Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Elvídio Gavassoni Neto

Aplicação dos modos de vibração não lineares a modelos conceituais de estruturas offshore

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves

Co-orientadora: Profa. Deane de Mesquita Roehl

Rio de Janeiro

Setembro de 2012

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Elvídio Gavassoni Neto

Aplicação dos modos de vibração não lineares a modelos conceituais de estruturas offshore

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paulo Batista Gonçalves
Orientador
Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Profa. Deane de Mesquita Roehl
Co-orientadora
Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli
Escola Politécnica - USP-SP

Prof. Ney Roitmann
Programa de Engenharia Civil – COPPE/UFRJ

Prof. Breno Pinheiro Jacob
Programa de Engenharia Civil – COPPE/UFRJ

Prof. Raul Rosas e Silva
Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 28 de setembro de 2012

Elvídio Gavassoni Neto

Graduou-se em engenharia civil na UFES (Universidade Federal do Espírito Santo) em 2005. Possui mestrado em engenharia civil na PUC-RIO com ênfase em estruturas. É engenheiro civil da PETROBRAS TRANSPORTE.

Ficha Catalográfica

Gavassoni Neto, Elvídio

Aplicação dos modos de vibração não lineares a modelos conceituais de estruturas offshore / Elvídio Gavassoni Neto; orientador: Paulo Batista Gonçalves ; orientadora: Deane de Mesquita Roehl. – 2012.
269 f. il. ; 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2012.
Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Modos normais não lineares. 3. Análise modal. 4. Estruturas offshore. 5. Vibrações não lineares. 6. Instabilidade dinâmica. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Roehl, Deane de Mesquita. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

Agradecimentos

A reflexão para escrita destas palavras, que apesar de aparecerem na alvorada desse texto são na verdade a marca do seu ocaso, faz-me novamente voltar aos inefáveis versos de Eliot: “In the uncertain hour before the morning/ Near the ending of interminable night/ At the recurrent end of the unending/ We shall not cease from exploration/ And the end of all our exploring/ Will be to arrive where we started.”

Assim chego ao começo, nos últimos momentos do doutorado volto ao primeiro ano na escola. Talvez por se tratar da primeira vez que finalizava uma etapa na vida perguntei à minha professora, no final do ano letivo – quando terminam os estudos? A resposta, como quase tudo que não apenas leva ao aprendizado, mas, além disso, ao conhecimento da verdade, não veio de forma fechada: “não existe uma última série, o último grau dos estudos pode ser o doutorado, mas o aprendizado nunca termina! Jamais se deve deixar de estudar!” Passados vinte e sete anos desde aquele primeiro passo, ao estar prestes a dar este que quando criança projetei ser o último, começo a entender a resposta da professora Cláudia e experimentar a verdade dos versos de Eliot: “There is no end, but addition.”

“Toute invention vraie, toute création vraie suppose la mémoire” (Comte-Sponville). Uma vez mais sigo o conselho contido no hino dos paulistas: “Deixa para trás o presente/ Olha o passado à frente” Nesse sentido a gratidão é uma oportunidade extra, é o prolongamento de um contentamento passado, é um eco de uma alegria já sentida, é, portanto, felicidade adicionada de felicidade. Começo a ecoar essa felicidade, agradecendo aos meus orientadores. Por não serem indulgentes ao ponto de me apontarem todos os caminhos, nem tampouco negligentes a ponto de não me indicarem nenhum, tornando assim possível que eu chegasse até aqui.

À professora Deane, por ser a prova viva que é preciso sensibilidade e paciência para dar conselhos específicos a cada pessoa. Por entender que ensinar significa ampliar horizontes, elevar expectativas e estimular interesses, não somente no

campo intelectual, mas também no ético e no espiritual. Por me confirmar a lição há muito aprendida que a moral não é nem um mercado nem um espelho.

Ao professor Paulo, por ser o exemplo real de que um grande homem está sempre pronto para ser pequeno. Pelo seu desprezo de provar, de prevalecer e de aparecer. Por me ensinar, não por palavras, mas pelo exemplo, que a inteligência é a arte de reduzir o mais complexo ao mais simples, e nunca o contrário. Pela imensa generosidade de sempre ter me deixado sair de sua sala mais confiante e tranquilo do que nela entrei.

A todos os meus professores que magnificam o seu ofício, tornando apropriado o título de mestre por eles portado, desde a sábia professora Cláudia da primeira série até os meus caros professores da graduação, do mestrado e do doutorado. Em especial ao professor Roehl, que com uma régua, uma borracha e um sorriso enérgico me ensinou mais dinâmica estrutural do que qualquer livro foi e será capaz de fazê-lo. À Rita, pela sua constante ajuda, à biblioteca da PUC e seus eficientes funcionários, aos meus gerentes na PETROBRAS Transporte.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado

“Friendship should be surrounded with ceremonies and respects, and not crushed into corners. Friendship requires more time than poor busy men can usually command”. (Emerson). Assim sou grato aos amigos que são generosos por compartilhar parte do seu tempo comigo. À Jarek, por seu carinho e atenção incomparáveis. À Lorena, por sua espontaneidade e improvisação alegre. À Marchesi, por sua ajuda irrestrita e lealdade. À Marianna, pelos momentos compartilhados, pela coragem impressionante e por ser uma ótima “maninha”. À Buback, por sua transparência de olhar, pureza de coração, sinceridade de discurso, retidão de alma e de comportamento. Ao Arreguy, pela generosidade no servir, empenho no realizar e inteligência no saber. À Carla, pela doçura e carinho fraternal. Ao Betaum, por seu caráter exemplar e sua peculiar tranquilidade.

Vez por outra a amizade é acompanhada por um companheirismo tal que o resultado é um genuíno sentimento de fraternidade. É assim com os meus “irmãos”: Slongo, Bazan e Sutili. Ao Slongo, por saber que toda virtude é coragem, que toda boa escolha é um esforço e que a fidelidade é a base de toda a moral. Ao Bazan, por me ensinar a verdadeira definição de progresso pessoal, pela invulgar capacidade de compreensão e pela sua tremenda determinação. Ao Sutili, cujo comportamento reflete muitos dos vários conteúdos e formas que a generosidade possui: o heroísmo, a equidade, a benevolência, a compaixão e, sobretudo, o seu nome mais belo, o seu verdadeiro segredo: a bondade. Ao Stanley, por ser meu amigo desde muito antes que eu soubesse o significado da palavra da amizade.

"Dear to us are those who love us, the swift moments we spend with them are a compensation for a great deal of misery; they enlarge our life” (Emerson). Dentre os que expandem minha experiência nesta jornada mortal agradeço ao meu padrasto pela sua serenidade, à Thelma, por sua brandura e cuidado e ao pai, cujo exemplo de trabalho e amor me são muito caros. À Julinha, pelas providenciais interrupções, enquanto trabalhava nesta tese, para assistir desenhos no meu computador. Ao meu irmão, cuja confiança e admiração em mim depositadas são incondicionais e por me superar em todas as qualidades que vale a pena uma pessoa ter. Agradeço à Nonna, por ser a pessoa mais inteligente que conheço e pelo amor imenso mesmo que eu não leve muito jeito para carpir o quintal ou consertar o encanamento da pia. E agradeço à Mamma, que é o anjo a quem devo tudo o que sou e que gostaria de ser e por promover o bem assim como o sol irradia sua luminosidade.

Agradeço ao Pai Celestial, cuja glória é a inteligência, cuja luz não pode ser obscurecida e cujo amor excede a todo entendimento. Voltando a Eliot: “[...] that the end precedes the beginning/ And the end and the beginning were always there/ Before the beginning and after the end./ And all is always now.” Assim não insisto no ponto final do passado ou na interrogação do futuro, mas me converto às reticências do presente...

Resumo

Gavassoni Neto, Elvídio; Gonçalves, Paulo Batista; Roehl, Deane de Mesquita. **Aplicação dos modos de vibração não lineares a modelos conceituais de estruturas offshore.** Rio de Janeiro. 269 p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Estruturas offshore têm demandado, em função do aumento da profundidade da lâminha de água e da severidade do ambiente, análises de vibração cada vez mais confiáveis. Em face de oscilações com grandes deslocamentos, torna-se imprescindível uma análise não linear dessas estruturas. Métodos numéricos como os elementos finitos constituem-se numa tarefa computacionalmente custosa, uma vez que os acoplamentos modais tornam necessários modelos com muitos graus de liberdade. Isso dificulta as análises paramétricas e prolonga os ciclos de projeto para estruturas offshore. Uma alternativa a esses problemas é o uso de modelos de ordem reduzida. Os modos normais não lineares têm-se mostrado uma ferramenta eficiente na derivação de modelos de ordem reduzida para análises de vibrações não lineares. Isso ocorre porque um número menor de modos não lineares, em relação aos modelos com modos lineares, é necessário para se obter o mesmo nível de precisão num modelo reduzido. Esse trabalho utiliza modelos de ordem reduzida, obtidos por meio de análise modal não linear, para o estudo de vibração de modelos simplificados de estruturas offshore. Três exemplos de aplicação são utilizados: pêndulo invertido, torre articulada e plataforma “spar”. Além dos métodos baseado no procedimento de Galerkin e o assintótico, um procedimento numérico alternativo é proposto para obtenção dos modos, podendo ser utilizado para construção dos modos essencialmente não lineares. As vibrações livres e forçadas são estudadas. A estabilidade das soluções é analisada utilizando-se a teoria de Floquet, diagramas de bifurcação e de Mathieu e seções de Poincaré. As seções de Poincaré são também utilizadas para identificar a multiplicidade dos modos não lineares e a existência de multimodos. Os resultados são comparados com a solução obtida da integração numérica do sistema original de equações, mostrando uma boa precisão dos modelos reduzidos.

Palavras-chave

Modos normais não lineares; análise modal; estruturas offshore; vibrações não lineares; instabilidade dinâmica.

Abstract

Gavassoni Neto, Elvídio; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor); Roehl, Deane de Mesquita (Co-advisor). **Application of nonlinear vibration modes to conceptual models of offshore structures.** Rio de Janeiro. 269 p. PhD. Thesis – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The increasing water depth and the ocean adverse environment demand more accurate vibration analysis of offshore structures. Due to large amplitude oscillations, a nonlinear vibration analysis becomes necessary. Numerical methods such as finite element constitute a computationally expensive task when applied to these problems, since the occurrence of modal coupling demands a high number of degrees-of-freedom. A feasible possibility to overcome these difficulties is the use of low order models. The nonlinear normal modes have been shown to be an effective tool in the derivation of reduced order models in nonlinear dynamics. In the use of nonlinear modal analysis fewer modes are required to achieve a given level of accuracy in comparison to the use of linear modes. This work uses the nonlinear normal modes to derive low dimensional models to study the vibration of simplified models of offshore structures. Three examples are considered: an inverted pendulum, an articulated tower and a "spar" platform. Both free and forced vibrations are studied. The asymptotic and Galerkin-based methods are used to derive the normal modes. In addition, an alternative numerical procedure to construct such modes is proposed, which can be used to derive coupled modes. The solution stability is determined by the use of the Floquet theory, bifurcation and Mathieu diagrams, and Poincaré sections. The Poincaré sections are also used to investigate the multiplicity of modes and multimodes. The results obtained from the numerical integration of the original system are favourably compared with those of the reduced order models, showing the accuracy of the reduced models.

Keywords

Nonlinear normal modes; modal analysis; offshore structures; nonlinear vibrations, dynamic instability.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de Símbolos

a,	Amplitude dos deslocamentos em coordenadas polares;
a_i,	Coeficiente da expansão modal individual para deslocamentos;
a_{ij},	Coeficiente dos termos de aceleração;
$\overline{a}_i$,	Coeficiente não linear das equações de movimento;
a_i^j,	Coeficiente da expansão multimodal para deslocamentos;
A_i,	Pico de amplitude;
b_i,	Coeficiente da expansão modal individual para velocidades;
$\overline{b}_i$,	Coeficiente não linear das equações de movimento;
b_i^j,	Coeficiente da expansão multimodal para velocidades;
B,	Centro de empuxo;
c,	Constante de amortecimento por unidade de comprimento;
c_{cr},	Constante de amortecimento crítico;
c_i,	Constantes da solução da equação diferencial de movimento linear;
c_{ij},	constante de proporcionalidade;
C_A,	Coeficiente de massa adicionada;
C_D,	Coeficiente de arrasto;
C_{ij},	Identificação das células no multipameamento de Poincaré;
C_i^{im},	Coeficientes de expansão no método de Galerkin;
C_D,	Coeficiente de inércia;
d_0,	Diâmetro externo;
d_i,	Diâmetro interno;
D,	Diâmetro do casco da plataforma;
D_i^{im},	Coeficientes de expansão no método de Galerkin;
D_f,	Calado da plataforma;
e,	Extensão da mola;
f_i,	Vetor de forças generalizadas;
f_n,	Força de fluídos normal à estrutura;
f_{nx},	Componente na direção x da força de fluídos normal à estrutura;
f_{ny},	Componente na direção y da força de fluídos normal à estrutura;
f_{nz},	Componente na direção z da força de fluídos normal à estrutura;

f_0, Parâmetro adimensional de controle de carga externa;

F_b, Força de empuxo;

F_c, Força devido à corrente;

F_{cx}, Componente na direção x da força devido à corrente;

F_{cy}, Componente na direção y da força devido à corrente;

F_x, Componente na direção x da carga externa;

F_y, Componente na direção y da carga externa;

F_0, Amplitude da carga harmônica externa;

F^*_0, Amplitude da carga harmônica externa divida por M_{eq};

g, Aceleração da gravidade;

G, Centro de gravidade;

GM, Altura metacêntrica;

h, Nível de energia de um sistema;

h_0, Nível de energia de referência;

h_u, Dimensão da célula na direção dos deslocamentos;

h_v, Dimensão da célula na direção das velocidades;

H, Hamiltoniano;

H_{fb}, Borda livre;

H_w, Altura da lâmina de água;

J, Funcional de energia;

k_i, Rigidez extensional ou rotacional de uma mola;

k_ω, Número de onda;

K, Ponto de quilha;

K_i, Amplitude da força externa na direção i;

$\overline{K}_i$, Amplitude da força externa divida pela massa equivalente;

K_t, Equivalente à matriz de rigidez tangente;

KG, Distância entre o ponto de quilha e o centro de gravidade;

KB, Distância entre o ponto de quilha e o centro de empuxo;

l, Comprimento de um elemento estrutural;

l_{sub}, Comprimento submerso de um elemento estrutural;

l_{sub}, Comprimento submerso de um elemento estrutural num instante t;

l_0, Comprimento indeformado de um elemento estrutural;

l_f, Comprimento deformado de um elemento estrutural;

l^*, Coordenada axial da coluna;

L_g, Lagrangeano;

m, Massa concentrada de um elemento estrutural;

m_i, Matriz dos coeficientes das equações de restrição;

M, Massa da plataforma;

M_c, Metacentro;

M_{eq}, Massa equivalente da estrutura;

M_i, Matriz de transformação de coordenadas;

M_m, Número de modos simulados;

M_n, Matriz de monodromia;

M_x, Momento na direção x;

M_y, Momento na direção x;

n, Número de graus de liberdade;

n_a, Número de funções de expansão para a amplitude;

n_ϕ, Número de funções de expansão para o ângulo fase;

N, Ordem de aproximação no método assintótico;

N_{eq}, Número de equações do sistema;

N_u, Número de células na direção dos deslocamentos;

N_v, Número de células na direção das velocidades;

P, Peso de uma massa pontual;

P_{col}, Peso da coluna;

P_{cr}, Primeira carga crítica de uma estrutura;

$P_i(u,v)$, Função de restrição de deslocamentos;

P_{ij}, Ponto de centro;

PS_{ij}, Ponto de sela;

$Q_i(u,v)$, Função de restrição de velocidades;

r, Raio em coordenadas polares;

S_M, Variedades invariantes de ordem M;

t, Variável para indicar o tempo;

T, Energia cinética;

T_a, Energia cinética da massa adicionada;

T_c, Energia cinética da coluna;

T_M, Energia cinética da plataforma;

T_f, Período de oscilação da carga externa;

T_i, Período de oscilação do sistema;

$T_{i,m}$, Funções de forma para o método de Galerkin;

u, Deslocamento adimensional do par mestre;

u_f, Deslocamento adimensional do par mestre de carga;

u_i, Deslocamento dinâmico na forma adimensional;

u_{is}, Deslocamento estático na forma adimensional;

u_{it}, Deslocamento total na forma adimensional;

u_{i0}, Deslocamento iniciai na forma adimensional;

u_0^i, Condição inicial de deslocamento;

u^*, Solução da equação de movimento;

$\overline{u}_i$, Deslocamento adimensional na formulação estática;

U, Energia de deformação interna;

$U_{i,m}$, Funções de forma para o método de Galerkin;

U_s, Energia de deformação interna devida a deslocamento estático;

U_t, Energia de deformação interna devida a deslocamento total;

v, Velocidade adimensional do par mestre;

v_c, Velocidade da corrente;

v_{c0}, Velocidade da corrente na superfície de água;

v_r, Velocidade relativa entre a estrutura e o fluído;

v_{res}, Velocidade resultante do fluído;

$v^n{}_r$, Velocidade relativa normal entre a estrutura e o fluído;

$v^n{}_{res}$, Velocidade resultante do fluído normal à estrutura;

v_{rx}, Componente na direção x da velocidade relativa entre a estrutura e fluído;

v_{resx}, Velocidade resultante do fluído na direção x;

$v^n{}_{rx}$, Componente na direção x da velocidade relativa normal entre a estrutura e o fluído;

$v^n{}_{resx}$, Velocidade resultante do fluído normal à estrutura na direção x;

v_{ry}, Componente na direção y da velocidade relativa entre a estrutura e o fluído;

v_{resy}, Velocidade resultante do fluído na direção y;

$v^n{}_{ry}$, Componente na direção y da velocidade relativa normal entre a estrutura e o fluído;

v^n_{resy}, Velocidade resultante do fluído normal à estrutura na direção *y*;

v_{rz}, Componente na direção *z* da velocidade relativa entre a estrutura e o fluído;

v_{resz}, Velocidade resultante do fluído na direção *z*;

v^n_{rz}, Componente na direção *z* da velocidade relativa normal entre a estrutura e o fluído;

v^n_{resz}, Velocidade resultante do fluído normal à estrutura na direção *z*;

v_{ω}, Velocidade da onda;

$v_{\omega x}$, Componente da velocidade da onda na direção *x*;

$v_{\omega y}$, Componente da velocidade da onda na direção *y*;

$v_{\omega z}$, Componente da velocidade da onda na direção *z*;

v^n_{ω}, Velocidade normal da onda;

$v^n_{\omega x}$, Componente da velocidade normal da onda na direção *x*;

$v^n_{\omega y}$, Componente da velocidade normal da onda na direção *y*;

$v^n_{\omega z}$, Componente da velocidade normal da onda na direção *z*;

u_f, Velocidade adimensional do par mestre de carga;

v_0^i, Condição inicial de velocidade;

V, Potencial das cargas externas;

V_w, Volume de água deslocado pela estrutura;

w, Deslocamento no espaço modal;

W, Trabalho realizado por forças conservativas;

W_c, Trabalho devido à força de corrente;

W_{col}, Trabalho devido ao peso da coluna;

W_M, Trabalho devido ao peso da plataforma;

W_{nc}, Trabalho realizado por forças não conservativas;

W_s, Trabalho devido a deslocamento estático;

W_t, Trabalho devido a deslocamento estático;

x, Eixo transversal ao do elemento estrutural;

x_c, Coordenada do ponto da resultante da força de corrente na direção do eixo *x*;

x_f, Variável representando a carga externa;

x_i, Graus de liberdade;

x_M, Coordenada da extremidade da coluna na direção *x*;.

x_n, Deslocamento normal à estrutura na direção x;

x_{0i}, Vetor posição inicial da extremidade superior do elemento estrutural;

x_{0s}, Vetor posição inicial da extremidade superior do elemento estrutural;

X, Vetor de amplitudes dimensionais dos modos de vibração;

X^*, Amplitude dos modos de vibração;

y, Eixo transversal ao elemento estrutural;

y_c, Coordenada do ponto da resultante da força de corrente na direção do eixo y;

x_f, Derivada da variável representando a carga externa;

x_i, Derivadas dos deslocamentos;

y_M, Coordenada da extremidade da coluna na direção y;

y_n, Deslocamento normal à estrutura na direção y;

z, Eixo axial ao elemento estrutural;

z_c, Coordenada do ponto da resultante da força de corrente na direção do eixo z;

z_M, Coordenada da extremidade da coluna na direção z;

z_n, Deslocamento normal à estrutura na direção z;

α, Ângulo de inclinação das molas extensionais;

α_c, Ângulo de direção da corrente marítima;

α_i, Ângulo de imperfeição;

β, Ângulo da carga harmônica com eixo y;

β_1, Parâmetro adimensional da equação de Mathieu;

δ, Variação durante um dado intervalo de tempo;

δu, Perturbação em termos de deslocamentos;

δv, Perturbação em termos de velocidades;

$\delta(\tau)$ Perturbação da solução;

$\delta\lambda_f$, Correção do incremento do parâmetro de nível de freqüência;

δx, Deslocamento inicial na direção x;

δy, Deslocamento inicial na direção y;

δX, Correção do incremento de amplitude;

Δ, Deslocamento da extremidade de um membro estrutural;.

Δ_b, Deslocamento do centro de empuxo;

Δl, Comprimento de arco;

Δu, Incremento de deslocamentos;

Δv, Incremento de velocidades;

$\Delta\lambda_f$, Variação do parâmetro de nível de freqüência de arco.

ΔX Variação da amplitude.

$\Delta\Pi$ Variação de energia potencial total;

ϕ, Ângulo de fase;

ϕ_c, Ângulo de inclinação da coluna;

ϕ_i, Rotação dinâmica;

ϕ_r, Vetor de resíduos;

ϕ_{is}, Rotação estática;

ϕ_{it}, Rotação total;

Φ, Autovetores;

γ, Ângulo de atuação da carga harmônica;

Γ, Parâmetro adimensional de carga;

η, Perfil de onda;

η_0, Amplitude de onda;

κ, Parâmetro adimensional da equação de Mathieu;

λ, Razão entre P e P_{cr};

λ_f, Parâmetro de nível de freqüência;

λ_i, Multiplicador de Floquet;

μ_i, Parâmetro de amortecimento na direção i;

Π, Energia potencial total;

θ_i, Rotações dinâmicas da plataforma;

θ_{is}, Rotações estáticas da plataforma;

θ_{it}, Rotações totais da plataforma;

ρ_c, Massa específica da coluna;

ρ_w, Massa específica da água;

Σ_i, Seção de Poincaré;

τ, Parâmetro adimensional da coordenada temporal;

τ^*, Parâmetro adimensional da equação de Mathieu;

ω,	Frequência de oscilação do sistema;
ω_f,	Frequência da força externa;
ω_p,	Frequência de natural de um pêndulo simples;
ω_ω,	Frequência da onda;
ω_0,	Frequência natural de oscilação do sistema;
Ω,	Parâmetro adimensional de frequência;
ν,	Constante positiva;
ξ,	Fator de amortecimento;
ξ_i,	Fator de amortecimento na direção i;
ψ,	Parâmetro de escala;
Ψ,	Vetor de equações algébricas não lineares;

“The sages have a hundred maps to give
That trace their crawling cosmos like a tree,
They rattle reason out through many a sieve
That stores the sand and lets the gold go free:
And all these things are less than dust to me
Because my name is Lazarus and I live”
(G. K. Chesterton)