2
Referencial Teórico

Este capítulo está divido em quatro partes, a primeira aborda o mercado de derivativos brasileiro dando ênfase ao mercado de opções, a segunda trata do apreçamento das opções através do modelo Black-Scholes, a terceira expõe às formas de se calcular a volatilidade e aprofunda a temática da volatilidade implícita e a quarta discorre sobre o modelo de Corrado-Su.

2.1.
Mercado de derivativos

Assim como sugere o nome, os derivativos são instrumentos financeiros que dependem de outras variáveis mais básicas, de forma que seus valores derivam de outros ativos ou contratos (HULL, 2008; FIGUEIREDO, 2010; BESSADA, BARBEDO e ARAÚJO, 2007). Sendo que, um ativo ou mercadoria só pode ser negociado nesse mercado caso seu preço seja estabelecido pelo mesmo, isso quer dizer que nenhum agente pode deter nenhuma forma de controle sobre o preço do ativo ou mercadoria (BESSADA, BARBEDO e ARAÚJO, 2007).

Bessada, Barbedo e Araújo (2007) expõem que os principais derivativos negociados são: os Contratos Futuros, Contratos a Termo, *Swaps* e Opções. Em virtude do foco do trabalho recair sobre a volatilidade das opções, os demais derivativos mencionados não serão abordados com demasiada profundidade.

Os contratos futuros são aqueles onde as partes acordam em realizar uma a compra e a outra a venda de um ativo em uma data determinada no futuro por certo preço (HULL, 2008; FIGUEIREDO, 2010), obedecendo a ajustes diários das posições acordadas, isso quer dizer que ao final de cada dia são acertados os ganhos e perdas dos envolvidos nesses contratos (BESSADA, BARBEDO e ARAÚJO, 2007; ROSS, WESTERFIELD e JAFFE, 2008). O ajuste de posições diárias é o mecanismo que garante que as partes honrem seus compromissos, além das garantias exigidas pela BM&FBovespa (FIGUEIREDO, 2010). Esses contratos permitem que os envolvidos liquidem suas posições a qualquer momento desde que o ativo alvo tenha liquidez (FORTUNA, 2010).

Os contratos a termo diferem dos contratos futuros pela não ocorrência dos ajustes diários e pela liquidação física ou financeira na data de exercício da compra/venda (BESSADA, BARBEDO E ARAÚJO, 2007), a menos que tenha sido acordado no contrato que seria possível liquidar antecipadamente e como ocorreria o processo de término do contrato (FORTUNA, 2010).

Segundo Hull (2008), *swap* é um acordo entre companhias para troca de fluxos de caixa no futuro, normalmente intermediada por uma instituição financeira. O autor explica que os contratos a termo seriam uma forma simples de swap, pois a trocar de dinheiro só ocorre em um momento no futuro, enquanto que o swap permitiria a trocar em diversas datas futuras.

O tipo mais comum de swap é um acordo entre duas empresas, onde uma se compromete a pagar um fluxo de caixa correspondente a uma taxa pré-fixada, enquanto que a outra pagará um fluxo de caixa correspondente a uma taxa pós-fixada na(s) mesma(s) data(s) futuras (HULL, 2008). Dessa forma, as empresas que possuem juros a pagar ou a receber podem se proteger ou especular sobre a variação das taxas de juros (FORTUNA, 2010).

As opções são contratos que dão o direito ao seu comprador de comprar ou vender determinado ativo por um preço pré-estabelecido em uma data específica, sendo este desobrigado de exercer seu direito caso queira (HULL, 2008). O vendedor da opção recebe em troca de vender o direito de compra ou venda um montante que é chamado de prêmio da opção (HULL, 1997).

Em razão da sua versatilidade e liquidez o mercado de derivativos vem sendo cada vez mais utilizado, seja por empresas como por investidores independentes. Hull (2008) trata das principais categorias de investidores desse mercado, que seriam: os *hedgers*, composta por aqueles que procuram se proteger de futuras variações do mercado, os especuladores que estruturam posições de investimento em função das suas expectativas para o futuro e os arbitradores que montam posições em diferentes negócios ao mesmo tempo para obter um lucro sem risco.

Em virtude das opções comporem o cerne da temática estudada, o tema será abordado com mais profundidade na secção seguinte.

2.1.1. Opções

Uma opção é um acordo que fornece o direito de compra ou venda de um ativo sobre condições pré-definidas (BLACK e SCHOLES, 1973), existindo dois tipos: as opções de compra e de venda, chamadas em inglês de *call* e *put* respectivamente (HULL, 2008; FIGUEIREDO, 2010; FORTUNA, 2010, NATENBERG, 1994).

As opções também são classificadas segundo o momento em que seu direito de compra ou venda pode ser exercido. As opções europeias concedem o direito apenas na data de vencimento da opção, data na qual expira o direito concedido; já as opções americanas podem ser exercidas a qualquer momento até o vencimento (HULL, 2008; FIGUEIREDO, 2010; BLACK e SCHOLES, 1973).

Classificam-se as opções de compra de acordo com seu preço de exercício (E) em relação ao preço à vista (S) no momento da concretização do contrato. Caso E seja menor que S, a opção é camada dentro do dinheiro, caso E seja igual a S, no dinheiro e caso E seja maior que S, de fora do dinheiro (FIGUEIREDO, 2010). Essa classificação, especificamente, é relevante no presente estudo, pois será largamente utilizada na avaliação do "sorriso" da volatilidade.

Os agentes podem deter quatro posições de investimento nesse mercado: compradores de uma opção de compra ou venda pelos quais pagam um prêmio ao vendedor ou lançador da opção, formadores das outras duas posições (HULL, 2008). No caso do lançador da opção de compra não possuir o ativo que se comprometeu a vender, é chamada de uma venda a descoberto (HULL, 2008; BESSADA, BARBEDO e ARAÚJO, 2007). Nesse caso, o risco do vendedor da opção é grande, pois caso o ativo tenha uma forte alta, sua perda será a diferença entre o preço do ativo no mercado e o preço de exercício. Esse é um dos motivos que leva a BM&FBovespa a cobrar margens de garantia.

O preço das opções é afetado por cinco variáveis. São elas: o preço à vista do ativo (S), o preço de exercício (E), a taxa de juros livre de risco (r), o tempo até o vencimento (t) e a volatilidade do ativo (σ), sendo a opção de compra afetada positivamente por S, r, t e σ e negativamente por E, enquanto a opção de venda é afetada positivamente por E, t e σ e negativamente por S e r (HULL, 2008; FIGUEIREDO, 2010; BESSADA, BARBEDO e ARAÚJO, 2007; LOZARDO, 1998).

Segundo Hull (2008) e Figueiredo (2010), os dividendos pagos seriam a sexta variável a afetá-las, pois levariam a redução do preço do ativo. Porém, esse impacto não ocorre no mercado brasileiro em virtude do preço de exercício também ser reduzido pelo valor dos dividendo, protegendo-as desse impacto (BESSADA, BARBEDO e ARAÚJO, 2007).

Hull (2008), Figueiredo (2010) e Lozardo (1998) expõem a relação entre as opções de compra e venda europeias com o mesmo preço de exercício e data de vencimento.

A relação exposta pelos autores, chamada de paridade *put-call*, está expressa na fórmula a seguir:

$$\text{Preço Put} = \text{Preço da Call} + \mathrm{E} \times \exp(-\mathrm{r} \times \mathrm{T}) - \mathrm{S} \quad (1)$$

Onde:

- exp(x) – o exponencial da variável x.

Os autores, Hull (2008) e Lozardo (1998), afirmam que essa relação funciona como um indicador para a possibilidade de arbitragem, pois caso a paridade não seja respeitada, haverá a oportunidade de se ganhar dinheiro sem risco.

2.2. Modelo Black-Scholes

O modelo de apreçamento das opções mais utilizado no Brasil é o Black-Scholes (BS) (BARBACHAN e ORNELAS, 2003a; BESSADA, BARBEDO e ARAÚJO, 2007), sendo amplamente aplicado as opções europeias e as opções de compra americanas que não pagam dividendos (FIGUEIREDO, 2010).

Este se baseia em equações diferenciais, as quais tratam do impacto esperado que uma variável recebe devido à variação em um ou mais variáveis (COSTA, 1996).

O modelo foi criado em 1973 por Fischer Black e Myron Scholes. Os autores criaram um modelo empírico de apreçamento tendo em mente dois princípios básicos das opções. Primeiro, caso o preço atual do ativo seja muito maior/menor que o preço de exercício, a probabilidade da opção de compra ser exercida será alta/baixa e consequentemente terá alto/baixo valor. Segundo, quanto mais próximo da data de vencimento da opção, menor será seu preço caso o valor do ativo não se altere, sugerindo assim o fator de “derretimento” das opções.

Tendo em mente os princípios acima, Black e Scholes (1973) definiram condições ideais de mercado para que sua fórmula fosse verificada. As principais condições são:

- O preço do ativo segue uma distribuição log-normal;
- A volatilidade do ativo é constante até o vencimento;
- A taxa de juros livre de risco de curto prazo é conhecida e constante ao longo do tempo;
- O ativo não paga dividendos;
- A opção só pode ser exercida na data de vencimento;
- Não há custo de transação para comprar ou vender as opções.

A equação resultante do estudo de Black e Scholes (1973) é:

$$\text{Preço Call} = S \times N(d1) - E \times \exp(-r \times t) \times N(d2) \quad (2)$$

$$\text{Preço Put} = E \times \exp(-r \times t) \times N(d2) - S \times N(d1) \quad (3)$$

Sendo:

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \times t}{\sigma \times \sqrt{t}} \quad (4)$$

$$d2 = d1 - \sigma \times \sqrt{t} \quad (5)$$

Onde:

- $N(x)$ - a função de probabilidade cumulativa da variável normal x padronizada;
- ln - o logaritmo natural;

A fórmula desenvolvida por Black e Scholes (1973) pode ser generalizada através da substituição do termo r para que dessa forma se possa determinar o preço das opções europeias de moeda, futuros e opções não protegidas por dividendos (FIGUEIREDO, 2010). A fórmula generalizada seria:

$$\text{Preço Call} = S \times N(d1) \times \exp\left((b - r) \times t\right) - E \times \exp(-r \times t) \times N(d2) \quad (6)$$

$$\text{Preço Put} = E \times \exp(-r \times t) \times N(d2) - S \times N(d1) \times \exp\left((b - r) \times t\right) \quad (7)$$

Segundo Figueiredo (2010), o termo b permite a generalização do modelo, pois quando:

- b = r - modelo de BS para opções sem dividendo;
- b = r – q - modelo de Merton com dividendos a uma taxa contínua q;
- b = 0 - modelo de Black para opções de futuros;
- b = r – rf - modelo de Garman & Kohlhagen para opções de moeda, onde rf é a taxa de juros externa.

Caso o investidor utilize a estratégia de delta-*hedge* neutro que considera o delta de uma opção, derivada do preço da opção em relação ao preço do ativo alvo, e monte a carteira com uma ação para cada 1/delta opções de compra, de forma a montar uma carteira de investimento sem risco (HULL,2008; FIGUEIREDO, 2010; JARROW e TURNBULL, 1996), sendo o delta no modelo BS igual a N(d1) para uma opção de compra e N(d1) – 1 para uma opção de venda (RITCHKEN, 1996).

Esta estratégia requer que o investidor balanceie sua posição de ações e opções constantemente em função das variações frequentes do delta das opções. (HULL, 2008; FIGUEIREDO, 2010; RITCHKEN, 1996).

Apesar do grande avanço proporcionado pelo modelo BS e suas diversas aplicações, o mesmo foi criticado por sua inconsistência quando aplicado a situações reais.

Algumas dessas inconsistências são: o apreçamento incorreto das opções quando estão perto da data de vencimento, grande desvio entre o preço de mercado e o sugerido pelo modelo para opções que estão muito dentro ou fora do dinheiro (RITCHKEN; 1996) e o "sorriso" da volatilidade (NATTENBURG, 1994; HULL, 2008; COSTA, 1998).

Segundo Peters (1994), o desvio dos preços das opções fora do dinheiro, se deve a distribuição dos preços ter caudas maiores de forma que o mercado leva essa característica em consideração e precifica de forma diferente do BS.

Os pressupostos do modelo amplamente criticados são: a taxa de juros constante até o vencimento, que não se mantém em países como o Brasil (COSTA, 1998), a volatilidade constante e a distribuição log-normal dos preços do ativo (HULL, 2008; NATTENBURG, 1994, COSTA, 1998).

Peters (1994) e Costa (1998) tratam da utilização de outros modelos ou aperfeiçoamentos do BS para o apreçamento das opções. Alguns dos modelos aperfeiçoados do BS seriam: o modelo de Corrado e Su (1996), que leva em consideração a assimetria e a curtose e o modelo de saltos sugerido por Merton (1976), que assume um processo estocástico não contínuo contendo saltos para o preço do ativo. Entre os outros modelos empregados, estão: o de redes neurais utilizado por Maciel, Ballini e Silveira (2009), modelo de Meixner aplicado por Barbachan e Coutinho (2011) e o modelo de Distribuições Hiperbólicas Generalizadas usado por Barbachan e Ornelas (2003b).

2.3. Volatilidade

Volatilidade é uma medida de incerteza sobre os retornos futuros de determinada ação (HULL, 2008), sendo uma medida da dispersão dos retornos esperados (BESSADA, BARBEDO e ARAÚJO, 2007). Por não ser visualizada diretamente no mercado e variar ao longo do tempo, torna-se um input importante nos modelos de apreçamento de derivativos (MCDONALD, 2006; NATENBERG, 1994).

A volatilidade irá indicar a probabilidade de o ativo atingir determinado valor no futuro (BESSADA, BARBEDO e ARAÚJO, 2007). Frente à impossibilidade de se obter a volatilidade futura, deve-se estimá-la e para essa tarefa existem diversos modelos. Os abordados foram escolhidos levando em consideração o levantamento bibliográfico realizado por Poon e Granger (2002).

2.3.1.
Volatilidade histórica

A volatilidade histórica é o ponto de partida para o cálculo da volatilidade, por ser a maneira mais intuitiva de calculá-la. Segundo diversos autores (COSTA, 1998; HULL, 2008; MCDONALD, 2006; BESSADA, BARBEDO E ARAÚJO, 2007) a volatilidade histórica baseia-se no desvio-padrão amostral da série histórica de retornos do ativo e é definida pela seguinte fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \times \sum_{i=1}^{n} (Xt - \bar{X})^2} \quad (8)$$

Onde:

- n é o tamanho da janela de retornos utilizada nos cálculos;
- Xt o retorno do ativo no momento t;
- $\bar{X}$ o retorno médio do ativo na janela de observações utilizada.

Costa (1998) comenta que a volatilidade histórica não é um bom parâmetro para se estimar a volatilidade futura, pois teriam baixa correlação. O autor acrescenta que a janela de observações empregada nos cálculos fica a critério do usuário dependendo dos seus objetivos, fato que não dá objetividade a análise.

2.3.2. Volatilidade estimada por média móvel com amortecimento exponencial

Em função de a volatilidade variar ao longo do tempo, seria razoável considerar que seus últimos valores influenciariam mais seu valor futuro que os mais antigos. Dessa forma, atribuem-se pesos maiores aos últimos desvios-padrões da série de retornos do ativo de forma a dar maior consideração as mudanças mais recentes (HULL, 2008; BESSADA, BARBEDO e ARAÚJO, 2007; MCDONALD, 2006).

Utiliza-se então de uma média móvel, em razão da escolha de uma janela de observações, ponderando os dados com pesos que se reduzem exponencialmente conforme esses se afastam do presente.

Hull (2008), Bessada, Barbedo e Araújo (2007) e McDonald (2006) definem a seguinte fórmula a ser utilizada para o calculo dessa volatilidade ponderada, chamada em inglês de *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA):

$$\sigma_{\mathrm{EWMA}} = \sqrt{\lambda \times \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) \times r_{t-1}^2} \quad (9)$$

Onde:

- λ – fator de decaimento, que deve ser um valor entre 0 e 1, sendo este atribuído arbitrariamente ou estimado;
- r_{t-1} - retorno do ativo no dia anterior, que é obtido pela fórmula $r_{t-1} = \ln(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}})$, onde Pt é o preço de fechamento do ativo no dia t.

Encontra-se σ_{EWMA} utilizando-se da mesma fórmula para encontrar a volatilidade no momento t-1, t-2, t-3 e assim por diante, até a influência dos valores das volatilidades mais antigas tenda a zero (HULL, 2008; MCDONALD, 2006).

2.3.3. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity (GARCH)

O modelo GARCH, assim como o EWMA procura atribuir pesos as volatilidades passadas, porém leva em consideração a questão da heterocedasticidade dos retornos do ativo, a auto-correlação e reversão a média (HULL, 2008; BESSADA, BARBEDO e ARAÚJO, 2007; MCDONALD, 2006), de forma a capturar os movimentos de altas e baixas da volatilidade (MCDONALD, 2006).

Hull (2008) trata que nesse modelo, a volatilidade é calculada a partir do desvio-padrão de longo prazo da série (V_L), como da volatilidade e retorno do momento anterior, como ocorre no modelo EWMA, sendo a seguinte equação utilizada nos cálculos:

$$\sigma_t^2 = \gamma \times V_L + \alpha \times r_{t-1}^2 + \beta \times \sigma_{t-1}^2 \quad (10)$$

Restrições:

- $\gamma + \alpha + \beta = 1$;
- γ, α e $\beta \geq 0$.

Onde:

- γ é o peso atribuído a volatilidade de longo;
- α é o peso atribuído ao retorno do período anterior;
- β é o peso atribuído a volatilidade do período anterior.

Hull (2008) comenta que o modelo EWMA seria o GARCH quando $\gamma = 0$, sendo $\alpha = 1 - \lambda$ e $\beta = \lambda$.

Assim como no modelo EWMA, para obter-se a volatilidade presente deve-se obter um histórico das volatilidades passadas, pois essas terão algum peso na presente.

2.3.4. Volatilidade implícita

Em virtude da volatilidade ser um parâmetro não observado no mercado são utilizados métodos para sua previsão, como os explicados anteriormente. Além de sua previsão, também é possível encontrar qual volatilidade juntamente com os outros parâmetros observados chegaram ao preço da opção negociado no mercado, sendo esta volatilidade chamada de volatilidade implícita (HULL, 2008; BESSADA, BARBEDO e ARAÚJO, 2007; MCDONALD, 2006, NATENBERG, 1994).

O modelo normalmente utilizado para se calcular a volatilidade implícita é o Black-Scholes (MCDONALD, 2006). Em função de não aderir perfeitamente às situações reais, obtêm-se diferentes volatilidades para o mesmo ativo conforme se varia o preço de exercício das opções, mantendo-se os demais parâmetros constantes (HULL, 2008; MCDONALD, 2006).

O “sorriso” da volatilidade é visualizado ao criar-se o gráfico do preço de exercício (eixo X) pela volatilidade implícita (eixo Y) do ativo (BESSADA, BARBEDO e ARAÚJO, 2007; MCDONALD, 2006; LANARI e SOUZA, 2000).

Apesar de normalmente o gráfico acima explicado ter a forma convexa, motivo pelo qual recebeu o nome de “sorriso”, Costa (1998) trata de outra forma desse gráfico, quando ocorre o escalonamento da volatilidade, ocorrendo assim um valor decresce ou cresce conforme o preço de exercício está dentro ou fora do dinheiro.

McDonald (2006) comenta as vantagens em se utilizar a volatilidade implícita. A primeira seria para validar determinado modelo de apreçamento, pois quanto menor for o “sorriso” visualizado, melhor seria o modelo. Segundo, a volatilidade muitas vezes funciona como uma medida de valor para os mercados, ao invés do preço em si da opção. Terceiro, como uma expectativa de volatilidade futura esperada pelo mercado. Quarto, o modelo permitiria uma maneira rápida e fácil de obter a volatilidade de determinado ativo e aplicá-la para outro similar caso este não tivesse dados de preço ou volatilidade disponíveis no mercado.

Banerjee, Doran e Peterson (2007) complementam essas vantagens, apontando em seu estudo que a volatilidade implícita medida pelo indexador americano VIX, índice que representa a volatilidade esperado pelo mercado americano para suas ações do S&P 100 nos próximos 30 dias, teria alta correlação com portfólios diversificados, demonstrando assim a possibilidade da volatilidade implícita prever retornos futuros.

Além disso, Gabe e Portugal (2004) abordam o maior poder de explicação da volatilidade futura pela implícita em razão da segunda ser baseada em parâmetros *ex-ante*, ao contrário de modelos baseados em parâmetros *ex-post*, como o GARCH, apesar de tal fato não ter sido verificado em seu estudo.

Galvão (2002) reforça o exposto por Gabe e Portugal (2004) ao comparar os modelos mencionados para o apreçamento de opções e apontar para um melhor desempenho da volatilidade implícita.

2.4.
Modelo de Corrado-Su

O modelo de Corrado-Su baseia-se em uma expansão da formula de Black-Scholes de maneira a incorporar distribuições não normais, onde são consideradas a curtose e a assimetria dos retornos dos ativos (CORRADO e SU, 1996). Para tanto, os autores utilizam a expansão da série de Gram-Charlier da densidade de probabilidade normal para modelar a distribuição do retorno do ativo.

A fórmula utilizada por Corrado e Su (1996) continha dois erro tipográficos, apontados e corrigidos por Brown e Robinson (2002).

Posteriormente, Jurczenko, Maillet e Negrea (2004) modificaram ligeiramente o modelo no intuito de prover consistência com uma restrição de martigale.

Apesar das diferenças entre os resultados do modelo original de Corrado-Su, do corrigido e do modificado ser muito pequena na maioria dos casos, pode ser economicamente significativa para casos específicos como opções com data de vencimento distante ou muito fora do dinheiro, principalmente quando o mercado estiver turbulento (JURCZENKO, MAILLET e NEGREA, 2004). Em razão do modelo de Corrado-Su modificado por Jurczenko, Maillet e Negrea (2004) ser o mais preciso, este será usado para o calculo da volatilidade implícita.

A diferença entre as fórmulas do modelo de Black-Scholes e as do modelo de Corrado-Su Modificado residem no acréscimo de dois termos ao primeiro modelo, os quais acrescentam os parâmetros de assimetria e curtose da série analisada. A equação do modelo que define o preço da opção de compra é apresentada a seguir:

$$\text{Preço Call} = S \times N(d_1) - E \times \exp(-r \times T) \times N(d_2) + \mu_3 \times Q_3 + (\mu_4 - 3) \times Q_4 \quad (11)$$

Sendo:

$$Q_3 = \frac{1}{6(1+w)} \times S \times \sigma \times \sqrt{T} \times \left(2\sigma \times \sqrt{T} - d\right) \times N(d) \quad (12)$$

$$Q_4 = \frac{1}{(24(1+w))} \times S \times \sigma \times \sqrt{T} \times \left(d^2 - 3d \times \sigma \times \sqrt{T} + 3\sigma^2 \times T - 1\right) \times N(d) \quad (13)$$

$$w = \frac{\mu_3}{6} \times \sigma^3 \times T^{1,5} + \frac{\mu_4}{24} \times \sigma^4 \times T^2 \quad (14)$$

$$d = \log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(b + \frac{\sigma^2}{2}\right) \times T - \frac{\log(1+w)}{\sigma \times \sqrt{T}} \quad (15)$$

Onde:

- μ_3 - coeficiente de assimetria;
- μ_4 - coeficiente de curtose.