

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Elvídio Gavassoni Neto

**Aplicação dos modos de vibração não lineares a modelos
conceituais de estruturas offshore**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil do Departamento de
Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da
PUC-Rio

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves

Co-orientadora: Profa. Deane de Mesquita Roehl

Rio de Janeiro

Setembro de 2012



Elvídio Gavassoni Neto

Aplicação dos modos de vibração não lineares a modelos conceituais de estruturas offshore

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Orientador

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Profa. Deane de Mesquita Roehl

Co-orientadora

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli

Escola Politécnica - USP-SP

Prof. Ney Roitmann

Programa de Engenharia Civil – COPPE/UFRJ

Prof. Breno Pinheiro Jacob

Programa de Engenharia Civil – COPPE/UFRJ

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 28 de setembro de 2012

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, do orientador e da universidade.

Elvídio Gavassoni Neto

Graduou-se em engenharia civil na UFES (Universidade Federal do Espírito Santo) em 2005. Possui mestrado em engenharia civil na PUC-RIO com ênfase em estruturas. É engenheiro civil da PETROBRAS TRANSPORTE.

Ficha Catalográfica

Gavassoni Neto, Elvídio

Aplicação dos modos de vibração não lineares a modelos conceituais de estruturas offshore / Elvídio Gavassoni Neto; orientador: Paulo Batista Gonçalves ; orientadora: Deane de Mesquita Roehl. – 2012.

269 f. il. ; 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2012.
Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Modos normais não lineares. 3. Análise modal. 4. Estruturas offshore. 5. Vibrações não lineares. 6. Instabilidade dinâmica. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Roehl, Deane de Mesquita. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

Agradecimentos

A reflexão para escrita destas palavras, que apesar de aparecerem na alvorada desse texto são na verdade a marca do seu ocaso, faz-me novamente voltar aos inefáveis versos de Eliot: “In the uncertain hour before the morning/ Near the ending of interminable night/ At the recurrent end of the unending/ We shall not cease from exploration/ And the end of all our exploring/ Will be to arrive where we started.”

Assim chego ao começo, nos últimos momentos do doutorado volto ao primeiro ano na escola. Talvez por se tratar da primeira vez que finalizava uma etapa na vida perguntei à minha professora, no final do ano letivo – quando terminam os estudos? A resposta, como quase tudo que não apenas leva ao aprendizado, mas, além disso, ao conhecimento da verdade, não veio de forma fechada: “não existe uma última série, o último grau dos estudos pode ser o doutorado, mas o aprendizado nunca termina! Jamais se deve deixar de estudar!” Passados vinte e sete anos desde aquele primeiro passo, ao estar prestes a dar este que quando criança projetei ser o último, começo a entender a resposta da professora Cláudia e experimentar a verdade dos versos de Eliot: “There is no end, but addition.”

“Toute invention vraie, toute création vraie suppose la mémoire” (Comte-Sponville). Uma vez mais sigo o conselho contido no hino dos paulistas: “Deixa para trás o presente/ Olha o passado à frente” Nesse sentido a gratidão é uma oportunidade extra, é o prolongamento de um contentamento passado, é um eco de uma alegria já sentida, é, portanto, felicidade adicionada de felicidade. Começo a ecoar essa felicidade, agradecendo aos meus orientadores. Por não serem indulgentes ao ponto de me apontarem todos os caminhos, nem tampouco negligentes a ponto de não me indicarem nenhum, tornando assim possível que eu chegasse até aqui.

À professora Deane, por ser a prova viva que é preciso sensibilidade e paciência para dar conselhos específicos a cada pessoa. Por entender que ensinar significa ampliar horizontes, elevar expectativas e estimular interesses, não somente no

campo intelectual, mas também no ético e no espiritual. Por me confirmar a lição há muito aprendida que a moral não é nem um mercado nem um espelho.

Ao professor Paulo, por ser o exemplo real de que um grande homem está sempre pronto para ser pequeno. Pelo seu desprezo de provar, de prevalecer e de aparecer. Por me ensinar, não por palavras, mas pelo exemplo, que a inteligência é a arte de reduzir o mais complexo ao mais simples, e nunca o contrário. Pela imensa generosidade de sempre ter me deixado sair de sua sala mais confiante e tranquilo do que nela entrei.

A todos os meus professores que magnificam o seu ofício, tornando apropriado o título de mestre por eles portado, desde a sábia professora Cláudia da primeira série até os meus caros professores da graduação, do mestrado e do doutorado. Em especial ao professor Roehl, que com uma régua, uma borracha e um sorriso enérgico me ensinou mais dinâmica estrutural do que qualquer livro foi e será capaz de fazê-lo. À Rita, pela sua constante ajuda, à biblioteca da PUC e seus eficientes funcionários, aos meus gerentes na PETROBRAS Transporte.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado

“Friendship should be surrounded with ceremonies and respects, and not crushed into corners. Friendship requires more time than poor busy men can usually command”. (Emerson). Assim sou grato aos amigos que são generosos por compartilhar parte do seu tempo comigo. À Jarek, por seu carinho e atenção incomparáveis. À Lorena, por sua espontaneidade e improvisação alegre. À Marchesi, por sua ajuda irrestrita e lealdade. À Marianna, pelos momentos compartilhados, pela coragem impressionante e por ser uma ótima “maninha”. À Buback, por sua transparência de olhar, pureza de coração, sinceridade de discurso, retidão de alma e de comportamento. Ao Arreguy, pela generosidade no servir, empenho no realizar e inteligência no saber. À Carla, pela doçura e carinho fraternal. Ao Betaum, por seu caráter exemplar e sua peculiar tranquilidade.

Vez por outra a amizade é acompanhada por um companheirismo tal que o resultado é um genuíno sentimento de fraternidade. É assim com os meus “irmãos”: Slongo, Bazan e Sutili. Ao Slongo, por saber que toda virtude é

coragem, que toda boa escolha é um esforço e que a fidelidade é a base de toda a moral. Ao Bazan, por me ensinar a verdadeira definição de progresso pessoal, pela invulgar capacidade de compreensão e pela sua tremenda determinação. Ao Sutili, cujo comportamento reflete muitos dos vários conteúdos e formas que a generosidade possui: o heroísmo, a equidade, a benevolência, a compaixão e, sobretudo, o seu nome mais belo, o seu verdadeiro segredo: a bondade. Ao Stanley, por ser meu amigo desde muito antes que eu soubesse o significado da palavra da amizade.

"Dear to us are those who love us, the swift moments we spend with them are a compensation for a great deal of misery; they enlarge our life" (Emerson). Dentre os que expandem minha experiência nesta jornada mortal agradeço ao meu padrasto pela sua serenidade, à Thelma, por sua brandura e cuidado e ao pai, cujo exemplo de trabalho e amor me são muito caros. À Julinha, pelas providenciais interrupções, enquanto trabalhava nesta tese, para assistir desenhos no meu computador. Ao meu irmão, cuja confiança e admiração em mim depositadas são incondicionais e por me superar em todas as qualidades que vale a pena uma pessoa ter. Agradeço à Nonna, por ser a pessoa mais inteligente que conheço e pelo amor imenso mesmo que eu não leve muito jeito para carpir o quintal ou consertar o encanamento da pia. E agradeço à Mamma, que é o anjo a quem devo tudo o que sou e que gostaria de ser e por promover o bem assim como o sol irradia sua luminosidade.

Agradeço ao Pai Celestial, cuja glória é a inteligência, cuja luz não pode ser obscurecida e cujo amor excede a todo entendimento. Voltando a Eliot: "[...] that the end precedes the beginning/ And the end and the beginning were always there/ Before the beginning and after the end./ And all is always now." Assim não insisto no ponto final do passado ou na interrogação do futuro, mas me converto às reticências do presente...

Resumo

Gavassoni Neto, Elvídio; Gonçalves, Paulo Batista; Roehl, Deane de Mesquita. **Aplicação dos modos de vibração não lineares a modelos conceituais de estruturas offshore**. Rio de Janeiro. 269 p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Estruturas offshore têm demandado, em função do aumento da profundidade da lâminha de água e da severidade do ambiente, análises de vibração cada vez mais confiáveis. Em face de oscilações com grandes deslocamentos, torna-se imprescindível uma análise não linear dessas estruturas. Métodos numéricos como os elementos finitos constituem-se numa tarefa computacionalmente custosa, uma vez que os acoplamentos modais tornam necessários modelos com muitos graus de liberdade. Isso dificulta as análises paramétricas e prolonga os ciclos de projeto para estruturas offshore. Uma alternativa a esses problemas é o uso de modelos de ordem reduzida. Os modos normais não lineares têm-se mostrado uma ferramenta eficiente na derivação de modelos de ordem reduzida para análises de vibrações não lineares. Isso ocorre porque um número menor de modos não lineares, em relação aos modelos com modos lineares, é necessário para se obter o mesmo nível de precisão num modelo reduzido. Esse trabalho utiliza modelos de ordem reduzida, obtidos por meio de análise modal não linear, para o estudo de vibração de modelos simplificados de estruturas offshore. Três exemplos de aplicação são utilizados: pêndulo invertido, torre articulada e plataforma “spar”. Além dos métodos baseado no procedimento de Galerkin e o assintótico, um procedimento numérico alternativo é proposto para obtenção dos modos, podendo ser utilizado para construção dos modos essencialmente não lineares. As vibrações livres e forçadas são estudadas. A estabilidade das soluções é analisada utilizando-se a teoria de Floquet, diagramas de bifurcação e de Mathieu e seções de Poincaré. As seções de Poincaré são também utilizadas para identificar a multiplicidade dos modos não lineares e a existência de multimodos. Os resultados são comparados com a solução obtida da integração numérica do sistema original de equações, mostrando uma boa precisão dos modelos reduzidos.

Palavras-chave

Modos normais não lineares; análise modal; estruturas offshore; vibrações não lineares; instabilidade dinâmica.

Abstract

Gavassoni Neto, Elvídio; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor); Roehl, Deane de Mesquita (Co-advisor). **Application of nonlinear vibration modes to conceptual models of offshore structures.** Rio de Janeiro. 269 p. PhD. Thesis – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The increasing water depth and the ocean adverse environment demand more accurate vibration analysis of offshore structures. Due to large amplitude oscillations, a nonlinear vibration analysis becomes necessary. Numerical methods such as finite element constitute a computationally expensive task when applied to these problems, since the occurrence of modal coupling demands a high number of degrees-of-freedom. A feasible possibility to overcome these difficulties is the use of low order models. The nonlinear normal modes have been shown to be an effective tool in the derivation of reduced order models in nonlinear dynamics. In the use of nonlinear modal analysis fewer modes are required to achieve a given level of accuracy in comparison to the use of linear modes. This work uses the nonlinear normal modes to derive low dimensional models to study the vibration of simplified models of offshore structures. Three examples are considered: an inverted pendulum, an articulated tower and a “spar” platform. Both free and forced vibrations are studied. The asymptotic and Galerkin-based methods are used to derive the normal modes. In addition, an alternative numerical procedure to construct such modes is proposed, which can be used to derive coupled modes. The solution stability is determined by the use of the Floquet theory, bifurcation and Mathieu diagrams, and Poincaré sections. The Poincaré sections are also used to investigate the multiplicity of modes and multimodes. The results obtained from the numerical integration of the original system are favourably compared with those of the reduced order models, showing the accuracy of the reduced models.

Keywords

Nonlinear normal modes; modal analysis; offshore structures; nonlinear vibrations, dynamic instability.

Sumário

1 Introdução	31
1.1. Objetivo	35
1.2. Organização do trabalho	35
2 Modos Normais Não Lineares para Sistemas Discretos	38
2.1. Histórico da análise modal não linear	39
2.1.1. Fase I – Primórdios (1889 – 1959)	40
2.1.2. Fase II – Formalização (1959 - 1966)	40
2.1.3. Fase III – Desenvolvimento teórico (1964-1997);	42
2.1.4. Fase IV – Variedades invariantes (1991-1994)	43
2.1.5. Fase V – Aplicações práticas (1994-atualmente);	44
2.2. Análise modal linear	46
2.3. Definição de modos normais não lineares	47
2.3.1. Definição de Rosemberg	48
2.3.2. Definição de Shaw e Pierre	50
2.3.3. Multimodos	52
2.4. Métodos de derivação dos modos normais não lineares	53
2.4.1. Métodos assintóticos	55
2.4.2. Multimodo	63
2.4.3. Método baseado no procedimento de Galerkin	65
2.5. Propriedades fundamentais	66
2.6. Aplicações	72
2.6.1. Redução modal	72
2.6.2. Vibração amortecida	74
2.6.3. Vibração forçada	74
2.7. Análise modal linear x não linear	76
3 Pêndulo Invertido	78
3.1. Formulação	78
3.2. Modelo perfeito	91

3.2.1. Modos normais lineares	91
3.2.2. Modos normais não lineares	93
3.2.3. Multiplicidade de modos	98
3.2.4. Resposta no tempo	102
3.2.5. Relação frequência-amplitude	104
3.2.6. Espaço de fase	112
3.2.7. Vibração Forçada	113
3.2.8. Diagramas de bifurcação	117
3.2.9. Estabilidade	119
3.3. Modelo imperfeito	123
3.3.1. Modos normais lineares	125
3.3.2. Modos normais não lineares	126
3.3.3. Multiplicidade de modos	130
3.3.4. Resposta no tempo	131
3.3.5. Relação frequência-amplitude	134
3.3.6. Espaço de fase	136
3.3.7. Vibração Forçada	139
3.3.8. Diagramas de bifurcação	144
3.3.9. Estabilidade	145
3.3.10. Procedimento numérico para obtenção dos modos não lineares	145
4 Torre articulada	150
4.1. Formulação	150
4.1.1. Análise estática	152
4.1.2. Análise dinâmica	156
4.1.3. Teoria de ondas	159
4.1.4. Dados para exemplo numérico	162
4.2. Análise sem corrente	162
4.2.1. Modos normais lineares	163
4.2.2. Modos normais não lineares	164
4.2.3. Multiplicidade de modos	166
4.2.4. Resposta no tempo	167
4.2.5. Relação frequência-amplitude	172

4.2.6. Espaço de fase	174
4.2.7. Vibração forçada	175
4.2.8. Diagramas de bifurcação	181
4.2.9. Estabilidade	184
4.3. Análise com corrente	188
4.3.1. Modos normais lineares	190
4.3.2. Modos normais não lineares	192
4.3.3. Multiplicidade de modos	194
4.3.4. Relação frequência-amplitude	198
4.3.5. Vibração forçada	200
4.3.6. Diagramas de bifurcação	202
4.3.7. Estabilidade	203
4.4. Análise com a teoria de ondas planas	203
5 Plataforma “Spar”	206
5.1. Formulação	206
5.2. Modos normais lineares	211
5.3. Modos normais não lineares	212
5.4. Resposta no tempo	216
5.5. Relação frequência-amplitude	217
5.6. Espaço de fase	221
5.7. Vibração forçada	221
5.7.1. Curvas de ressonância	222
5.7.2. Diagramas de bifurcação	223
5.7.3. Estabilidade	225
5.8. Excitação paramétrica	225
5.8.1. Resposta no tempo	229
5.8.2. Estabilidade	232
6 Conclusões e sugestões	235
6.1. Conclusões	235
6.2. Sugestões	238
7 Referências Bibliográficas	239

Apêndice A Glossário de termos utilizados na análise modal não

linear 251

Apêndice B Glossário de termos de estruturas offshore 258

Anexo I Relações trigonométricas 260

Anexo II Formulação do método do controle de comprimento de arco 261

Anexo III Procedimentos numéricos 263

III.1 Multiplicadores de Floquet 263

III.2 Multimapeamento de Poincaré 265

III.3 Pontos Fixos 267

Lista de figuras

Figura 1-1 Organização geral do trabalho.	36
Figura 1-2 Organização dos capítulos de aplicação prática.	37
Figura 2-1 Fluxograma do método assintótico.	63
Figura 3-1 Modelo do pêndulo invertido.	80
Figura 3-2 Configuração do pêndulo: (a) durante o movimento; (b) imperfeição geométrica inicial.	82
Figura 3-3 Configuração do pêndulo com imperfeição geométrica inicial: (a) plano xy ; (b) plano u_1z .	85
Figura 3-4 Espaço de configuração – modos normais similares.	99
Figura 3-5 Seção de Poincaré Σ_I para o modelo perfeito: (a) 50% da energia do ponto de sela; (b) 5% da energia do ponto de sela.	102
Figura 3-6 Resposta no tempo para os modos similares: (a) $u_2 \times u_1$; (b) $u_1 \times t$; (c) $u_2 \times t$.	105
Figura 3-7 Resposta no tempo para os modos P31 e P41: (a) $u_2 \times u_1$; (b) $u_1 \times t$; (c) $u_2 \times t$.	105
Figura 3-8 Resposta no tempo para os modos PS11 e PS21: (a) $u_2 \times u_1$; (b) $u_1 \times t$; (c) $u_2 \times t$.	106
Figura 3-9 Relações frequência-amplitude para os modos similares.	109
Figura 3-10 Relações frequência-amplitude: (a) modo P01; (b) modos P11 e P21.	111
Figura 3-11 Relações frequência-amplitude: (a) modo P31; (b) modo P41.	111
Figura 3-12 Curvas de ressonância para os modos PS11 e PS21.	112
Figura 3-13 Curvas de frequência-energia – modos similares.	113
Figura 3-14 Espaço de fase: (a) modo P01; (b) modo P11; (c) modo P21 - as órbitas correspondem à integração do sistema de equações original e o campo vetorial ao sistema aproximado.	113
Figura 3-15 Curvas de ressonância para vibração forçada amortecida – modos similares. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.	116

Figura 3-16 Curvas de ressonância – modo P01: (a) influência da amplitude da carga; (b) influência do amortecimento. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas	119
Figura 3-17 Curvas de ressonância - influência do ângulo γ .	119
Figura 3-18 Diagrama de bifurcação – modos P11 e P21: (a) deslocamentos; (b) velocidades. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.	120
Figura 3-19 Diagrama de bifurcação – modo P01: (a) deslocamentos; (b) velocidades. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.	121
Figura 3-20 Influência do amortecimento no diagrama de estabilidade de Mathieu: (a) modo P01; (b) modos P11 e P21.	123
Figura 3-21 Correlação entre os diagramas de bifurcação e de Mathieu: (a) modo P01; (b) modos P11 e P21 – $\xi=0,030$, P1 ($\Omega=0,95$) e P2 ($\Omega=1,50$).	123
Figura 3-22 Variação das frequências naturais com a direção da imperfeição.	127
Figura 3-23 Variedades invariantes lineares para o primeiro modo, ($\alpha_i=0$ rad): (a) projeção dos deslocamentos; (b) projeção das velocidades.	132
Figura 3-24 Variedades invariantes lineares para o segundo modo, ($\alpha_i=0$ rad): (a) projeção dos deslocamentos; (b) projeção das velocidades.	132
Figura 3-25 Variedades invariantes não lineares para o primeiro modo, ($\alpha_i=0$ rad): (a) projeção dos deslocamentos; (b) projeção das velocidades.	133
Figura 3-26 Variedades invariantes não lineares para o segundo modo, ($\alpha_i=0$ rad): (a) projeção dos deslocamentos; (b) projeção das velocidades.	133
Figura 3-27 Seção de Poincaré Σ_I para o modelo com imperfeição geométrica – 50% da energia do ponto de sela, $\alpha_i=0$ rad.	134
Figura 3-28 Seção de Poincaré para o modelo com imperfeição geométrica $\alpha_i=\pi/2$ rad – 50% da energia do ponto de sela: (a) Σ_I ; (b) Σ_2 .	135
Figura 3-29 Seção de Poincaré para o modelo com imperfeição geométrica $\alpha_i=\pi/2$ rad – 5% da energia do ponto de sela: (a) Σ_I ; (b) Σ_2 .	135
Figura 3-30 Espaço de configuração – modos não lineares – 50% da energia do ponto de sela, $\alpha_i=0$ rad.	136
Figura 3-31 Espaço de configuração – modos não lineares, $\alpha_i=\pi/2$ rad:	

(a) 50% da energia do ponto de sela; (b) 5% da energia do ponto de sela.	136
Figura 3-32 Curvas de ressonância para sistema com imperfeição:	
(a) $\alpha_i=0$ rad; (b) $\alpha_i=\pi/2$ rad.	138
Figura 3-33 Curvas de frequência-energia: (a) $\alpha_i=0$ rad; (b) $\alpha_i=\pi/2$ rad.	138
Figura 3-34 Espaço de fase, $\alpha_i=0$ rad: (a) modo P11; (b) modo P21 - linhas contínuas – solução de referência; linhas pontilhadas – modelo reduzido.	138
Figura 3-35 Variação das funções de restrição com o tempo, primeiro modo: (a) P – seção $v=0$; (b) Q – seção $u=0$.	143
Figura 3-36 Variação das funções de restrição com o tempo, segundo modo: (a) P – seção $v=0$; (b) Q – seção $u=0$.	143
Figura 3-37 Variedades invariantes forçadas: (a) influência do ângulo β ; (b) influência da amplitude da carga externa – primeiro modo.	144
Figura 3-38 Curvas de ressonância para vibração forçada amortecida, (a) $\alpha_i=0$ rad. (b) $\alpha_i=\pi/2$ rad - Ramos estáveis (linha contínua); ramos instáveis (linha pontilhada).	144
Figura 3-39 Diagrama de bifurcação – modo P11, $\alpha_i=0$ rad: (a) deslocamentos; (b) velocidades. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.	146
Figura 3-40 Diagrama de bifurcação – modo P21, $\alpha_i=0$ rad: (a) deslocamentos; (b) velocidades. Ramos estáveis – linhas contínuas.	146
Figura 3-41 Influência do amortecimento no diagrama de estabilidade de Mathieu, $\alpha_i=0$ rad: (a) modo P11; (b) modo P21.	147
Figura 3-42 Correlação entre os diagramas de bifurcação e de Mathieu - modo P01; $\alpha_i=0$ rad e $\xi=0,030$.	147
Figura 3-43 Superfície modal – modo P11, $\alpha_i=0$ rad: (a) deslocamentos; (b) velocidades.	149
Figura 3-44 Superfície modal – modo P21, $\alpha_i=0$ rad: (a) deslocamentos; (b) velocidades.	149
Figura 4-1 Modelo de Augusti.	151
Figura 4-2 Modelo da torre articulada.	152
Figura 4-3 Esquema de atuação do empuxo sobre a torre articulada.	155
Figura 4-4 Perfil de onda plana.	161

Figura 4-5 Espaço de configuração – modos normais similares.	167
Figura 4-6 Seções de Poincaré: (a) seção Σ_1 ; (b) seção $\Sigma_2 - h=50\% h_0$.	168
Figura 4-8 Resposta no tempo para os modos P01 e P02: (a) projeção $\theta_2 \times \theta_1$; (b) $\theta_1 \times t$; (c) $\theta_2 \times t$.	170
Figura 4-9 Resposta no tempo para os modos P11 (P12) e P21 (P22): (a) projeção $\theta_2 \times \theta_1$; (b) $\theta_1 \times t$; (c) $\theta_2 \times t$.	170
Figura 4-10 Resposta no tempo para modo PS31 (PS32) e PS41 (PS42): (a) projeção $\theta_2 \times \theta_1$; (b) $\theta_1 \times t$; (c) $\theta_2 \times t$.	171
Figura 4-11 Resposta no tempo, comparação entre a solução de referência e modelo reduzido – modos PS31 e PS41.	173
Figura 4-12 Curvas frequência-amplitude: (a) modos similares desacoplados; (b) modos similares acoplados.	174
Figura 4-13 Curvas de frequência-energia para os modos similares.	175
Figura 4-14 Espaço de fase: (a) modos P01 e P02; (b) modos P11 e P21. Linhas contínuas – solução de referência; linhas pontilhadas – modelo reduzido.	176
Figura 4-15 Curvas de ressonância – modos P01 e P02: (a) efeito do amortecimento; (b) efeito da amplitude da carga externa. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.	179
Figura 4-16 Curvas de ressonância – modos P11 e P21: (a) efeito do amortecimento; (b) efeito da amplitude da carga externa. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.	179
Figura 4-17 Plano de fase para vibração forçada amortecida – modos P01 e P02 – $u(t=0)=0,0$ rad; $du/dt(t=0)=0,5$ rad/s: (a) resposta transiente; (b) resposta permanente.	180
Figura 4-18 Plano de fase para vibração forçada amortecida – modos P11 e P21 – $u(t=0)=0,0$ rad; $du/dt(t=0)=0,5$ rad/s: (a) resposta transiente; (b) resposta permanente.	181
Figura 4-19 Plano de fase para vibração forçada amortecida – modos PS31 e PS41: (a) Resposta transiente - $u(t=0)=-0,7$ rad; $du/dt(t=0)=0,0$ rad/s e $u(t=0)=-0,8$ rad; $du/dt(t=0)=0,0$ rad/s; (b) resposta permanente - $u(t=0)=-0,8$ rad; $du/dt(t=0)=0,0$ rad/s.	182
Figura 4-20 Curvas de ressonância - influência do ângulo γ .	182

Figura 4-21 Diagrama de bifurcação – modos P01 e P02 - $\Omega=1,300$ e $\xi=0,001$: (a) rotações; (b) velocidades rotacionais. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.	183
Figura 4-22 Órbitas no plano de fase e seções de Poincaré para os pontos da Figura 4-21.	185
Figura 4-23 Diagrama de bifurcação – modos P11 e P21 - $\Omega=1,300$ e $\xi=0,001$: (a) rotações; (b) velocidades rotacionais. Ramos estáveis – linha contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.	185
Figura 4-24 Órbitas no plano de fase e seções de Poincaré para os pontos da Figura 4-23.	186
Figura 4-25 Influência do amortecimento no diagrama de estabilidade de Mathieu: (a) modos P01 e P02; (b) modos P11 e P12.	186
Figura 4-26 Diagrama de estabilidade de Mathieu, $\Gamma \times \Omega$. (a) modos P01 e P02; (b) modos P11 e P12. $\xi=0,001$, região instável – área hachurada.	187
Figura 4-27 Resposta no tempo para P4 com perturbação inicial: (a) $\theta_1 \times t$; (b) $\theta_2 \times t$.	187
Figura 4-28 Órbita no plano de fase para o ponto P3 da Figura 4-23.	188
Figura 4-29 Variação das frequências naturais da torre articulada com a direção da corrente.	191
Figura 4-30 Espaço de configuração - modos normais não lineares: (a). $\alpha_c = 0$ rad; (b) $\alpha_c = \pi/8$ rad; (c) $\alpha_c = \pi/4$ rad.	195
Figura 4-31 Seções de Poincaré para $\alpha_c = 0$ rad: (a) seção Σ_I ; (b) seção $\Sigma_2 - h = h_0$.	196
Figura 4-32 Seções de Poincaré para $\alpha_c = \pi/8$ rad: (a) seção Σ_I ; (b) seção $\Sigma_2 - h = h_0$.	196
Figura 4-33 Seções de Poincaré para $\alpha_c = \pi/4$ rad: (a) seção Σ_I ; (b) seção $\Sigma_2 - h = h_0$	196
Figura 4-34 Seções de Poincaré para $\alpha_c = 0$ rad: (a) seção Σ_I ; (b) seção $\Sigma_2 - h = 50\% h_0$.	197
Figura 4-35 seções de Poincaré para $\alpha_c = \pi/8$ rad: (a) seção Σ_I ; (b) seção $\Sigma_2 - h = 50\% h_0$.	197
Figura 4-36 Seções de Poincaré para $\alpha_c = \pi/4$ rad: (a) seção Σ_I ; (b) seção	

$\Sigma_2 - h = 50\% h_0$.	198
Figura 4-39 Curvas de ressonância: (a) $\alpha_c = 0$ rad; (b) $\alpha_c = \pi/8$ rad; (c) $\alpha_c = \pi/4$ rad.	201
Figura 4-40 Curvas de ressonância - influência do ângulo γ , $\alpha_c = 0$ rad.	202
Figura 4-41 Diagrama de bifurcação para rotações $\alpha_c = 0$ rad - $\Omega = 1,300$ e $\xi = 0,001$. (a) modos similares; (b) modos não similares.	204
Figura 4-42 Diagrama de bifurcação para rotações - $\Omega = 1,300$ e $\xi = 0,001$: (a) $\alpha_c = \pi/8$ rad ; (b) $\alpha_c = \pi/4$ rad.	204
Figura 4-43 Diagrama de estabilidade de Mathieu, $\Gamma \times \Omega$ - $\alpha_c = 0$ rad: (a) modo similar; (b) 1º modo não similar; (c) 2º modo não similar. $\xi = 0,001$ - região instável – área hachurada.	205
Figura 4-44 Comparação da resposta no tempo para teoria de ondas e carga harmônica: (a) $\theta_I \times t$; (b) $d\theta_I/dt \times t$.	205
Figura 5-1 Modelo da plataforma tipo “spar”: (a) seis graus de liberdade; (b) principais parâmetros e dimensões.	207
Figura 5-2 Amplitudes das forças generalizadas externas: (a) força de afundamento; (b) momento de arfagem.	210
Figura 5-3 Equações de restrição para o primeiro e segundo modos – comparação entre os métodos baseado no procedimento de Galerkin e assintótico: (a) deslocamentos; (b) velocidades.	216
Figura 5-4 Equações de restrição para o primeiro e segundo modos – comparação entre o procedimento numérico e o método assintótico: (a) deslocamentos; (b) velocidade.	216
Figura 5-5 Resposta no tempo para os modos normais não lineares, c.i. : (0,010; 0,000; 0,012; 0,000): (a) $x_3 \times x_5$; (b) $x_3 \times t$; (c) $x_5 \times t$.	218
Figura 5-6 Curvas frequência-amplitude: (a) primeiro modo; (b) segundo modo.	220
Figura 5-7 Estudo de convergência das curvas de frequência-amplitude: (a) efeito do número de termos na expansão da solução; (b) efeito da não linearidade do oscilador modal.	220
Figura 5-8 Espaço de fase para o primeiro e segundo modo, (linhas contínuas – solução de referência; linhas pontilhadas – modelo reduzido).	222

Figura 5-9 Curvas de ressonância – primeiro e segundo modos: (a) Efeito do amortecimento; (b) Efeito da onda. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.	224
Figura 5-10 Curvas de ressonância – primeiro e segundo modos. Comparação entre modelo reduzido e solução numérica do sistema original. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.	224
Figura 5-11 Diagrama de bifurcação – primeiro e segundo modos: (a) rotações; (b) velocidades rotacionais. Ramos estáveis – linhas contínuas; Ramos instáveis – linhas tracejadas.	227
Figura 5-12 Órbitas no plano de fase e seções de Poincaré para os pontos da Figura 5-11	227
Figura 5-13 Influência do amortecimento no diagrama de estabilidade de Mathieu para o primeiro e o segundo modo: (a) amplitude x frequência; (b) $\Gamma \times \Omega$ ($\xi=0,010$).	228
Figura 5-14 Variação das funções de restrição com o tempo – vibração paramétrica: (a) deslocamentos – seção $v=0$; (b) velocidades – seção $u=0$.	229
Figura 5-15 Variação das funções de restrição com a frequência da onda – vibração paramétrica: (a) deslocamentos – seção $v=0$; (b) velocidades – seção $u=0$.	230
Figura 5-16 Variação das funções de restrição com a amplitude da onda – vibração paramétrica: (a) deslocamentos – seção $v=0$; (b) velocidades – seção $u=0$.	230
Figura 5-17 Resposta no tempo – $\Omega=0,200$: (a) rotações; (b) velocidades rotacionais.	231
Figura 5-18 Resposta no tempo – $\Omega=0,750$: (a) rotações; (b) velocidades rotacionais.	231
Figura 5-19 Resposta no tempo – $\Omega=1,200$. (a) rotações; (b) velocidades rotacionais.	231
Figura 5-20 Resposta no tempo comparação modelo reduzido e sistema completo de equações: (a) rotações; (b) velocidades rotacionais.	232
Figura 5-21 Resposta no tempo comparação modelo reduzido e sistema	

completo de equações na região de ressonância: (a) rotações; (b) velocidades rotacionais.	232
Figura 5-22 Fronteira de estabilidade, parâmetro de controle - amplitude das rotações e velocidades rotacionais ($\xi=0,010$).	233
Figura 5-23 Fronteira de estabilidade, parâmetro de controle - amplitude da força externa ($\xi=0,010$).	234

Lista de tabelas

Tabela 2-1 Desenvolvimento histórico da análise modal não linear.	41
Tabela 2-2 Comparativo entre análise modal linear e não linear.	77
Tabela 3-1 Coordenadas dos pontos fixos da seção de Poincaré, 50% da energia do ponto de sela.	103
Tabela 3-2 Coordenadas do ponto de sela para os modos similares.	114
Tabela 3-3 Resultados da análise modal linear – problema com imperfeição.	127
Tabela 3-4 Coordenadas dos pontos fixos das seções de Poincaré – sistema com imperfeição geométrica – 50% da energia do ponto de sela, $\alpha_i=0$ rad.	134
Tabela 4-1 Parâmetros numéricos da torre articulada.	163
Tabela 4-2 Coordenadas dos pontos fixos das seções de Poincaré.	168
Tabela 4-3 Coordenadas dos pontos dos diagramas de bifurcação da Figura 4-21.	183
Tabela 4-4 Coordenadas dos pontos dos diagramas de bifurcação da Figura 4-23.	185
Tabela 4-5 Resultados da análise modal linear – problema com corrente.	191
Tabela 4-6 Coordenadas das seções de Poincaré.	198
Tabela 5-1 Principais parâmetros da plataforma “spar”.	208
Tabela 5-2 Parâmetros do exemplo numérico da plataforma “spar”	217
Tabela 5-3 Coordenadas dos pontos dos diagramas de bifurcação da Figura 5-11.	227

Lista de Símbolos

a ,	Amplitude dos deslocamentos em coordenadas polares;
a_i ,	Coefficiente da expansão modal individual para deslocamentos;
a_{ij} ,	Coefficiente dos termos de aceleração;
\bar{a}_i ,	Coefficiente não linear das equações de movimento;
a_i^j ,	Coefficiente da expansão multimodal para deslocamentos;
A_i ,	Pico de amplitude;
b_i ,	Coefficiente da expansão modal individual para velocidades;
\bar{b}_i ,	Coefficiente não linear das equações de movimento;
b_i^j ,	Coefficiente da expansão multimodal para velocidades;
B ,	Centro de empuxo;
c ,	Constante de amortecimento por unidade de comprimento;
c_{cr} ,	Constante de amortecimento crítico;
c_i ,	Constantes da solução da equação diferencial de movimento linear;
c_{ij} ,	constante de proporcionalidade;
C_A ,	Coefficiente de massa adicionada;
C_D ,	Coefficiente de arrasto;
C_{ij} ,	Identificação das células no multipameamento de Poincaré;
C_i^{im} ,	Coefficientes de expansão no método de Galerkin;
C_D ,	Coefficiente de inércia;
d_0 ,	Diâmetro externo;
d_i ,	Diâmetro interno;
D ,	Diâmetro do casco da plataforma;
D_i^{im} ,	Coefficientes de expansão no método de Galerkin;
D_f ,	Calado da plataforma;
e ,	Extensão da mola;
f_i ,	Vetor de forças generalizadas;
f_n ,	Força de fluídos normal à estrutura;
f_{nx} ,	Componente na direção x da força de fluídos normal à estrutura;
f_{ny} ,	Componente na direção y da força de fluídos normal à estrutura;
f_{nz} ,	Componente na direção z da força de fluídos normal à estrutura;

f_0 ,	Parâmetro adimensional de controle de carga externa;
F_b ,	Força de empuxo;
F_c ,	Força devido à corrente;
F_{cx} ,	Componente na direção x da força devido à corrente;
F_{cy} ,	Componente na direção y da força devido à corrente;
F_x ,	Componente na direção x da carga externa;
F_y ,	Componente na direção y da carga externa;
F_0 ,	Amplitude da carga harmônica externa;
F_0^* ,	Amplitude da carga harmônica externa dividida por M_{eq} ;
g ,	Aceleração da gravidade;
G ,	Centro de gravidade;
GM ,	Altura metacêntrica;
h ,	Nível de energia de um sistema;
h_0 ,	Nível de energia de referência;
h_u ,	Dimensão da célula na direção dos deslocamentos;
h_v ,	Dimensão da célula na direção das velocidades;
H ,	Hamiltoniano;
H_{fb} ,	Borda livre;
H_w ,	Altura da lâmina de água;
J ,	Funcional de energia;
k_i ,	Rigidez extensional ou rotacional de uma mola;
k_ω ,	Número de onda;
K ,	Ponto de quilha;
K_i ,	Amplitude da força externa na direção i ;
\bar{K}_i ,	Amplitude da força externa dividida pela massa equivalente;
K_t ,	Equivalente à matriz de rigidez tangente;
KG ,	Distância entre o ponto de quilha e o centro de gravidade;
KB ,	Distância entre o ponto de quilha e o centro de empuxo;
l ,	Comprimento de um elemento estrutural;
l_{sub} ,	Comprimento submerso de um elemento estrutural;
l_{sub} ,	Comprimento submerso de um elemento estrutural num instante t ;
l_0 ,	Comprimento indeformado de um elemento estrutural;
l_f ,	Comprimento deformado de um elemento estrutural;

l^* ,	Coordenada axial da coluna;
L_g ,	Lagrangeano;
m ,	Massa concentrada de um elemento estrutural;
m_i ,	Matriz dos coeficientes das equações de restrição;
M ,	Massa da plataforma;
M_c ,	Metacentro;
M_{eq} ,	Massa equivalente da estrutura;
M_i ,	Matriz de transformação de coordenadas;
M_m ,	Número de modos simulados;
M_n ,	Matriz de monodromia;
M_x ,	Momento na direção x ;
M_y ,	Momento na direção y ;
n ,	Número de graus de liberdade;
n_a ,	Número de funções de expansão para a amplitude;
n_ϕ ,	Número de funções de expansão para o ângulo fase;
N ,	Ordem de aproximação no método assintótico;
N_{eq} ,	Número de equações do sistema;
N_u ,	Número de células na direção dos deslocamentos;
N_v ,	Número de células na direção das velocidades;
P ,	Peso de uma massa pontual;
P_{col} ,	Peso da coluna;
P_{cr} ,	Primeira carga crítica de uma estrutura;
$P_i(u,v)$,	Função de restrição de deslocamentos;
P_{ij} ,	Ponto de centro;
PS_{ij} ,	Ponto de sela;
$Q_i(u,v)$,	Função de restrição de velocidades;
r ,	Raio em coordenadas polares;
S_M ,	Variedades invariantes de ordem M ;
t ,	Variável para indicar o tempo;
T ,	Energia cinética;
T_a ,	Energia cinética da massa adicionada;
T_c ,	Energia cinética da coluna;
T_M ,	Energia cinética da plataforma;
T_f ,	Período de oscilação da carga externa;

T_i ,	Período de oscilação do sistema;
$T_{i,m}$,	Funções de forma para o método de Galerkin;
u ,	Deslocamento adimensional do par mestre;
u_f ,	Deslocamento adimensional do par mestre de carga;
u_i ,	Deslocamento dinâmico na forma adimensional;
u_{is} ,	Deslocamento estático na forma adimensional;
u_{it} ,	Deslocamento total na forma adimensional;
u_{i0} ,	Deslocamento inicial na forma adimensional;
u_0^i ,	Condição inicial de deslocamento;
u^* ,	Solução da equação de movimento;
\bar{u}_i ,	Deslocamento adimensional na formulação estática;
U ,	Energia de deformação interna;
$U_{i,m}$,	Funções de forma para o método de Galerkin;
U_s ,	Energia de deformação interna devida a deslocamento estático;
U_t ,	Energia de deformação interna devida a deslocamento total;
v ,	Velocidade adimensional do par mestre;
v_c ,	Velocidade da corrente;
v_{c0} ,	Velocidade da corrente na superfície de água;
v_r ,	Velocidade relativa entre a estrutura e o fluido;
v_{res} ,	Velocidade resultante do fluido;
v_r^n ,	Velocidade relativa normal entre a estrutura e o fluido;
v_{res}^n ,	Velocidade resultante do fluido normal à estrutura;
v_{rx} ,	Componente na direção x da velocidade relativa entre a estrutura e fluido;
v_{resx} ,	Velocidade resultante do fluido na direção x ;
v_{rx}^n ,	Componente na direção x da velocidade relativa normal entre a estrutura e o fluido;
v_{resx}^n ,	Velocidade resultante do fluido normal à estrutura na direção x ;
v_{ry} ,	Componente na direção y da velocidade relativa entre a estrutura e o fluido;
v_{resy} ,	Velocidade resultante do fluido na direção y ;
v_{ry}^n ,	Componente na direção y da velocidade relativa normal entre a estrutura e o fluido;

v_{resy}^n	Velocidade resultante do fluido normal à estrutura na direção y ;
v_{rz}	Componente na direção z da velocidade relativa entre a estrutura e o fluido;
v_{resz}	Velocidade resultante do fluido na direção z ;
v_{rz}^n	Componente na direção z da velocidade relativa normal entre a estrutura e o fluido;
v_{resz}^n	Velocidade resultante do fluido normal à estrutura na direção z ;
v_{ω}	Velocidade da onda;
$v_{\omega x}$	Componente da velocidade da onda na direção x ;
$v_{\omega y}$	Componente da velocidade da onda na direção y ;
$v_{\omega z}$	Componente da velocidade da onda na direção z ;
v_{ω}^n	Velocidade normal da onda;
$v_{\omega x}^n$	Componente da velocidade normal da onda na direção x ;
$v_{\omega y}^n$	Componente da velocidade normal da onda na direção y ;
$v_{\omega z}^n$	Componente da velocidade normal da onda na direção z ;
u_f	Velocidade adimensional do par mestre de carga;
v_0^i	Condição inicial de velocidade;
V	Potencial das cargas externas;
V_w	Volume de água deslocado pela estrutura;
w	Deslocamento no espaço modal;
W	Trabalho realizado por forças conservativas;
W_c	Trabalho devido à força de corrente;
W_{col}	Trabalho devido ao peso da coluna;
W_M	Trabalho devido ao peso da plataforma;
W_{nc}	Trabalho realizado por forças não conservativas;
W_s	Trabalho devido a deslocamento estático;
W_t	Trabalho devido a deslocamento estático;
x	Eixo transversal ao do elemento estrutural;
x_c	Coordenada do ponto da resultante da força de corrente na direção do eixo x ;
x_f	Variável representando a carga externa;
x_i	Graus de liberdade;
x_M	Coordenada da extremidade da coluna na direção x ;

x_n ,	Deslocamento normal à estrutura na direção x ;
x_{0i} ,	Vetor posição inicial da extremidade superior do elemento estrutural;
x_{0s} ,	Vetor posição inicial da extremidade superior do elemento estrutural;
X ,	Vetor de amplitudes dimensionais dos modos de vibração;
X^* ,	Amplitude dos modos de vibração;
y ,	Eixo transversal ao elemento estrutural;
y_c ,	Coordenada do ponto da resultante da força de corrente na direção do eixo y ;
x_f ,	Derivada da variável representando a carga externa;
x_i ,	Derivadas dos deslocamentos;
y_M ,	Coordenada da extremidade da coluna na direção y ;
y_n ,	Deslocamento normal à estrutura na direção y ;
z ,	Eixo axial ao elemento estrutural;
z_c ,	Coordenada do ponto da resultante da força de corrente na direção do eixo z ;
z_M ,	Coordenada da extremidade da coluna na direção z ;
z_n ,	Deslocamento normal à estrutura na direção z ;
α ,	Ângulo de inclinação das molas extensionais;
α_c ,	Ângulo de direção da corrente marítima;
α_i ,	Ângulo de imperfeição;
β ,	Ângulo da carga harmônica com eixo y ;
β_I ,	Parâmetro adimensional da equação de Mathieu;
δ ,	Variação durante um dado intervalo de tempo;
δu ,	Perturbação em termos de deslocamentos;
δv ,	Perturbação em termos de velocidades;
$\delta(\tau)$	Perturbação da solução;
$\delta\lambda_f$,	Correção do incremento do parâmetro de nível de frequência;
δx ,	Deslocamento inicial na direção x ;
δy ,	Deslocamento inicial na direção y ;
δX ,	Correção do incremento de amplitude;
Δ ,	Deslocamento da extremidade de um membro estrutural;.

$\Delta b,$	Deslocamento do centro de empuxo;
$\Delta l,$	Comprimento de arco;
$\Delta u,$	Incremento de deslocamentos;
$\Delta v,$	Incremento de velocidades;
$\Delta \lambda_f,$	Variação do parâmetro de nível de frequência de arco.
ΔX	Variação da amplitude.
$\Delta \Pi$	Variação de energia potencial total;
$\phi,$	Ângulo de fase;
$\phi_c,$	Ângulo de inclinação da coluna;
$\phi_i,$	Rotação dinâmica;
$\phi_r,$	Vetor de resíduos;
$\phi_{is},$	Rotação estática;
$\phi_{it},$	Rotação total;
$\Phi,$	Autovetores;
$\gamma,$	Ângulo de atuação da carga harmônica;
$\Gamma,$	Parâmetro adimensional de carga;
$\eta,$	Perfil de onda;
$\eta_0,$	Amplitude de onda;
$\kappa,$	Parâmetro adimensional da equação de Mathieu;
$\lambda,$	Razão entre P e P_{cr} ;
$\lambda_f,$	Parâmetro de nível de frequência;
$\lambda_i,$	Multiplicador de Floquet;
$\mu_i,$	Parâmetro de amortecimento na direção i ;
$\Pi,$	Energia potencial total;
$\theta_i,$	Rotações dinâmicas da plataforma;
$\theta_{is},$	Rotações estáticas da plataforma;
$\theta_{it},$	Rotações totais da plataforma;
$\rho_c,$	Massa específica da coluna;
$\rho_w,$	Massa específica da água;
$\Sigma_i,$	Seção de Poincaré;
$\tau,$	Parâmetro adimensional da coordenada temporal;
$\tau^*,$	Parâmetro adimensional da equação de Mathieu;

ω ,	Frequência de oscilação do sistema;
ω_f ,	Frequência da força externa;
ω_p ,	Frequência de natural de um pêndulo simples;
ω_ω ,	Frequência da onda;
ω_0 ,	Frequência natural de oscilação do sistema;
Ω ,	Parâmetro adimensional de frequência;
ν ,	Constante positiva;
ξ ,	Fator de amortecimento;
ξ_i ,	Fator de amortecimento na direção i ;
ψ ,	Parâmetro de escala;
Ψ ,	Vetor de equações algébricas não lineares;

“The sages have a hundred maps to give
That trace their crawling cosmos like a tree,
They rattle reason out through many a sieve
That stores the sand and lets the gold go free:
And all these things are less than dust to me
Because my name is Lazarus and I live”
(G. K. Chesterton)