

4 Torre articulada

A metodologia desenvolvida e utilizada para a análise modal não linear do pêndulo invertido será agora aplicada ao estudo de estruturas offshore. Neste capítulo será considerado um modelo discreto para análise de vibração de uma plataforma do tipo torre articulada.

As torres articuladas são um exemplo muito comum de estruturas complacentes que, em geral, são utilizadas em operações offshore na indústria de petróleo (Kirk e Jain, 1978). Como outras estruturas complacentes as torres articuladas não têm uma fundação projetada para resistir aos esforços provenientes das forças de vento, corrente e ondas. A resistência se dá por meio de momentos restauradores provenientes de grandes forças de empuxo e um conjunto de amarrações e ancoragens, ou ainda uma combinação desses dois efeitos (Faltinsen, 1990; Bar-Avi e Benaroya, 1997).

4.1. Formulação

O problema tem por base o modelo físico da coluna de Augusti (Bazant e Cedolin, 2010). Nesse modelo a coluna da torre é representada por uma barra rígida de comprimento l e seção transversal tubular circular com diâmetro externo igual a d_0 e interno igual a d_i . A plataforma é modelada por uma massa concentrada M na extremidade livre da barra. As estruturas de amarração são modeladas pela consideração da atuação de duas molas rotacionais, ortogonalmente dispostas e de rigidez igual a k . Desse modo, a posição da estrutura em qualquer instante de tempo t pode ser descrita completamente por dois graus de liberdade representados pelos ângulos de rotação das duas molas, θ_1 e θ_2 . O modelo pode ser visto na Figura 4-1.

Um modelo muito utilizado para a modelagem das torres articuladas é o modelo discreto que utiliza uma única mola rotacional contida no plano xy para simular os momentos restauradores. Esse modelo leva ao desacoplamento das

equações de movimento no plano delimitado pela mola e pelo eixo z , reduzindo as equações de movimento a uma somente (Jain e Kirk, 1977; Choi e Lou, 1991; Han e Benaroya, 2000-a). A vantagem de se utilizar duas molas ortogonais entre si é que essa disposição permite o acoplamento entre os graus de liberdade, o que por sua vez permite o estudo de fenômenos dinâmicos mais complexos que a análise desacoplada.

Na modelagem das forças de fluido a torre é considerada imersa numa lâmina de água de altura H_w . São consideradas as ações de forças de empuxo, massa adicionada e a atuação de corrente e de ondas. A corrente tem velocidade v_c e faz um ângulo α_c com o eixo x . A teoria de Airy é utilizada para análise da ação de ondas sobre a torre. A atuação das forças de fluido é mostrada de forma esquemática na Figura 4-2.

A atuação da corrente sobre a torre articulada tem efeito semelhante à imperfeição geométrica considerada no exemplo do pêndulo invertido, sendo que a estrutura estaticamente se desloca para uma nova posição de equilíbrio devido à ação da corrente. Desse modo para que as equações de movimento possam ser escritas em relação a esse referencial deformado, é necessário que se faça a análise estática do problema para determinação da nova posição de equilíbrio

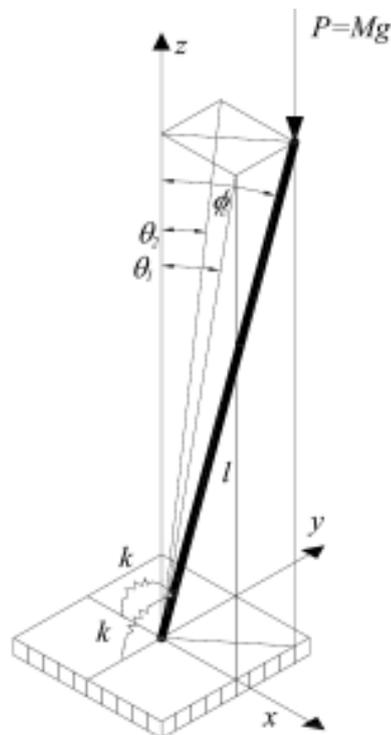


Figura 4-1 Modelo de Augusti.

estático em decorrência da atuação da corrente sobre a torre.

4.1.1. Análise estática

A configuração de equilíbrio estático para a torre articulada é determinada utilizando-se o princípio da energia potencial estacionária. A energia potencial total é expressa por:

$$\Pi = U + V, \quad (4-1)$$

onde U é a parcela dada pela energia interna de deformação elástica e V o potencial das cargas externas atuantes sobre a estrutura.

A energia de deformação interna das molas rotacionais é expressa por:

$$U = \frac{1}{2}k(\theta_1^2 + \theta_2^2) \quad (4-2)$$

O potencial das cargas externas é dado pela seguinte expressão:

$$V = -W \quad (4-3)$$

onde W é o trabalho total realizado pelas cargas externas.

As cargas externas estáticas consideradas nessa análise são o peso da

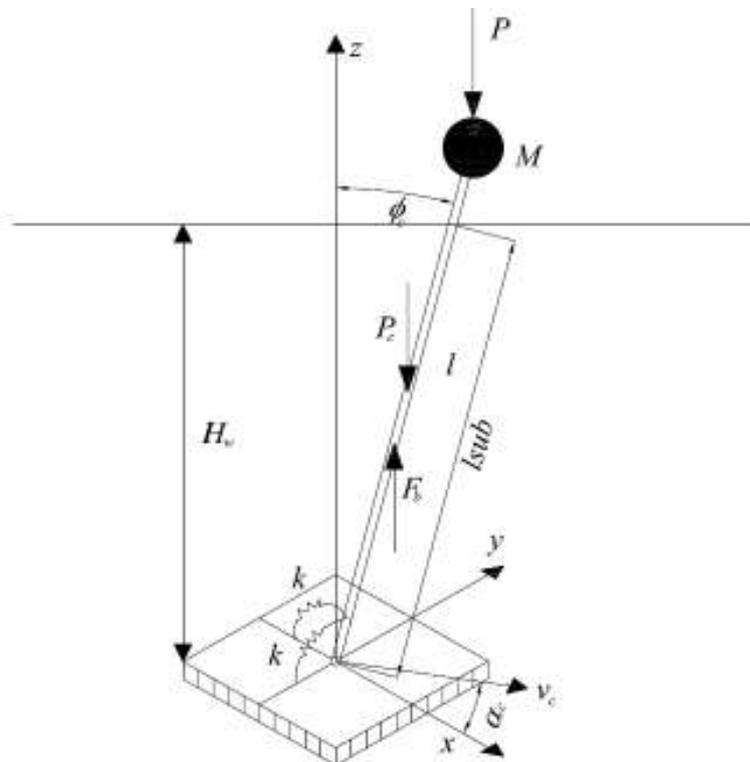


Figura 4-2 Modelo da torre articulada.

plataforma, o peso da coluna da torre, o empuxo e a força proveniente da corrente marítima.

O trabalho realizado pelo peso da plataforma (W_M) é igual a:

$$W_M = P\Delta = Mg\Delta, \quad (4-4)$$

onde g é a aceleração da gravidade e Δ é o deslocamento da plataforma na direção z , que pode ser expresso por (ver Figura 4-1):

$$\Delta = l\left(1 - \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta_1 - \text{sen}^2\theta_2}\right) \quad (4-5)$$

Assim o trabalho realizado pelo peso da plataforma é:

$$W_M = Mgl\left(1 - \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta_1 - \text{sen}^2\theta_2}\right), \quad (4-6)$$

O trabalho realizado pelo peso da coluna (W_{col}) é igual a:

$$W_{col} = P_{col} \frac{\Delta}{2}, \quad (4-7)$$

onde P_{col} é o peso total da coluna, dado por:

$$P_{col} = \rho_c gl \frac{\pi}{4} (d_0^2 - d_i^2), \quad (4-8)$$

onde ρ_c é a massa específica da coluna.

O trabalho realizado pelo peso da coluna é igual a:

$$W_{col} = \frac{\pi}{2} \rho_c gl^2 (d_0^2 - d_i^2) \left(1 - \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta_1 - \text{sen}^2\theta_2}\right) \quad (4-9)$$

O trabalho realizado pela força de empuxo é igual a:

$$W_b = -F_b \Delta_b, \quad (4-10)$$

onde F_b é a força de empuxo, e Δ_b o deslocamento da torre no ponto de atuação da resultante da força de empuxo.

A força de empuxo, pelo princípio de Arquimedes é igual ao peso do volume de água deslocada pela parte da coluna submersa, desse modo:

$$F_b = \rho_w g \frac{\pi}{4} d_0^2 l_{sub}, \quad (4-11)$$

onde ρ_w é a massa específica da água do mar e l_{sub} é o comprimento submerso da coluna, dado por (ver Figura 4-2):

$$l_{sub} = \frac{H_w}{\cos\phi_c}, \quad (4-12)$$

onde ϕ_c é o ângulo de inclinação da coluna em relação ao eixo z .

Das relações trigonométricas da Figura 4-1 tem-se que:

$$\cos \phi_c = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2}, \quad (4-13)$$

O deslocamento da força de empuxo é dado pela seguinte expressão, observando-se as relações geométricas da Figura 4-3:

$$\frac{\Delta}{\Delta_b} = \frac{z_M}{H_w/2}, \quad (4-14)$$

onde z_M é a coordenada vertical da plataforma, expressa por:

$$z_M = l \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2} \quad (4-15)$$

Desse modo o deslocamento da força de empuxo é igual a:

$$\Delta_b = \frac{H_w}{2 \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2}} \left(1 - \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2} \right), \quad (4-16)$$

Combinando-se as expressões (4-10), (4-11), (4-12) e (4-16) o trabalho devido à força de empuxo é igual a:

$$W_b = \frac{-\pi \rho_w g d_0^2 H_w^2}{8 (1 - \text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2)} \left(1 - \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2} \right) \quad (4-17)$$

Assume-se que a velocidade da corrente varie linearmente com a profundidade z , sendo v_{c0} a velocidade na superfície da água:

$$v_c(z) = \frac{v_{c0}}{H_w} z, \quad (4-18)$$

A força da corrente na estrutura pode ser expressa, considerando-se uma análise quase-estática, pela seguinte expressão:

$$F_c = \rho_w C_D \frac{d_0}{2} \int_0^{H_w} v_c^2 dz, \quad (4-19)$$

onde C_D é o coeficiente de arrasto.

Substituindo-se a eq. (4-18) na eq. (4-19) e após sua integração, tem-se que a força devida à ação da corrente resultante na coluna é igual a:

$$F_c = \frac{1}{6} \rho_w C_D d_0 v_{c0}^2 H_w \quad (4-20)$$

A altura do ponto de atuação da força de corrente resultante, z_c , pode ser calculada do seguinte modo:

$$z_c = \frac{\rho_w C_D \frac{d_0}{2} \int_0^{H_w} v_c^2 z dz}{\rho_w C_D \frac{d_0}{2} \int_0^{H_w} v_c^2 dz} = \frac{3}{4} H_w, \quad (4-21)$$

A força devida à corrente pode ser decomposta nos eixos x e y do seguinte modo (ver Figura 4-2):

$$F_{cx} = F_c \cos \alpha_c; \quad F_{cy} = F_c \sin \alpha_c \quad (4-22)$$

O trabalho devido à ação da corrente pode ser escrito como:

$$W_c = F_{cx} y_c + F_{cy} x_c, \quad (4-23)$$

onde x_c e y_c são as coordenadas do ponto de atuação da resultante da força devida à corrente, dados pelas seguintes relações geométricas (ver Figura 4-2):

$$\frac{x_c}{x_M} = \frac{z_c}{z_M}; \quad \frac{y_c}{y_M} = \frac{z_c}{z_M}, \quad (4-24)$$

onde x_M e y_M são as coordenadas da plataforma nos eixos x e y respectivamente, expressas por:

$$x_M = l \sin \theta_1; \quad y_M = l \sin \theta_2 \quad (4-25)$$

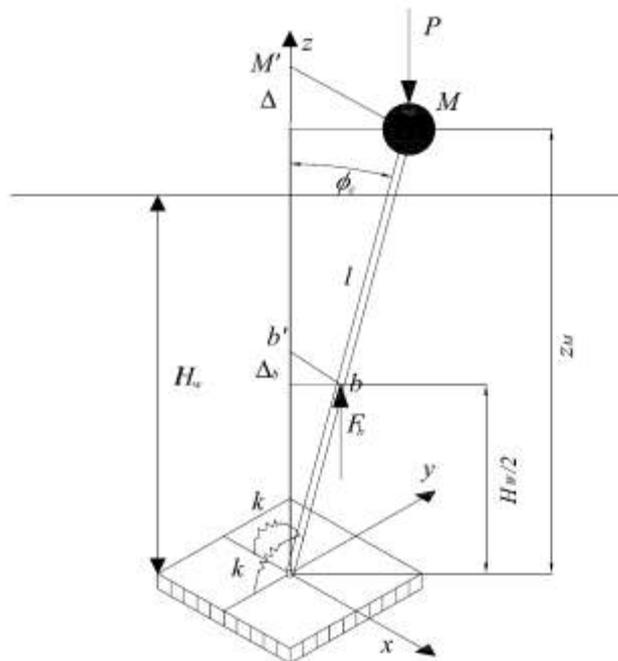


Figura 4-3 Esquema de atuação do empuxo sobre a torre articulada.

Combinando-se as equações (4-15) e (4-24) a (4-25) obtém-se:

$$x_c = z_c \frac{\text{sen}\theta_1}{\cos\phi_c}; \quad y_c = z_c \frac{\text{sen}\theta_2}{\cos\phi_c} \quad (4-26)$$

Substituindo-se as equações (4-22) e (4-24) na expressão (4-23) e utilizando-se as relações dadas pelas equações (4-13), (4-20) e (4-21) o trabalho realizado pela força devido à corrente é igual a:

$$W_c = \frac{1}{8\sqrt{1-\text{sen}^2\theta_1-\text{sen}^2\theta_2}} \rho_w C_D d_0 v_{c0}^2 H_w^2 (\cos\alpha_c \text{sen}\theta_2 + \text{sen}\alpha_c \text{sen}\theta_1), \quad (4-27)$$

A energia potencial devido às cargas externas pode ser obtida, combinando-se as equações (4-6), (4-9), (4-17) e (4-27) na (4-3):

$$V = -gl \left[M + \frac{\pi}{2} \rho_c l (d_0^2 - d_i^2) - \frac{\pi \rho_w d_0^2 H_w^2}{8l(1-\text{sen}^2\theta_1-\text{sen}^2\theta_2)} \right] \\ \left(1 - \sqrt{1-\text{sen}^2\theta_1-\text{sen}^2\theta_2} \right) - \frac{\rho_w C_D d_0 v_{c0}^2 H_w^2}{8\sqrt{1-\text{sen}^2\theta_1-\text{sen}^2\theta_2}} \\ (\cos\alpha_c \text{sen}\theta_2 + \text{sen}\alpha_c \text{sen}\theta_1) \quad (4-28)$$

A energia potencial total é obtida pela substituição das equações (4-2) e (4-28) na eq. (4-1):

$$\Pi = \frac{1}{2} k (\theta_1^2 + \theta_2^2) - gl \left[M + \frac{\pi}{2} \rho_c l (d_0^2 - d_i^2) - \frac{\pi \rho_w d_0^2 H_w^2}{8l(1-\text{sen}^2\theta_1-\text{sen}^2\theta_2)} \right] \\ \left(1 - \sqrt{1-\text{sen}^2\theta_1-\text{sen}^2\theta_2} \right) - \frac{\rho_w C_D d_0 v_{c0}^2 H_w^2}{8\sqrt{1-\text{sen}^2\theta_1-\text{sen}^2\theta_2}} \\ (\cos\alpha_c \text{sen}\theta_2 + \text{sen}\alpha_c \text{sen}\theta_1) \quad (4-29)$$

Utilizando-se o princípio da energia potencial estacionária, a posição de equilíbrio da estrutura sob a ação da corrente é dada pelo par de coordenadas θ_{1s} e θ_{2s} que satisfaz o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = 0 \quad (4-30)$$

4.1.2. Análise dinâmica

A formulação variacional é utilizada nessa seção para obtenção das equações de movimento da torre articulada. O deslocamento da torre articulada pode ser agora descrito em relação à configuração estável de equilíbrio estático,

descrita pelos deslocamentos θ_{1s} e θ_{2s} resultantes da análise estática do problema. As rotações das molas devido a deslocamentos puramente dinâmicos das estruturas podem ser escritas como

$$\theta_i = \theta_{it} - \theta_{is}, \quad (i = 1, 2); \quad (4-31)$$

onde θ_{1t} e θ_{2t} correspondem às rotações totais da estrutura.

A variação de energia potencial total pode ser escrita como:

$$\Delta\Pi = \Pi_t - \Pi_{st} \quad (4-32)$$

onde Π_t é a energia potencial associada aos deslocamentos totais e Π_{st} é a energia potencial devido aos deslocamentos da configuração de equilíbrio estático.

A energia potencial associada aos deslocamentos totais é obtida pela substituição da expressão obtida modificando-se a eq. (4-31):

$$\theta_{it} = \theta_i + \theta_{is}, \quad (i = 1, 2); \quad (4-33)$$

no lugar dos deslocamentos da expressão (4-29), o que resulta em:

$$\begin{aligned} \Pi_t = \frac{1}{2} k [(\theta_1 + \theta_{1s})^2 + (\theta_2 + \theta_{2s})^2] - gl \left\{ M + \frac{\pi}{2} \rho_c l (d_0^2 - d_i^2) - \right. \\ \left. \frac{\pi \rho_w d_0^2 H_w^2}{8l [1 - \text{sen}^2(\theta_1 + \theta_{1s}) - \text{sen}^2(\theta_2 + \theta_{2s})]} \right\} [1 - \\ \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_1 + \theta_{1s}) - \text{sen}^2(\theta_2 + \theta_{2s})}] - \\ \frac{\rho_w C_D d_0 v_{c0}^2 H_w^2}{8\sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_1 + \theta_{1s}) - \text{sen}^2(\theta_2 + \theta_{2s})}} \\ [\cos \alpha_c \text{sen}(\theta_2 + \theta_{2s}) + \text{sen} \alpha_c \text{sen}(\theta_1 + \theta_{1s})] \end{aligned} \quad (4-34)$$

A energia potencial total associada aos deslocamentos estáticos é obtida pela substituição dos valores de θ_{1s} e θ_{2s} na expressão (4-29) o que resulta num valor constante, não interferindo, portanto, na derivação das equações de movimento da torre articulada.

A energia cinética depende somente dos deslocamentos dinâmicos da estrutura e tem três parcelas: uma devido à massa da plataforma (T_M), outra devido à massa da coluna (T_{col}), e uma terceira devido à massa adicionada pelo fato de a estrutura vibrar de modo submerso (T_a). Desse modo a energia cinética total é dada por:

$$T = T_M + T_{col} + T_a \quad (4-35)$$

A energia cinética da plataforma é igual a:

$$T_M = \frac{1}{2} M (\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2) \quad (4-36)$$

onde x_M , y_M e z_M são as coordenadas da plataforma (extremidade da coluna) num instante de tempo t , expressas em função dos ângulos θ_1 e θ_2 de acordo com as equações (4-25) e (4-15), que substituídas na eq. (4-36), resulta em:

$$T_M = \frac{1}{2} M \left\{ \cos^2(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 + \cos^2(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{(1 - \text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2)} \right. \\ \left. [\text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2]^2 \right\} \quad (4-37)$$

A energia cinética da coluna é dada pela expressão:

$$T_{col} = \frac{1}{2} \rho_c \frac{\pi}{4} (d_0^2 - d_i^2) \int_0^l (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dl^* \quad (4-38)$$

onde l^* é uma coordenada axial ao longo da coluna.

As coordenadas x , y e z , podem ser reescritas de modo semelhante às equações (4-25) e (4-15), respectivamente:

$$x = l^* \text{sen} \theta_1; \quad y = l^* \text{sen} \theta_2; \quad z = l^* \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2} \quad (4-39)$$

Substituindo-se as expressões (4-39) na eq. (4-38), e integrando-se o resultado tem-se:

$$T_{col} = \frac{\pi}{24} \rho_c l^3 (d_0^2 - d_i^2) \left\{ \cos^2(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 + \cos^2(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{(1 - \text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2)} \right. \\ \left. [\text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2]^2 \right\} \quad (4-40)$$

A energia cinética devido à massa adicionada é dada de acordo com Kirk e Jain (1978):

$$T_a = \frac{1}{2} \rho_w \frac{\pi}{4} d_0^2 C_A \int_0^l (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2) dl^* \quad (4-41)$$

onde C_A é o coeficiente da massa adicionada, e \dot{x}_n , \dot{y}_n e \dot{z}_n são as componentes normais das velocidades da estrutura.

As componentes dos deslocamentos normais à estrutura são iguais a:

$$x_n = x \cos \theta_1; \quad y_n = y \cos \theta_2; \quad z_n = z \sqrt{\text{sen}^2 \theta_1 + \text{sen}^2 \theta_2} \quad (4-42)$$

Substituindo-se as expressões de (4-42) na eq. (4-41) e utilizando-se as equações (4-39), obtém-se, após a integração:

$$T_a = \frac{\pi}{24} \rho_w d_0^2 l^3 C_A \left\{ \cos^4(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 + \cos^4(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \frac{\text{sen}^2 \theta_1 + \text{sen}^2 \theta_2}{(1 - \text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2)} \right. \\ \left. \left[\text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \right]^2 \right\} \quad (4-43)$$

O trabalho realizado pela força de amortecimento é exercido apenas pelos deslocamentos dinâmicos e é dado por:

$$W_{nc} = \frac{1}{2} c l^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (4-44)$$

onde c é a constante de proporcionalidade do amortecimento viscoso.

O lagrangeano para o sistema considerado é, portanto:

$$L_g = T - \Delta \Pi + W_{nc} \quad (4-45)$$

O funcional de energia não linear J para o pêndulo tem a seguinte forma:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L_g(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, t) dt \quad (4-46)$$

Aplicando-se as técnicas variacionais, obtêm-se o seguinte sistema de equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L_g}{\partial \theta_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_g}{\partial \dot{\theta}_i} \right) = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (4-47)$$

As duas equações de movimento expressas por (4-47) são equações de equilíbrio de momentos, uma em torno do eixo x e outra em torno do eixo y .

Como na seção 3.1 a regra de Cramer é utilizada para reescrever as equações de movimento na forma padrão, ou seja, com os termos de aceleração com coeficientes constantes.

4.1.3. Teoria de ondas

Para inclusão do efeito de ondas na vibração da torre articulada, utiliza-se a equação semi-empírica de Morison para obtenção das forças normais (f_n) numa estrutura esbelta oscilando num fluido com corrente e ondas (Hann e Benaroya, 2000a):

$$\vec{f}_n = \frac{\rho_w}{2} C_D |\vec{v}_r| \vec{v}_r + \frac{\pi}{4} \rho_w d_0^2 C_M \vec{v}_\omega^n \quad (4-48)$$

onde C_M é o coeficiente de inércia, v_r a velocidade relativa entre a estrutura e o fluido e v_ω a velocidade da onda.

A velocidade da onda é obtida por meio da teoria de ondas planas, também chamada de teoria de Airy, onde o perfil η de onda é definido como:

$$\eta(z, t) = \eta_0 \cos(k_\omega z - \omega_\omega t) \quad (4-49)$$

onde η_0 é a amplitude da onda na superfície, k_ω é o número de onda e ω_ω é a frequência da onda, como se pode ver na Figura 4-4.

Para H_w muito profundas, a relação entre a frequência e o número de onda é dada por:

$$\lim_{H_w \rightarrow \infty} \omega^2 = gk_\omega \quad (4-50)$$

As componentes das velocidades da onda são dadas por:

$$v_{\omega x} = \frac{1}{2} \eta_0 \omega \frac{\cosh(k_\omega z)}{\sinh(k_\omega H_w)} \text{sen}(k_\omega z - \omega_\omega t); \quad (4-51)$$

$$v_{\omega y} = 0; \quad (4-52)$$

$$v_{\omega z} = \frac{1}{2} \eta_0 \omega \frac{\cosh(k_\omega z)}{\sinh(k_\omega H_w)} \cos(k_\omega z - \omega_\omega t) \quad (4-53)$$

A velocidade resultante do fluido é dada pela soma das velocidades da onda e da corrente, que em termos das componentes resulta em:

$$v_{resx} = v_{\omega x} + v_{cx}; \quad v_{resy} = v_{\omega y} + v_{cy}; \quad v_{resz} = v_{\omega z} + v_{cz} \quad (4-54)$$

Substituindo-se as expressões (4-18), (4-51) a (4-53) nas expressões (4-54), tem-se:

$$v_{resx} = \frac{1}{2} \eta_0 \omega \frac{\cosh(k_\omega z)}{\sinh(k_\omega H_w)} \text{sen}(k_\omega z - \omega_\omega t) + \frac{v_{c0}}{H_w} z \cos \alpha_c; \quad (4-55)$$

$$v_{resy} = \frac{v_{c0}}{H_w} z \text{sen} \alpha_c; \quad (4-56)$$

$$v_{resz} = \frac{1}{2} \eta_0 \omega \frac{\cosh(k_\omega z)}{\sinh(k_\omega H_w)} \cos(k_\omega z - \omega_\omega t) \quad (4-57)$$

As componentes normais à coluna das velocidades resultantes dos fluidos são obtidas de modo semelhante às equações (4-42):

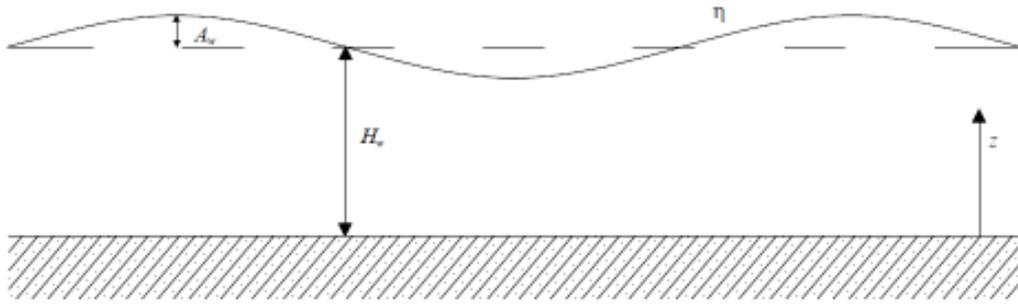


Figura 4-4 Perfil de onda plana.

$$v_{resx}^n = v_{resx} \cos \theta_1; \quad v_{resy}^n = v_{resy} \cos \theta_2; \quad v_{resz}^n = v_{resz} \sqrt{\text{sen}^2 \theta_1 + \text{sen}^2 \theta_2} \quad (4-58)$$

A velocidade relativa normal entre o fluido e a estrutura é dada por:

$$v_{rx}^n = v_{resx}^n - \dot{x}_n; \quad v_{ry}^n = v_{resy}^n - \dot{y}_n; \quad v_{rz}^n = v_{resz}^n - \dot{z}_n \quad (4-59)$$

Combinando-se as equações (4-39), (4-42) e (4-55) a (4-59), obtém-se, após as derivações necessárias:

$$v_{rx} = \left[\frac{1}{2} \eta_0 \omega \frac{\cosh(k_\omega z)}{\sinh(k_\omega H_w)} \text{sen}(k_\omega z - \omega_\omega t) + \frac{v_{c0}}{H_w} z \cos \alpha_c - \right. \quad (4-60)$$

$$\left. l^* \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \right] \text{sen}(\theta_1);$$

$$v_{ry} = \left[\frac{v_{c0}}{H_w} z \text{sen} \alpha_c - l^* \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \right] \text{sen}(\theta_2); \quad (4-61)$$

$$v_{rz} = \left[\frac{1}{2} \eta_0 \omega \frac{\cosh(k_\omega z)}{\sinh(k_\omega H_w)} \cos(k_\omega z - \omega_\omega t) - \right. \quad (4-62)$$

$$\left. \frac{\text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2}{\sqrt{\text{sen}^2(\theta_1) - \text{sen}^2(\theta_2)}} \right] \sqrt{\text{sen}^2 \theta_1 + \text{sen}^2 \theta_2}$$

As componentes normais das velocidades de ondas são escritas de modo semelhante às equações (4-42):

$$v_{\alpha x}^n = \left[\frac{1}{2} \eta_0 \omega \frac{\cosh(k_\omega z)}{\sinh(k_\omega H_w)} \text{sen}(k_\omega z - \omega_\omega t) \right] \text{sen} \theta_1; \quad (4-63)$$

$$v_{\alpha y}^n = 0; \quad (4-64)$$

$$v_{\alpha z}^n = \left[\frac{1}{2} \eta_0 \omega \frac{\cosh(k_\omega z)}{\sinh(k_\omega H_w)} \cos(k_\omega z - \omega_\omega t) \right] \sqrt{\text{sen}^2 \theta_1 + \text{sen}^2 \theta_2} \quad (4-65)$$

Os momentos em torno dos eixos x e y são expressos por (ver Figura 4-2 e Figura 4-3):

$$M_x = \int_0^{l_i} f_{ny} l^* - f_{nz} l^* \text{sen} \theta_2 dl^* ; \quad M_y = \int_0^{l_i} -f_{nx} l^* + f_{nz} l^* \text{sen} \theta_1 dl^* \quad (4-66)$$

onde f_{nx} , f_{ny} e f_{nz} são as forças de fluidos normais à estrutura nas direções x , y e z respectivamente e l_i é o comprimento submerso da coluna num dado instante t , expresso por:

$$l_i = \frac{H_w}{\cos \phi_c} + \eta(z, t); \quad (4-67)$$

Substituindo-se a equações (4-13) e (4-49) na eq. (4-67), obtém-se:

$$l_i = \frac{H_w}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2}} + \eta_0 \cos(k_\omega z - \omega_\omega t); \quad (4-68)$$

Quando a ação das ondas é considerada na formulação, as equações de momento são acrescentadas nas respectivas equações de movimento dadas por (4-47), retirando dessas últimas as forças de arraste da corrente, já inclusas na equação de Morison.

4.1.4. Dados para exemplo numérico

Os exemplos numéricos obtidos nesse capítulo utilizam os parâmetros retirados da literatura (Han e Benaroya, 2000a; 2000b; 2002c e 2002d; Kuchnicki e Benaroya, 2002). Os parâmetros estruturais e as propriedades dos fluidos são mostrados na Tabela 4-1.

4.2. Análise sem corrente

Analisa-se, num primeiro momento, a vibração da estrutura sem a atuação da corrente, de modo a se obter um entendimento básico do comportamento não linear da vibração do sistema. Considerando-se os dados numéricos da Tabela 4-1 e aplicando-se a regra de Cramer e após isso expandindo as equações resultantes em série de Taylor até os termos de quarta ordem, as equações de movimento dadas pelas expressões (4-47) resultam nas seguintes equações não lineares de movimento para vibração livre não amortecida:

Propriedades da Estrutura	
Material	Alumínio
Massa específica da coluna, ρ	2770,000 kg/m ³
Massa da plataforma, M	0,236 kg
Constante torcional da mola, k	38,800 N.m/rad
Comprimento da coluna, l	1,270 m
Diâmetro externo, d_o	0,025 m
Diâmetro interno, d_i	0.022 m

Propriedades do Fluido	
Massa específica da água, ρ_w	999,000 kg/m ³
Lâmina de água, H_w	1,050 m
Velocidade da Corrente, vc_o	0,120 m/s
Amplitude de onda, η_0	0,100 m
Coefficiente de massa adicionada, C_A	1,000
Coefficiente de inércia, C_M	2,000
Coefficiente de arraste, C_D	1,000

Tabela 4-1 Parâmetros numéricos da torre articulada.

$$\ddot{\theta}_1 + 37,768\theta_1 + 33,650\theta_1^3 - 19,799\theta_1\theta_2^2 - 1,451\theta_1\dot{\theta}_1^2 + 0,637\theta_1\dot{\theta}_2^2 + 0,637\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 = 0 ; \quad (4-69)$$

$$\ddot{\theta}_2 + 37,768\theta_2 + 33,650\theta_2^3 - 19,799\theta_2\theta_1^2 - 1,451\theta_2\dot{\theta}_2^2 + 0,637\theta_2\dot{\theta}_1^2 + 0,637\theta_1\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 = 0 \quad (4-70)$$

Observa-se que o sistema de equações (4-69) e (4-70) é desacoplado na parte linear. A simetria do modelo físico se reflete nas equações de movimento, uma vez que as mesmas possuem coeficientes idênticos e resultam nas mesmas equações caso as variáveis θ_1 e θ_2 sejam substituídas uma pela outra. Além disso, as equações de movimento apresentam somente não linearidades cúbicas.

4.2.1. Modos normais lineares

A linearização do sistema formado pelas equações (4-69) e (4-70), resulta no seguinte sistema linear, escrito matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 37,768 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-71)$$

Como o sistema é desacoplado a solução do problema de autovalor generalizado resulta no mesmo caso degenerado do pêndulo invertido sem imperfeições geométricas (ver seção 3.2.1), onde o sistema possui as duas frequências naturais idênticas, e iguais a $\omega_{01,02} = 6,146$ rad/s. Caso sejam desconsiderados os efeitos da massa adicionada e empuxo, as frequências naturais do sistema seriam iguais a 7,305 rad/s, o que demonstra que a mesma estrutura vibrando fora da água possui uma maior rigidez efetiva do que quando o movimento se dá dentro da água.

O sistema é também um caso de autovalor completo, ou seja, todo vetor é um autovetor do sistema. Assim como no caso do pêndulo invertido, a torre articulada na ausência da ação de corrente marinha, apresenta características de simetria que se traduzem em peculiaridades no comportamento dinâmico linear da estrutura. O principal objetivo da próxima seção é o estudo dos efeitos advindos dessa simetria na vibração do sistema não linear.

4.2.2. Modos normais não lineares

A existência de duas frequências de vibração repetidas indica que o sistema é internamente ressonante e o método baseado nas variedades invariantes não pode ser utilizado para obtenção dos modos normais não lineares. Entretanto, o sistema apresenta quatro modos normais não lineares similares. Dois desses modos correspondem a um desacoplamento nos eixos x e y da equações (4-69) e (4-70). O primeiro corresponde unicamente a um movimento no plano xz e por isso é chamado de x -modo e é descrito pela seguinte relação de proporcionalidade:

$$c_{21} = 0 \quad (4-72)$$

O x -modo tem como par mestre as coordenadas generalizadas do primeiro grau de liberdade, e as equações de restrição são escritas como:

$$\theta_1 = u; \quad \dot{\theta}_1 = v \quad (4-73)$$

$$\theta_2 = P(u, v) = 0; \quad \dot{\theta}_2 = Q(u, v) = 0 \quad (4-74)$$

A substituição das relações de (4-73) e (4-74) na eq. (4-69) resulta no seguinte oscilador modal:

$$\ddot{u} + 37,768u + 33,650u^3 - 1,451\dot{u}^2u = 0; \quad (4-75)$$

Observa-se que os sinais dos coeficientes dos termos não lineares da eq. (4-75) são opostos, como o que possui sinal positivo é maior em módulo que o outro termo é esperado que a vibração no modo x apresente ganho de rigidez.

O sistema também pode ser desacoplado no eixo y , de modo que corresponda a um modo cuja vibração se dê exclusivamente no plano yz , por isso chamado de y -modo, expressa pela seguinte relação de proporcionalidade:

$$c_{12} = 0 \quad (4-76)$$

O y -modo tem como par mestre as coordenadas generalizadas do segundo grau de liberdade, e as equações de restrição são escritas como:

$$\theta_2 = u; \quad \dot{\theta}_2 = v; \quad (4-77)$$

$$\theta_1 = P(u, v) = 0; \quad \dot{\theta}_1 = Q(u, v) = 0 \quad (4-78)$$

A substituição das expressões de (4-77) e (4-78) na eq. (4-70) resulta no seguinte oscilador modal para o movimento no y -modo:

$$\ddot{u} + 37,768u + 33,650u^3 - 1,451\dot{u}^2u = 0; \quad (4-79)$$

As equações (4-75) e (4-79) são idênticas, entretanto descrevem movimentos diferentes, a primeira no plano xz e a segunda no plano yz , apresentando, porém, o mesmo comportamento não linear.

Verifica-se, também a existência de outros planos de desacoplamento que não aquele nos eixos das coordenadas físicas do problema. Matematicamente isso se traduz pela obtenção de relações não nulas para as relações de proporcionalidades que caracterizam os modos similares, substituindo-se a seguinte expressão:

$$\theta_2 = c_{21}\theta_1, \quad (4-80)$$

na eq. (4-69).

Os termos lineares são satisfeitos por qualquer valor de c_{21} , já que conforme discutido na seção anterior, todo vetor é um autovetor do sistema. Igualando-se os termos não lineares de ordem cúbica, obtém-se os seguintes valores para a constante de proporcionalidade:

$$c_{21} = \pm 1 \quad (4-81)$$

Os valores da constante c_{21} expressos em (4-81) referem-se a dois autovetores que desacoplam o sistema em dois planos que fazem $\pi/2$ rad entre si. A substituição dos valores da expressão em (4-81) na eq. (4-69) resulta em dois osciladores modais, um para o modo em fase (sinal positivo da constante modal) e outro para o modo fora de fase (sinal negativo da constante modal). No caso do modo em fase a equação do oscilador modal é igual a:

$$\ddot{u} + 37,768u + 13,851u^3 - 0,177\dot{u}^2u = 0 \quad (4-82)$$

Enquanto no caso do modo fora de fase, tem-se:

$$\ddot{u} + 37,768u + 13,851u^3 - 0,177\dot{u}^2u = 0 \quad (4-83)$$

As equações (4-82) e (4-83) são idênticas, uma vez que fisicamente se traduzem num desacoplamento em eixos inclinados a $+\pi/4$ e $-\pi/4$. O movimento descrito por esses modos, porém são diferentes; em fase para o primeiro modo e fora de fase para o segundo. As equações são também semelhantes às expressões (4-75) e (4-79), e as mesmas considerações quanto ao ganho de rigidez durante a vibração do sistema podem ser feitas com relação a esses dois modos.

O gráfico da Figura 4-5 mostra as linhas modais para os modos similares. Observa-se que os modos constituem-se de retas no espaço de configuração, coincidindo, portanto, com os modos lineares.

4.2.3. Multiplicidade de modos

Verifica-se, agora, a existência de modos normais não lineares não similares. Já que o método baseado nas variedades invariantes não pode ser utilizado, uma vez que o sistema apresenta ressonância interna, será utilizado o método baseado na seção de Poincaré para identificação de modos normais não lineares bifurcados.

Como exemplo, são obtidas as seções de Poincaré definidas pelas seguintes expressões:

$$\Sigma_1 = [\theta_2 = 0] \cap [H = h]; \quad \Sigma_2 = [\theta_1 = 0] \cap [H = h] \quad (4-84)$$

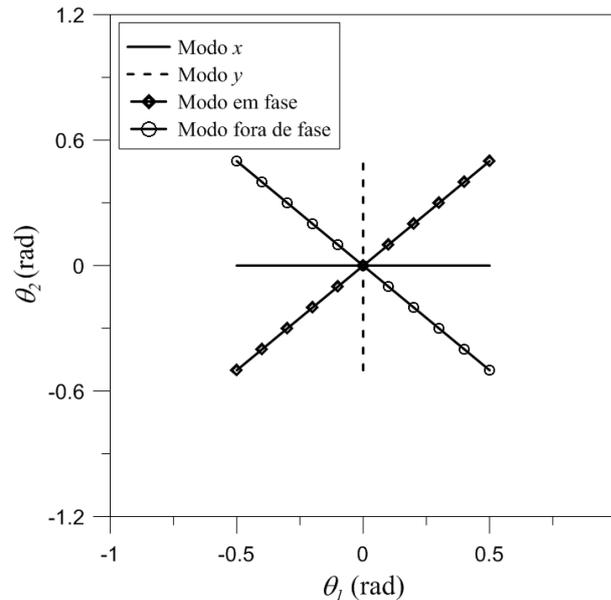


Figura 4-5 Espaço de configuração – modos normais similares.

onde H é o hamiltoniano do sistema, definido como sendo a soma da energia potencial total e da energia cinética do sistema e h uma determinada quantidade de energia, onde na análise aqui realizada é utilizado o valor de referência igual a 50% de h_0 , sendo $h_0=0,202$ J.

A Figura 4-6 mostra as seções para o sistema sem ação da corrente, onde, para o nível de energia utilizado, foi possível a identificação de cinco pontos fixos: três centros (estáveis) e duas selas (instáveis) em cada uma das seções. As coordenadas desses pontos no espaço de quatro dimensões do problema são mostradas na Tabela 4-2. A identificação dos modos originados pelos pontos fixos mostrados na Figura 4-6 é realizada utilizando-se a resposta no tempo. Os mesmos modos surgem com níveis de energia diferente, como mostram as seções da Figura 4-7, porém, com amplitudes maiores à medida que a energia do sistema aumenta.

4.2.4. Resposta no tempo

Para proceder à caracterização dos modos normais não lineares identificados nas seções de Poincaré as equações originais de movimento do sistema são integradas com as coordenadas dos pontos fixos mostradas na Tabela 4-2.

A integração das equações com as condições iniciais iguais às coordenadas do ponto de centro P01 produz os resultados mostrados na Figura 4-8, que revelam

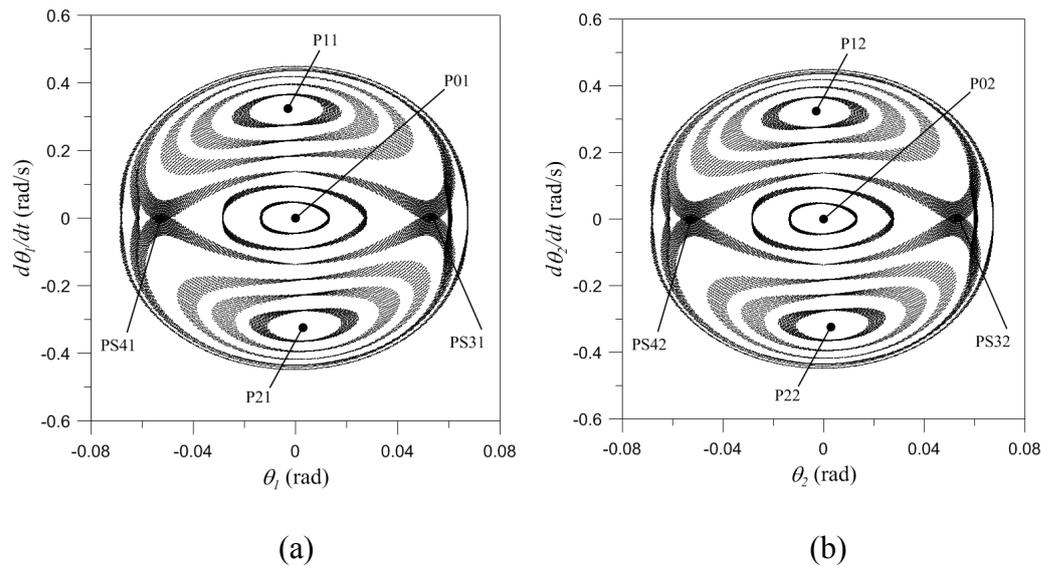


Figura 4-6 Seções de Poincaré: (a) seção Σ_1 ; (b) seção Σ_2 - $h=50\% h_0$.

Ponto	Estabilidade	θ_1 (rad)	$d\theta_1/dt$ (rad/s)	θ_2 (rad)	$d\theta_2/dt$ (rad/s)
P01	Centro	0,000	0,000	0,000	0,457
P11	Centro	-0,001	0,323	0,000	0,324
P21	Centro	0,001	-0,309	0,000	0,337
PS31	Sela	0,053	0,005	0,000	0,322
PS41	Sela	-0,053	-0,005	0,000	0,322
P02	Centro	0,000	0,457	0,000	0,000
P12	Centro	0,000	0,329	-0,002	0,317
P22	Centro	0,000	0,329	0,002	-0,317
PS32	Sela	0,000	0,322	0,053	0,010
PS42	Sela	0,000	0,322	-0,053	-0,010

Tabela 4-2 Coordenadas dos pontos fixos das seções de Poincaré.

que o modo correspondente ao ponto P01 é o mesmo modo similar chamado de y -modo na seção anterior.

De maneira semelhante os modos P02, P11 (P12) e P21 (P22) têm suas respostas no tempo exibidas nas Figura 4-8 e Figura 4-9. Os pontos P11 e P21 representam o mesmo modo em seções de Poincaré diferentes, tal como acontece para os pontos P21 e P22. Observa-se que os modos P11 e P21 são modos similares, com relação constante entre os deslocamentos u_2 e u_1 , correspondendo aos modos em fase e fora de fase determinados na seção 4.2.2.

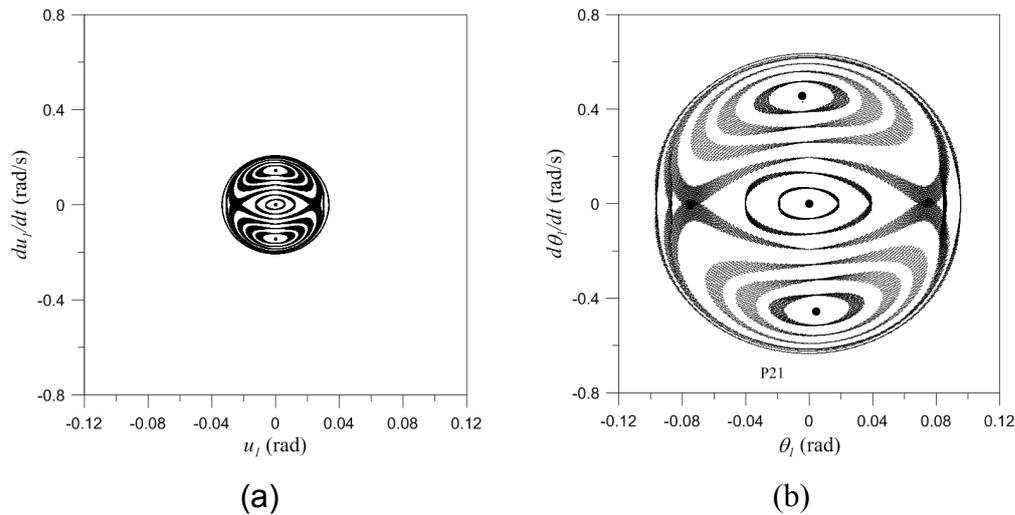


Figura 4-7 Influência da energia nas Seções de Poincaré - Σ_I : (a) 10% h_0 ; (b) 100% h_0 .

Os pontos PS31 e PS32 correspondem ao mesmo modo, bem como os pontos PS41 e PS42, os resultados de integração no tempo para esses modos são mostrados na Figura 4-10. Observa-se que os modos apresentam a mesma projeção no espaço de fase $\theta_2 \times \theta_1$, diferindo apenas na resposta de $\theta_1 \times t$, onde eles aparecem fora de fase entre si; já na resposta $\theta_2 \times t$ eles aparecem em fase.

A Figura 4-10 (a) revela que os modos são não similares, já que a projeção no espaço de fase não é uma reta e sim uma curva. Outro fato importante é que a curva da projeção no espaço de fase é fechada, indicando que há um acoplamento entre os graus de liberdade. Desse modo, o método das variedades invariantes não pode ser utilizado para encontrar esses modos, uma vez que a invariância do método seria violada por esses acoplamentos.

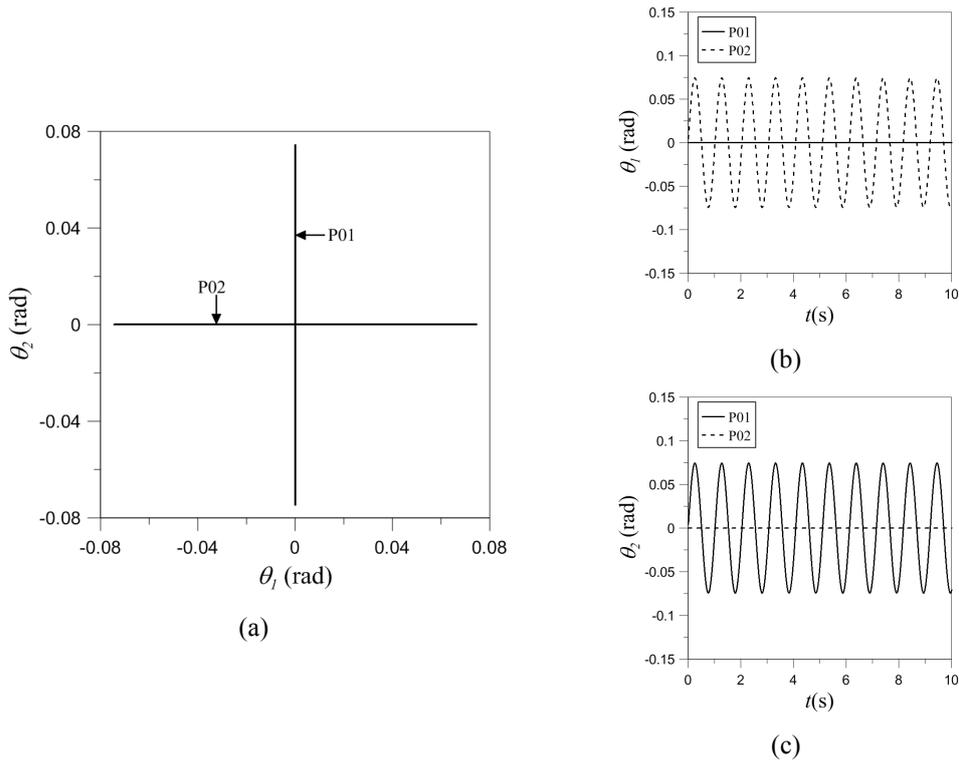


Figura 4-8 Resposta no tempo para os modos P01 e P02: (a) projeção $\theta_2 \times \theta_1$; (b) $\theta_1 \times t$; (c) $\theta_2 \times t$.

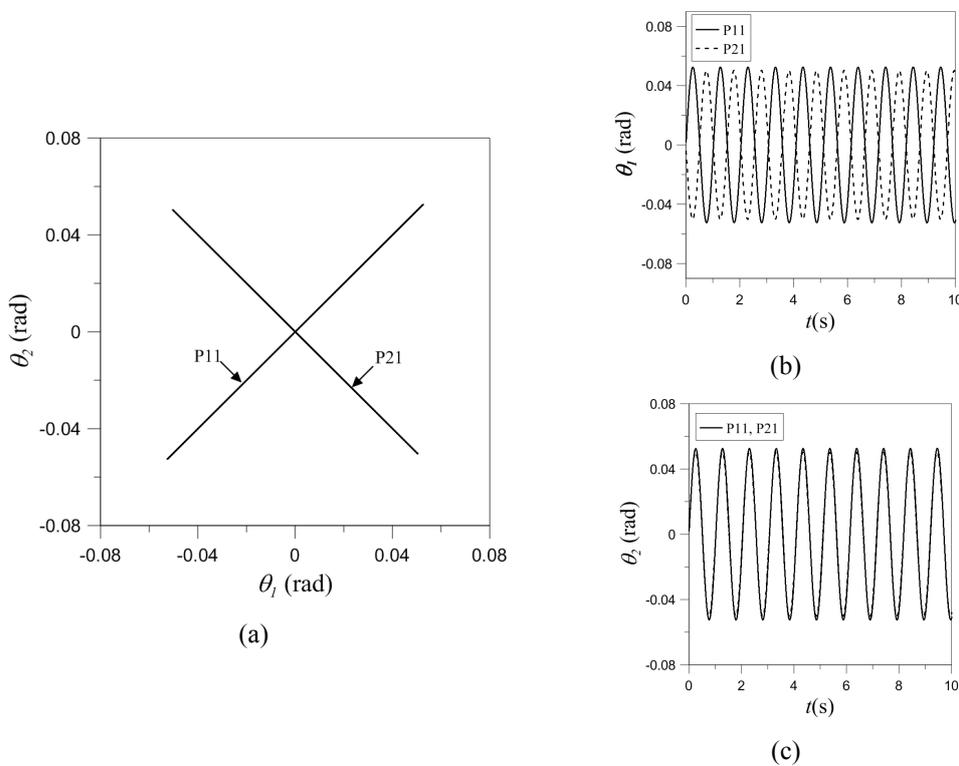


Figura 4-9 Resposta no tempo para os modos P11 (P12) e P21 (P22): (a) projeção $\theta_2 \times \theta_1$; (b) $\theta_1 \times t$; (c) $\theta_2 \times t$.

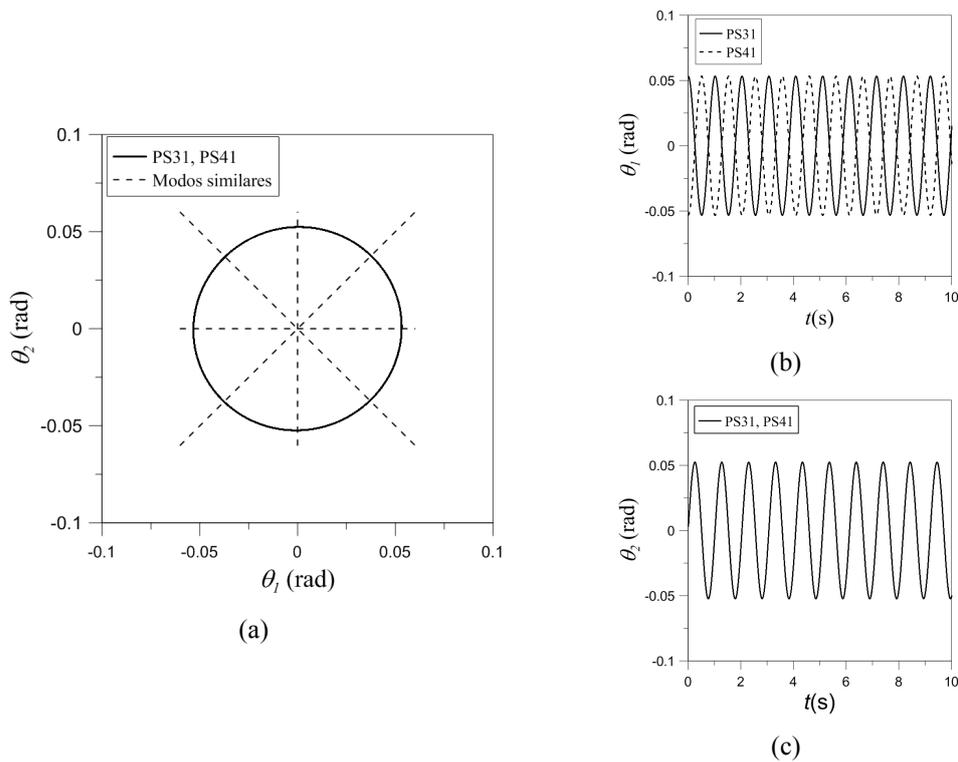


Figura 4-10 Resposta no tempo para modo PS31 (PS32) e PS41 (PS42): (a) projeção $\theta_2 \times \theta_1$; (b) $\theta_1 \times t$; (c) $\theta_2 \times t$.

Os modos instáveis PS31 e PS41 por não obedecerem à definição de Rosenberg (1966) são chamados de modos não lineares não clássicos. Por não serem tangentes aos modos lineares esses modos também não seguem a definição baseada nas variedades invariantes. A projeção no espaço de fase dos modos similares é plotada junto dos modos não similares da Figura 4-10 (a) de modo a evidenciar o papel das retas modais dos modos similares como eixos de simetria em relação ao movimento não similar dos demais modos. Observa-se também que a relação entre os dois graus de liberdade no espaço de configuração corresponde a uma circunferência, e embora uma coordenada não possa ser escrita em função da outra, essa geometria indica que o sistema pode ser parametrizado, e como consequência ter a sua ordem reduzida, em função de uma terceira variável u definida pelas seguintes relações:

$$\theta_1 = r \operatorname{sen}(u), \quad \dot{\theta}_1 = r \cos(u) \dot{u} \quad (4-85)$$

$$\theta_2 = r \cos(u), \quad \dot{\theta}_2 = -r \operatorname{sen}(u) \dot{u} \quad (4-86)$$

Para a quantidade de energia considerada, r é igual a 0,053. Substituindo-se as equações (4-85) e (4-86) na eq. (4-69), obtém-se o seguinte oscilador modal não linear em termos da variável u :

$$\ddot{u} + \frac{1}{\cos u + \sin u} \left[-37,826 \cos u - 0,038 \cos(3u) - 0,002 \cos(3u) \dot{u}^2 \right] = 0 \quad (4-87)$$

Ainda que o oscilador modal definido pela eq. (4-87) seja mais complexo que os demais osciladores obtidos para os modos similares, ele é vantajoso no sentido que se obtém uma redução de ordem do sistema para a vibração da estrutura num modo essencialmente não linear que pode ser tratada mais facilmente que o sistema original de equações, e mesmo assim mantendo os efeitos do acoplamento entre os dois graus de liberdade. A comparação entre a solução por integração numérica das equações originais de movimento (solução de referência) e a solução obtida pela integração numérica do modelo reduzido expresso pela eq. (4-87) pode ser vista na Figura 4-11. Como não é possível obter a correção não linear da transformação modal, uma vez, que as séries de potência das funções de restrição não podem ser escritas para os modos bifurcados, utiliza-se somente a matriz linear M_0 . Entretanto, observa-se que para o nível de energia considerado, há boa concordância entre os dois resultados.

4.2.5. Relação frequência-amplitude

As curvas de ressonância são obtidas com o uso do método do balanço harmônico, assumindo-se a seguinte expressão para os osciladores modais:

$$u(t) = X_1 \cos(\omega t) \quad (4-88)$$

As relações frequência-amplitude para os modos similares desacoplados (P01 e P02) e acoplados (P11 e P21) são iguais a, onde $\Omega = \omega/\omega_0$:

$$\Omega^2 = \frac{1 + 0,668X_1^2}{1 + 0,363X_1^2}; \quad \Omega^2 = \frac{1 + 0,275X_1^2}{1 + 0,044X_1^2} \quad (4-89)$$

Ambas as equações (4-89) representam relações de ganho de rigidez com o aumento da frequência de vibração do sistema, o que pode ser visto na Figura 4-12 (a) para os modos similares desacoplados e na Figura 4-12 (b) para os modos similares acoplados. Junto das soluções obtidas dos modelos reduzidos, foram plotados pontos referentes às soluções numéricas das equações originais utilizando o método numérico com as equações levemente amortecidas. Para os modos similares P01 e P02 as coordenadas físicas e modais são as mesmas, uma vez que os eixos de desacoplamento do sistema correspondem aos eixos do problema físico. No caso dos modos similares acoplados (P11 e P21) foi utilizada a seguinte transformação entre coordenadas modais $\{w\}$ e físicas $\{\theta\}$:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \dot{w}_1 \\ w_2 \\ \dot{w}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,000 & 1,000 & 0,000 \\ 0,000 & 1,000 & 0,000 & 1,000 \\ 1,000 & 0,000 & -1,000 & 0,000 \\ 0,000 & 1,000 & 0,000 & -1,000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (4-90)$$

Observa-se da Figura 4-12 (a) e da Figura 4-12 (b) a validade da expansão das equações originais em série de Taylor para obtenção dos modelos reduzidos. Para valores de rotação pouco menores que a unidade, a solução numérica e o modelo reduzido apresentam boa concordância entre si.

A variação da amplitude do sistema com a frequência de vibração no caso de movimento nos modos normais não lineares indica também que a energia do sistema varia com a frequência. Esse fato pode ser comprovado, a partir das relações frequência-amplitude (4-89), escrevendo-se as amplitudes de movimento em função do parâmetro de frequência, Ω :

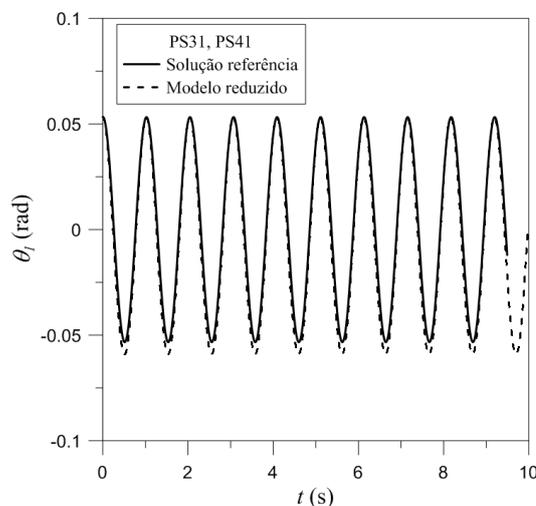


Figura 4-11 Resposta no tempo, comparação entre a solução de referência e modelo reduzido – modos PS31 e PS41.

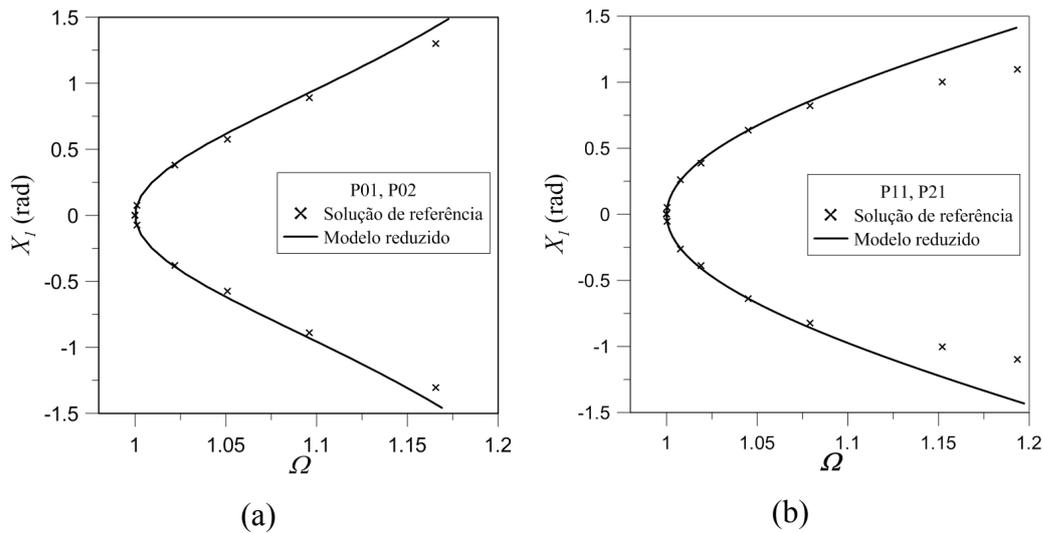


Figura 4-12 Curvas frequência-amplitude: (a) modos similares desacoplados; (b) modos similares acoplados.

$$X_1 = \sqrt{\frac{\Omega^2 - 1}{-0,668 + 0,363\Omega^2}}; \quad X_2 = \sqrt{\frac{\Omega^2 - 1}{-0,275 + 0,044\Omega^2}}; \quad (4-91)$$

Como a energia do sistema não se modifica com o tempo, obtêm-se os deslocamentos, combinando-se as equações (4-88) e (4-91), para $t=0$, e substituem-se as expressões obtidas na equação (4-32) que expressa a energia potencial total do sistema. Para as coordenadas escravas utilizam-se as equações de restrição para cada uma das variedades invariantes. O resultado para os modos similares pode ser visto na Figura 4-13, onde uma escala logarítmica de base dez é empregada para o eixo das abcissas referente ao nível de energia. Da Figura 4-13 observa-se que ao contrário dos modos lineares, a energia do sistema, vibrando nos modos normais não lineares, varia, aumentando, no caso do sistema com ganho de rigidez, à medida que a frequência aumenta.

4.2.6. Espaço de fase

A configuração do espaço de fase para os modos similares é obtida comparando-se os resultados do modelo reduzido obtido pelo emprego dos modos normais não lineares e também da integração do sistema de equações originais. Nesses diagramas as linhas contínuas correspondem às órbitas obtidas da integração numérica das equações originais de movimento do sistema, enquanto as linhas pontilhadas são obtidas pela integração do modelo reduzido. São

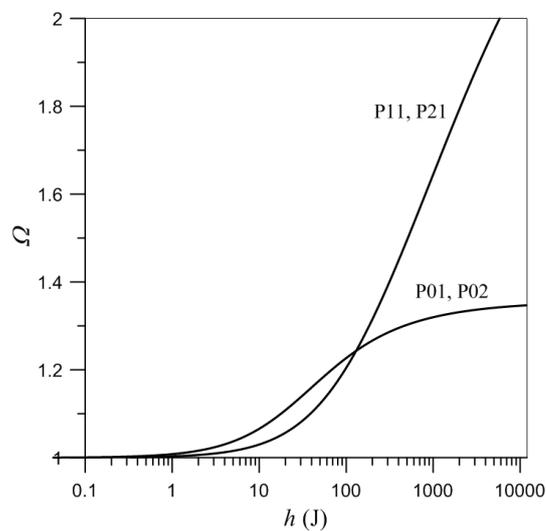


Figura 4-13 Curvas de frequência-energia para os modos similares.

utilizadas as transformações entre coordenadas físicas e modais discutidas na seção 4.2.5.

Os resultados para os modos similares desacoplados, P01 e P02 são mostrados na Figura 4-14 (a), enquanto para os modos similares acoplados são mostrados na Figura 4-14 (b). Observa-se que ambos os planos apresentam trajetórias elípticas em torno da origem. Além disso, assim como para as curvas de ressonância, as soluções do modelo reduzido e das equações originais apresentam boa concordância até rotações pouco menores que 1,000 rad (X^*).

4.2.7. Vibração forçada

Como a teoria de ondas planas leva a expressões complexas que dificultam o estudo analítico e paramétrico da vibração forçada, é muito comum que o caso da vibração harmônica seja utilizado como estudo preliminar do problema (Hann e Benaroya, 2002a). Esta abordagem é muito útil para que o projetista obtenha um entendimento básico do comportamento da dinâmica forçada dos sistemas offshore.

Assim considera-se a ação de uma onda, de modo conceitual, modelada como uma carga harmônica transversal à torre e uniformemente distribuída sobre a torre articulada, com frequência ω , expressa por:

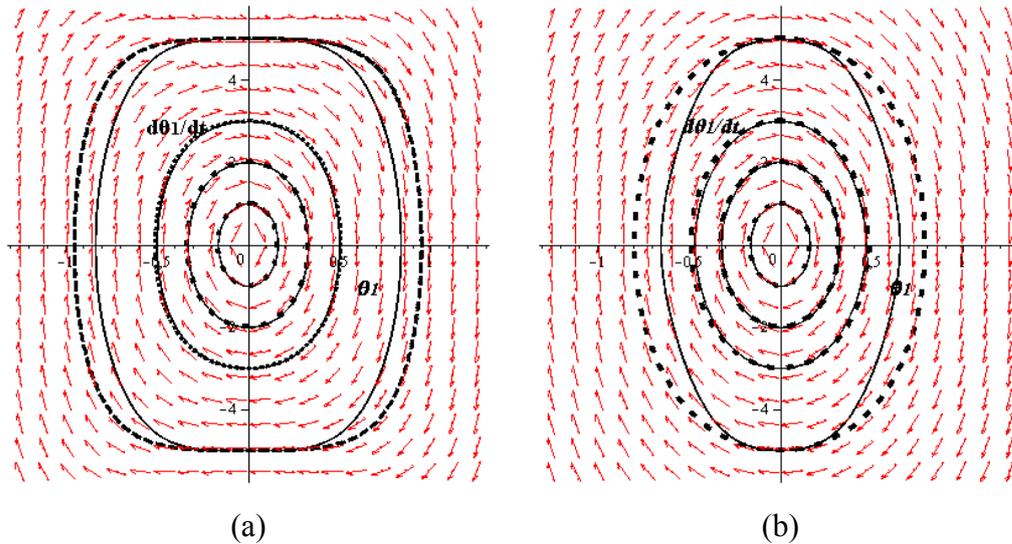


Figura 4-14 Espaço de fase: (a) modos P01 e P02; (b) modos P11 e P21. Linhas contínuas – solução de referência; linhas pontilhadas – modelo reduzido.

$$F = F_0 \cos(\omega t) \quad (4-92)$$

onde F_0 é a amplitude da força externa.

De acordo com Hann e Benaroya (2000-b) a fim de se obterem rotações pequenas o suficiente, o que é importante para que se possam utilizar os modos não lineares não forçados na análise forçada, a amplitude da onda deva ser da ordem aproximada do momento causado pelo peso da massa deslocada pela estrutura durante o movimento, ou seja:

$$F_0 = f_0 V_w \rho_w g \frac{H_w}{2} \quad (4-93)$$

onde f_0 é um parâmetro adimensional de controle da amplitude de carga e V_w é um dado volume de água deslocado pela estrutura considerado pela análise, dado por:

$$V_w = \frac{\pi}{4} d_0^2 H_w \quad (4-94)$$

Deve-se dividir a expressão (4-93), para consistência de unidades, pela massa equivalente do sistema:

$$F_0^* = \frac{F_0}{M_{eq}} \quad (4-95)$$

onde a massa equivalente é dada por:

$$M_{eq} = ml^2 + \frac{\pi}{12} l^3 [\rho_w C_A d_0^2 + \rho_c (d_0^2 - d_i^2)] \quad (4-96)$$

Para os dados numéricos da Tabela 4-1 o valor resultante para a amplitude F_0^* é igual a $0,550 \text{ rad.s}^{-2}$ para $f_0=1,905$ que é usado como valor de referência, de modo que o seguinte parâmetro adimensional de carga é definido para facilitar as análises:

$$\Gamma = \frac{F_0^*(f_0)}{F_0^*(f_0 = 1,905)} = \frac{f_0 V_w \rho_w g H_w / (2Meq)}{1,905 V_w \rho_w g H_w / (2Meq)} = \frac{f_0}{1,905} \quad (4-97)$$

Além disso, pequenas quantidades de amortecimento proporcional são adicionadas aos osciladores modais correspondentes às equações (4-75), (4-82) e (4-87), que resultam nas seguintes equações de movimento forçadas e amortecidas, para os modos similares desacoplados, acoplados e para os modos não similares, respectivamente:

$$\ddot{u} + 37,768 u + 2\omega_0 \xi \dot{u} + 33,650 u^3 - 1,451 \dot{u}^2 u = F_0^* \cos(\omega t) \quad (4-98)$$

$$\ddot{u} + 37,768 u + 2\omega_0 \xi \dot{u} + 13,851 u^3 - 0,177 \dot{u}^2 u = F_0^* \cos(\omega t) \quad (4-99)$$

$$\ddot{u} + \frac{1}{\cos u + \sin u} [-37,826 \cos u - 0,038 \cos(3u) - 0,002 \cos(3u) \dot{u}^2] = F_0^* \cos(\omega t) \quad (4-100)$$

O método do balanço harmônico é utilizado com a seguinte solução aproximada:

$$u = X_1 \cos(\omega t) + X_2 \sin(\omega t) \quad (4-101)$$

Para os modos similares desacoplados, substituindo-se a expressão (4-101) na eq.(4-98), utilizando-se as relações trigonométricas do Anexo I e agrupando os termos dos primeiros harmônicos de cosseno e seno, tem-se o seguinte sistema de equações algébricas:

$$12,291 \xi \omega X_2 + [37,768 + 10,389 X^{*2} - (1 + 0,044 X^{*2}) \omega^2] X_1 = F_0^* \quad (4-102)$$

$$-12,291 \xi \omega X_1 + [37,768 + 10,389 X^{*2} - (1 + 0,044 X^{*2}) \omega^2] X_2 = 0 \quad (4-103)$$

onde X^* é dado pela seguinte relação:

$$X^* = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad (4-104)$$

Elevando as equações (4-103) e (4-104) ao quadrado e adicionando-as, obtém-se a seguinte relação frequência-amplitude para o sistema forçado amortecido:

$$\left\{ (12,291 \xi \omega)^2 + \left[37,768 + 10,389 X^{*2} - (1 + 0,044 X^{*2}) \omega^2 \right]^2 \right\} X^{*2} = F_0^{*2} \quad (4-105)$$

A eq. (4-105) pode ser utilizada para obtenção das curvas de ressonância dos modos similares P01 e P02, bem como da análise paramétrica referente ao amortecimento mostrada na Figura 4-15 (a) e à amplitude da carga, mostrada na Figura 4-15 (b). O parâmetro de frequência adimensional Ω é definido pela razão entre a frequência da carga externa ω e a frequência natural do sistema ω_0 . A estabilidade foi determinada utilizando-se a teoria dos multiplicadores de Floquet. Observa-se a existência do salto dinâmico nas curvas que também apresentam ganho de rigidez. Observa-se ainda que o salto dinâmico é sensível ao aumento do amortecimento e à diminuição da amplitude da carga externa. Observam-se resultados semelhantes para os modos similares estáveis P11 e P21 na Figura 4-16 (a) para o efeito do amortecimento e na Figura 4-16 (b) para o efeito da amplitude da carga externa.

A integração numérica no tempo das equações de movimento dos osciladores modais forçados permite a obtenção das órbitas no plano de fase, tanto no regime transiente quanto no permanente. Os resultados, utilizando-se um valor de frequência na região do salto dinâmico, para os modos similares desacoplados e acoplados são apresentados respectivamente na Figura 4-17 e Figura 4-18. Observa-se que todos os modos similares apresentam resultados bem semelhantes e que a seção de Poincaré, se reduz a um ponto no regime permanente, correspondendo a uma órbita periódica de período único, igual ao da carga externa.

O plano de fase para a vibração forçada amortecida dos modos não similares PS31 e PS41 é mostrado na Figura 4-19. Observa-se que as órbitas se repetem periodicamente em função do caráter paramétrico das equações de restrição utilizadas para obtenção do modelo reduzido. Desse modo as condições iniciais escolhidas para integração resultarão em órbitas diferentes no plano de fase do modelo reduzido, enquanto corresponderão a órbitas iguais no plano de fase do modelo original em função das equações (4-85) e (4-86).

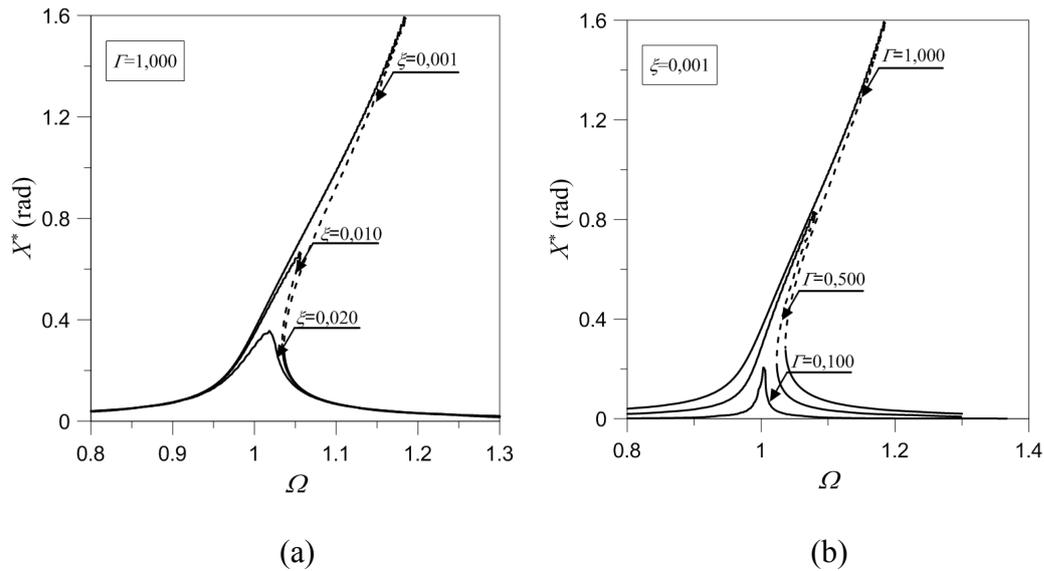


Figura 4-15 Curvas de ressonância – modos P01 e P02: (a) efeito do amortecimento; (b) efeito da amplitude da carga externa. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.

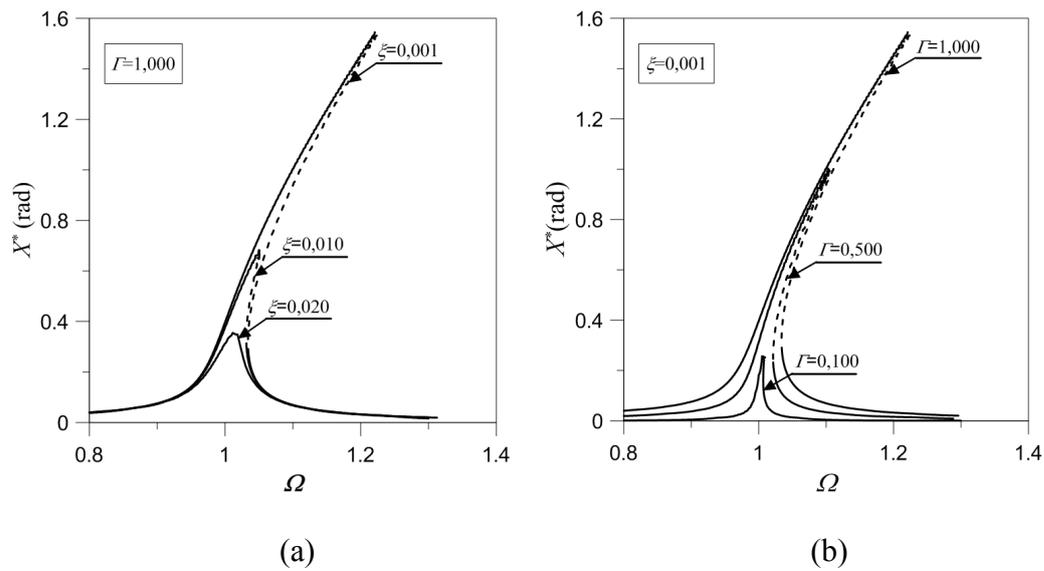


Figura 4-16 Curvas de ressonância – modos P11 e P21: (a) efeito do amortecimento; (b) efeito da amplitude da carga externa. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.

A análise da vibração forçada dos modelos de ordem reduzida, obtidos utilizando-se os modos normais não lineares, é obtida pela excitação dos osciladores modais, desprezando-se a ativação de outros modos.

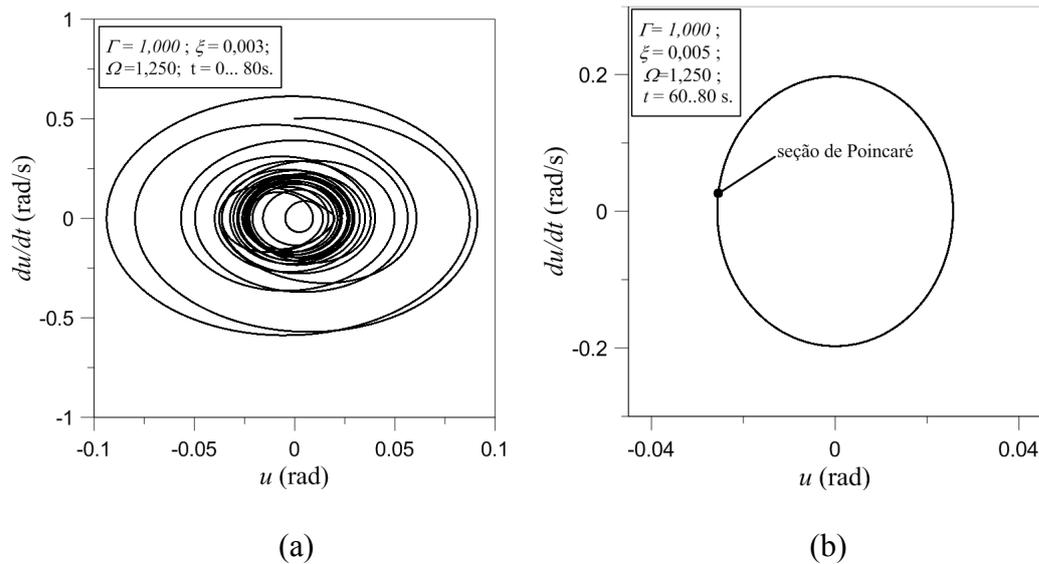


Figura 4-17 Plano de fase para vibração forçada amortecida – modos P01 e P02 – $u(t=0)=0,0$ rad; $du/dt(t=0)=0,5$ rad/s: (a) resposta transiente; (b) resposta permanente.

Entretanto, uma das propriedades da análise modal não linear é que a ressonância ocorrer na vizinhança dos modos (Shaw e Pierre, 1999; Pesheck, 2000). Essa característica pode ser observada pela obtenção das curvas de ressonância a partir das equações originais de movimento, considerando-se a ação de uma força externa harmônica sobre a massa da plataforma, cuja direção faz um ângulo γ com o eixo x , desse modo as parcelas das forças atuando na direção x e y são respectivamente:

$$F_x = \Gamma \cos(\gamma) \cos(\omega t); F_y = \Gamma \sin(\gamma) \cos(\omega t); \quad (4-106)$$

As curvas de ressonância para alguns valores de γ , obtidas pelo método do balanço harmônico e do comprimento de arco são mostradas na Figura 4-20 em conjunto com as relações frequência-amplitude dos osciladores modais não lineares na vibração livre. Observa-se que os modos normais não lineares descrevem adequadamente o comportamento dinâmico global do sistema estrutural possibilitando a exploração e o estudo sistemático da dinâmica do sistema.

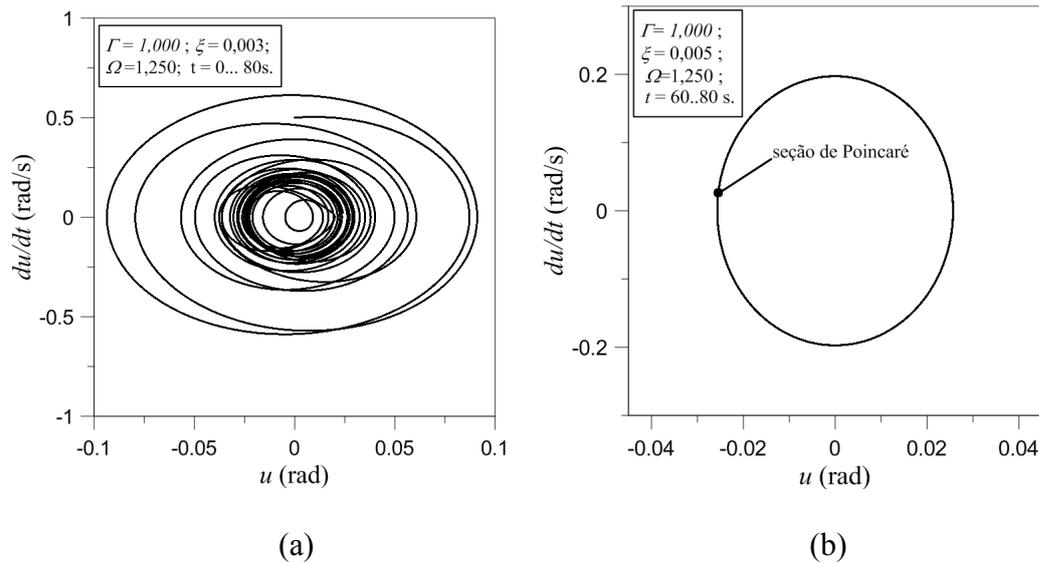


Figura 4-18 Plano de fase para vibração forçada amortecida – modos P11 e P21 – $u(t=0)=0,0$ rad; $du/dt(t=0)=0,5$ rad/s: (a) resposta transiente; (b) resposta permanente.

4.2.8. Diagramas de bifurcação

Os diagramas de bifurcação, tomando-se $\Omega=1,300$ e $\xi=0,001$ são obtidos para os modos similares desacoplados e são mostrados na Figura 4-21. Os diagramas revelam uma bifurcação supercrítica do tipo tridente (pitchfork) onde uma solução inicial única bifurca em três soluções: duas estáveis (P1 e P2) e uma instável (P3 e P4). A bifurcação acontece para um valor de $\Gamma=1,270$ e com um pequeno aumento da amplitude da onda todos os ramos de soluções perdem sua estabilidade. As coordenadas dos pontos assinalados na Figura 4-21 são mostradas na Tabela 4-3.

As órbitas e as respectivas seções de Poincaré correspondentes aos pontos P1, P2 e P3 da Tabela 4-3 são obtidas pela integração numérica pelo método de Runge Kutta de quarta ordem dos osciladores modais tendo como condições iniciais as coordenadas dos respectivos pontos; os resultados são mostrados na Figura 4-22, mostrando órbitas fechadas e axissimétricas em relação ao eixo das velocidades.

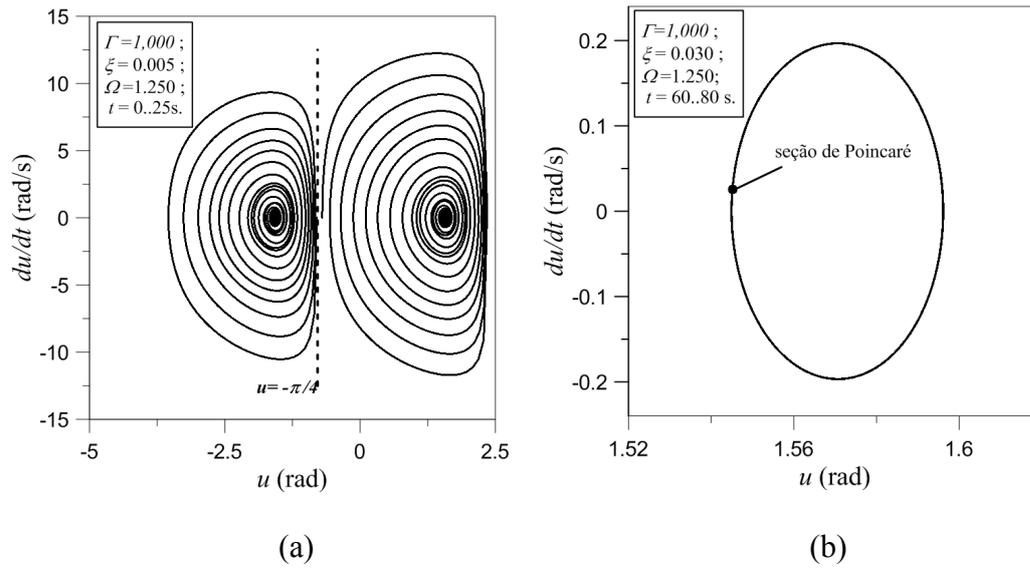


Figura 4-19 Plano de fase para vibração forçada amortecida – modos PS31 e PS41:
 (a) Resposta transitória - $u(t=0)=-0,7$ rad; $du/dt(t=0)=0,0$ rad/s e $u(t=0)=-0,8$ rad; $du/dt(t=0)=0,0$ rad/s; (b) resposta permanente - $u(t=0)=-0,8$ rad; $du/dt(t=0)=0,0$ rad/s.

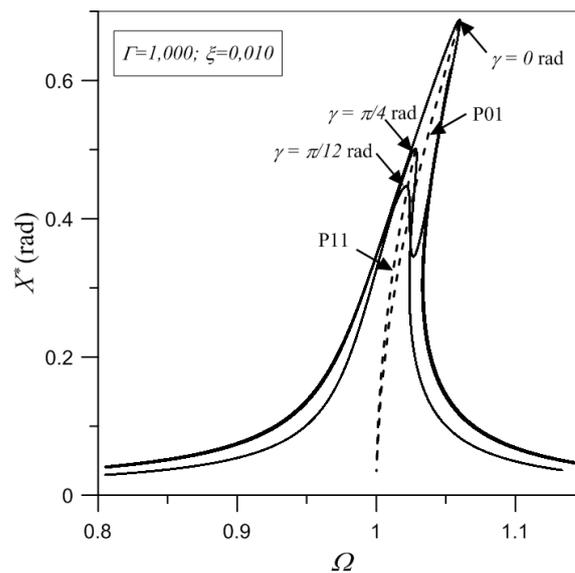


Figura 4-20 Curvas de ressonância - influência do ângulo γ .

Para os modos similares acoplados, P11 e P21 os diagramas de bifurcação são mostrados na Figura 4-23, onde os valores $\Omega=1,300$ e $\xi=0,001$ foram utilizados como exemplo numérico. Observa-se nos diagramas a ocorrência de uma bifurcação do tipo nó-sela, onde para os valores de $\Gamma < 0,532$ (P4) existem duas soluções: uma estável (P1) e outra instável (P2). Para valores de $\Gamma > 0,532$ (P4), como por exemplo, o ponto P3, não existem soluções que satisfaçam esses modos de vibração. As coordenadas dos pontos assinalados na Figura 4-23 são mostradas na Tabela 4-4.

As órbitas e as respectivas seções de Poincaré correspondentes aos pontos

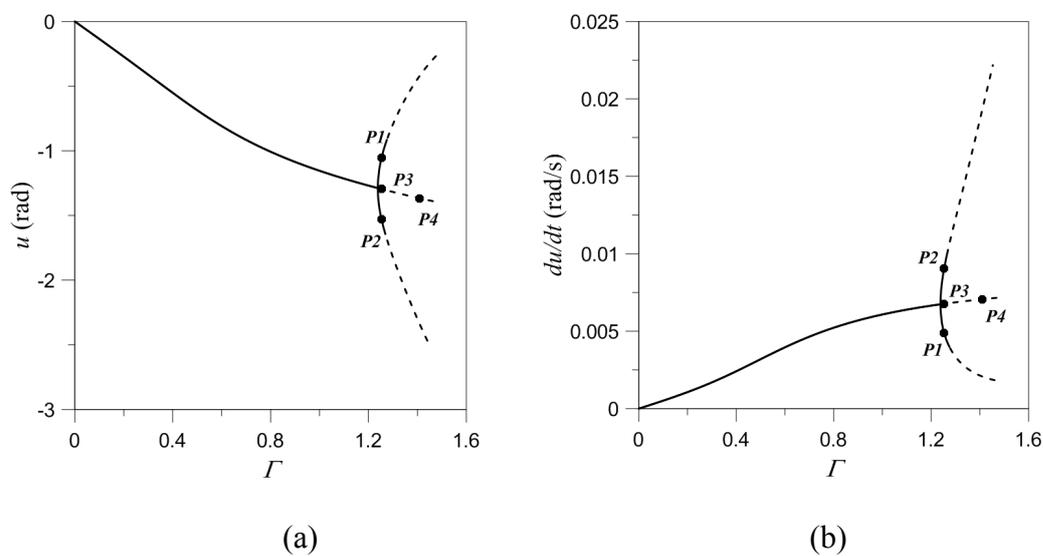


Figura 4-21 Diagrama de bifurcação – modos P01 e P02 - $\Omega=1,300$ e $\xi=0,001$: (a) rotações; (b) velocidades rotacionais. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.

Ponto	Γ	u (rad)	du/dt (rad/s)
P1	1,253	-1,054	0,005
P2	1,253	-1,530	0,009
P3	1,253	-1,296	0,007
P4	1,410	-1,367	0,007

Tabela 4-3 Coordenadas dos pontos dos diagramas de bifurcação da Figura 4-21.

P1 e P2 da Tabela 4-4 são obtidas pela integração numérica da equação do oscilador modal forçado. As condições iniciais utilizadas são as coordenadas dos respectivos pontos, os resultados são mostrados na Figura 4-24. Observa-se que as órbitas, apesar de terem o mesmo valor de amplitude de onda, os deslocamentos e velocidades possuem magnitudes bem diferentes entre os dois pontos, sendo que a órbita instável P2 tem magnitude maior que a órbita estável P1.

4.2.9. Estabilidade

A análise paramétrica da estabilidade da solução dos osciladores modais dos modos similares pode ser obtida com os diagramas de Mathieu do tipo amortecido. Aplicando-se a técnica de Mathieu às equações (4-98) e (4-99) obtêm-se as seguintes desigualdades indicando as regiões de estabilidade:

$$\left(\frac{0,250}{\Omega^2} + \frac{0,334X^{*2}}{\Omega^2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{0,028X^{*4}}{\Omega^4} + \frac{0,250\xi^2}{\Omega^2} > 0; \quad (4-107)$$

$$\left(\frac{0,250}{\Omega^2} + \frac{0,138X^{*2}}{\Omega^2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{0,005X^{*4}}{\Omega^4} + \frac{0,250\xi^2}{\Omega^2} > 0 \quad (4-108)$$

A Figura 4-25 (a) e (b) mostram os diagramas de estabilidade para os modos similares desacoplados e acoplados respectivamente em termos da amplitude - X^* e da frequência - Ω do movimento para vários fatores de amortecimento. Para ambos os resultados os domínios de estabilidade são reduzidos à medida que o fator de amortecimento decresce. Combinando-se as equações (4-105) e (4-107) pode-se obter a fronteira de estabilidade em termos do parâmetro de amplitude da carga externa, Γ , mostrado na Figura 4-26 (a) e na Figura 4-26 (b) para os modos similares P01 e P11, respectivamente. Na Figura 4-26 (a) mostra-se, também, o ponto de bifurcação, P3, do diagrama da Figura 4-21, enquanto na Figura 4-26 (b) mostra-se o ponto P4 referente ao diagrama da Figura 4-23. Observa-se que as regiões instáveis (áreas hachuradas) tornam-se maiores na região de ressonância, e que há boa correlação entre os pontos de perda de estabilidade dos diagramas de bifurcação e as fronteiras de estabilidade no diagrama de Mathieu.

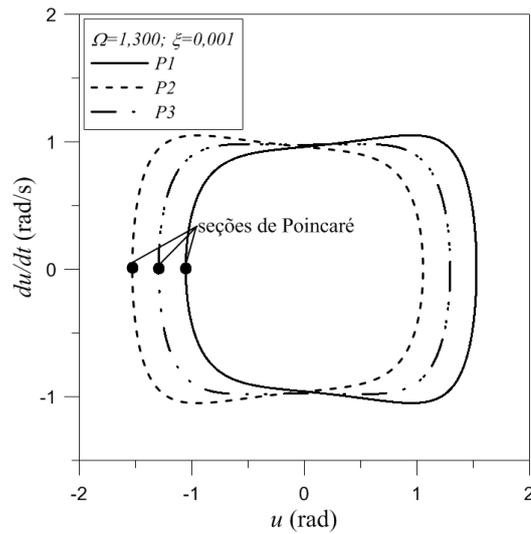


Figura 4-22 Órbitas no plano de fase e seções de Poincaré para os pontos da Figura 4-21.

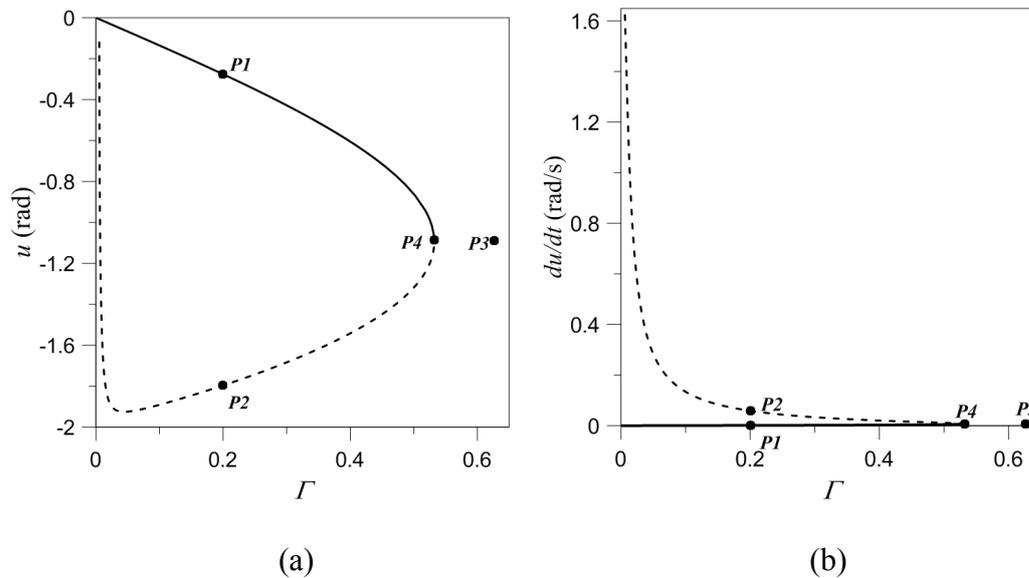


Figura 4-23 Diagrama de bifurcação – modos P11 e P21 - $\Omega=1,300$ e $\xi=0,001$: (a) rotações; (b) velocidades rotacionais. Ramos estáveis – linha contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.

Ponto	Γ	u (rad)	du/dt (rad/s)
P1	0,200	-0,276	0,001
P2	0,200	-1,797	0,059
P3	0,627	-1,009	0,007

Tabela 4-4 Coordenadas dos pontos dos diagramas de bifurcação da Figura 4-23.

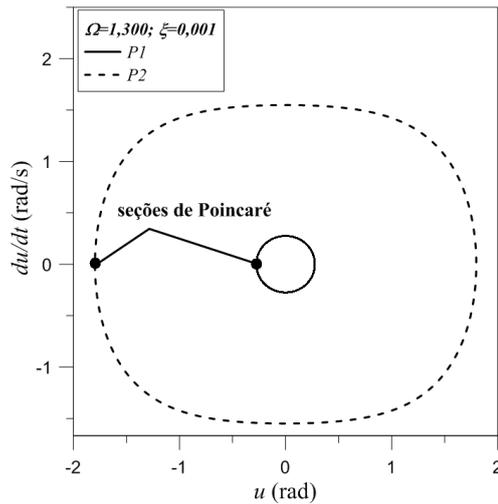


Figura 4-24 Órbitas no plano de fase e seções de Poincaré para os pontos da Figura 4-23.

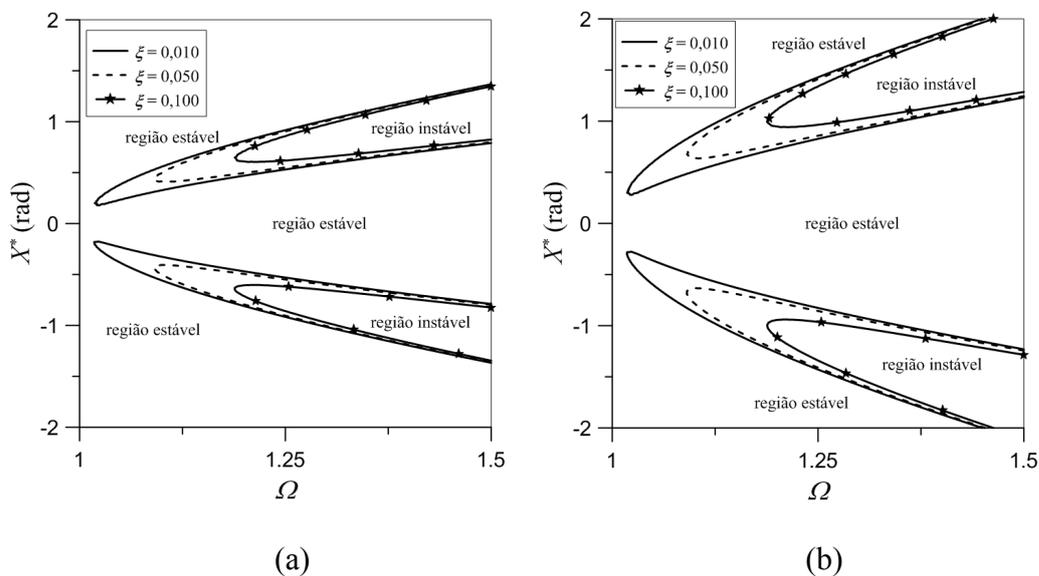


Figura 4-25 Influência do amortecimento no diagrama de estabilidade de Mathieu: (a) modos P01 e P02; (b) modos P11 e P12.

Além do método analítico obtido pelo uso dos diagramas de estabilidade de Mathieu, pode-se também analisar a estabilidade das soluções por meio da integração numérica das equações de movimento. Os modos P01 e P02 correspondem às soluções desacopladas nos eixos físicos da torre articulada. A estabilidade da solução obtida pelo modelo reduzido referente ao oscilador expresso pela eq. (4-98) é numericamente analisada pela integração das equações originais com as condições iniciais para θ_2 e $d\theta_2/dt$ correspondentes ao ponto P4

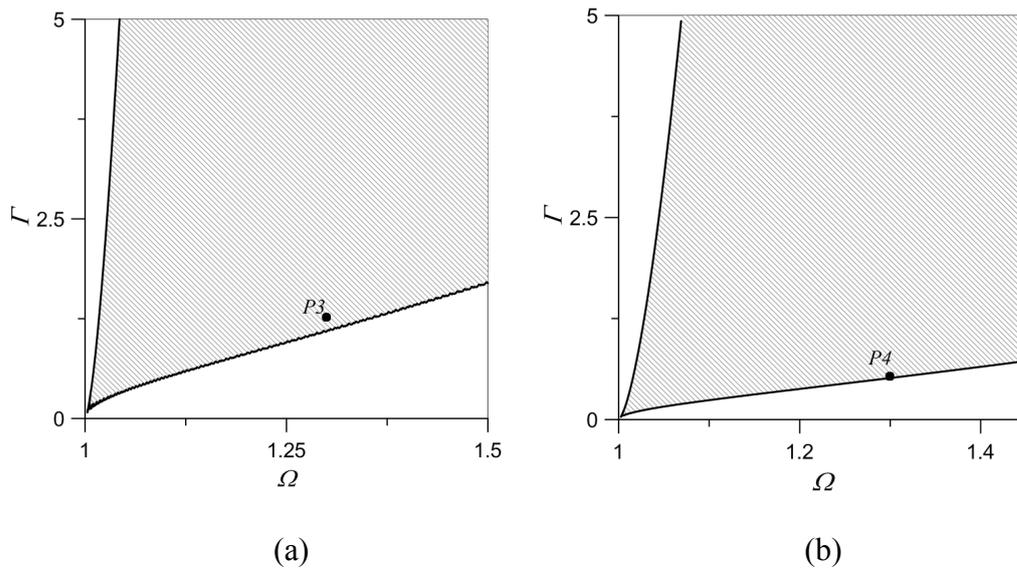


Figura 4-26 Diagrama de estabilidade de Mathieu, $\Gamma \times \Omega$. (a) modos P01 e P02; (b) modos P11 e P12. $\xi=0,001$, região instável – área hachurada.

da Figura 4-21 e com uma leve perturbação no grau de liberdade $\theta_1=10^{-6}$, o valor de $d\theta_1/dt$ utilizado é igual a zero. O resultado no tempo ($0 \text{ s} < t < 120 \text{ s}$) para os deslocamentos θ_1 e θ_2 são mostrados respectivamente nas Figura 4-27 (a) e (b). Observa-se que a perturbação provoca a perda do desacoplamento da solução após um período de tempo de integração (aproximadamente 30 s), indicando a instabilidade da solução correspondente ao modo desacoplado P01 para elevados valores de Γ .

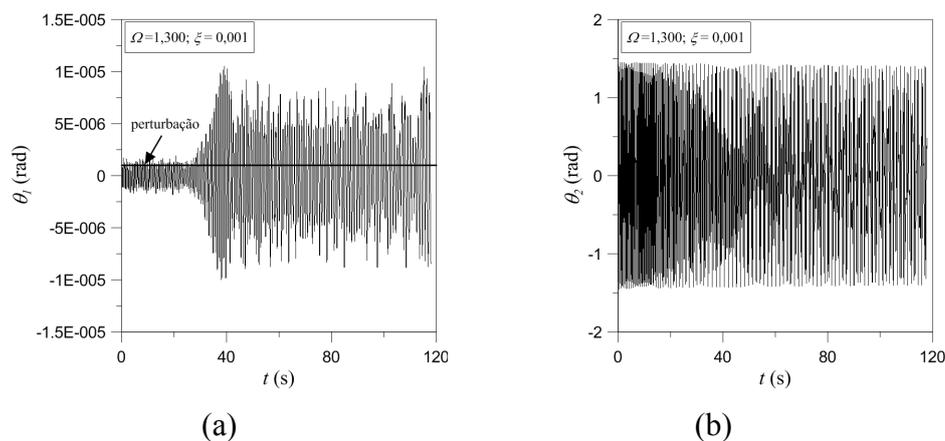


Figura 4-27 Resposta no tempo para P4 com perturbação inicial: (a) $\theta_1 \times t$; (b) $\theta_2 \times t$.

De modo similar verifica-se o comportamento da resposta no tempo integrando-se o oscilador modal do modo P11 com as condições iniciais

equivalentes ao ponto P3 da Tabela 4-4, a órbita resultante no plano de fase é mostrada na Figura 4-28. Observa-se que a solução se afasta das condições iniciais até deixar de existir por problemas de divergência na integração numérica, o que está de acordo com os diagramas de bifurcação da Figura 4-23, onde para o nível de valor do parâmetro Γ não existe mais solução para esse modo.

4.3. Análise com corrente

Considera-se agora a ação de uma corrente oceânica na vibração da torre articulada. A direção da corrente é determinada pelo ângulo α_c definido a partir do eixo x . O primeiro efeito da ação da corrente é comparável ao efeito das imperfeições iniciais consideradas no caso do pêndulo invertido, já que a corrente produz um deslocamento inicial estático, correspondente à solução das equações (4-30), que para os dados numéricos mostrados na Tabela 4-1, resulta em:

$$\theta_{1s} = 0,097 \cos \alpha_c ; \quad \theta_{2s} = 0,097 \sin \alpha_c \quad (4-109)$$

Desse modo os deslocamentos iniciais estáticos são periódicos o que reflete a simetria do modelo da estrutura, de modo que somente o quadrante $0 \leq \alpha_c \leq \pi/2$ necessita ser analisado. Além disso, a simetria do sistema implica que no caso de valores de α_c correspondente a ângulos complementares, as equações de movimento são equivalentes, bastando trocar os graus de liberdade θ_1 e θ_2 , entre

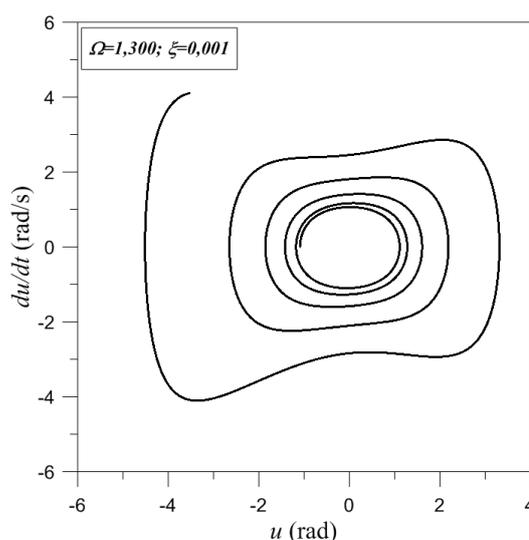


Figura 4-28 Órbita no plano de fase para o ponto P3 da Figura 4-23.

si. Desse modo, somente precisa ser estudada a região $0 \leq \alpha_c \leq \pi/2$.

O caso $\alpha_c = \pi/2$ produz equações correspondentes às expressões para o caso $\alpha_c = 0$ rad, onde os graus de liberdade θ_1 e θ_2 trocam de lugar entre si, e por isso esse caso não é considerado nesse trabalho.

As equações de movimento (4-47) são modificadas utilizando-se a regra de Cramer e a expansão em série de Taylor até os termos de quarta ordem. Apresentam-se a seguir as equações de movimento para três valores de α_c dentro do quadrante escolhido.

Para $\alpha_c = 0$ rad, ou seja, a corrente atuando na direção x , o sistema é governado pelas seguintes equações de movimento aproximadas:

$$\ddot{\theta}_1 + 36,561\theta_1 - 1,942\theta_1^2 - 1,464\theta_2^2 + 3,1869\theta_1^3 - 20,463\theta_1\theta_2^2 - 1,432\theta_1\dot{\theta}_1^2 + 0,642\theta_1\dot{\theta}_2^2 + 0,642\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 = 0; \quad (4-110)$$

$$\ddot{\theta}_2 + 36,780\theta_2 - 2,899\theta_1\theta_2 + 32,366\theta_1^3 - 20,323\theta_2\theta_1^2 - 1,432\theta_2\dot{\theta}_2^2 + 0,642\theta_2\dot{\theta}_1^2 + 0,642\theta_1\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 = 0 \quad (4-111)$$

Para o caso de $\alpha_c = \pi/8$, as equações de movimento são iguais a:

$$\ddot{\theta}_1 + 36,593\theta_1 - 0,226\theta_2 - 1,799\theta_1^2 - 1,160\theta_1\theta_2 - 1,364\theta_2^2 + 3,1939\theta_1^3 - 0,531\theta_2\theta_1^2 - 20,449\theta_1\theta_2^2 - 1,432\theta_1\dot{\theta}_1^2 + 0,642\theta_1\dot{\theta}_2^2 + 0,642\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - 0,170\theta_2^3 = 0; \quad (4-112)$$

$$\ddot{\theta}_2 + 36,747\theta_2 - 0,226\theta_1 - 0,754\theta_2^2 - 2,699\theta_1\theta_2 - 0,589\theta_1^2 + 32,291\theta_2^3 - 0,523\theta_1\theta_2^2 - 20,350\theta_2\theta_1^2 - 1,432\theta_2\dot{\theta}_2^2 + 0,642\theta_2\dot{\theta}_1^2 + - 20,350\theta_2\theta_1^2 - 1,432\theta_2\dot{\theta}_2^2 + 0,642\theta_2\dot{\theta}_1^2 - 0,171\theta_1^3 = 0 \quad (4-113)$$

O terceiro caso que se apresenta é para $\alpha_c = \pi/4$, cujas equações de movimento são:

$$\ddot{\theta}_1 + 36,669\theta_1 - 0,320\theta_2 - 1,385\theta_1^2 - 2,105\theta_1\theta_2 - 1,065\theta_2^2 + 32,113\theta_1^3 - 0,748\theta_2\theta_1^2 - 20,463\theta_1\theta_2^2 - 1,431\theta_1\dot{\theta}_1^2 + 0,642\theta_1\dot{\theta}_2^2 + 0,642\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - 0,241\theta_2^3 = 0; \quad (4-114)$$

$$\ddot{\theta}_2 + 36,669\theta_2 - 0,320\theta_1 - 1,385\theta_2^2 - 2,105\theta_1\theta_2 - 1,065\theta_1^2 + 32,113\theta_2^3 - 0,748\theta_1\theta_2^2 - 20,463\theta_2\theta_1^2 - 1,431\theta_2\dot{\theta}_2^2 + 0,642\theta_2\dot{\theta}_1^2 + 0,642\theta_1\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - 0,241\theta_1^3 = 0 \quad (4-115)$$

Todas as equações de movimento para os três casos apresentam termos de não linearidades quadráticas e cúbicas, diferentemente do caso sem corrente, onde

estão presentes somente os termos cúbicos. Desse modo a perda de simetria advinda da adição da corrente é refletida no surgimento de termos não lineares de grau par, responsáveis por assimetrias na resposta do sistema dinâmico.

4.3.1. Modos normais lineares

A análise linear das equações de movimento com adição da ação de uma corrente sobre a estrutura é feita por meio da solução de um problema de autovalor. Os autovalores, correspondentes às frequências naturais da torre articulada, resultantes da análise linearizada do sistema variam, mantidos constantes os outros parâmetros do problema. Essa variação é mostrada na Figura 4-29. Observa-se que a ressonância interna 1:1 da análise sem corrente deixa de existir, mesmo que uma pequena velocidade de corrente seja considerada. As frequências naturais distintas são ambas menores do que no caso do problema sem corrente, indicando que a corrente diminui a rigidez efetiva da estrutura. Além disso, as frequências, quando dependentes unicamente da direção da corrente, apresentam um comportamento periódico em relação a esse ângulo, sendo menores as diferenças entre elas para $\alpha_c = n\pi/2$ ($n=0,1,2..$) e maiores para $\alpha_c = n\pi/4$ ($n=0,1,2..$). Esse comportamento periódico confirma ser necessário somente o estudo de alguns casos dentro de um único quadrante para que se obtenha o entendimento do comportamento da vibração da estrutura submetida à ação da corrente marítima.

Para os casos de $\alpha_c = 0$ rad, $\pi/8$ rad e $\pi/4$ rad, apresenta-se um resumo dos resultados da análise modal linear na Tabela 4-5. Observa-se que a quebra de simetria do problema em função da adição da corrente leva ao surgimento de nós estáveis, e não mais um nó estrela resultante do problema de autovalor repetido para o sistema linear sem corrente, onde qualquer vetor era um autovetor do problema. Além disso, o primeiro modo de vibração (autovetor) para cada caso apresentado na Tabela 4-5 tem a mesma orientação da atuação da corrente, sendo que o segundo modo é perpendicular ao primeiro. Nas próximas seções é mostrada a influência da corrente no comportamento não linear da vibração da estrutura.

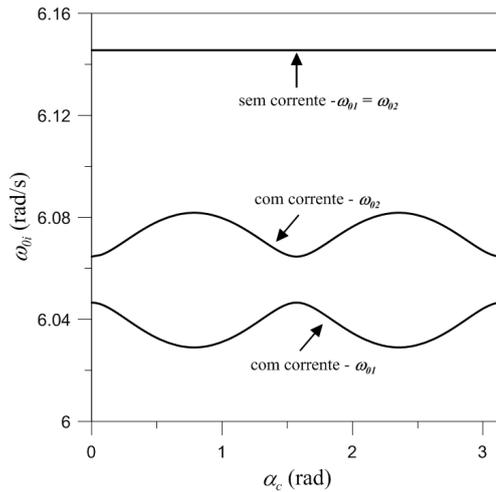


Figura 4-29 Variação das frequências naturais da torre articulada com a direção da corrente.

α_c (rad) - ângulo de direção da corrente	ω_{0i} (rad/s) frequências naturais	$\{\Phi_i\}$ modos normais lineares	Plano fase
0	$\omega_{01}=6,047$ e $\omega_{02}=6,065$	$\Phi_1 = (1,000;$ $0,000)^T$ e $\Phi_2 =$ $(0,000; 1,000)^T$	
$\pi/8$	$\omega_{01}=6,036$ e $\omega_{02}=6,076$	$\Phi_1 = (0,814;$ $0,582)^T$ e $\Phi_2 =$ $(0,582; -0,814)^T$	
$\pi/4$	$\omega_{01}=6,029$ e $\omega_{02}=6,082$	$\Phi_1 = (0,707;$ $0,707)^T$ e $\Phi_2 =$ $(0,707; -0,707)^T$	

Tabela 4-5 Resultados da análise modal linear – problema com corrente.

4.3.2. Modos normais não lineares

Como a ressonância interna deixa de existir pela adição da corrente, o método das variedades invariantes pode ser utilizado para determinação dos modos normais não lineares da torre articulada.

O grau de liberdade na direção x e sua correspondente velocidade são utilizados como par mestre. Procurando-se primeiramente a existência de modos similares e depois utilizando-se o método assintótico para determinação dos modos não similares, as seguintes funções de restrição para o modo similar são obtidas para o caso $\alpha_c=0$ rad (a corrente atuando na direção do eixo x):

$$\theta_1 = u; \quad \dot{\theta}_1 = \dot{u} = v; \quad \theta_2 = 0; \quad \dot{\theta}_2 = 0 \quad (4-116)$$

Substituindo-se as equações (4-116) na equação de movimento (3-114), tem-se o seguinte oscilador modal para um modo não linear similar:

$$\ddot{u} + 36,561u - 1,942u^2 + 31,869u^3 + 1,432\dot{u}^2u = 0 \quad (4-117)$$

Os osciladores modais correspondentes às equações (4-75) e (4-117) são semelhantes, principalmente pelo desacoplamento natural no eixo x . As diferenças se dão somente nos valores dos coeficientes e no fato que para o modo do caso com corrente apresenta termos de não linearidade quadrática e não somente cúbica como no caso do modo sem corrente. Esses termos são responsáveis pela assimetria do problema introduzida pela consideração da corrente. Os termos quadráticos têm coeficientes de magnitude muito pequena quando comparados aos termos cúbicos, em função do pequeno valor da velocidade de corrente considerada, limitando-se assim a assimetria a pequenos valores na resposta do sistema quando em vibração.

No caso dos modos não similares, têm-se as seguintes funções de restrição e oscilador modal:

$$P = u - 0,005u^2 - 2,363u^3 - 0,065uv^2; \quad (4-118)$$

$$Q = v + 0,009uv - 2,359u^2v - 0,065v^3; \quad (4-119)$$

$$P = -u - 0,005u^2 - 2,363u^3 - 0,065uv^2 \quad (4-120)$$

$$Q = -v + 0,009uv - 2,359u^2v - 0,065v^3; \quad (4-121)$$

$$\ddot{u} + 36,561u - 3,406u^2 + 11,419u^3 - 0,147\dot{u}^2u = 0 \quad (4-122)$$

Observa-se que as equações (4-118) e (4-119) descrevem um modo normal não linear, que pode ser considerado um típico exemplo do caso em que Vakakis (1991) classifica de perturbação do modo similar, onde o modo não similar apresenta-se como uma leve perturbação de um modo similar de um sistema correlato, nesse caso o modo similar em fase da seção 4.2.2. Para o segundo modo não similar têm-se os seguintes resultados:

$$P = -u + 0,005u^2 + 2,363u^3 + 0,064uv^2 ; \quad (4-123)$$

$$Q = -v - 0,009uv + 2,367u^2v + 0,064v^3 ; \quad (4-124)$$

$$\ddot{u} + 36,780u - 2,899u^2 + 12,029u^3 - 0,148\dot{u}^2u = 0 \quad (4-125)$$

O segundo modo não similar pode ser visto como uma perturbação do modo similar fora de fase para o caso sem corrente, 4.2.2. Os modos não similares são uma clara continuação dos modos lineares; já o modo similar tem a mesma frequência natural do modo em fase, indicando que pode ser visto como uma bifurcação desse modo. Os resultados aqui discutidos podem ser mais bem visualizados no espaço de configuração mostrado na Figura 4-30 (a).

Para o caso de $\alpha_c = \pi/8$ rad os resultados para o primeiro modo são:

$$P = 0,715u + 0,005u^2 + 10,591u^3 + 0,296uv^2 ; \quad (4-126)$$

$$Q = 0,715v - 0,010uv + 10,228u^2v + 0,296u^3 ; \quad (4-127)$$

$$\ddot{u} + 36,431u - 3,326u^2 + 18,641u^3 - 0,843\dot{u}^2u = 0 \quad (4-128)$$

Já para o segundo modo os resultados são:

$$P = -1,399u + 0,021u^2 + 0,001v^2 - 41,160u^3 + 1,096uv^2 ; \quad (4-129)$$

$$Q = -1,399v - 0,041uv - 42,546u^2v - 1,094u^3 ; \quad (4-130)$$

$$\ddot{u} + 36,909u - 2,850u^2 + 2,484u^3 + 1,333\dot{u}^2u = 0 \quad (4-131)$$

As equações (4-126), (4-127), (4-129) e (4-130) revelam que a simetria do problema foi inteiramente removida pela ação da corrente numa direção correspondente à $\alpha_c = \pi/8$, sendo que o sistema nesse caso deixa de exibir modos normais não lineares similares. O espaço de configuração para esses modos é mostrado na Figura 4-30 (b).

No terceiro caso, quando $\alpha_c = \pi/4$ rad, os resultados para o primeiro modo não linear é:

$$P = u ; \quad Q = v ; \quad (4-132)$$

$$\ddot{u} + 36,349u - 4,555u^2 + 10,718u^3 + 0,148\dot{u}^2u = 0 \quad (4-133)$$

E para o segundo modo, tem-se:

$$u_2 = -u + 0,006u^2; \quad Q = -v - 0,012uv; \quad (4-134)$$

$$\ddot{u} + 36,349u - 4,555u^2 + 10,718u^3 + 0,148\dot{u}^2u = 0 \quad (4-135)$$

No caso da corrente atuando à 45° no plano xy , a simetria do problema em relação ao eixo da corrente é mantida. Isso se traduz na existência de um modo similar em fase semelhante ao problema sem corrente, e à existência de um modo não similar, que pode ser visto como a perturbação do modo similar fora de fase do caso sem corrente. Na Figura 4-30 (c) é mostrado o plano de fase com a configuração para o caso onde $\alpha_c = \pi/4$ rad.

4.3.3. Multiplicidade de modos

A redução de simetria em geral diminui a existência de modos bifurcados (Vakakis, 1991). Como visto na seção anterior somente o caso onde $\alpha_c = 0$ rad apresentou mais modos que o número de graus de liberdade identificados pelos métodos analíticos. Para a completa verificação desse fenômeno, obtém-se as seções de Poincaré para as três direções de corrente consideradas nessa análise. As seções obtidas para cada caso são as mesmas definidas pelas equações (4-84) com nível de referência de energia h_0 igual a 0,146 J.

As seções para o caso em que $\alpha_c = 0$ rad são mostradas na Figura 4-31, onde dois pontos fixos estáveis (centros) são identificados na seção Σ_1 e três na seção Σ_2 . Já para o caso em que $\alpha_c = \pi/8$ as seções de Poincaré resultantes são mostradas na Figura 4-32, onde se observa a existência de dois pontos fixos estáveis em cada uma das seções. Por fim têm-se as seções para o caso $\alpha_c = \pi/4$, onde os resultados são mostrados na Figura 4-33. Também para esse caso são identificados somente dois pontos fixos estáveis em cada seção.

Assim a adição da corrente ao problema reduz a quantidade de pontos fixos na estrutura. As coordenadas dos pontos fixos obtidos nas seções exibidas em: Figura 4-31, Figura 4-32 e Figura 4-33 são mostradas na Tabela 4-6. A relação entre os modos correspondentes aos pontos fixos identificados e os modos analiticamente obtidos na seção 4.3.2 pode ser obtida por meio da resposta do sistema no tempo de modo semelhante ao realizado para o sistema sem corrente.

Os resultados da integração numérica revelam que o ponto P02 da Figura 4-31 (b) corresponde ao modo similar da Figura 4-30 (a), enquanto que os pontos P11 (P12) e P21 (P22) das seções da Figura 4-31 (a) e (b) correspondem aos modos não similares da Figura 4-30 (a).

Para o caso em que $\alpha_c = \pi/8$ os pontos P11 (P12) e P21 (P22) das seções da Figura 4-32 correspondem aos modos não similares da Figura 4-30 (b). A mesma correspondência se verifica para entre os pontos P11 (P12) e P21 (P22) das seções da Figura 4-33 e os modos similar e não similar da Figura 4-30 (c).

Desse modo as seções de Poincaré não identificam nenhum modo não linear adicional aos modos analiticamente determinados na seção 4.3.2.

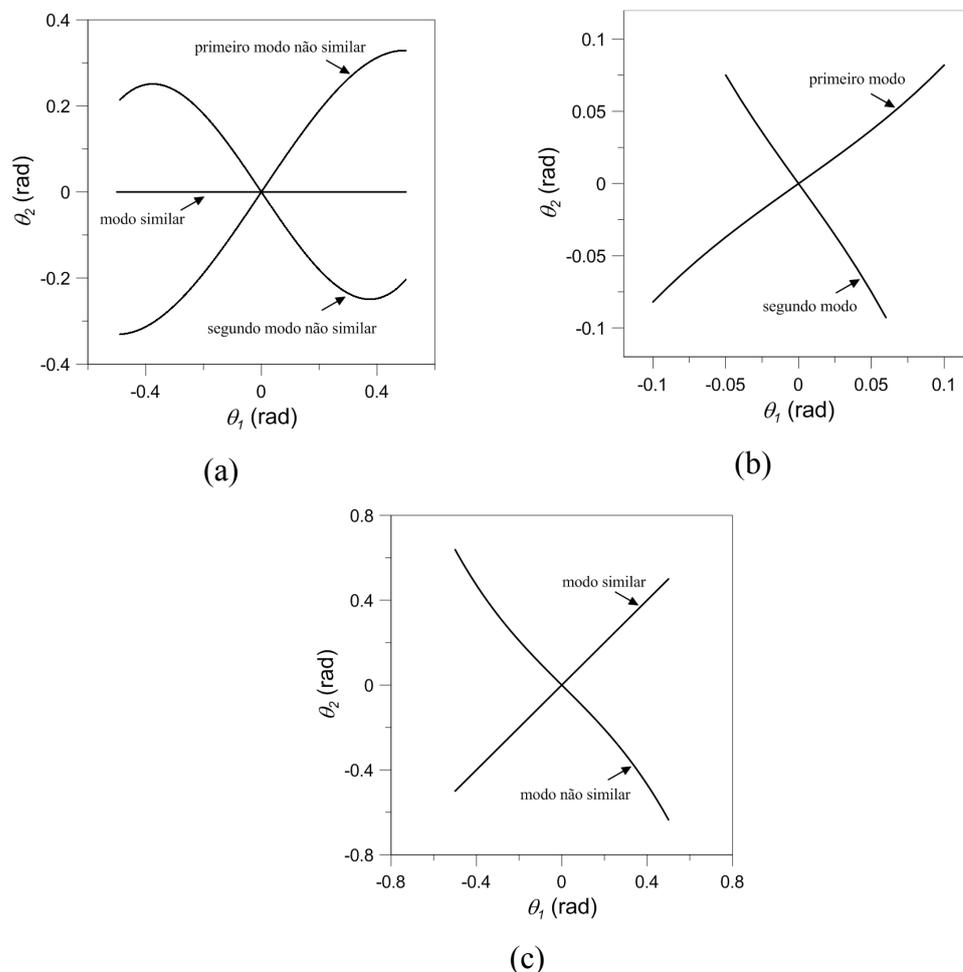


Figura 4-30 Espaço de configuração - modos normais não lineares: (a). $\alpha_c = 0$ rad; (b) $\alpha_c = \pi/8$ rad; (c) $\alpha_c = \pi/4$ rad.

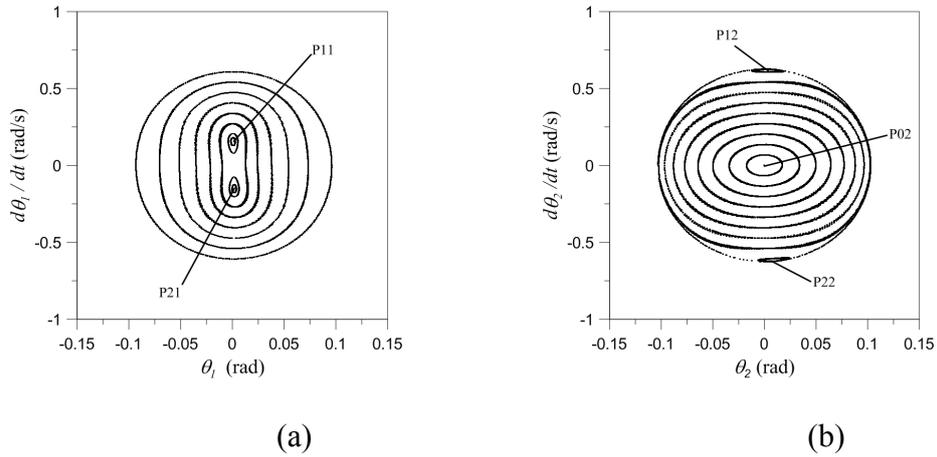


Figura 4-31 Seções de Poincaré para $\alpha_c = 0\text{rad}$: (a) seção Σ_1 ; (b) seção $\Sigma_2 - h = h_0$.

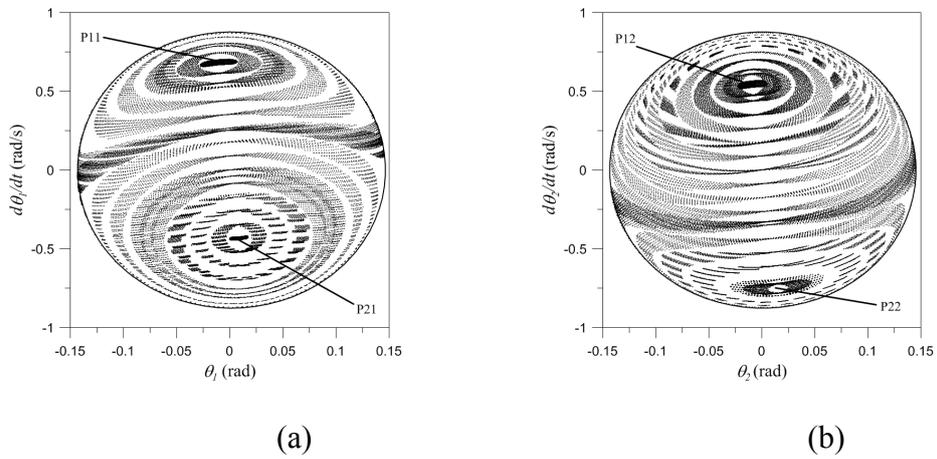


Figura 4-32 Seções de Poincaré para $\alpha_c = \pi/8\text{rad}$: (a) seção Σ_1 ; (b) seção $\Sigma_2 - h = h_0$.

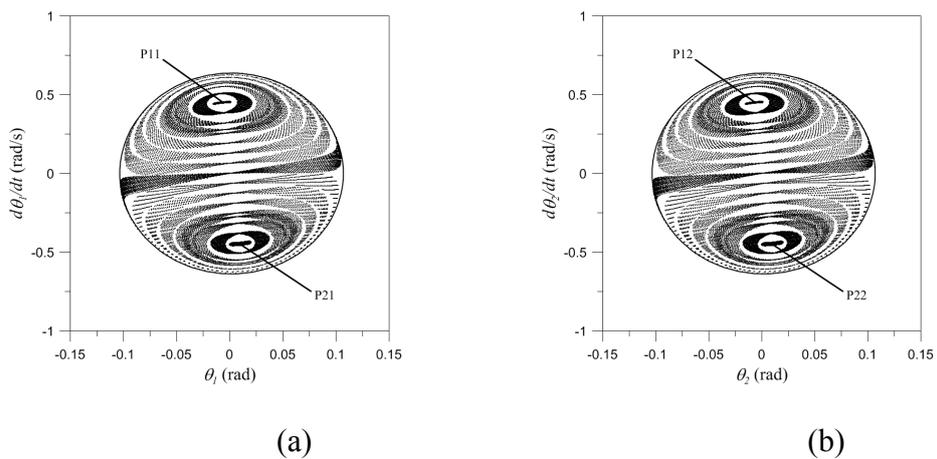


Figura 4-33 Seções de Poincaré para $\alpha_c = \pi/4\text{rad}$: (a) seção Σ_1 ; (b) seção $\Sigma_2 - h = h_0$.

Para um nível de energia menor, $h=50\% h_0$, obtêm-se as seções de Poincaré das Figura 4-34, Figura 4-35 e Figura 4-36, onde se pode observar os mesmos modos identificados nas seções obtidas com o dobro do nível de energia, apresentando, porém, menores amplitudes de deslocamentos.

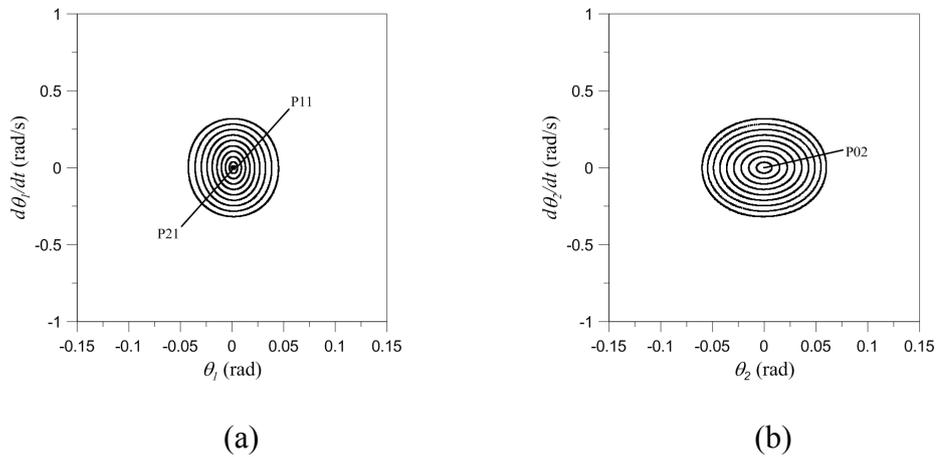


Figura 4-34 Seções de Poincaré para $\alpha_c = 0$ rad: (a) seção Σ_1 ; (b) seção Σ_2 - $h = 50\% h_0$.

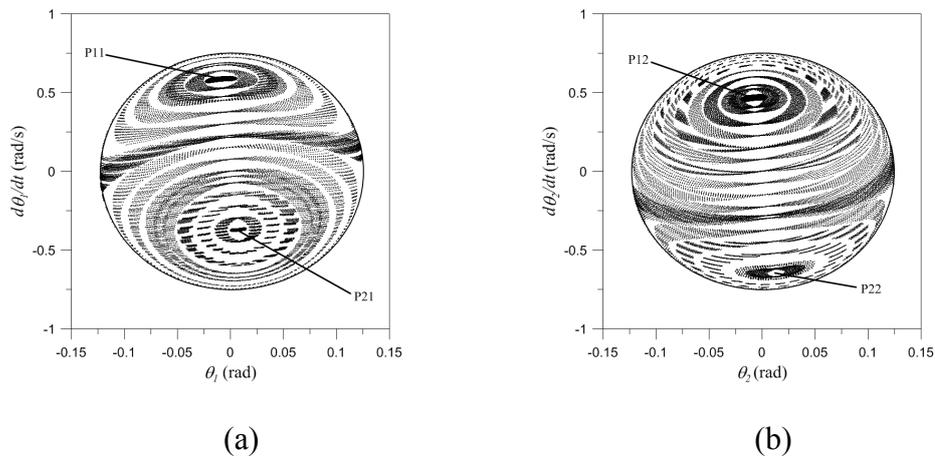


Figura 4-35 seções de Poincaré para $\alpha_c = \pi/8$ rad: (a) seção Σ_1 ; (b) seção Σ_2 - $h = 50\% h_0$.

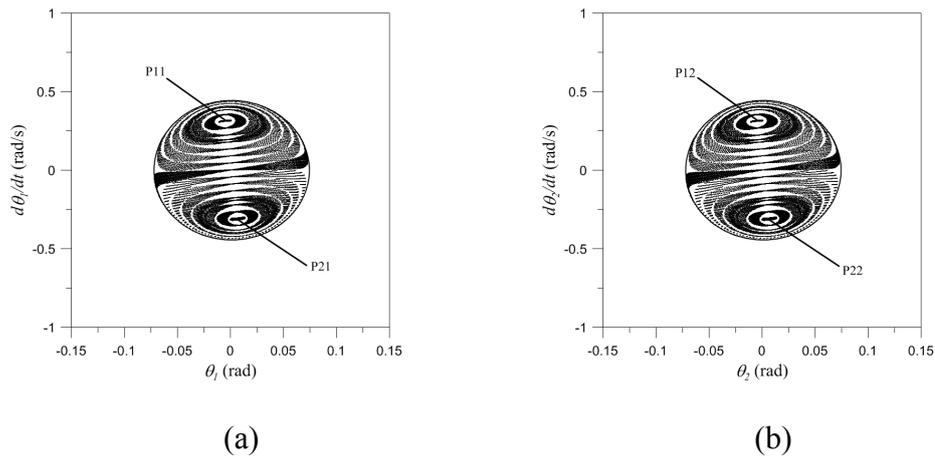


Figura 4-36 Seções de Poincaré para $\alpha_c = \pi/4$ rad: (a) seção Σ_1 ; (b) seção Σ_2 - $h = 50\%$ h_0 .

α_c (rad) - ângulo de direção da corrente	Seção	Pontos	Coordenadas			
			θ_1 (rad)	$d\theta_1/dt$ (rad/s)	θ_2 (rad)	$d\theta_2/dt$ (rad/s)
0	Σ_1	P11	0,001	0,153	0,000	0,589
		P21	0,002	-0,152	0,000	0,589
	Σ_2	P02	0,000	0,609	0,000	0,000
		P12	0,000	0,000	0,010	0,614
$\pi/8$	Σ_1	P11	-0,001	0,565	0,000	0,215
		P21	0,004	-0,565	0,000	0,215
	Σ_2	P12	0,000	0,424	0,001	0,431
		P22	0,000	0,424	0,004	-0,431
$\pi/4$	Σ_1	P11	0,001	0,448	0,000	0,403
		P21	0,004	-0,448	0,000	0,403
	Σ_2	P12	0,000	0,403	0,005	0,447
		P22	0,000	0,403	0,004	-0,448

Tabela 4-6 Coordenadas das seções de Poincaré.

4.3.4. Relação frequência-amplitude

As curvas de ressonância são obtidas com o uso do método do balanço harmônico, assumindo-se a seguinte expressão para os osciladores modais:

$$u(t) = X_1 + X_2 \cos(\omega t) \quad (4-136)$$

O sistema de equações algébricas resultantes do método do balanço harmônico e da aplicação das relações trigonométricas do Anexo I é resolvido utilizando-se o método do controle de comprimento de arco. As curvas para os modos obtidos para os três valores de ângulo de direção da corrente, $\alpha_c=0$, $\pi/8$ e $\pi/4$ são mostradas respectivamente na Figura 4-37 (a), Figura 4-37 (b) e Figura 4-37 (c); onde:

$$X^* = X_1 + |X_2| \quad (4-137)$$

Observa-se que em todos os casos, os modos apresentam ganho de rigidez no comportamento das curvas de ressonância que são bastante semelhantes ao caso sem corrente. Apesar dos termos quadráticos, as curvas se mostram praticamente simétricas, uma vez que a magnitude dos coeficientes dos termos quadráticos é pequena se comparada com os coeficientes dos termos cúbicos.

A variação da energia do sistema com a frequência é mostrada na Figura 4-38 (a) para o caso em que $\alpha_c=0$ rad e na Figura 4-38 (b) para o caso em que $\alpha_c=$

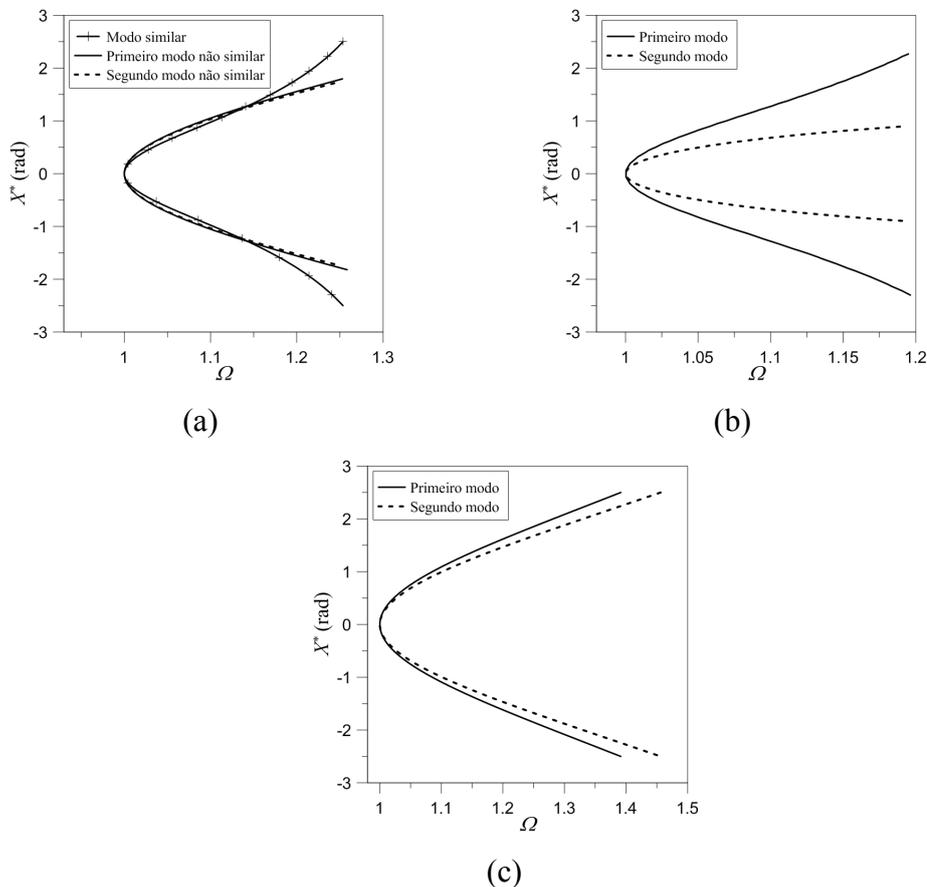


Figura 4-37 Curvas de frequência-amplitude: (a) $\alpha_c = 0$ rad; (b) $\alpha_c = \pi/8$ rad; (c) $\alpha_c = \pi/4$ rad.

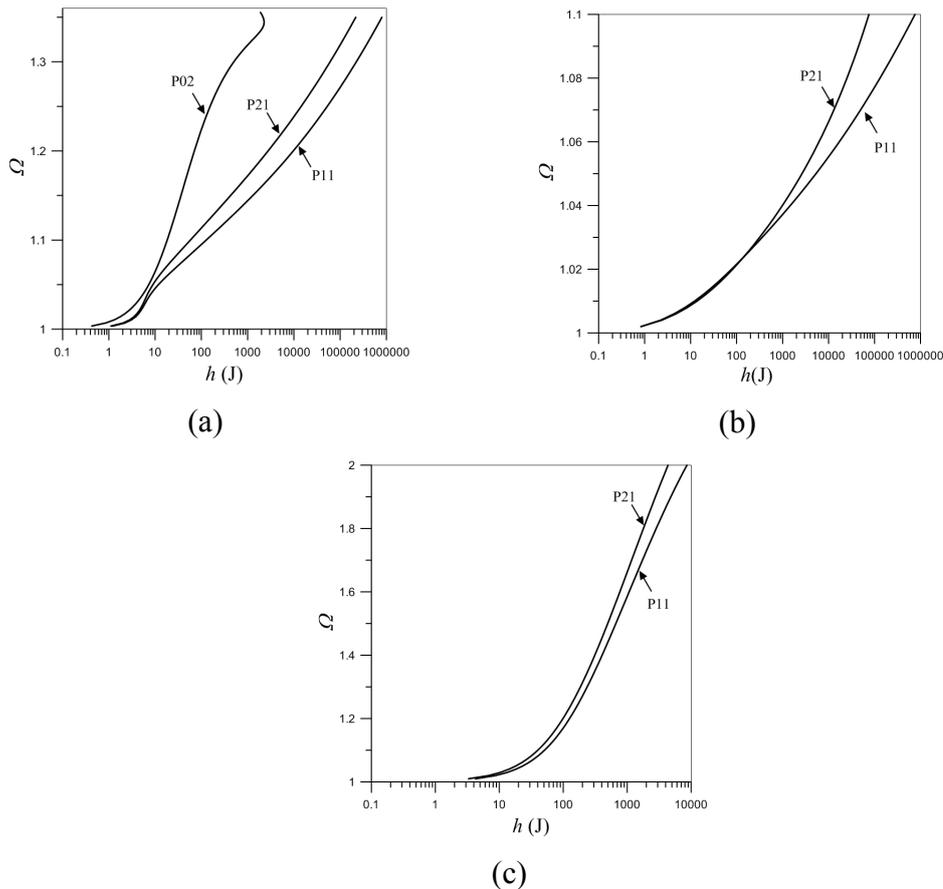


Figura 4-38 Curvas de frequência-energia: (a) $\alpha_c = 0$ rad; (b) $\alpha_c = \pi/8$ rad; (c) $\alpha_c = \pi/4$ rad.

$\pi/8$, enquanto o caso da imperfeição onde $\alpha_c = \pi/4$ é mostrado na Figura 4-38 (c), onde todos os modos exibem um aumento do nível de energia em função do aumento da frequência de vibração.

4.3.5. Vibração forçada

No caso da vibração forçada amortecida consideram-se os osciladores modais obtidos com os modos normais não forçados acrescidos de uma força harmônica simulando a ação de uma onda e a adição de uma pequena quantidade de amortecimento proporcional como no caso sem corrente analisado na 4.2.7. Para obtenção das curvas de ressonância na vibração forçada foi utilizado o método do balanço harmônico com a seguinte aproximação:

$$u(t) = X_1 + X_2 \cos(\omega t) + X_3 \cos(\omega t) \quad (4-138)$$

E para simplicidade das curvas, foi utilizada a seguinte expressão:

$$X^* = X_1 + \sqrt{X_2^2 + X_3^2} \quad (4-139)$$

Para os casos $\alpha_c=0$ e $\pi/8$ e $\pi/4$, as curvas de ressonância para vibração forçada são mostradas respectivamente na Figura 4-39 (a), Figura 4-39 (b) e Figura 4-39 (c). Observa-se a existência do fenômeno do salto dinâmico em todos os modos, assim como no caso da vibração livre o caso que mais apresenta diferença entre as curvas de ressonância para os seus modos é aquele onde $\alpha_c = \pi/8$ rad, traduzindo assim a completa perda de simetria por ação da corrente. Já as amplitudes do movimento são de magnitudes semelhantes para todos os modos, mantidos constantes os outros parâmetros.

As curvas de ressonância para alguns valores do ângulo de atuação da carga

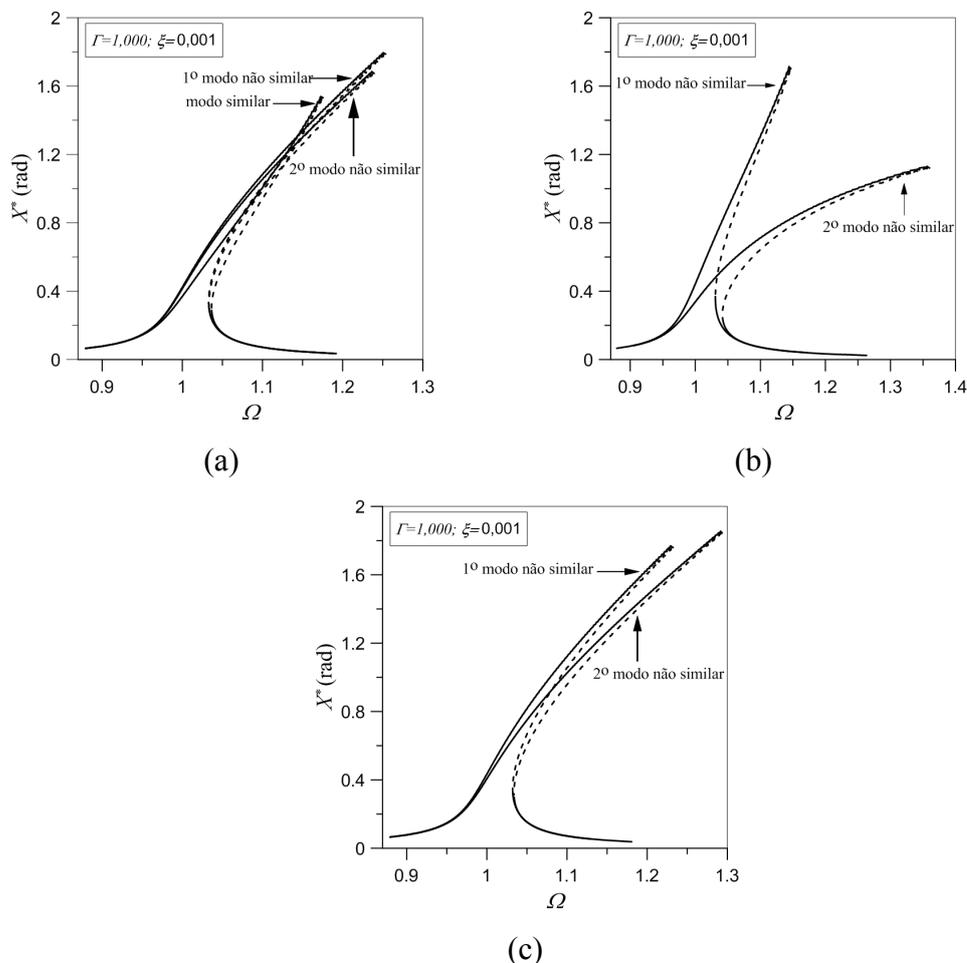


Figura 4-39 Curvas de ressonância: (a) $\alpha_c = 0$ rad; (b) $\alpha_c = \pi/8$ rad; (c) $\alpha_c = \pi/4$ rad.

externa, γ , obtidas pelo método do balanço harmônico e do comprimento de arco,

a partir do sistema original de equações, são mostradas na Figura 4-40 em conjunto com as relações frequência-amplitude dos osciladores modais não lineares na vibração livre para o caso onde $\alpha_c=0$. Observa-se que os modos normais não lineares descrevem adequadamente o comportamento dinâmico global do sistema estrutural, uma vez que a ressonância ocorre na vizinhança desses modos. Os outros dois casos produzem resultados semelhantes e desse modo não são mostrados neste trabalho.

4.3.6. Diagramas de bifurcação

Os diagramas de bifurcação, tomando-se $\Omega=1,300$ e $\xi=0,001$ são obtidos para os modos do caso para a corrente atuante na direção do eixo x . Os resultados para o modo similar comparado com o modo correspondente do modelo sem corrente é mostrado na Figura 4-41 (a), onde também foi plotado o resultado para a corrente atuando na direção negativa de x ($\alpha_c = -\pi$ rad) já os diagramas para os modos não similares são mostrados na Figura 4-41 (b).

Observa-se que no caso do modo similar a bifurcação tridente supercrítica deixa de existir pela adição da corrente, e o valor do parâmetro para o qual a solução deixa de ser estável é menor ($I=0,878$) que no caso da análise sem corrente ($I=1,270$). Para os modos não similares as bifurcações do tipo nó-sela continuam a existir e o sistema apresenta comportamento semelhante, com

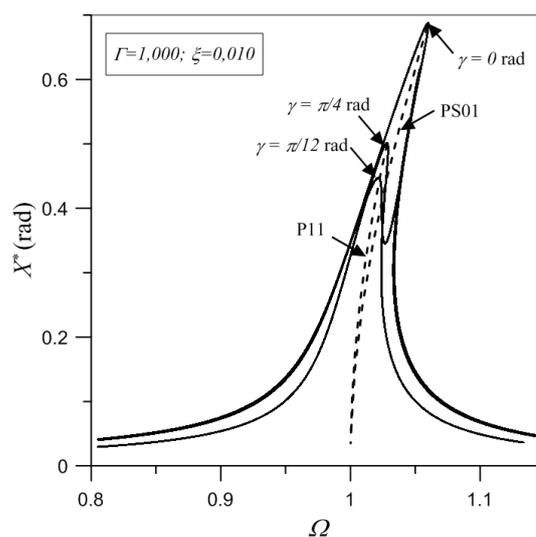


Figura 4-40 Curvas de ressonância - influência do ângulo γ , $\alpha_c = 0$ rad.

parâmetros de carga ligeiramente maiores quando a corrente é considerada ($\Gamma=0,562$ para o primeiro modo não similar e $\Gamma=0,547$ para o segundo) que o valor para bifurcação do problema sem atuação da corrente ($\Gamma=0,532$).

Os diagramas de bifurcação para $\alpha_c = \pi/8$ rad e $\alpha_c = \pi/4$ rad são apresentados respectivamente nas Figura 4-42 (a) e Figura 4-42 (b). Observa-se que no caso de $\alpha_c = \pi/8$ rad as bifurcações deixam de existir, já que nenhum eixo de simetria é mantido quando a corrente atua nesse sentido. No caso de $\alpha_c = \pi/4$ rad as bifurcações tipo nó-sela são mantidas para ambos os modos.

4.3.7. Estabilidade

A estabilidade da solução para o sistema pode ser obtida por meio do diagrama de Mathieu, em termos dos parâmetros de carga e frequência. Como exemplo mostra-se nas Figura 4-43 os limites de estabilidade para os modos correspondentes a $\alpha_c = 0$ rad. Também são mostrados os pontos de perda de estabilidade dos diagramas da seção anterior: o ponto P1 do diagrama da Figura 4-41 (a); os pontos P1 e P2 referentes aos diagramas mostrados na Figura 4-41 (b). Observa-se uma boa concordância entre os diagramas de bifurcação e as curvas de limite de estabilidade do diagrama de Mathieu.

4.4. Análise com a teoria de ondas planas

A comparação entre os resultados obtidos pela modelagem de ondas pela teoria de ondas planas cuja formulação encontra-se na seção 4.1.3 e pelo uso de funções harmônicas como a expressa pela eq. (4-92) pode ser obtida por meio de integração numérica das equações de movimento do sistema.

As Figura 4-44 (a) e (b) mostram os resultados no tempo para as rotações e velocidades obtidas para ambos os modelos num intervalo $0 < t < 16$ s e condições iniciais homogêneas. Foram utilizados os parâmetros da Tabela 4-1 e também $\xi=0,020$, $\omega_\omega=0,750$ rad/s e $\Gamma=1,000$. Observa-se que a amplitude do movimento é de magnitude semelhante, entretanto a resposta para a onda plana não é simétrica em relação ao eixo do tempo como se observa para os resultados da carga harmônica. Assim sendo, resultados diferentes dos obtidos no estudo da vibração forçada podem ser encontrados, com a carga harmônica interferindo qualitativamente no comportamento dinâmico obtido.

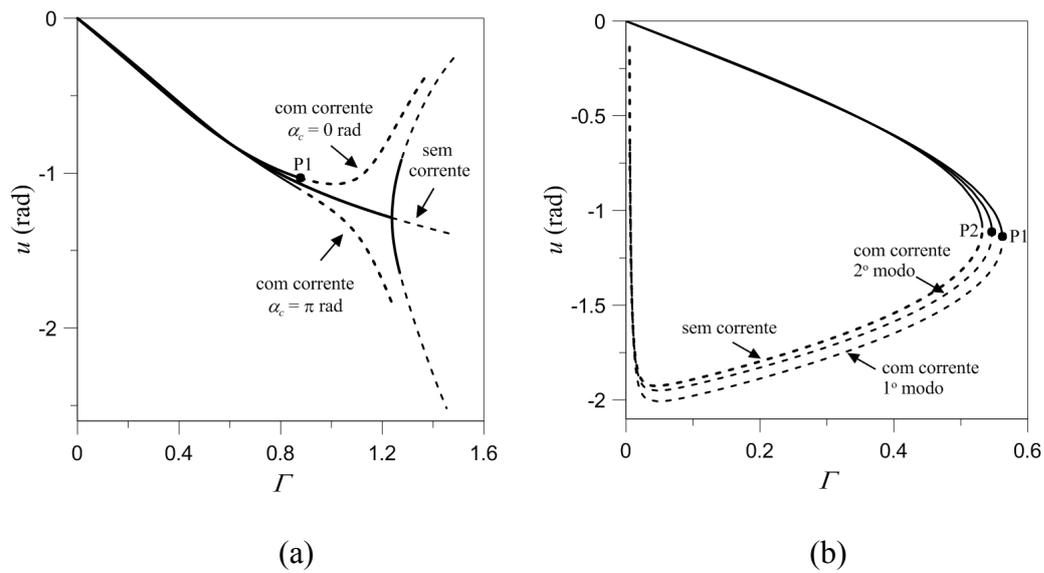


Figura 4-41 Diagrama de bifurcação para rotações $\alpha_c = 0$ rad - $\Omega=1,300$ e $\xi=0,001$.
 (a) modos similares; (b) modos não similares.

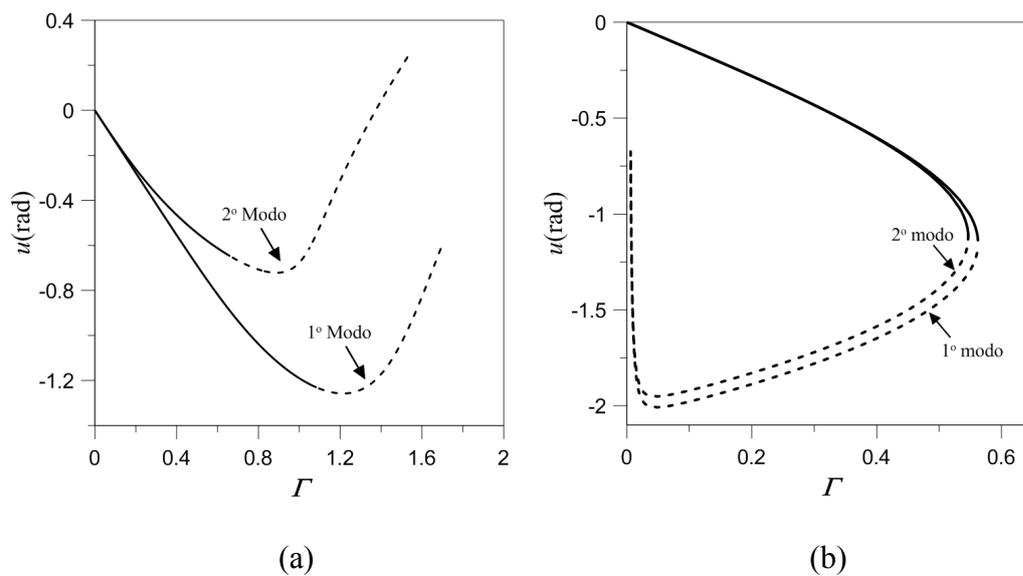


Figura 4-42 Diagrama de bifurcação para rotações - $\Omega=1,300$ e $\xi=0,001$: (a) $\alpha_c = \pi/8$ rad ; (b) $\alpha_c = \pi/4$ rad.

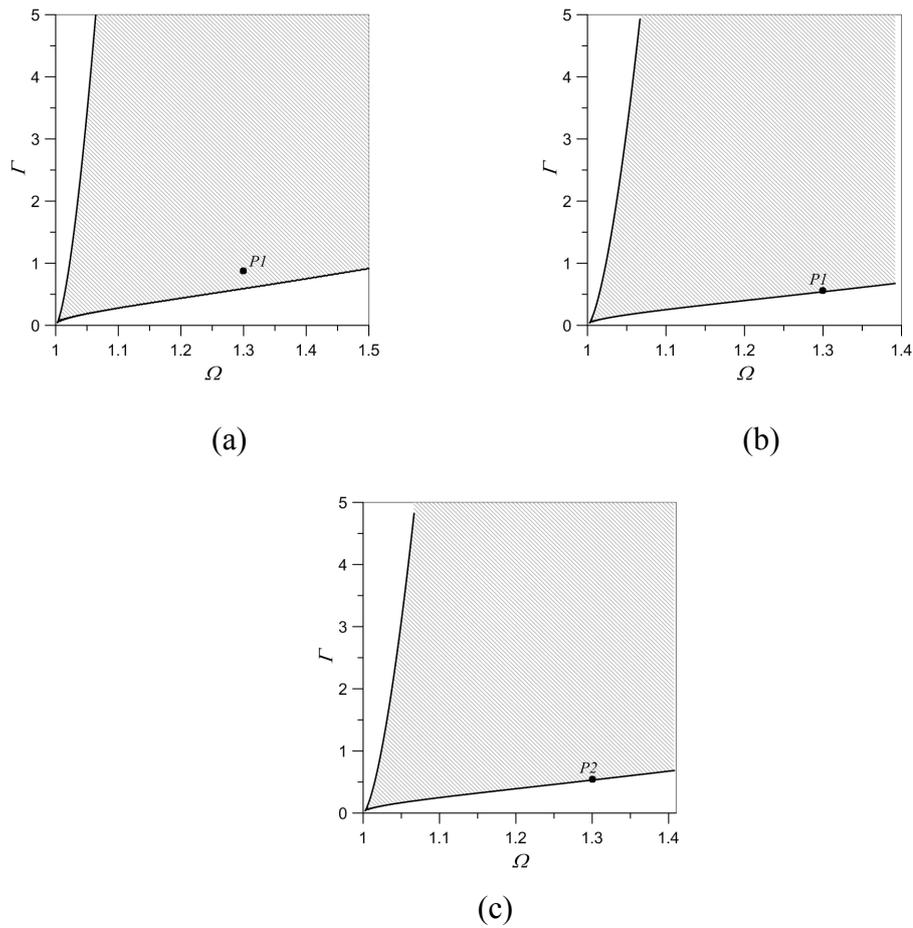


Figura 4-43 Diagrama de estabilidade de Mathieu, $\Gamma \times \Omega - \alpha_c = \theta$ rad: (a) modo similar; (b) 1º modo não similar; (c) 2º modo não similar. $\xi=0,001$ - região instável – área hachurada.

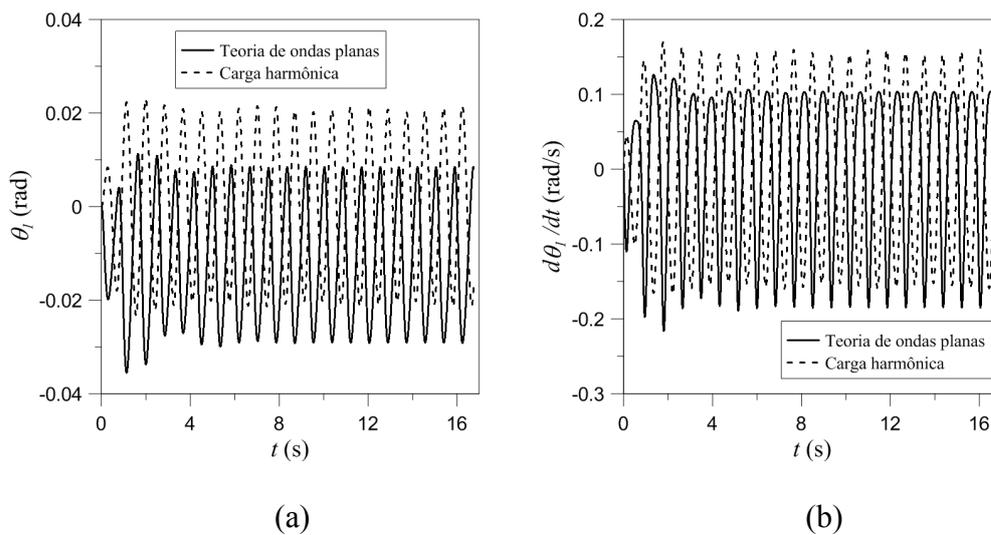


Figura 4-44 Comparação da resposta no tempo para teoria de ondas e carga harmônica: (a) $\theta_1 \times t$; (b) $d\theta_1/dt \times t$.