935}{128} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o3} + \frac{10935}{128} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_{o1} f_{o2} f_{o3} + \frac{6561}{128} \eta f_3(t) 6 \pi^8 f_{o2} \\
 & + \frac{243}{16} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) f_{o2} 2 f_{o1} + \frac{1701}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) f_{o2} 2 f_3(t) f_{o3} + \frac{243}{64} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o2} + \frac{513}{16} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o2} f_{o3} \\
 & + \frac{315}{128} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_2(t) + \frac{3645}{128} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 4 f_{o2} + \frac{63}{4} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) f_{o2} 4 + \frac{135}{8} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_{o1} 2 f_{o2} + \frac{1215}{8} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_3(t) 2 f_{o2} \\
 & + \frac{351}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o2} 3 + \frac{351}{16} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o1} f_{o3} f_1(t) 2 + \frac{729}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1} f_{o2} f_{o3} + \frac{513}{32} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1} f_{o2} \\
 & + \frac{243}{8} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 2 f_2(t) f_{o3} + \frac{3645}{32} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 3 f_{o2} f_{o3} + \frac{2187}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o1} f_{o3} 2 f_3(t) f_{o2} + \frac{9}{2} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_3(t) f_{o1} f_{o2} \\
 & + \frac{243}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 3 f_{o1} f_{o2} + \frac{513}{128} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_3(t) 2 f_2(t) + \frac{9}{2} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_3(t) f_{o1} f_2(t) + \frac{729}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 2 f_2(t) f_{o1} f_{o3} \\
 & + \frac{9}{8} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o1} 4 + \frac{27}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} 4 f_{o2} f_{o3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1539}{32} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) f_{oI} 2 f_2(t) f_{o3} + \frac{315}{64} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) f_{oI} 2 f_{o2} + \frac{315}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) f_{oI} 3 f_{o2} + \frac{9}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_{oI} 5 f_{o2} \\
 & + 162 f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_{oI} f_{o2} + \frac{945}{2} f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_1(t) 2 f_{o3} + \frac{3447}{8} f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{oI} 2 f_{o3} - 27 \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t) \pi^4 f_3(t) f_{o3} \\
 & + \frac{2025}{2} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o3} 2 f_{o2} + 51 f_3(t) \pi^6 f_{oI} f_2(t) + \frac{549}{8} f_{oI} 2 \pi^8 f_{o2} f_{o3} f_1(t) + \frac{945}{2} f_1(t) \pi^8 f_3(t) 2 f_{oI} f_{o2} + \frac{207}{8} f_{oI} 3 \pi^8 f_{o2} f_3(t) \\
 & - \frac{9}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_3(t) f_{o2} + \frac{225}{2} f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{oI} 2 + 918 f_2(t) 3 \pi^8 f_3(t) f_{o3} + 162 f_{oI} \pi^8 f_{o3} 3 f_2(t) + \frac{2025}{8} f_{o2} \pi^8 f_{o3} 3 f_1(t) \\
 & - \frac{9}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_{oI} f_{o2} f_{o3} - \frac{3}{2} \delta_1 \pi^4 f_{oI} 2 f_{o2} + 27 f_1(t) \pi^6 f_2(t) f_{o3} + \frac{873}{4} f_1(t) 2 \pi^8 f_{o2} f_{o3} 2 + \frac{2187}{2} f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o3} 2 \\
 & + 24 f_{oI} \pi^6 f_{o3} f_2(t) + \frac{3519}{8} f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{oI} f_{o3} 2 - \frac{27}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t) \pi^4 f_{o3} 2 - \frac{3}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) 2 \pi^4 f_2(t) \\
 & - 3 \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_{oI} - \frac{9}{2} \delta_1 \pi^4 f_{oI} f_{o2} f_{o3} - \frac{3}{2} \delta_1 f_1(t) 2 \pi^4 f_2(t) - \frac{9}{2} \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_3(t) - \frac{9}{2} \delta_1 \pi^4 f_3(t) f_{oI} f_{o2} \\
 & - \frac{3}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) 2 \pi^4 f_{o2} + 102 f_{oI} \pi^8 f_{o2} 3 f_3(t) + 945 f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{oI} f_{o3} + \frac{765}{8} f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{oI} 2 f_{o3} + 2673 f_2(t) \pi^8 f_3(t) 3 f_{o3} \\
 & - \frac{3}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t) \pi^4 f_{oI} 2 - 3 \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_{oI} f_{o2} - 9 \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t) \pi^4 f_{o2} 2 - \frac{9}{2} \delta_1 f_2(t) \pi^4 f_{oI} f_{o3} - 27 \delta_1 f_2(t) \pi^4 f_3(t) f_{o3} \\
 & - 27 \delta_1 \pi^4 f_3(t) f_{o2} f_{o3} + 234 f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_{o2} + \frac{47}{8} f_{oI} 3 \pi^8 f_{o2} f_1(t) - \frac{9}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_{o3} + 468 f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_{o2} f_{o3} \\
 & - \frac{9}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t) \pi^4 f_{oI} f_{o3} - 3 \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_{oI} + \frac{21}{2} f_1(t) 3 \pi^8 f_{oI} f_{o2} + 143 f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{oI} f_{o2} 2 + 156 f_2(t) 3 \pi^8 f_3(t) f_{oI} \\
 & - 3 \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t) 3 \pi^4 - 9 \delta_1 f_2(t) 2 \pi^4 f_{o2} - \frac{9}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_3(t) - \frac{27}{2} \delta_1 f_2(t) \pi^4 f_{o3} 2 - \frac{9}{2} \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_3(t) f_{o2} \\
 & + 1377 f_2(t) \pi^8 f_3(t) 2 f_{o2} 2 + \frac{7047}{2} \pi^8 f_3(t) 2 f_{o3} 2 f_{o2} + 468 f_2(t) 2 \pi^8 f_1(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{75}{2} f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) f_{o3} - \frac{27}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t) \pi^4 f_3(t) 2 \\
 & - \frac{9}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t) \pi^4 f_3(t) f_{oI} - \frac{9}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_3(t) f_{oI} f_{o2} - \frac{9}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_{o2} f_{o3} - \frac{3}{2} \delta_1 f_2(t) \pi^4 f_{oI} 2 - \frac{9}{2} \delta_1 f_2(t) \pi^4 f_3(t) f_{oI} \\
 & + \frac{153}{2} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o2} 4 - \frac{27}{2} \delta_1 f_2(t) \pi^4 f_3(t) 2 + 2367 f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{o2} 2 f_{o3} - 3 \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_{o2} 3 - 3 \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_{oI} f_{o2} \\
 & - \frac{9}{2} \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_{o2} f_{o3} - \frac{9}{2} \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_{o3} + 264 f_2(t) \pi^8 f_{o2} 2 f_{oI} f_{o3} + \frac{75}{2} f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) f_3(t) + \frac{2025}{2} \pi^8 f_3(t) 2 f_{oI} f_{o3} f_{o2} \\
 & + \frac{729}{2} f_3(t) 3 \pi^8 f_2(t) f_{oI} + \frac{729}{2} f_2(t) \pi^8 f_3(t) 3 f_1(t) + 156 f_1(t) \pi^8 f_2(t) 3 f_{o3} + \frac{79}{8} f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{oI} 3 + 18 f_{oI} 3 \pi^8 f_{o3} f_2(t) \\
 & + 2754 f_2(t) 2 \pi^8 f_3(t) f_{o2} f_{o3} - 2 \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_{o2} + \eta f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_{oI} + \eta f_1(t) \pi^4 f_{oI} f_{o2} + \frac{945}{4} f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) f_3(t) 2 \\
 & - \frac{27}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_3(t) 2 f_{o2} - \frac{3}{2} \delta_1 f_1(t) 2 \pi^4 f_{o2} - \frac{27}{2} \delta_1 \pi^4 f_3(t) 2 f_{o2} - 9 \delta_1 f_2(t) \pi^4 f_{o2} 2 + 1377 f_2(t) 2 \pi^8 f_3(t) 2 f_{o2} \\
 & + \frac{729}{2} \pi^8 f_3(t) 3 f_1(t) f_{o2} + \frac{2187}{2} f_2(t) \pi^8 f_3(t) 2 f_{oI} f_{o3} + \frac{7371}{8} f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{oI} f_{o3} 2 + \frac{21}{2} f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) f_{oI} + \frac{945}{2} f_2(t) \pi^8 f_3(t) 2 f_1(t) f_{oI} \\
 & + 468 f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o2} 2 + 438 f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2} 2 f_{o3} + 31 f_1(t) \pi^8 f_{oI} f_{o2} 3 + 2673 \pi^8 f_3(t) 3 f_{o2} f_{o3} - 9 \delta_2 \cos(\Omega t) f_2(t) 2 \pi^4 f_{o2} \\
 & - \frac{3}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_{oI} 2 f_{o2} - \frac{27}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_{o2} f_{o3} 2 - 27 \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_3(t) f_{o2} f_{o3} - \frac{27}{2} \delta_1 \pi^4 f_{o2} f_{o3} 2 + 10 \pi^6 f_1(t) f_{oI} f_{o2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{945}{4} f_2(t) \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1} 2 + 54 f_1(t) \pi^8 f_2(t) 3 f_{o1} + \frac{513}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} 3 f_3(t) 2 f_{o2} + \frac{9}{8} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} 3 f_2(t) + \frac{27}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} 4 f_2(t) f_{o3} \\
& + \frac{45}{32} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o1} 3 f_2(t) + \frac{3}{2} \eta f_1(t) 3 \pi^6 f_3(t) f_2(t) + \frac{45}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} 3 f_{o2} 3 + \frac{3321}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o2} 2 f_3(t) f_{o3} \\
& + \frac{243}{16} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o1} f_{o2} + 81 \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_{o2} f_{o3} 2 + 9 \eta f_2(t) 3 \pi^6 f_{o1} f_{o3} + \frac{405}{16} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2} 3 f_{o1} 2 + \frac{567}{8} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2} 3 f_1(t) f_{o1} \\
& + \frac{729}{32} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o3} 4 f_{o2} + \frac{27}{8} \eta f_2(t) 5 \pi^8 f_1(t) 2 + \frac{1215}{32} \eta f_3(t) 4 \pi^6 f_2(t) + \frac{4131}{8} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2} 2 f_2(t) f_{o1} f_{o3} \\
& + \frac{1701}{16} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2} 2 f_1(t) 2 f_2(t) + \frac{1215}{8} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_{o2} f_{o3} 2 + \frac{63}{4} \eta f_2(t) 6 \pi^8 f_{o2} + \frac{243}{8} \eta f_3(t) 2 \pi^6 f_1(t) f_2(t) f_{o3} \\
& + \frac{1215}{8} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_{o2} f_{o3} + \frac{81}{8} \eta f_2(t) 5 \pi^8 f_{o1} f_{o3} + \frac{45}{2} \eta f_2(t) 4 \pi^6 f_{o2} + \frac{16767}{32} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2} 3 f_{o3} 2 + \frac{405}{2} \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_3(t) f_{o2} f_{o3} \\
& + \frac{1215}{8} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2} 3 f_{o1} f_{o3} + \frac{405}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_3(t) 2 f_{o2} + \frac{693}{32} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) f_{o1} 2 f_{o2} 2 + \frac{81}{64} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_{o2} 3 \\
& + \frac{10935}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3} 3 f_1(t) f_{o2} + \frac{45927}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3} 4 f_{o2} + \frac{10935}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3} 3 f_{o1} f_{o2} + 6 \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} 2 f_{o1} 2 \\
& + \frac{27}{4} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o1} 3 f_{o3} + \frac{243}{32} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o1} 2 f_1(t) 2 + 42 \eta f_2(t) 3 \pi^6 f_{o2} 2 + \frac{10935}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3} 3 f_1(t) f_2(t) + \frac{315}{4} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_{o2} 3 \\
& + 27 \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_{o2} f_{o1} f_{o3} + \frac{27}{4} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_{o3} 2 f_2(t) + 54 \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} 2 f_{o3} 2 + \frac{351}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} 2 f_3(t) f_{o3} + 18 \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} 2 f_{o1} f_{o3} \\
& + \frac{98415}{128} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_{o3} 2 f_{o2} + \frac{9477}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3} 2 f_{o1} 2 f_{o2} + \frac{3159}{16} \eta f_3(t) 2 \pi^6 f_{o3} 2 f_2(t) + \frac{135}{4} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_1(t) f_{o1} f_{o2} \\
& + \frac{405}{8} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_1(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{81}{8} \eta f_2(t) 5 \pi^8 f_1(t) f_{o3} + \frac{1215}{4} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_3(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{27}{4} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_{o3} 2 f_{o2} \\
& + \frac{1053}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3} f_{o1} f_{o2} + 12 \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} 4 + \frac{10935}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o3} 2 f_3(t) 2 f_{o2} + \frac{567}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 3 f_{o3} 2 \\
& + \frac{39}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} 2 f_1(t) f_{o1} + \frac{351}{4} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} 2 f_3(t) 2 + \frac{45}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_{o2} 2 f_1(t) 2 + 81 \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2} 3 f_{o1} f_{o3} \\
& + \frac{3645}{32} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o3} 3 f_3(t) f_{o2} + \frac{513}{128} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_{o3} 2 f_2(t) + \frac{513}{32} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o3} 2 f_{o1} f_{o2} + \frac{81}{8} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o3} 3 f_2(t) \\
& + \frac{81}{8} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o3} 3 f_{o2} + 36 \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_{o2} 3 + \frac{15}{32} \eta f_1(t) 4 \pi^6 f_2(t) + \frac{15}{4} \eta f_2(t) 3 \pi^6 f_1(t) 2 + \frac{81}{4} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2} 5 + \frac{6561}{64} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_{o2} 3 \\
& + \frac{135}{2} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2} 3 f_1(t) f_{o1} + \frac{405}{4} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o2} 2 f_1(t) f_{o3} + \frac{1215}{2} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2} 3 f_3(t) f_{o3} + \frac{189}{2} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o2} 2 f_{o1} f_{o3} \\
& + \frac{81}{2} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2} 5 + \frac{135}{4} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o2} 2 f_1(t) 2 + \frac{189}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2} 4 f_{o3} + \frac{81}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_3(t) 2 f_{o2} + \frac{81}{4} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_3(t) f_{o2} f_{o3} \\
& + 243 \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2} 3 f_{o3} 2 + \frac{1215}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2} 2 f_{o3} 3 + \frac{45}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_2(t) 2 f_{o1} f_{o2} + \frac{63}{2} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o2} 4 \\
& + \frac{207}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o1} 3 f_{o2} 2 + \frac{1701}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o2} 2 f_3(t) 2 + \frac{1215}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2} 3 f_3(t) 2 + \frac{315}{64} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o1} 2 f_{o2} f_{o3} \\
& + \frac{297}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o1} 3 f_2(t) f_{o3} + \frac{135}{128} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_{o1} 2 f_2(t) + \frac{3}{2} \eta f_1(t) 3 \pi^6 f_{o2} f_{o3} + \frac{1539}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o1} 2 f_3(t) 2 f_{o2} + \frac{15}{8} \eta f_1(t) 3 \pi^6 f_{o1} f_{o2} \\
& + \frac{3}{2} \eta f_1(t) 3 \pi^6 f_2(t) f_{o3} + \frac{4131}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2} 2 f_{o3} 2 f_3(t) + \frac{351}{16} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o2} f_{o3} + \frac{891}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2} 2 f_{o3} f_{o1} 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2187}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2}^2 f_{o3} f_3(t)^2 + \frac{243}{64} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_{o2}^2 f_2(t) + \frac{207}{32} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^3 f_{o1}^2 + \frac{567}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^3 f_3(t)^2 \\
 & + \frac{999}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_2(t) f_{o1} f_{o3} + \frac{117}{16} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3} + \frac{81}{16} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o2}^3 f_{o1} + \frac{39}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_{o1}^2 f_2(t) \\
 & + \frac{297}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o2} f_{o3} + \frac{27}{2} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_{o1}^2 f_{o2} + \frac{81}{2} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_{o2}^3 + \frac{81}{4} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3}^2 f_1(t) f_2(t) + \frac{729}{8} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3}^3 f_{o2} \\
 & + \frac{81}{4} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o2} f_{o3} + \frac{81}{4} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3}^2 f_2(t) f_{o1} + \frac{81}{4} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_1(t)^2 f_2(t) + \frac{729}{8} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^2 f_{o2} f_{o3}^2 \\
 & + \frac{81}{4} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3}^2 f_1(t) f_{o2} + \frac{81}{4} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3}^2 f_{o1} f_{o2} + \frac{45}{32} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o2} + \frac{315}{64} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o1}^2 f_2(t) f_{o3} + \frac{63}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^4 f_{o2} \\
 & + \frac{567}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^3 f_3(t) f_{o3} + \frac{9}{4} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^5 + \frac{243}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_1(t) f_{o2} + \frac{351}{16} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o1}^2 f_1(t) f_{o3} + 9 \eta f_2(t)^2 \pi^6 f_{o1}^2 f_{o2} \\
 & + \frac{1701}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3}^2 f_{o2} + \frac{1701}{8} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^2 f_3(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{1701}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^2 f_3(t)^2 f_{o2} + 27 \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^2 f_{o2}^3 \\
 & + \frac{27}{8} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^4 f_{o2} + 3 \eta f_2(t)^3 \pi^6 f_{o2} + \frac{1053}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_{o1}^2 f_{o2} + 27 \eta f_1(t) \pi^6 f_2(t)^2 f_{o3} f_{o2} \\
 & + \frac{2187}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_3(t)^2 f_{o2} + \frac{117}{16} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_2(t)^3 f_{o3} + \frac{39}{4} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_{o2}^2 f_2(t) + \frac{2187}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3}^2 f_3(t) f_{o2} \\
 & + \frac{27}{4} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_{o1}^2 f_{o2} + \frac{3159}{16} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_{o2}^2 f_{o3}^2 + \frac{9}{2} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_{o1} f_2(t) f_{o3} + \frac{243}{8} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_1(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{243}{8} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_{o1} f_{o2} f_{o3} \\
 & + \frac{81}{4} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} f_3(t)^2 f_{o2} + \frac{9}{2} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_{o1} f_{o2} f_{o3} + \frac{567}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^3 f_{o3}^2 f_{o1} + \frac{405}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_{o2}^3 + \frac{9}{4} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_{o2}^3 \\
 & + \frac{243}{8} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_2(t) f_{o1} f_{o3} + \frac{81}{8} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_1(t)^2 f_2(t) + \frac{3645}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3}^3 f_{o2} + \frac{81}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_3(t) f_{o1} f_{o3} f_2(t) \\
 & + \frac{1701}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3}^2 f_{o1} f_{o2} + \frac{999}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^3 f_{o3} f_{o2} + \frac{2673}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 f_{o3}^2 f_{o2} \\
 & + \frac{1053}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3} f_{o2}^3 + \frac{81}{4} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_{o2}^3 + \frac{10935}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1} f_{o3}^2 f_{o2} + \frac{2673}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 f_{o3}^2 f_2(t) \\
 & + \frac{729}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3}^3 f_{o2} + \frac{729}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3}^2 f_2(t) + \frac{729}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3}^2 f_{o2} + \frac{1539}{32} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 f_{o3} f_{o2} \\
 & + \frac{81}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_3(t) f_{o1} f_{o3} f_{o2} + \frac{3645}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1} f_{o3} f_{o2} + \frac{405}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3}^2 + \frac{297}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3} f_{o1} \\
 & + \frac{27}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^5 f_{o3} + \frac{243}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3}^3 + \frac{729}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3} f_3(t)^2 + \frac{513}{16} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3} f_2(t) \\
 & + \frac{45}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o2}^2 f_{o3}^2 f_2(t) + \frac{81}{2} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3}^2 f_{o1} + 9 \eta f_1(t) \pi^6 f_2(t)^3 f_{o3} + \frac{27}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} f_{o3}^2 f_2(t) \\
 & + \frac{1215}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3}^2 f_3(t) + \frac{9}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o2}^3 f_{o3} + \frac{729}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3}^2 f_2(t) f_{o1} + \frac{729}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} f_{o3}^4 f_{o2} \\
 & + \frac{243}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1} f_{o3}^3 f_{o2} + \frac{1539}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3}^2 f_2(t) + \frac{189}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3} f_{o1}^2 + \frac{27}{8} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1}^2 f_{o2} f_{o3} \\
 & + \frac{1377}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3}^2 f_{o2} + \frac{243}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1} f_{o3}^3 f_2(t) + \frac{27}{8} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1}^2 f_2(t) f_{o3} + \frac{15}{8} \eta f_1(t)^3 \pi^6 f_{o1} f_2(t) \\
 & + \frac{729}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3}^3 f_2(t) + \frac{1701}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_3(t) f_{o2} + \frac{1215}{32} \eta f_3(t)^4 \pi^6 f_{o2} + \frac{9}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} f_{o2}^3 + \frac{9}{8} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1}^3 f_{o2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{27}{8} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o1}^4 f_{o2} + \frac{9}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1}^4 f_{o2}^2 + \frac{135}{4} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^3 f_2(t)^2 + \frac{9}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^5 f_2(t) + \frac{3645}{32} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3} f_2(t) \\
& + \frac{45}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2}^2 f_3(t) f_{o1} + 27 \eta f_2(t)^2 \pi^6 f_{o2} f_1(t) f_3(t) + \frac{15}{32} \eta f_1(t)^4 \pi^6 f_{o2} + 27 \eta f_2(t)^3 \pi^6 f_{o3}^2 + \frac{117}{16} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o1}^3 f_3(t) \\
& + \frac{45}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2}^2 f_1(t) f_3(t) + 27 \eta f_2(t)^2 \pi^6 f_{o2} f_3(t) f_{o1} + \frac{63}{2} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o1}^2 f_{o2}^2 + \frac{27}{8} \eta f_2(t)^5 \pi^8 f_{o1}^2 + \frac{81}{8} \eta f_3(t)^3 \pi^6 f_1(t) f_2(t) \\
& + \frac{729}{32} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^2 f_2(t)^2 f_{o2} + \frac{315}{64} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o1}^2 f_2(t) f_3(t) + \frac{315}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_2(t) f_3(t) + \frac{351}{16} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o1}^2 f_1(t) f_3(t) \\
& + \frac{351}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_3(t) f_{o2} + \frac{567}{8} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o1}^2 f_3(t) f_{o3} + \frac{135}{2} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_2(t)^3 + \frac{567}{16} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o1}^2 f_3(t)^2 \\
& + \frac{729}{8} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3}^3 f_2(t) + \frac{135}{128} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_{o1}^2 f_{o2} + \frac{81}{8} \eta f_3(t)^3 \pi^6 f_2(t) f_{o1} + \frac{63}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^4 f_2(t) + \frac{27}{2} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_2(t) f_{o1}^2 \\
& + \frac{135}{4} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_2(t)^3 + \frac{1053}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^2 f_1(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{81}{16} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o1}^3 f_1(t) + \frac{351}{16} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} f_2(t) \\
& + \frac{1215}{8} \eta f_3(t)^3 \pi^6 f_2(t) f_{o3} + \frac{729}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^3 f_{o3} f_3(t)^2 + \frac{567}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^3 f_{o3} f_3(t) + \frac{729}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^3 f_{o3}^2 f_3(t) \\
& + \frac{1053}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_2(t) f_3(t) f_{o1} + \frac{351}{16} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o2}^2 f_2(t) f_3(t) + \frac{243}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^3 f_{o3}^3 + \frac{39}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_{o1}^2 f_{o2} \\
& + \frac{513}{32} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o1} f_{o3}^2 f_2(t) + \frac{81}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^3 f_{o3}^2 f_{o2} + \frac{6561}{16} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3} + \frac{405}{8} \eta f_2(t)^4 \pi^8 f_{o1} f_{o2} f_{o3} \\
& + \frac{2187}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^3 f_2(t) f_{o1}^2 + \frac{27}{4} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1} f_{o2}^5 + \frac{9}{2} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o1} f_{o2}^3 + \frac{729}{8} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1} f_{o2}^3 f_{o3}^2 + \frac{189}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^4 f_2(t) f_{o3} \\
& + \frac{19683}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_3(t)^3 f_{o2} f_{o3} + \frac{729}{4} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1} f_{o2} + \frac{81}{2} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3} f_{o2}^3 + \frac{567}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^3 f_{o3}^2 f_2(t) \\
& + \frac{6561}{16} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_3(t)^3 f_{o3} + \frac{891}{32} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o2} f_{o3} + \frac{3}{8} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o1}^3 f_2(t) + \frac{189}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^4 f_{o3} f_{o2} + \frac{81}{8} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o2} \\
& + \frac{3645}{32} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3} f_{o2} + \frac{297}{16} \eta f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^3 f_{o2}^2 + \frac{63}{16} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^3 f_{o2}^3 + \frac{27}{8} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o1}^4 f_2(t) \\
& + \frac{243}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1}^2 f_2(t) + \frac{189}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o2}^4 + \frac{243}{4} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1} + \frac{81}{8} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o1}^3 f_2(t) \\
& + \frac{243}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^3 f_3(t)^3 + \frac{567}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^3 f_{o3}^2 f_{o2} + \frac{189}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o2}^4 + \frac{9}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^5 f_{o2} + \frac{3}{8} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o1}^3 f_{o2} \\
& + \frac{729}{8} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o3}^4 + \frac{243}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1}^2 f_{o2} + \frac{81}{2} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o2}^5 f_{o3} + \frac{729}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_3(t)^3 f_{o2} + \frac{9}{2} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} f_{o2}^5 \\
& + \frac{6561}{16} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^3 f_2(t)^3 + \frac{891}{32} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_2(t) f_{o3} + \frac{351}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_2(t)^3 + \frac{27}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} f_{o3}^2 f_{o2} \\
& + \frac{729}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3}^3 f_{o2} + \frac{297}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o2}^3 f_{o1}^2 + \frac{2187}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^4 f_1(t) f_2(t) + \frac{81}{16} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_2(t)^3 f_{o1} \\
& + \frac{2187}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^4 f_1(t) f_{o2} + \frac{6561}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^5 f_{o2} + \frac{3645}{16} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^3 f_{o2}^3 + \frac{2187}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^4 f_{o1} f_{o2} \\
& + \frac{243}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t)^3 f_2(t) f_{o1} + \frac{567}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^3 f_{o1} f_3(t)^2 + \frac{6561}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^5 f_2(t) + \frac{2187}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^3 f_{o1}^2 f_{o2} \\
& + \frac{27}{64} \eta f_1(t)^5 \pi^8 f_{o1} f_2(t) + \frac{567}{2} \eta f_2(t) \pi^8 f_3(t) f_{o2}^4 f_{o3} + \frac{729}{4} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o1} f_{o3}^2 f_3(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{567}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 2 f_2(t)^3 + \frac{81}{8} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 3 f_2(t) + 4 \eta f_2(t) \pi^4 f_{o2}^2 + 9 \eta f_2(t) \pi^4 f_3(t) f_{o3} + 6 \eta f_2(t) 2 \pi^4 f_{o2} + \frac{9}{2} \eta f_2(t) \pi^4 f_3(t)^2 \\
& + \frac{1}{2} \eta f_1(t) 2 \pi^4 f_{o2} + \frac{9}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^4 f_2(t) f_3(t) + \frac{513}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^3 f_2(t) f_3(t)^2 + \frac{9}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^5 f_2(t) + \frac{1}{2} \eta f_1(t) 2 \pi^4 f_2(t) \\
& + \frac{9}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1}^4 f_3(t) f_{o2} + 9 \eta \pi^4 f_3(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{513}{128} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_3(t)^2 f_{o2} + \frac{3645}{32} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t)^3 f_2(t) f_{o3} + \frac{9}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_3(t) f_{o2}^3 \\
& + \frac{27}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o2}^5 + 9 \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^4 f_{o1}^2 + \frac{27}{64} \eta f_1(t)^5 \pi^8 f_{o1} f_{o2} + \frac{2187}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^4 f_2(t) f_{o1} + \frac{9}{128} \eta f_1(t)^6 \pi^8 f_{o2} \\
& + \frac{315}{128} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_{o3} f_2(t) f_{o1} + \frac{729}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1}^2 f_{o2}^2 f_{o3} f_3(t) + \frac{63}{128} \eta f_1(t)^5 \pi^8 f_{o3} f_{o2} + \frac{9}{128} \eta f_1(t)^6 \pi^8 f_2(t) + 9 \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^6 \\
& + \frac{9}{2} \eta \pi^4 f_3(t)^2 f_{o2} + \frac{19683}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o2} f_{o3}^3 f_3(t) + \frac{2187}{8} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o2} f_{o3}^4 + \frac{63}{128} \eta f_1(t)^5 \pi^8 f_3(t) f_{o2} + \frac{117}{16} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_3(t) f_2(t)^3 \\
& + \frac{513}{32} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_3(t)^2 f_2(t) f_{o1} + \frac{1701}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o2} f_3(t)^2 + \frac{351}{16} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o2} f_3(t) + \frac{729}{4} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o1} f_{o3} f_3(t)^2 \\
& + \frac{243}{4} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o1} f_{o3}^3 + \frac{10935}{64} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o3}^2 f_1(t) f_{o2} + \frac{405}{8} \eta f_2(t)^4 \pi^8 f_1(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{27}{4} \eta f_2(t)^5 \pi^8 f_1(t) f_{o1} \\
& + \frac{405}{8} \eta f_2(t)^4 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{81}{8} \eta f_2(t)^5 \pi^8 f_1(t) f_3(t) + \frac{19683}{64} \eta f_3(t)^4 \pi^8 f_{o2}^2 f_2(t) + \frac{729}{4} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o2}^2 f_2(t) f_{o1} \\
& + \frac{243}{8} \eta f_2(t)^5 \pi^8 f_3(t)^2 + \frac{6561}{64} \eta f_3(t)^4 \pi^8 f_2(t)^3 + \frac{6561}{128} \eta f_3(t)^6 \pi^8 f_2(t) + \frac{81}{8} \eta f_2(t)^5 \pi^8 f_3(t) f_{o1} + \frac{243}{4} \eta f_2(t)^5 \pi^8 f_3(t) f_{o3} \\
& + \frac{81}{64} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_2(t)^3 = 0
\end{aligned}$$

### B.2.3 - Equação de Movimento Relativa ao Terceiro Grau de Liberdade

$$\begin{aligned}
& \frac{6561}{8} f_3(t) 2 \pi^6 f_{o3} + \frac{81}{8} \eta f_3(t) 3 \pi^4 - \frac{3}{16} \delta_1 f_1(t) 3 \pi^4 + \frac{75}{4} f_1(t) 3 \pi^8 f_{o2} 2 + \frac{189}{64} f_1(t) 2 \pi^8 f_{o1} 3 + \frac{2673}{2} \pi^8 f_3(t) 3 f_{o2} 2 - \frac{3}{16} \delta_1 \pi^4 f_{o1} 3 \\
& + \frac{15}{4} f_{o1} 2 \pi^6 f_1(t) + \frac{2673}{2} f_2(t) 2 \pi^8 f_3(t) 3 - \frac{243}{16} \delta_1 f_3(t) 3 \pi^4 + \frac{9963}{8} \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3} 3 + \frac{2187}{4} f_{o3} 2 \pi^6 f_3(t) + \frac{105}{32} f_1(t) 3 \pi^8 f_{o1} 2 + \frac{3}{64} \eta f_1(t) 5 \pi^6 \\
& + \frac{1215}{32} f_1(t) 3 \pi^8 f_{o3} 2 + \frac{4617}{16} \pi^8 f_3(t) 3 f_{o1} 2 + \frac{279}{32} f_{o1} 4 \pi^8 f_3(t) + \frac{27}{2} f_1(t) \pi^6 f_2(t) 2 + \frac{59049}{32} f_{o3} 4 \pi^8 f_3(t) + 153 \pi^6 f_2(t) 2 f_{o3} \\
& + \frac{9}{1024} \eta f_1(t) 7 \pi^8 + \frac{1215}{32} f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 2 - \frac{243}{16} \delta_1 \pi^4 f_{o3} 3 + 117 \pi^6 f_3(t) f_2(t) 2 + \frac{2187}{64} \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1} 3 + \frac{63}{64} f_{o1} 4 \pi^8 f_1(t) + \frac{33}{8} f_1(t) 2 \pi^6 f_{o1} \\
& + \frac{98415}{16} f_3(t) 3 \pi^8 f_{o3} 2 + \frac{459}{2} f_2(t) 4 \pi^8 f_3(t) + \frac{297}{32} f_1(t) 4 \pi^8 f_{o3} + \frac{297}{32} f_1(t) 4 \pi^8 f_3(t) + \frac{99}{4} f_1(t) 2 \pi^6 f_{o3} + \frac{45}{2} f_1(t) 2 \pi^6 f_3(t) \\
& + \frac{75}{4} f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) 2 + \frac{279}{16} \pi^8 f_2(t) 2 f_{o1} 3 + 15 f_{o2} 2 \pi^6 f_1(t) + \frac{98415}{32} f_3(t) 4 \pi^8 f_{o3} + 15 f_{o2} 4 \pi^8 f_1(t) + \frac{8505}{32} f_1(t) 2 \pi^8 f_{o3} 3 + 39 \pi^8 f_2(t) 4 f_{o1} \\
& - \frac{9}{2} \pi^2 \delta_1 f_3(t) + \frac{459}{2} \pi^8 f_2(t) 4 f_{o3} + 162 f_{o2} 2 \pi^6 f_3(t) + \frac{177147}{32} f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3} 3 + \frac{59049}{1024} \eta f_3(t) 7 \pi^8 + 39 f_1(t) \pi^8 f_2(t) 4 + \frac{6561}{128} \eta f_3(t) 5 \pi^6 \\
& + \frac{4617}{16} f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 3 + \frac{387}{2} f_{o2} 4 \pi^8 f_3(t) + \frac{105}{64} f_1(t) 4 \pi^8 f_{o1} - \frac{9}{2} \pi^2 \delta_1 f_{o3} + \frac{81}{2} f_{o1} 2 \pi^6 f_3(t) + \frac{51}{2} \pi^6 f_{o1} f_2(t) 2 + \frac{1}{2} \tau \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_3(t) \right) \\
& + \frac{81}{2} f_3(t) \pi^4 + \frac{19683}{32} f_3(t) 5 \pi^8 + \frac{729}{4} f_3(t) 3 \pi^6 + \frac{21}{64} f_1(t) 5 \pi^8 + \frac{3}{4} f_1(t) 3 \pi^6 + \frac{1}{2} c \left( \frac{\partial}{\partial t} f_3(t) \right) + \frac{243}{16} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 2 f_2(t) 2 \\
& + \frac{81}{512} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o1} 5 + \frac{27}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} 2 f_{o2} 4 + \frac{81}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^6 f_1(t) 3 + \frac{45927}{64} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3} 4 f_2(t) 2 + \frac{243}{16} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_{o1} 2 \\
& + \frac{45927}{256} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3} 4 f_1(t) 2 + \frac{135}{128} \eta f_1(t) 4 \pi^6 f_{o3} + \frac{19683}{128} \eta f_3(t) 5 \pi^8 f_{o2} 2 + \frac{1215}{32} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_1(t) f_{o1} + \frac{63}{256} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_2(t) 2 \\
& + \frac{117}{64} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_{o1} 3 + \frac{19683}{64} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_{o3} 2 f_3(t) + \frac{27}{32} \eta f_1(t) 3 \pi^6 f_{o3} 2 + \frac{3}{32} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} 4 + \frac{3645}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 3 f_2(t) 2 \\
& + \frac{6561}{1024} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_3(t) 3 + \frac{6561}{16} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3} 4 f_{o2} 2 + \frac{117}{64} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_1(t) 3 + \frac{3645}{1024} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_1(t) 3 + \frac{81}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_2(t) 2 f_{o3} \\
& + \frac{98415}{64} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{98415}{128} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3} + \frac{10935}{256} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o1} + \frac{16767}{32} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2} 2 f_{o3} 3 \\
& + \frac{81}{2} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} 5 f_{o3} + \frac{3}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_1(t) 3 + \frac{243}{8} \eta f_2(t) \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1} 3 f_{o2} + \frac{729}{4} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o1} f_{o2} f_{o3} 2 \\
& + \frac{32805}{128} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3} 2 f_1(t) f_2(t) 2 + \frac{10935}{1024} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_1(t) f_{o1} 2 + \frac{6561}{16} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o2} f_{o3} 3 + \frac{513}{64} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_3(t) \\
& + \frac{98415}{256} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_1(t) f_{o1} f_{o3} + \frac{9477}{64} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o1} 2 f_{o3} 2 f_3(t) + \frac{63}{1024} \eta f_1(t) 6 \pi^8 f_{o1} + \frac{729}{128} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3} 3 f_{o1} 3 \\
& + \frac{2187}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3} 3 f_{o1} f_{o2} 2 + \frac{9}{256} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1} 6 + \frac{567}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 3 f_{o2} f_3(t) + \frac{9}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o1} 5 f_{o2} + \frac{81}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^6 f_{o1} 3 \\
& + \frac{9}{64} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o1} 5 + \frac{3}{16} \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_{o1} 3 + \frac{9}{4} \eta f_2(t) 4 \pi^6 f_{o1} + \frac{243}{128} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_{o3} f_3(t) + \frac{19683}{1024} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_{o3} f_3(t) 2 \\
& + \frac{117}{16} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) 3 f_{o2} + \frac{243}{256} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o1} 5 + \frac{6561}{64} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3} 4 f_{o1} 2 + \frac{315}{256} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o1} + \frac{243}{4} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_{o2} 2 \\
& + \frac{729}{4} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o2} 4 f_{o3} 2 + \frac{189}{1024} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_{o1} 2 + \frac{19683}{64} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_3(t) 2 f_{o3} + \frac{405}{8} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} 3 f_3(t) f_{o1} 2 + \frac{1215}{8} \eta f_3(t) 3 \pi^6 f_2(t) f_{o2} \\
& + \frac{10935}{256} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_1(t) f_2(t) 2 + \frac{98415}{512} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_1(t) 2 f_{o3} + \frac{19683}{512} \eta f_3(t) 5 \pi^8 f_1(t) 2 + \frac{3645}{256} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 3 f_{o3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{513}{128} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_3(t) f_2(t)^2 + \frac{81}{2} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^5 f_3(t) + \frac{63}{16} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^3 f_{o1}^3 + \frac{27}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^5 f_{o1} + \frac{27}{64} \eta f_1(t)^3 \pi^6 f_{o1}^2 \\
& + \frac{9}{16} \eta f_1(t)^3 \pi^6 f_{o2}^2 + \frac{21}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_{o1}^3 + \frac{315}{1024} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_{o1}^3 + \frac{243}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o2}^4 f_{o1} + \frac{729}{128} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o1}^4 \\
& + \frac{27}{32} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^4 f_{o2}^2 + \frac{2187}{64} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o3}^4 f_1(t) + \frac{243}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^4 f_{o3}^2 + \frac{27}{4} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{729}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^3 f_3(t)^2 f_{o2} \\
& + \frac{10935}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o2} f_{o3} f_{o1} + \frac{10935}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} f_{o3}^3 f_1(t) f_3(t) + \frac{10935}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} f_{o3}^3 f_3(t) f_{o1} \\
& + \frac{567}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^3 f_{o3} f_{o1} f_{o2} + \frac{3321}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_{o1} f_{o2}^2 + \frac{729}{2} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^3 f_{o3} f_3(t) f_{o2} \\
& + \frac{729}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_3(t) f_{o1} + \frac{10935}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_3(t)^2 f_{o1} + \frac{729}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_3(t) f_{o1}^2 \\
& + \frac{2187}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_3(t) f_{o2}^2 + \frac{9477}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3}^2 f_{o2}^2 + \frac{1215}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 f_{o3} f_{o2}^2 \\
& + \frac{10935}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1} f_{o3} f_{o2}^2 + \frac{10935}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o2} f_{o3} f_1(t) + \frac{3645}{64} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1}^2 + \frac{81}{64} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^5 f_{o3} \\
& + \frac{6561}{16} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_3(t)^3 f_{o2} + \frac{15}{64} \eta f_1(t)^4 \pi^6 f_{o1} + \frac{6561}{64} \eta f_2(t)^4 \pi^8 f_3(t)^3 + \frac{6561}{64} \eta f_2(t)^4 \pi^8 f_{o3}^3 + \frac{81}{16} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^2 f_{o2}^4 \\
& + \frac{19683}{16} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o2} f_{o3}^2 f_3(t) + \frac{729}{64} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o1}^4 f_{o3}^2 + \frac{2187}{128} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o1}^4 f_{o3} + \frac{2187}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} f_{o3}^4 f_1(t) \\
& + \frac{243}{64} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_1(t)^2 f_{o1} + \frac{27}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^5 f_1(t) + \frac{63}{256} \eta f_1(t)^5 \pi^8 f_{o2}^2 + \frac{98415}{32} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o3}^3 f_2(t) f_{o2} \\
& + \frac{3645}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_3(t)^3 f_{o1} + \frac{513}{128} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} + \frac{729}{8} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o2}^4 + \frac{729}{64} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o3} \\
& + \frac{3645}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1} f_2(t) f_{o2} + \frac{513}{32} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_2(t)^2 + \frac{6561}{256} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1}^3 + \frac{2187}{64} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o3}^4 f_{o1} \\
& + \frac{98415}{64} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o3}^3 f_2(t)^2 + \frac{98415}{256} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o3}^2 f_1(t)^2 + \frac{729}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t)^2 f_2(t)^2 f_{o1} + \frac{315}{256} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o1} \\
& + \frac{2025}{256} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o3}^2 + \frac{729}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 f_{o3} f_2(t) f_{o2} + \frac{10935}{256} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 f_{o3}^3 + \frac{243}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^4 f_3(t) \\
& + \frac{675}{256} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^4 f_{o3} + \frac{495}{128} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_{o1}^3 f_3(t) + \frac{1539}{32} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^2 f_2(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{243}{32} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_3(t) f_{o1} f_{o3} \\
& + \frac{16767}{256} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^3 f_{o3}^2 + \frac{351}{128} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^4 f_3(t) + \frac{1215}{128} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_3(t)^2 + \frac{243}{2} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3}^2 f_{o2}^2 \\
& + \frac{243}{8} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3}^2 f_{o1}^2 + \frac{27}{16} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_{o1}^3 + \frac{243}{4} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_2(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{81}{32} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_1(t)^3 + \frac{567}{64} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o3}^2 \\
& + \frac{1053}{128} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^4 f_{o3} + \frac{243}{32} \eta f_1(t) \pi^6 f_3(t) f_{o1}^2 f_{o3} + \frac{59049}{512} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1}^2 f_{o3} + \frac{27}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^6 f_{o1}^2 f_1(t) \\
& + \frac{297}{32} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o2}^2 + \frac{189}{64} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^4 f_{o3} + \frac{117}{16} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o1}^3 f_{o2} + \frac{10935}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1} f_{o3} f_2(t) f_{o2} \\
& + \frac{243}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_3(t)^2 + \frac{19683}{256} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1}^3 f_{o3} + \frac{10935}{256} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1}^2 f_{o3} + \frac{315}{128} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^3 f_1(t)^2 \\
& - \frac{9}{4} \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_{o2}^2 + \frac{27}{8} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^4 f_3(t) + \frac{315}{128} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^2 f_1(t)^3 + \frac{1215}{128} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3} - \frac{27}{2} \delta_1 \pi^4 f_2(t)^2 f_{o3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{27}{8}\delta_1 f_1(t)2\pi^4 f_3(t) + \frac{1215}{64}\eta f_1(t)3\pi^8 f_3(t)f_{oI}2f_{o3} + \frac{3}{8}\eta f_2(t)\pi^6 f_{o2}f_{oI}3 + \frac{81}{2}\eta f_2(t)\pi^6 f_{o2}3f_{o3} + \frac{2187}{32}\eta f_1(t)\pi^8 f_{o2}2f_{o3}3f_{oI} \\
 & -\frac{9}{16}\delta_1 f_1(t)\pi^4 f_{oI}2 + \frac{9}{2}\eta f_2(t)\pi^6 f_{o2}3f_{oI} + \frac{351}{4}\eta f_2(t)2\pi^6 f_{o2}2f_3(t) - \frac{27}{8}\delta_1 f_1(t)2\pi^4 f_{o3} - \frac{9}{4}\delta_1 f_1(t)\pi^4 f_2(t)2 + \frac{45}{4}\eta f_2(t)2\pi^6 f_{o2}2f_{oI} \\
 & -\frac{27}{2}\delta_1 \pi^4 f_2(t)2f_3(t) + \frac{2187}{64}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o3}3f_{o2}2 + \frac{2187}{256}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o3}4f_{oI} + \frac{729}{8}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o3}2f_2(t)f_{oI}f_{o2} - \frac{9}{4}\delta_1 \pi^4 f_2(t)2f_{oI} \\
 & -\frac{9}{16}\delta_1 f_1(t)2\pi^4 f_{oI} - \frac{27}{2}\delta_1 \pi^4 f_3(t)f_{o2}2 + \frac{297}{32}\eta f_1(t)\pi^8 f_{o2}2f_{o3}f_{oI}3 + \frac{1053}{8}\eta f_1(t)\pi^8 f_{o2}3f_{o3}f_2(t)f_{oI} - \frac{27}{8}\delta_1 \pi^4 f_3(t)f_{oI}2 \\
 & + \frac{16767}{512}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o3}3f_{oI}2 + \frac{2673}{32}\eta f_1(t)2\pi^8 f_{o2}2f_{o3}f_3(t)f_{oI} - \frac{9}{4}\delta_1 \pi^4 f_{oI}f_{o2}2 + \frac{729}{2}\eta f_1(t)\pi^8 f_{o2}3f_{o3}f_2(t)f_3(t) \\
 & + \frac{729}{32}\eta f_1(t)\pi^8 f_{o2}2f_{o3}2f_{oI}2 + \frac{513}{128}\eta f_1(t)4\pi^8 f_{o2}2f_{o3} + \frac{405}{16}\eta f_1(t)\pi^8 f_{o2}4f_{o3}f_{oI} + \frac{10935}{64}\eta f_2(t)2\pi^8 f_3(t)3f_1(t)f_{o3} \\
 & + \frac{81}{32}\eta f_1(t)2\pi^6 f_{oI}f_{o3}2 + \frac{2187}{256}\eta f_1(t)\pi^8 f_{oI}2f_{o3}4 + \frac{81}{32}\eta f_1(t)\pi^8 f_{oI}4f_{o3}2 + \frac{3645}{256}\eta f_1(t)\pi^8 f_{oI}3f_{o3}3 - \frac{27}{2}\delta_1 \pi^4 f_{o2}2f_{o3} \\
 & + \frac{2673}{32}\eta f_1(t)\pi^8 f_{oI}2f_{o3}2f_2(t)f_{o2} - \frac{27}{8}\delta_1 \pi^4 f_{oI}2f_{o3} - \frac{3}{16}\delta_2 \cos(\Omega t)f_1(t)3\pi^4 + \frac{81}{32}\eta f_1(t)\pi^6 f_{oI}2f_{o3}2 - \frac{3}{16}\delta_2 \cos(\Omega t)\pi^4 f_{oI}3 \\
 & + \frac{2349}{256}\eta f_1(t)3\pi^8 f_{oI}2f_{o3}2 + \frac{1215}{256}\eta f_1(t)4\pi^8 f_{oI}f_{o3}2 + \frac{19683}{128}\eta f_3(t)5\pi^8 f_2(t)2 + \frac{81}{32}\eta f_1(t)\pi^6 f_{oI}3f_{o3} + \frac{45927}{128}\eta f_3(t)\pi^8 f_{o3}4f_1(t)f_{oI} \\
 & + \frac{81}{8}\eta f_2(t)6\pi^8 f_{o3} + \frac{351}{64}\eta f_1(t)2\pi^6 f_{oI}2f_3(t) + \frac{10935}{64}\eta f_3(t)\pi^8 f_{o3}3f_1(t)f_2(t)2 + \frac{27}{16}\eta f_2(t)6\pi^8 f_1(t) + \frac{81}{2}\eta f_1(t)\pi^6 f_{oI}f_2(t)f_3(t)f_{o2} \\
 & + \frac{135}{8}\eta f_2(t)4\pi^6 f_3(t) + \frac{45927}{32}\eta f_3(t)\pi^8 f_{o3}4f_2(t)f_{o2} + \frac{135}{8}\eta f_2(t)4\pi^6 f_{o3} + \frac{81}{8}\eta f_2(t)6\pi^8 f_3(t) + \frac{27}{16}\eta f_2(t)6\pi^8 f_{oI} \\
 & + \frac{81}{32}\eta f_1(t)\pi^6 f_{oI}3f_3(t) + \frac{10935}{64}\eta f_3(t)\pi^8 f_{o3}3f_1(t)f_{o2}2 + \frac{243}{64}\eta f_1(t)\pi^6 f_{oI}2f_3(t)2 + \frac{10935}{64}\eta f_2(t)2\pi^8 f_3(t)f_{o3}3f_{oI} \\
 & + \frac{729}{4}\eta f_2(t)3\pi^8 f_3(t)2f_{oI}f_{o2} + \frac{729}{8}\eta f_3(t)\pi^8 f_{oI}2f_{o3}2f_{o2}2 + \frac{9}{8}\eta f_1(t)\pi^6 f_{oI}2f_{o2}2 + \frac{6561}{1024}\eta f_1(t)4\pi^8 f_{o3}3 + \frac{729}{256}\eta f_1(t)3\pi^8 f_{o3}4 \\
 & + \frac{729}{4}\eta f_3(t)2\pi^6 f_{o2}2f_{o3} + \frac{135}{128}\eta f_1(t)4\pi^6 f_3(t) + \frac{27}{16}\eta f_1(t)3\pi^8 f_{o2}4 + \frac{1215}{16}\eta f_3(t)3\pi^6 f_2(t)2 + \frac{19683}{16}\eta f_2(t)3\pi^8 f_3(t)2f_{o3}f_{o2} \\
 & + \frac{10935}{64}\eta f_2(t)2\pi^8 f_3(t)3f_{o3}f_{oI} + \frac{19683}{512}\eta f_3(t)5\pi^8 f_{oI}2 + \frac{1215}{64}\eta f_3(t)3\pi^6 f_1(t)2 + \frac{99}{512}\eta f_1(t)6\pi^8 f_3(t) + \frac{243}{4}\eta f_3(t)\pi^8 f_{oI}f_{o2}4f_{o3} \\
 & + \frac{81}{4}\eta f_3(t)\pi^8 f_{oI}3f_{o3}f_{o2}2 + \frac{9}{256}\eta f_1(t)\pi^8 f_{oI}6 + \frac{243}{16}\eta f_3(t)2\pi^6 f_{oI}f_{o2}2 + \frac{729}{16}\eta f_3(t)2\pi^6 f_{oI}2f_{o3} + \frac{243}{256}\eta f_1(t)5\pi^8 f_3(t)2 \\
 & + \frac{153}{512}\eta f_1(t)3\pi^8 f_{oI}4 + \frac{99}{512}\eta f_1(t)6\pi^8 f_{o3} + \frac{27}{4}\eta f_2(t)\pi^8 f_3(t)f_{oI}4f_{o2} + \frac{3645}{1024}\eta f_3(t)4\pi^8 f_{oI}3 + \frac{3645}{32}\eta f_2(t)\pi^8 f_3(t)3f_{oI}2f_{o2} \\
 & + \frac{981}{256}\eta f_1(t)3\pi^8 f_{o3}f_{oI}3 + \frac{513}{16}\eta f_1(t)\pi^8 f_2(t)f_{oI}3f_{o2}f_3(t) + \frac{729}{8}\eta f_1(t)\pi^8 f_2(t)f_{oI}2f_{o2}f_3(t)2 + \frac{891}{64}\eta f_1(t)3\pi^8 f_{o3}2f_{o2}2 \\
 & + \frac{729}{4}\eta f_1(t)2\pi^8 f_2(t)f_{o2}f_{o3}f_3(t)f_{oI} + \frac{135}{32}\eta f_1(t)3\pi^6 f_{o3}f_{oI} + \frac{1215}{8}\eta f_1(t)\pi^8 f_2(t)f_{o2}3f_{o3}2 + \frac{81}{8}\eta f_2(t)2\pi^6 f_{oI}f_{o3}2 \\
 & + \frac{567}{4}\eta f_1(t)\pi^8 f_2(t)f_{oI}f_{o2}3f_3(t) + 9\eta f_2(t)3\pi^6 f_{oI}f_{o2} + \frac{513}{64}\eta f_1(t)4\pi^8 f_2(t)f_{o2}f_{o3} + \frac{351}{4}\eta f_2(t)2\pi^6 f_{o2}2f_{o3} \\
 & + \frac{81}{4}\eta f_1(t)2\pi^6 f_2(t)f_3(t)f_{o2} + \frac{243}{16}\eta f_2(t)2\pi^6 f_3(t)2f_{oI} + \frac{297}{16}\eta f_1(t)\pi^8 f_2(t)f_{oI}2f_{o2}3 + \frac{135}{2}\eta f_2(t)3\pi^6 f_3(t)f_{o2} \\
 & + \frac{9}{4}\eta f_1(t)\pi^8 f_2(t)f_{oI}4f_{o2} + \frac{9}{4}\eta f_2(t)2\pi^6 f_1(t)2f_{oI} + \frac{27}{4}\eta f_2(t)2\pi^6 f_3(t)f_{oI}2 + \frac{243}{16}\eta f_3(t)2\pi^6 f_{o2}2f_1(t) + \frac{243}{16}\eta f_3(t)2\pi^8 f_{o2}2f_{oI}3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2187}{8} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2} 4 f_{o3} + \frac{999}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_{o1} 2 f_{o2} 2 + \frac{27}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_{o1} 2 f_{o3} + \frac{2187}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o2} 2 f_{o1} f_{o3} 2 \\
 & + \frac{6561}{16} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o2} 3 f_2(t) + \frac{81}{4} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o2} 2 f_{o1} 2 f_{o3} + \frac{729}{16} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o2} 2 f_{o1} 2 + \frac{10935}{256} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_{o2} 2 f_{o1} \\
 & + \frac{351}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o2} 3 f_2(t) f_{o1} + \frac{513}{32} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o2} 2 f_3(t) f_{o1} + \frac{567}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o2} 3 f_2(t) f_3(t) + \frac{9}{4} \eta f_2(t) 4 \pi^6 f_1(t) + \frac{243}{256} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_{o3} 2 \\
 & + \frac{729}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o2} 2 f_3(t) 2 f_{o1} + \frac{1377}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o2} 2 f_3(t) f_{o1} 2 + \frac{315}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o1} 3 f_2(t) f_{o2} + \frac{81}{4} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_{o1} f_{o2} 2 \\
 & + \frac{243}{16} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2} 2 f_1(t) 3 + \frac{729}{16} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_{o1} f_{o3} 2 + \frac{1215}{8} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_{o2} 2 f_{o3} + \frac{405}{16} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_{o1} f_{o2} 2 \\
 & + \frac{3645}{8} \eta f_3(t) 2 \pi^6 f_{o3} f_2(t) f_{o2} + \frac{567}{32} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_{o1} 2 f_{o3} + \frac{81}{8} \eta f_2(t) 5 \pi^8 f_{o1} f_{o2} + \frac{729}{8} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o1} 2 f_{o2} 2 f_{o3} \\
 & + \frac{513}{32} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o1} 3 f_1(t) f_3(t) + \frac{243}{4} \eta f_2(t) 5 \pi^8 f_3(t) f_{o2} + \frac{351}{64} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_1(t) 2 f_{o1} + \frac{567}{8} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o1} 2 f_3(t) f_{o2} \\
 & + \frac{1539}{16} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o1} 2 f_3(t) f_{o2} 2 + \frac{729}{16} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_3(t) 2 f_{o1} + \frac{567}{32} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_3(t) f_{o1} 2 + \frac{81}{4} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} f_{o1} f_{o3} 2 \\
 & + \frac{1215}{8} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_3(t) f_{o2} 2 + \frac{27}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} f_{o1} 2 f_{o3} + \frac{729}{16} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2} 4 f_{o1} + \frac{19683}{16} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3} 3 f_{o2} 2 \\
 & + \frac{19683}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3} 3 f_{o1} 2 + \frac{6561}{512} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3} 2 f_{o1} 3 + \frac{32805}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3} 2 f_2(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{10935}{32} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o3} 2 f_2(t) f_3(t) f_{o2} \\
 & + \frac{9}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} f_1(t) 2 f_{o1} + \frac{45927}{128} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o3} 2 f_{o1} 2 + \frac{10935}{512} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o3} 2 f_1(t) 3 + \frac{45}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_{o2} 2 f_1(t) \\
 & + \frac{189}{8} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2} 4 f_{o1} + \frac{1701}{8} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2} 2 f_1(t) f_3(t) f_{o1} + \frac{27}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} f_3(t) f_{o1} 2 + \frac{567}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2} 4 f_{o3} \\
 & + \frac{135}{4} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o2} 3 f_{o1} + \frac{3645}{32} \eta f_3(t) 2 \pi^6 f_{o3} f_1(t) f_{o1} + \frac{405}{2} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{o2} 3 f_3(t) + \frac{351}{32} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2} 2 f_1(t) 3 \\
 & + \frac{19683}{256} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o3} 2 f_3(t) f_{o1} + \frac{567}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2} 4 f_3(t) + \frac{3645}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} 3 f_{o1} + \frac{27}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o2} 2 f_{o3} f_{o1} \\
 & + \frac{81}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} 3 f_3(t) + \frac{999}{64} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o2} 2 f_{o3} f_{o1} + \frac{729}{8} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2} 4 f_{o3} f_3(t) + \frac{999}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} f_{o1} 3 \\
 & + \frac{56133}{512} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o1} 2 f_{o3} 2 f_3(t) + \frac{81}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_2(t) f_{o2} f_{o3} f_{o1} + \frac{32805}{512} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} 2 f_{o3} 2 f_3(t) 2 + \frac{513}{16} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} f_{o1} \\
 & + \frac{10935}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} f_{o3} 2 f_2(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{27}{8} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} 2 f_2(t) f_{o2} + \frac{3}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} f_1(t) 3 + \frac{351}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_{o1} 2 f_{o3} \\
 & + \frac{135}{32} \eta f_1(t) 3 \pi^6 f_3(t) f_{o1} + \frac{27}{4} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_3(t) f_{o2} 2 + \frac{243}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o2} 4 f_{o3} + \frac{261}{128} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o2} 2 f_{o1} 3 + \frac{27}{2} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} f_3(t) f_{o2} 2 \\
 & + \frac{243}{8} \eta f_3(t) 2 \pi^6 f_2(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{3645}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3} 3 f_{o1} + \frac{999}{64} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3} f_{o1} 3 + \frac{2673}{64} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3} 2 f_{o1} 2 \\
 & + \frac{4131}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3} 2 f_{o2} 2 + \frac{81}{4} \eta f_1(t) \pi^6 f_2(t) 2 f_{o3} f_{o1} + \frac{81}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o2} 4 f_{o1} + \frac{513}{32} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3} f_{o1} \\
 & + \frac{27}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_{o2} 2 f_{o1} + \frac{243}{8} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 2 f_2(t) f_{o2} + \frac{3645}{256} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o3} 3 f_3(t) + \frac{2187}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} f_{o3} 4 f_{o1} \\
 & + \frac{3159}{64} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} 2 f_1(t) 2 + \frac{3159}{16} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} 2 f_2(t) 2 + \frac{351}{64} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_{o1} 2 f_1(t) + \frac{2349}{128} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) f_{o1} 3 f_{o3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{8} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{oI} 4 f_1(t) + \frac{351}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_{oI} 3 f_3(t) f_{o2}^2 + \frac{1485}{512} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_{oI} 2 f_{o3} + \frac{729}{16} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t) 4 f_{o3}^2 \\
& + \frac{10935}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 2 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{3645}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3}^3 + \frac{117}{16} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o2}^3 f_2(t) + \frac{297}{128} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o2}^2 f_{oI} 2 \\
& + \frac{513}{128} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_{o2}^2 f_3(t) + \frac{3645}{32} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 3 f_2(t) f_{o2} + \frac{567}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) f_{o2}^3 f_{o3} + \frac{567}{32} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 4 f_{o3} \\
& + \frac{1539}{64} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{oI} 2 f_{o3} f_1(t) 2 + \frac{243}{16} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o3}^2 + \frac{243}{16} \eta f_3(t) 2 \pi^6 f_1(t) f_2(t) 2 + \frac{3645}{64} \eta f_3(t) 2 \pi^6 f_1(t) 2 f_{o3} \\
& + \frac{3645}{16} \eta f_3(t) 2 \pi^6 f_2(t) 2 f_{o3} + \frac{1701}{16} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) 2 f_{o2}^2 f_3(t) + \frac{10935}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{oI} f_{o3}^2 f_2(t) 2 + \frac{19683}{256} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o3} f_3(t) 2 f_{oI} \\
& + \frac{243}{8} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o3} f_3(t) f_{o2}^2 + \frac{567}{8} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{oI} 2 f_{o3} f_{o2} + \frac{9477}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} f_{o3}^2 f_3(t) f_{oI} 2 + \frac{729}{8} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_3(t) 2 f_{oI} \\
& + \frac{10935}{64} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{oI} 2 f_{o3} f_3(t) 2 + \frac{3645}{16} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3}^3 + \frac{891}{32} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{oI}^3 f_{o3} f_3(t) + \frac{1485}{512} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_3(t) f_{oI}^2 \\
& + \frac{10935}{128} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_2(t) f_{oI} f_{o2} + \frac{297}{256} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_3(t) f_{oI} + \frac{2187}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{oI} 2 f_{o2} f_{o3}^3 + \frac{729}{8} \eta f_2(t) \pi^8 f_{oI} f_{o2}^3 f_{o3}^2 \\
& + \frac{1215}{128} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 2 f_{oI}^2 + \frac{45}{64} \eta f_1(t) \pi^8 f_{oI} 4 f_{o2}^2 + \frac{567}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{oI}^3 f_{o2} f_{o3}^2 + \frac{189}{256} \eta f_1(t) \pi^8 f_{oI}^5 f_{o3} + \frac{27}{32} \eta f_1(t) \pi^8 f_{oI}^5 f_3(t) \\
& + \frac{189}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{oI}^4 f_{o2} f_{o3} + \frac{81}{2} \eta f_2(t) \pi^8 f_{oI} 2 f_{o2}^3 f_{o3} + \frac{1215}{256} \eta f_1(t) \pi^8 f_{oI}^4 f_3(t) 2 + \frac{513}{16} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_3(t) f_{oI} \\
& + \frac{243}{4} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o3} f_2(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{729}{2} \eta f_2(t) 3 \pi^8 f_{oI} f_{o3} f_3(t) f_{o2} + \frac{63}{128} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_2(t) f_{o2} + \frac{6561}{256} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_3(t) 3 f_{oI} \\
& + \frac{19683}{512} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 3 f_{oI}^2 + \frac{4131}{8} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{oI} f_{o2}^2 f_{o3} f_3(t) + \frac{315}{128} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_2(t) f_{oI} f_{o2} + \frac{315}{64} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_2(t) f_{oI}^2 f_{o2} \\
& + \frac{10935}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{oI} 2 f_{o2} f_{o3} f_3(t) 2 + \frac{1215}{256} \eta f_1(t) 4 \pi^8 f_3(t) 2 f_{oI} + \frac{81}{4} \eta f_2(t) 2 \pi^6 f_1(t) f_3(t) f_{oI} + \frac{19683}{128} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{oI} f_{o3}^2 \\
& + \frac{3645}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_3(t) 3 f_{o2}^2 + \frac{2187}{16} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{oI}^2 f_{o3} + \frac{729}{4} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2}^3 f_2(t) f_{oI} + \frac{1539}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{oI}^2 f_{o2} f_{o3} f_1(t) 2 \\
& + \frac{297}{256} \eta f_1(t) 5 \pi^8 f_{o3} f_{oI} + \frac{3645}{32} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) f_{oI} + \frac{567}{16} \eta f_2(t) 4 \pi^8 f_1(t) f_3(t) f_{oI} + \frac{98415}{32} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o3}^2 f_2(t) f_{o2} \\
& + \frac{98415}{128} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o3}^2 f_1(t) f_{oI} + \frac{32805}{512} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o3}^2 f_3(t) 2 f_{oI} + \frac{891}{16} \eta f_2(t) \pi^8 f_{oI}^3 f_{o2} f_{o3} f_3(t) + \frac{1215}{4} \eta f_2(t) \pi^8 f_{oI} f_{o2}^3 f_{o3} f_3(t) \\
& + \frac{2187}{64} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{oI}^2 f_{o3}^3 + \frac{98415}{128} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{3645}{16} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{oI} f_{o3}^2 + \frac{45927}{32} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o3}^2 f_{o2}^2 \\
& + \frac{9477}{64} \eta f_1(t) 2 \pi^8 f_{o3}^2 f_3(t) f_{o2}^2 + \frac{98415}{512} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_{oI}^2 f_{o3} + \frac{19683}{256} \eta f_3(t) 5 \pi^8 f_1(t) f_{oI} + \frac{19683}{64} \eta f_3(t) 5 \pi^8 f_2(t) f_{o2} \\
& + \frac{10935}{1024} \eta f_3(t) 4 \pi^8 f_1(t) 2 f_{oI} + \frac{2187}{8} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2}^2 f_3(t) 2 f_{oI} + \frac{6561}{256} \eta f_1(t) 3 \pi^8 f_{o3}^3 f_{oI} + \frac{1053}{32} \eta f_2(t) 2 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) 2 f_{oI} \\
& + \frac{81}{4} \eta f_1(t) 2 \pi^6 f_2(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{10935}{64} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) f_{o3} + \frac{729}{4} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2}^3 f_1(t) f_2(t) - 27 \delta_1 \pi^4 f_2(t) f_{o2} f_{o3} \\
& - \frac{9}{2} \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_{o2} + \frac{729}{16} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) f_{oI}^2 + \frac{19683}{16} \eta f_3(t) 2 \pi^8 f_{o2}^3 f_2(t) f_{o3} - \frac{27}{4} \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_{oI} f_{o3} \\
& + \frac{2187}{16} \eta f_3(t) 3 \pi^8 f_{o2}^2 f_{oI} f_{o3} - 27 \delta_1 \pi^4 f_2(t) f_3(t) f_{o2} - \frac{27}{4} \delta_1 f_1(t) \pi^4 f_3(t) f_{oI} - \frac{9}{2} \delta_1 \pi^4 f_2(t) f_{oI} f_{o2} - \frac{9}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_{o2}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{27}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_2(t)^2 f_{o3} + \frac{59049}{32} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_2(t)^2 f_{o3} - \frac{27}{8} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t)^2 \pi^4 f_3(t) - \frac{9}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_{o1}^2 \\
& - \frac{27}{8} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t)^2 \pi^4 f_{o3} + \frac{32805}{128} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) f_{o3}^2 + \frac{351}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^3 f_{o1} f_{o2} - \frac{9}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_2(t)^2 \\
& - \frac{9}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_2(t)^2 f_{o1} + \frac{3645}{32} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o3}^3 f_2(t) f_{o2} - \frac{27}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_2(t)^2 f_3(t) - \frac{27}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_3(t) f_{o2}^2 \\
& - \frac{9}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t)^2 \pi^4 f_{o1} + \frac{2187}{8} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) f_3(t)^2 - \frac{27}{8} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_3(t) f_{o1}^2 - \frac{9}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_{o1} f_{o2}^2 \\
& - \frac{27}{8} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_{o1}^2 f_{o3} - \frac{27}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{3159}{32} \eta f_3(t)^6 f_{o3}^2 f_1(t) f_{o1} + \frac{243}{8} \eta f_3(t)^6 f_{o3} f_2(t)^2 f_{o1} \\
& + \frac{243}{8} \eta f_3(t)^6 f_{o3} f_1(t) f_2(t)^2 + \frac{32805}{64} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_1(t) f_2(t) f_{o2} + \frac{3159}{8} \eta f_3(t)^6 f_{o3}^2 f_2(t) f_{o2} + \frac{243}{8} \eta f_3(t)^6 f_{o3} f_1(t) f_{o2}^2 \\
& + \frac{351}{16} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o1}^2 f_1(t) f_{o2} + \frac{729}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o1}^2 f_1(t) f_3(t)^2 + \frac{98415}{256} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o3}^3 f_1(t)^2 + \frac{1539}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^2 f_2(t)^2 f_3(t) \\
& + \frac{243}{4} \eta f_2(t)^5 \pi^8 f_{o2} f_{o3} + \frac{567}{32} \eta f_2(t)^4 \pi^8 f_1(t)^2 f_3(t) + \frac{98415}{64} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o3}^2 f_2(t)^2 + \frac{81}{8} \eta f_2(t)^5 \pi^8 f_1(t) f_{o2} \\
& + \frac{729}{8} \eta f_1(t)^8 f_2(t)^4 f_{o3} f_3(t) + \frac{10935}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3}^2 f_3(t) + \frac{729}{16} \eta f_2(t)^4 \pi^8 f_1(t) f_3(t)^2 + \frac{567}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^3 f_{o3} f_{o2} \\
& + \frac{567}{16} \eta f_1(t)^8 f_2(t)^4 f_{o3} f_{o1} + \frac{10935}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_3(t)^2 + \frac{243}{8} \eta f_1(t)^3 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} f_3(t) + \frac{729}{4} \eta f_1(t)^8 f_2(t)^3 f_{o3}^2 f_{o2} \\
& + \frac{81}{8} \eta f_2(t)^2 \pi^6 f_1(t) f_{o3}^2 + \frac{19683}{32} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o2}^2 f_2(t)^2 + \frac{10935}{256} \eta f_3(t)^4 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) + \frac{243}{8} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_1(t) f_2(t) f_{o2} \\
& + \frac{16767}{16} \eta f_2(t)^8 \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3}^2 f_3(t) + \frac{81}{4} \eta f_2(t)^6 \pi^6 f_{o2} f_{o3}^2 f_1(t) + \frac{56133}{32} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3}^2 f_3(t) - 27 \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_2(t) f_{o2} f_{o3} \\
& - \frac{9}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_2(t) f_{o2} - \frac{27}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_{o1} f_{o3} - 27 \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_2(t) f_3(t) f_{o2} - \frac{27}{4} \delta_2 \cos(\Omega t) f_1(t) \pi^4 f_3(t) f_{o1} \\
& - \frac{9}{2} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_2(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{32805}{128} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_2(t)^2 f_{o1} + \frac{729}{8} \eta f_2(t)^4 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3} + \frac{98415}{128} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o3}^3 f_1(t) f_{o1} \\
& + \frac{207}{8} f_{o1}^3 \pi^8 f_{o2} f_2(t) + \frac{585}{16} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^3 + \frac{2673}{8} f_{o1} \pi^8 f_{o3}^3 f_1(t) + \frac{3645}{32} f_1(t) \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1}^2 + \frac{243}{8} f_{o1}^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) \\
& + \frac{945}{4} f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t) f_{o2}^2 + 102 \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o2}^3 + \frac{7371}{16} \pi^8 f_2(t)^2 f_{o1} f_{o3}^2 + \frac{2187}{32} f_{o1}^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_1(t) + 219 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o1} f_{o2}^2 \\
& + \frac{6561}{64} f_1(t)^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_{o1} + \frac{2367}{2} \pi^8 f_2(t)^2 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{765}{16} f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o1} + \frac{3447}{16} \pi^8 f_2(t)^2 f_{o1}^2 f_{o3} + \frac{2187}{2} \pi^8 f_2(t) f_3(t)^2 f_{o1} f_{o2} \\
& + \frac{8019}{2} \pi^8 f_2(t)^2 f_3(t) f_{o3}^2 + \frac{2025}{2} f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3}^2 + 132 f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2}^3 + \frac{1503}{32} f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1}^2 f_{o3} + \frac{171}{2} f_3(t) \pi^6 f_{o1} f_1(t) \\
& + \frac{2187}{2} \pi^8 f_2(t)^2 f_3(t) f_{o1} f_{o3} + \frac{29889}{8} f_3(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{2673}{4} f_{o1} \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} f_3(t) + \frac{6075}{4} f_{o2} \pi^8 f_{o3}^3 f_2(t) + \frac{2187}{4} f_2(t)^2 \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1} \\
& + \frac{2151}{8} f_{o1}^2 \pi^8 f_{o2} f_{o3} f_2(t) + \frac{225}{4} f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o1} + \frac{3447}{16} f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} + \frac{2187}{2} f_2(t)^2 \pi^8 f_3(t) f_1(t) f_{o3} + \frac{945}{4} \pi^8 f_2(t)^2 f_3(t) f_{o1}^2 \\
& + \frac{225}{2} f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{1089}{4} f_{o1} \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} f_1(t) + 156 \pi^8 f_2(t)^3 f_{o1} f_{o2} + \frac{1215}{16} f_1(t)^3 \pi^8 f_3(t) f_{o3} + 2673 f_2(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o2} \\
& + \frac{6561}{32} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 f_{o3} + \frac{945}{4} f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^2 f_3(t) + 918 \pi^8 f_2(t)^3 f_{o2} f_{o3} + 7047 \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o3}^2 f_{o2} + \frac{8505}{16} f_{o1}^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_3(t)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{207}{2} f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o1}^2 f_{o2} + \frac{24543}{16} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3}^2 + 39 f_2(t) \pi^6 f_{o1} f_{o2} + \frac{297}{8} f_1(t)^3 \pi^8 f_{o1} f_{o3} + 156 f_1(t) \pi^8 f_2(t)^3 f_{o2} \\
& + 45 f_{o1} \pi^6 f_{o3} f_1(t) + 2025 \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o2} f_{o3} f_{o1} + \frac{3645}{16} f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3} + \frac{945}{2} f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_3(t) f_{o1} \\
& + \frac{945}{2} f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{2187}{2} f_2(t) \pi^8 f_3(t)^2 f_1(t) f_{o2} + \frac{5427}{8} f_{o1} \pi^8 f_{o2} f_{o3}^2 f_2(t) + \frac{25515}{32} \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1}^2 f_{o3} \\
& + 234 f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o2}^2 + \frac{2187}{4} f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3}^2 + \frac{8019}{2} \pi^8 f_3(t)^2 f_2(t)^2 f_{o3} + \frac{945}{2} f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o1} f_{o3} + \frac{9963}{4} f_{o2}^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_3(t) \\
& + \frac{3519}{8} f_3(t) \pi^8 f_1(t) f_{o1} f_{o2}^2 + 42 f_2(t) \pi^6 f_{o2} f_1(t) + \frac{8019}{16} \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1} f_{o2}^2 + \frac{153}{8} f_{o1}^3 \pi^8 f_{o3} f_1(t) + \frac{2349}{8} f_{o2}^2 \pi^8 f_{o3}^2 f_1(t) \\
& + \frac{7371}{8} f_1(t) \pi^8 f_3(t) f_{o2}^2 f_{o3} + 396 \pi^6 f_{o2} f_2(t) f_3(t) + \frac{225}{4} f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_{o1}^2 + \frac{13851}{16} f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t) f_{o3}^2 + \frac{873}{2} \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o1}^2 f_{o2} \\
& + 2187 f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{945}{2} f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} + \frac{3645}{32} f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1} + 819 f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} f_{o1} \\
& + \frac{13851}{16} f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t)^2 f_{o3} + \frac{75}{2} f_1(t)^3 \pi^8 f_2(t) f_{o2} + 234 f_{o2} \pi^6 f_{o3} f_2(t) + \frac{2187}{4} f_1(t) \pi^8 f_2(t)^2 f_3(t)^2 + 495 f_{o2}^3 \pi^8 f_{o3} f_2(t) \\
& + 882 f_3(t) \pi^8 f_2(t) f_{o2}^3 + \frac{891}{16} f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t) f_{o1}^2 + 8019 \pi^8 f_2(t) f_3(t)^2 f_{o2} f_{o3} + \frac{1341}{8} f_{o1}^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_3(t) + \frac{297}{8} f_1(t)^3 \pi^8 f_3(t) f_{o1} \\
& + 945 f_1(t) \pi^8 f_2(t) f_3(t) f_{o1} f_{o2} + \frac{4617}{8} f_1(t) \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1} + \frac{2187}{4} f_1(t) \pi^8 f_3(t)^2 f_{o2}^2 + \frac{729}{16} \pi^8 f_3(t) f_{o1}^3 f_{o3} + 918 f_2(t)^3 \pi^8 f_3(t) f_{o2} \\
& + \frac{945}{4} f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t)^2 f_{o3} + 1377 \pi^8 f_2(t)^2 f_3(t) f_{o2}^2 + \frac{13851}{8} f_1(t) \pi^8 f_3(t)^2 f_{o1} f_{o3} + \frac{9}{2} \pi^4 f_2(t)^2 f_{o3} + \frac{59049}{256} \eta f_3(t) \pi^8 f_{o3}^6 \\
& + \frac{6561}{64} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o3}^5 + \frac{9}{4} \eta f_1(t) \pi^4 f_3(t) f_{o1} + 9 \eta \pi^4 f_2(t) f_3(t) f_{o2} + \frac{9}{4} \eta f_1(t) \pi^4 f_{o1} f_{o3} + \frac{9}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^4 f_{o3} + 9 \eta \pi^4 f_2(t) f_{o2} f_{o3} \\
& + \frac{9}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^4 f_3(t) + \frac{243}{8} \eta f_3(t)^2 \pi^4 f_{o3} + \frac{81}{4} \eta f_3(t) \pi^4 f_{o3}^2 + \frac{9}{2} \eta \pi^4 f_2(t)^2 f_3(t) + \frac{6561}{32} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} f_{o3}^5 + \frac{413343}{1024} \eta f_3(t)^6 \pi^8 f_{o3} \\
& + \frac{729}{16} \eta f_2(t)^2 \pi^6 f_{o3}^3 + \frac{1240029}{1024} \eta f_3(t)^5 \pi^8 f_{o3}^2 + \frac{2066715}{1024} \eta f_3(t)^4 \pi^8 f_{o3}^3 + \frac{531441}{512} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o3}^5 + \frac{1003833}{512} \eta f_3(t)^3 \pi^8 f_{o3}^4 \\
& + \frac{729}{8} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2} f_{o3}^3 + \frac{729}{64} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_{o3}^3 + \frac{6561}{256} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o3}^5 + \frac{2187}{16} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3}^4 + \frac{6561}{128} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o1} f_{o3}^5 \\
& + \frac{2187}{64} \eta f_1(t) \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3}^4 + \frac{729}{32} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o1} f_{o3}^3 + \frac{81}{8} \eta f_1(t) \pi^6 f_{o2}^2 f_{o3}^2 + \frac{6561}{16} \eta f_3(t)^2 \pi^6 f_{o3}^3 + \frac{32805}{128} \eta f_3(t)^4 \pi^6 f_{o3} \\
& + \frac{15309}{32} \eta f_3(t)^3 \pi^6 f_{o3}^2 + \frac{10935}{128} \eta f_3(t)^4 \pi^8 f_1(t) f_2(t) f_{o2} - \frac{729}{16} \delta_1 f_3(t)^2 \pi^4 f_{o3} - \frac{729}{16} \delta_1 f_3(t) \pi^4 f_{o3}^2 - \frac{729}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) f_3(t) \pi^4 f_{o3}^2 \\
& - \frac{729}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) f_3(t)^2 \pi^4 f_{o3} + \frac{729}{16} \eta f_3(t)^2 \pi^8 f_{o2}^4 f_1(t) + \frac{81}{8} \eta f_1(t)^2 \pi^6 f_2(t)^2 f_3(t) + \frac{1701}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o2}^2 f_{o3} f_2(t)^2 \\
& + \frac{729}{16} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_{o1} f_{o3}^2 f_2(t)^2 + \frac{19683}{1024} \eta f_1(t)^4 \pi^8 f_{o3}^2 f_3(t) + \frac{10935}{256} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t)^3 f_{o1} f_{o3} + \frac{135}{4} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o2}^3 f_1(t) \\
& + \frac{405}{16} \eta f_2(t)^4 \pi^8 f_{o2}^2 f_1(t) + \frac{405}{2} \eta f_2(t)^3 \pi^8 f_{o2}^3 f_{o3} + \frac{10935}{256} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_3(t) f_{o1} f_{o3}^3 + \frac{189}{8} \eta f_2(t)^2 \pi^8 f_{o2}^4 f_1(t) \\
& + \frac{243}{8} \eta f_2(t) \pi^8 f_{o2} f_{o3}^2 f_1(t)^3 + \frac{10935}{32} \eta f_1(t)^2 \pi^8 f_2(t) f_{o2} f_{o3} f_3(t)^2 + 9 \eta f_2(t)^3 \pi^6 f_{o2} f_1(t) + \frac{243}{4} \eta f_3(t) \pi^6 f_{o3} f_1(t) f_2(t) f_{o2} \\
& + \frac{135}{2} \eta f_2(t)^3 \pi^6 f_{o2} f_{o3} + \frac{567}{4} \eta f_1(t) \pi^8 f_2(t)^3 f_{o1} f_{o2} f_3(t) + \frac{9}{2} \eta f_2(t) \pi^6 f_{o2}^3 f_1(t) \\
& - \frac{243}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) f_3(t)^3 \pi^4 - \frac{243}{16} \delta_2 \cos(\Omega t) \pi^4 f_{o3}^3 - \frac{9}{2} \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_{o3} - \frac{9}{2} \pi^2 \delta_2 \cos(\Omega t) f_3(t) = 0
\end{aligned}$$