

3

Modelagem do Sistema Escravo

Este capítulo tem como foco o desenvolvimento do modelo matemático do robô manipulador Titan IV, baseado em um completo modelagem cinemático e dinâmico representado por equações que expressam restrições ou que limitam a possibilidade de movimento dos corpos que constituem o sistema. Este manipulador, muito usado em intervenções submarinas, foi escolhido para representar o sistema escravo a ser controlado no ambiente virtual desenvolvido neste trabalho.

A modelagem cinemática de um robô manipulador é o estudo da posição e da velocidade do seu efetuador e dos seus elos. Quando se menciona posição, está se referindo tanto à posição propriamente dita, como à orientação, e quando se fala em velocidade, considera-se tanto a velocidade linear como angular. Podem-se distinguir dois tipos de cinemática, a cinemática direta e a inversa. A modelagem dinâmica (modelagem matemática) de um robô manipulador desempenha um papel preponderante na simulação do movimento, na análise da estrutura do manipulador e no projeto dos algoritmos de controle. Ele fornece uma descrição da relação entre as forças generalizadas (forças e torques) aplicadas nas juntas e o movimento do manipulador [51].

3.1

Descrição do Sistema

O robô Schilling Titan IV é amplamente conceituado como um dos sistemas manipuladores remotos servo-hidráulicos [52]. Desde 1987, os sistemas TITAN foram o padrão da indústria para sistemas de manipuladores hábeis usados em aplicações submarinas, e são extensamente usados em ROVs (veículos de operação remota) de manutenção ultra pesados. O Titan IV tem a destreza e precisão necessárias para desempenhar movimentos suaves para tarefas complexas. Quando esta capacidade é combinada com o alcance do sistema de manipulação (1,922m, ou 75,7 pol.), capacidade de carga (122kg ou 270lb em extensão completa), classificação de profundidade (disponível até 7.000m), e grande envelope operacional, o Titan IV oferece um desempenho sem igual em uma ampla gama de aplicações submarinas. O robô está configurado com an-

gulação de ombro, do cotovelo, rotação do braço inferior, angulação do punho, rotação de garra e abertura e fechamento de garra. A movimentação é dirigida por válvulas hidráulicas, atuadores rotatórios e motores hidráulicos, possuindo seis graus de liberdade. Sua operação é feita por meio da manipulação de uma réplica miniatura do manipulador, visualizada na figura 3.1.

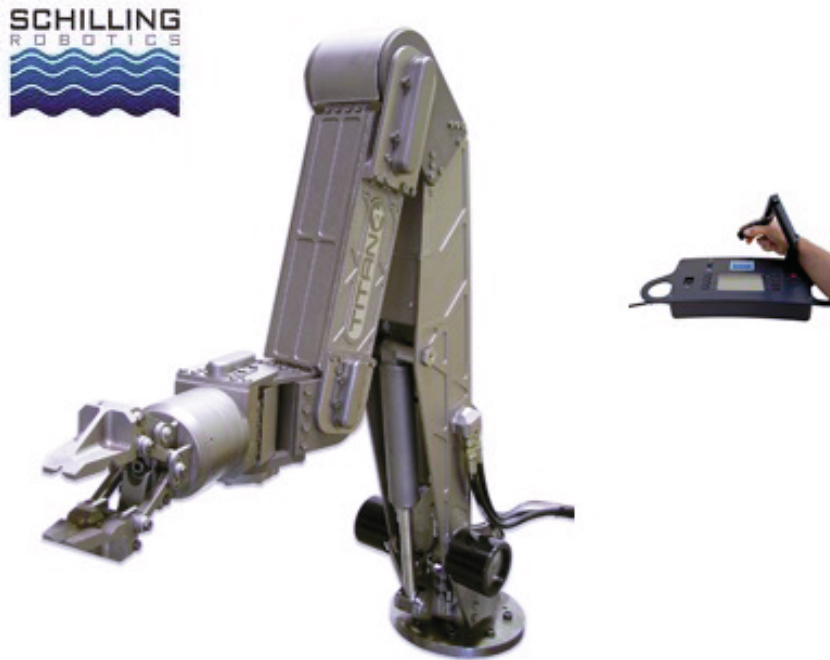


Figura 3.1: Robot Schilling Titan IV e miniatura utilizado como "mestre" na teleoperação [52].

3.2 Cinemática Direita

O problema de cinemática direta de robôs manipuladores consiste em determinar a localização do efetuador ou garra (e eventualmente de cada elo do manipulador) a partir do valor atual das variáveis das juntas (ângulos ou deslocamentos), o qual pode ser resolvido para qualquer robô manipulador serial utilizando transformações que relacionam a localização de um elo em relação ao anterior. A solução da cinemática direta é única e pode ser obtida tanto na forma analítica quanto na forma numérica através de um procedimento sistemático.

3.2.1 A Notação de Denavit-Hartenberg

A relação cinemática entre um par de elos adjacentes envolvido em uma cadeia cinemática aberta, é descrito pela notação Denavit-Hartenberg que introduz um método sistemático para descrever a relação cinemática. O método é baseado em uma matriz 4×4 que representa a posição e orientação de um corpo rígido no espaço.

A figura 3.2 representa um par de elos adjacentes, elo_{i-1}, elo_i e suas juntas associadas $i - 1, i, i + 1$. A posição e orientação relativa entre os dois elos é descrita pelas transformações de translação e de rotação entre os dois sistemas de coordenadas fixos a estes elos. O primeiro passo para definir os

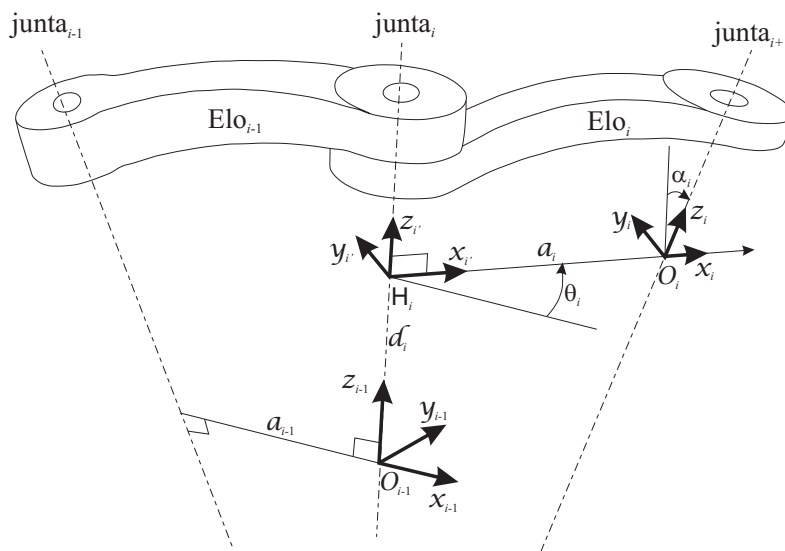


Figura 3.2: A notação Denavit-Hartenberg [51].

sistemas de coordenadas de um robô é localizar os eixos z ao longo dos eixos das articulações, de forma que o eixo z_{i-1} é o eixo da junta i . Seja a reta $H_i O_i$ a normal comum aos eixos das juntas i e $i + 1$ (eixos z_{i-1} e z_i). A origem do sistema O_i é localizada na intercessão do eixo da articulação $i + 1$ (eixo z_i) e a normal comum entre os eixos z_{i-1} e z_i . O eixo x_i é direcionado ao longo da extensão desta normal comum, na direção de z_{i-1} para z_i . Finalmente, o eixo y_i é escolhido de forma que o sistema resultante $O_i - x_i y_i z_i$ seja um sistema de coordenadas que segue a regra da mão direita.

A posição relativa entre dois sistemas de coordenadas consecutivos, sistemas $O_{i-1} - x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ e $O_i - x_i y_i z_i$ é completamente determinada pelas posições relativas entre os eixos x_{i-1} e x_i , e entre os eixos z_i e z_{i-1} , que são definidas pelos quatro parâmetros seguintes:

- a_i : é a distância (em módulo) entre z_{i-1} e z_i , medida ao longo do eixo x_i , que é a normal comum entre z_{i-1} e z_i , ou seja, é a distância $H_i O_i$.
- d_i : é a distância (com sinal) entre os eixos x_{i-1} e x_i , medida sobre o eixo z_{i-1} (que é a normal comum entre x_{i-1} e x_i), partindo-se de O_{i-1} e indo em direção à H_i . O sinal de d_i é positivo se, para ir de O_{i-1} até H_i , caminha-se no sentido positivo de z_{i-1} , e negativo se caminha-se no sentido oposto de z_{i-1} .
- α_i : é o ângulo (com sinal) entre o eixo z_{i-1} e o eixo z_i , medido em torno do eixo x_i , segundo a regra da mão direita, ou seja, é o ângulo de rotação em torno do eixo x_i , que o eixo z_{i-1} deve girar para que fique paralelo ao eixo z_i .
- θ_i : é o ângulo (com sinal) entre eixo x_{i-1} e o eixo x_i , medido em torno do eixo z_{i-1} segundo a regra da mão direita, ou seja, é o ângulo de rotação em torno do eixo z_{i-1} , que o eixo x_{i-1} deve girar para que fique paralelo ao eixo x_i .

Vamos formular a relação cinemática entre os elos adjacentes utilizando matrizes homogêneas. Usando a propriedade de equivalência pode-se representar a posição do sistema de referência i relativo ao sistema de referência $i - 1$ com transformação de coordenadas.

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

onde a matriz \mathbf{A}_i^{i-1} representa a posição e orientação relativa entre os sistemas de referências associados a dois elos sucessivos. Observe que esta matriz do sistema de referência i para o sistema de referência $i - 1$ é uma função apenas da variável de junta i , isto é, a_i para a junta de revolução ou d_i para junta prismática. Os três primeiros vetores coluna 3×1 da matriz \mathbf{A}_i^{i-1} indicam a direção dos três vetores unitários do sistema de referência i em relação ao sistema de referência $i - 1$, enquanto a última coluna especifica a posição do sistema de coordenada O_i em relação ao sistema de referência $i - 1$.

A convenção de Denavit-Hartenberg permite construir a função de cinemática direta pela composição das transformações de coordenadas diretas expressa pela equação anterior dentro de um matriz de transformação de coordenada que descreve a posição e orientação do sistema de referência n em

relação ao sistema de referência da base dada por:

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}_1^0(\mathbf{q}_1)\mathbf{A}_2^1(\mathbf{q}_2)\mathbf{A}_3^2(\mathbf{q}_3)\dots\mathbf{A}_n^{n-1}(\mathbf{q}_n) \quad (3-2)$$

onde a matriz \mathbf{T} representa a posição e orientação da ferramenta do robô relativa ao sistema de referência da base, como se apresenta na figura 3.3.

Como esperado, o cálculo da função da cinemática direta é recursiva e é obtida de uma maneira sistemática pelo simples produto de contribuição de cada grau de mobilidade. Este procedimento pode ser aplicado em qualquer cadeia cinemática aberta, e pode ser facilmente reescrito em uma operação formal.

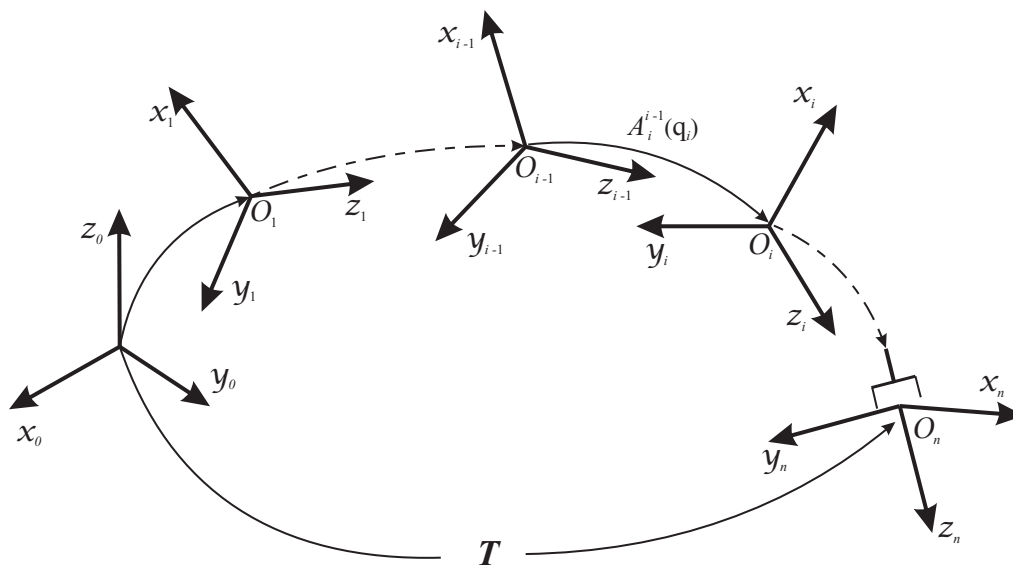


Figura 3.3: Posição e Orientação do efetuador terminal representado pela matriz \mathbf{T} [51].

3.2.2

Modelagem de Denavit-Hartenberg

O robô Titan IV está constituído por um grupo de corpos rígidos, ou elos. Cada elo se conecta a dois outros membros, logo cada elo tem dois eixos, como apresenta a figura 3.4. Também mostra-se o manipulador com seus seis sistemas de coordenadas. A seguir obtêm-se parâmetros de Denavit-Hartenberg para cada sistema de coordenadas.

A Tabela 3.1 apresenta os parâmetros Denavit-Hartenberg (DH) para o robô Titan IV, e a partir deles podem-se encontrar as matrizes A_i que calculam a posição da extremidade final do manipulador, explicitadas no Apêndice A.

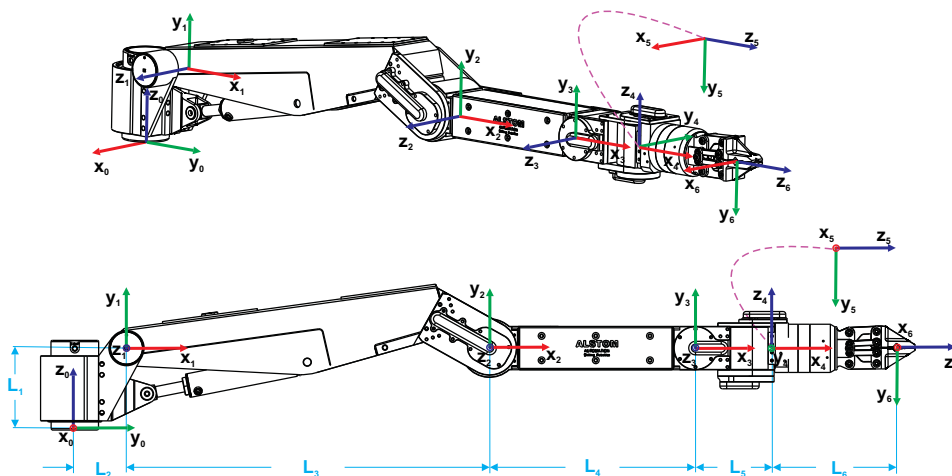


Figura 3.4: Robô Schilling Titan IV e seu sistema de coordenadas.

Tabela 3.1: Parâmetros do robô Manipulador Schiling Titan IV

Elo_i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	90°	l_2	l_1	θ_1
2	0°	l_3	0	θ_2
3	0°	l_4	0	θ_3
4	-90°	l_5	0	θ_4
5	-90°	0	0	$\theta_5 - 90^\circ$
6	0°	0	l_6	θ_6

Uma vez calculada a matriz homogênea \mathbf{T} , com qualquer ângulo dado nas juntas, pode-se obter a posição e orientação do efetuador terminal do robô.

3.3 Cinemática Inversa

O problema da cinemática inversa é mais difícil de resolver que o problema da cinemática direta, pois não há um procedimento sistemático explícito como o algoritmo D-H. Na cinemática inversa, procura-se determinar, a partir da posição e orientação do efetuador terminal, os ângulos das juntas correspondentes.

Um resultado disto é que cada robô, ou classes de robôs, tem que ser tratado separadamente. No entanto, a solução para o problema da cinemática inversa é mais útil que a cinemática direta, pois no controle da trajetória do robô a cinemática inversa se faz necessária para escolha da melhor configuração das juntas para um movimento de um ponto a outro com o mínimo de esforço, ou seja, com o movimento de menos juntas possíveis. Além disso, a chave para fazer robôs mais versáteis implica em usar realimentações com sensores

externos, os quais alimentam informações em termos de variáveis do espaço de configuração. Estas informações são necessárias na determinação dos valores apropriados das juntas do robô, para que assim possa realizar determinadas tarefas.

Mesmo para uma posição possível da extremidade do manipulador há, frequentemente, mais do que uma solução possível para os ângulos das juntas. Na figura 3.5 apresenta-se um exemplo típico, para um manipulador com três juntas consecutivas paralelas.

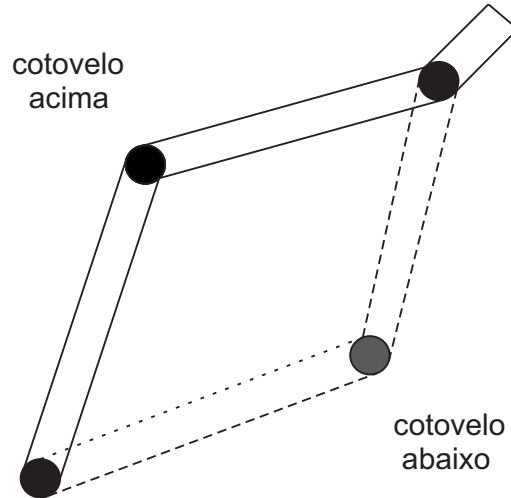


Figura 3.5: Duas soluções possíveis para os ângulos de junta, dada uma mesma posição.

A cinemática inversa do robô manipulador Titan IV será calculada caso a caso. Como o manipulador possui os eixos 4 e 5 de suas últimas juntas (5 e 6) encontrando-se em um único ponto, a solução analítica é possível de ser encontrada. Então considere a equação (3-3), que modela a posição do efetuador terminal do manipulador em relação à base pela multiplicação de matrizes de transformação obtidas anteriormente.

$$T_6^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 A_4^3 A_5^4 A_6^5 \quad (3-3)$$

esta equação pode ser manipulada para encontrar a posição do eixo cinco \mathbf{P}_5^1 em relação ao eixo um,

$$P_5^1 = T_5^1 = A_2^1 A_3^2 A_4^3 A_5^4 = (A_1^0)^{-1} T_6^0 (A_6^5)^{-1} \quad (3-4)$$

Seja representada de forma geral a matriz T

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} n_x & t_x & b_x & p_x \\ n_y & t_y & b_y & p_y \\ n_z & t_z & b_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

então pode-se expressar assim as matrizes

$$P_5^1 = A_2^1 A_3^2 A_4^3 A_5^4 = \begin{bmatrix} & L_3 C_2 + L_4 C_{23} + L_5 C_{234} \\ \mathbf{R}_{3 \times 3} & L_3 S_2 + L_3 S_{23} + L_3 S_{234} \\ & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

$$(A_1^0)^{-1} T_6^0 (A_6^5)^{-1} = \begin{bmatrix} & (p_x - L_6 b_x) C_1 + (p_y - L_6 b_y) S_1 - L_2 \\ \mathbf{R}_{3 \times 3} & p_z - b_z L_6 - L_1 \\ & (p_x - L_6 b_x) S_1 - (p_y - L_6 b_y) C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

Igualando-se as matrizes (3-6) e (3-7), obtém-se o ângulo θ_1 por,

$$\begin{aligned} 0 &= (p_x - L_6 b_x) S_1 - (p_y - L_6 b_y) C_1 \\ \tan \theta_1 &= \frac{p_y - L_6 b_y}{p_x - L_6 b_x} \\ \theta_1 &= \arctan\left(\frac{p_y - L_6 b_y}{p_x - L_6 b_x}\right) \end{aligned} \quad (3-8)$$

Seja $M = (A_1^0)^{-1} T_6^0 (A_6^5)^{-1}$ de (3-4), então pode-se encontrar outra relação igualando-se as componentes das matrizes T_5^1 e M

$$\begin{aligned} T_5^1(3, 3) &= M(3, 3) \\ S_5 &= b_y C_1 - b_x S_1 \end{aligned} \quad (3-9)$$

Resolvendo-se a equação (3-9), obtém-se o ângulo θ_5 , mas convenientemente transformaremos a função trigonométrica inversa arcsin a arctan. Utilizamos a variável W para obter a função trigonométrica arctan como se mostra na figura 3.6 (b), pelo teorema de Pitágoras, encontramos o valor de W em função das variáveis mostradas na equação (3-9).

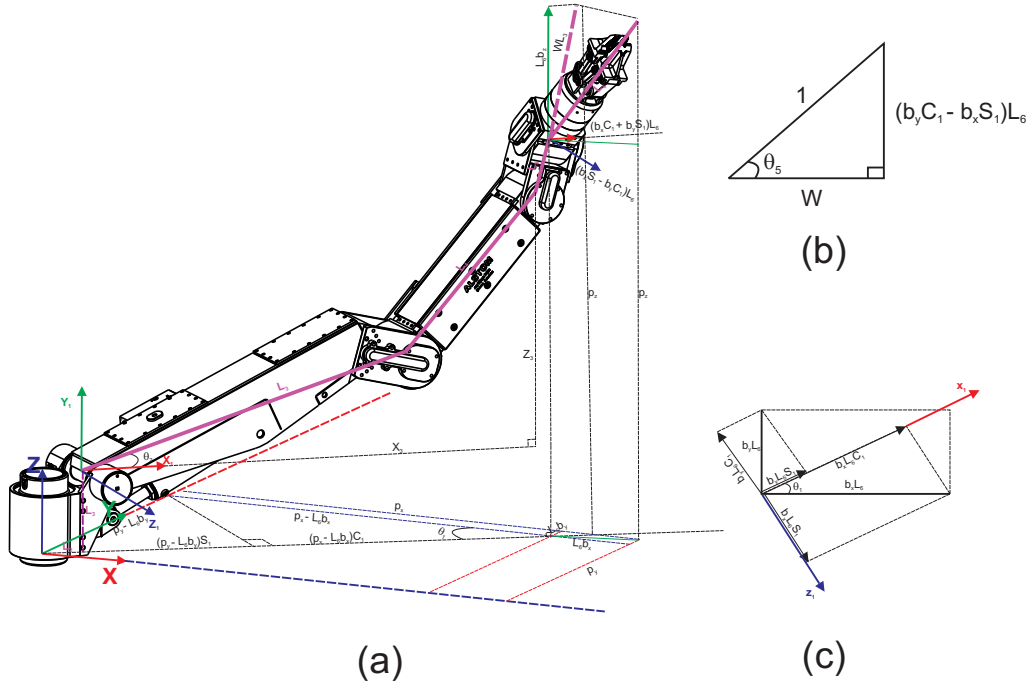


Figura 3.6: Método geométrico para calcular a cinemática inversa do robô Titan IV.

Observa-se que o ângulo θ_5 deve encontrar-se no intervalo $-\frac{\pi}{2} < \theta_5 < \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
 W &= \sqrt{1 - (b_y C_1 - b_x S_1)^2} \\
 W &= \sqrt{b_x^2 C_1^2 + b_y^2 S_1^2 + 2b_x C_1 b_y S_1 + b_z^2} \\
 W &= \sqrt{(b_x C_1 + b_y S_1)^2 + b_z^2}
 \end{aligned} \tag{3-10}$$

As funções trigonométricas arcsin e arccos apresentam múltiplas soluções, por isso é recomendável utilizar a função arctan para solucionar o problema da cinemática inversa.

$$\begin{aligned}
 \tan \theta_5 &= \frac{b_y C_1 - b_x S_1}{W} \\
 \theta_5 &= \arctan\left(\frac{b_y C_1 - b_x S_1}{W}\right)
 \end{aligned} \tag{3-11}$$

A relação geométrica entre os elos do robô manipulador, vista na figura 3.7 (a), mostra um sistema típico de um robô de dois graus de liberdade cuja solução pode-se encontrar utilizando as variáveis Z_3 e X_3 . Da figura 3.6 (a) e

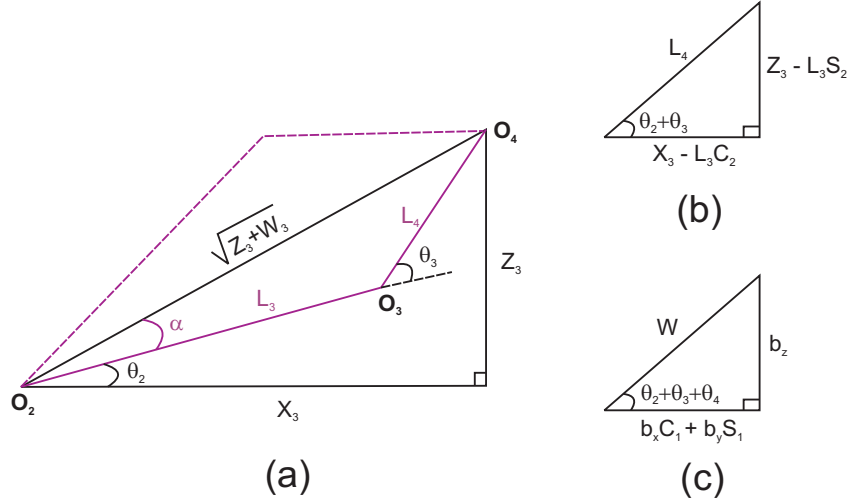


Figura 3.7: Eixos O_2 , O_3 e O_4 , sobre a forma cinemática inversa de dois graus de liberdade.

(b) encontra-se o valor das variáveis Z_3 e X_3 utilizando o método geométrico

$$X_3 = (p_x - L_6 b_x)C_1 + (p_y - L_6 b_y)S_1 - L_2 - \frac{L_5}{W}(b_x C_1 + b_y S_1) \quad (3-12)$$

$$Z_3 = p_z - L_6 b_z - L_1 - \frac{L_5}{W} b_z \quad (3-13)$$

Agora, utilizando-se a lei de cossenos, encontramos o valor de α visto na figura 3.7 (a)

$$L_4^2 = Z_3^2 + X_3^2 + L_3^2 - 2L_3 \sqrt{Z_3^2 + X_3^2} \cos \alpha$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{Z_3^2 + X_3^2 + L_3^2 - L_4^2}{2L_3 \sqrt{Z_3^2 + X_3^2}}\right) \quad (3-14)$$

então

$$\tan(\alpha + \theta_2) = \frac{Z_3}{X_3}$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{Z_3}{X_3}\right) - \alpha$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{Z_3}{X_3}\right) \pm \arccos\left(\frac{Z_3^2 + X_3^2 + L_3^2 - L_4^2}{2L_3 \sqrt{Z_3^2 + X_3^2}}\right) \quad (3-15)$$

O ângulo θ_2 apresenta duas soluções, assim podem-se obter duas possibilidades de posição na configuração das juntas do robô, a segunda delas representada por linhas tracejadas na figura 3.7 (a).

Também pode-se obter o valor do ângulo θ_3 pelo método geométrico seguindo o triângulo retângulo na figura 3.7 (b), cujos catetos encontram-se

da figura 3.6 (a) e (c).

$$\begin{aligned}\tan(\theta_2 + \theta_3) &= \frac{Z_3 - L_3 S_2}{X_3 - L_3 C_2} \\ \theta_3 &= \arctan\left(\frac{Z_3 - L_3 S_2}{X_3 - L_3 C_2}\right) - \theta_2\end{aligned}\quad (3-16)$$

Por último, temos a outra relação geométrica vista na figura 3.7 (c).

$$\begin{aligned}\tan(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) &= \frac{b_z}{b_x C_1 + b_y S_1} \\ \theta_4 &= \arctan\left(\frac{b_z}{b_x C_1 + b_y S_1}\right) - (\theta_2 + \theta_3)\end{aligned}\quad (3-17)$$

Igualando-se as matrizes T_5^1 e M , achamos θ_6 da relação

$$\begin{aligned}T_5^1(3, 2) &= M(3, 2) \\ 0 &= (n_x S_1 - n_y C_1)S_6 + (t_x S_1 - t_y C_1)C_6 \\ \theta_6 &= \arctan\left(\frac{t_y C_1 - t_x S_1}{n_x S_1 - n_y C_1}\right)\end{aligned}\quad (3-18)$$

As equações da cinemática inversa do manipulador possuem vários termos definidos por funções trigonométricas, o que leva a múltiplas soluções, num total de oito para o robô Titan IV. Além disto, existem questões a serem vistas sobre a existência de soluções

Considerando-se a equação (3-8) referente ao eixo 1, há a princípio a possibilidade de duas soluções. Não obstante, limitações físicas de movimento desta junta permitem que ela se mova entre -120° e 120° , permitindo apenas as soluções neste intervalo.

Quanto às equações (3-15) e (3-16), referentes aos eixos 2 e 3 respectivamente, têm-se a princípio duas soluções possíveis. Sabe-se que o manipulador funciona com o cotovelo voltado para cima devido às restrições das juntas. Isto dependerá só da forma de configuração onde se quer movimentar.

Na implementação do simulador, utilizamos a função arco tangente de dois argumentos, ou simplesmente, $ATan2$, para obter soluções que estão dentro do intervalo da configuração do robô. O código implementado encontra-se mostra no Apêndice C.

3.3.1 Dificuldades dos Métodos Geométricos

Os métodos geométricos apresentam alguns problemas cuja resolução requer um estudo cuidadoso:

- Como se viu o método pode fornecer oito soluções diferentes para uma dada situação do efetuador terminal, e torna-se necessário escolher a que deve ser usada.
- Como a solução para cada junta resulta, em última análise, do cálculo de uma função $ATan2$, surge o problema dos ângulos obtidos virem sempre restringidos ao intervalo $[-180^\circ, +180^\circ]$. Este fato pode levantar problemas, caso o intervalo de variação dos ângulos das juntas não esteja contido nesse intervalo.

3.3.2

Problema da escolha da Solução

Depois de calculadas todas as possíveis soluções, como o intervalo de variação das juntas é conhecido, o primeiro passo deverá ser eliminar quaisquer soluções que não estejam dentro desses intervalos. Podem então ocorrer três situações:

- Todas as soluções estão dentro dos limites de variação impostos às juntas. A dimensão do problema não é reduzida.
- Apenas algumas das soluções não violam os limites de variação impostos às juntas. A dimensão do problema foi reduzida.
- Todas as soluções violam os limites de variação impostos às juntas. Não existe solução. Isto significa que se pretende mover o manipulador para um ponto fora do seu espaço de trabalho.

3.3.3

Função Custo

Um procedimento possível para selecionar uma possível solução é escolher aquela que minimiza uma determinada função custo. Por exemplo, escolher a solução que minimiza o erro quadrático médio entre o vetor de coordenadas no espaço das juntas atual e o vetor de coordenadas no espaço das juntas candidato à próxima solução. É importante notar que, neste caso, se tenta fazer com que as trajetórias, no espaço das juntas, sejam contínuas no tempo.

Uma outra possibilidade consiste em escolher a solução que minimiza o erro quadrático médio entre o vetor de coordenadas (no espaço das juntas) candidato a próxima solução e o vetor de coordenadas no espaço das juntas cujas componentes são os pontos médios dos intervalos de variação impostos às juntas. Neste caso, tenta-se manter as juntas o mais afastado possível dos seus limites.

3.4 Cinemática Diferencial

Nas seções anteriores, as equações de cinemática direta e inversa estabeleceram as relações entre as coordenadas de juntas e a posição e orientação do efetuador terminal. Na cinemática diferencial, são estudadas as relações entre a velocidade descrita pelo efetuador terminal em relação às velocidades angulares e lineares das coordenadas da junta. Tal relação é descrita por uma matriz denominada Matriz Jacobiana, a qual é dependente da configuração do manipulador. O Jacobiano se constitui numa das mais importantes ferramentas para caracterização de robôs manipuladores; de fato, ele é utilizado para encontrar configurações singulares, análise de redundâncias, determinação de algoritmos de cinemática inversa, descrição do mapeamento de forças (estáticas) aplicadas nas juntas a partir da carga no efetuador terminal, além de servir como base para obtenção da equação da dinâmica e esquema de projeto de controladores no espaço operacional

Definindo-se a velocidade linear e a velocidade angular do efetuador terminal do robô manipulador por:

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{w}_e \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

obtem-se

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (3-20)$$

onde $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n]$, é o vetor de velocidade $n \times 1$ da junta, e \mathbf{J} é a matriz Jacobiana.

A dimensão geral da uma Matriz Jacobiana é $m \times n$, onde m é o número de linhas, que é igual ao número de graus de liberdade do campo de trabalho do robô, e n é o número de colunas, que é igual ao número de articulações do robô. Para um robô que trabalha no espaço, m será no máximo igual a 6 e, para um robô que trabalha no plano, m será no máximo igual a 3. Os 6 graus de liberdade do espaço correspondem aos três graus de liberdade de posicionamento e aos três de orientação de um corpo rígido. Assim, observa-se que o número de linhas da Matriz Jacobiana não é fixa, devendo ser definida pelo interesse do problema e, principalmente, em função do que o robô é capaz de realizar.

Para o caso do robô Titan IV, de seis graus de liberdade, e com um espaço de trabalho $m = 6$, pode-se obter a Matriz Jacobiana 6×6 , apresentada no Apêndice A.

3.5 Dinâmica Inversa

O conhecimento de modelos dinâmicos realistas é fundamental para testar, em simulação, eficiência de leis de controle e técnicas de planejamento de trajetórias para robôs manipuladores, sem necessidade de usar um sistema físico. A análise do modelo dinâmico é útil para se projetar protótipos da estrutura mecânica dos elos.

O problema da dinâmica inversa está ligado diretamente ao problema de controle do manipulador, consiste em determinar os esforços nos atuadores, dadas as acelerações, velocidades e posições das juntas correspondentes. Os modelos mecânicos são desenvolvidos a partir das leis da Mecânica Newtoniana e Lagrangiana, obtendo-se assim as equações do movimento em termos dos parâmetros geométricos e inerciais dos elementos do robô. Para isto existem vários métodos de formulações como Lagrange, Newton-Euler, Kane, etc. A partir das quais, foram obtidos diferentes formas de representar a dinâmica do robô manipulador. Todas estas formulações cumprem o mesmo objetivo, mas apresentam diferentes estruturas e métodos de avaliação de acordo as necessidades.

Para a modelagem dinâmica do robô Titan IV, utiliza-se o método recursivo de Newton Euler desenvolvido originalmente por Luh-Walker-Paul's [53]. Este algoritmo permite obter um conjunto de equações recursivas que permitem reduzir o tempo de cálculo, permitindo um controle em tempo real.

Computar os torques nas juntas correspondentes a uma trajetória de junta especificada é um problema que aparece frequentemente no controle dinâmico de manipuladores. A partir das posições de junta e de suas primeiras e segundas derivadas (q_2 , \dot{q}_2 e \ddot{q}_2), é possível calcular o vetor torque $\boldsymbol{\tau}$ de esforços de junta correspondente usando as equações recursivas do algoritmo Newton-Euler. A expressão analítica vetorial resultante é denominada equação de Dinâmica Inversa ou de forma fechada, a qual é constituída por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, não lineares e acopladas. Esta equação pode ser decomposta nos termos.

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_I(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_G(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_F(\dot{\mathbf{q}}) \quad (3-21)$$

onde:

$\boldsymbol{\tau}$ = vetor $n \times 1$ torque nas juntas.

\mathbf{q} = vetor $n \times 1$ de variáveis nas juntas.

$\boldsymbol{\tau}_I(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}})$ = vetor $n \times 1$ de reações inerciais.

$\tau_C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ = vetor $n \times 1$ de reações coriolis e centrífugas.

$\tau_G(\mathbf{q})$ = vetor $n \times 1$ de reações gravitacionais.

$\tau_F(\dot{\mathbf{q}})$ = vetor $n \times 1$ de reações de atrito

O vetor de reações inerciais incorpora torques resistentes às acelerações e pode ser expresso como:

$$\boldsymbol{\tau}_I = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$$

onde \mathbf{H} é a matriz de inércia $n \times n$, simétrica e positiva definida. Observe que $\boldsymbol{\tau}_I$ é proporcional às acelerações das juntas.

O vetor de reações coriolis e centrífugas incorpora torques resistentes ao movimento correspondentes a acelerações devidas à rotação relativa entre elos. O vetor $\boldsymbol{\tau}_C$ inclui termos onde aparecem produtos de velocidades de juntas (reações coriolis) e velocidades de junta elevadas ao quadrado (reações centrífugas).

O vetor de reações gravitacionais incorpora torques resistentes ao movimento devido ao peso dos elos do manipulador.

Se for necessário considerar o atrito nas juntas, este pode ser incorporado diretamente às equações de saída do algoritmo Newton-Euler, visto que estas reações ocorrem no eixo das juntas. Um modelo simples para as reações de atrito consiste em uma componente de atrito viscoso somada a uma componente de atrito "Coulomb"

$$\boldsymbol{\tau}_F = \mathbf{k}_{Fv}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}_{Fc}sgn(\dot{\mathbf{q}})$$

onde \mathbf{k}_{Fv} e \mathbf{k}_{Fc} são os coeficientes de atrito viscoso e coulomb de cada junta. A função descontínua $sgn(\dot{\mathbf{q}})$ retorna o sinal da velocidade da junta.

3.6 Dinâmica Direta

O problema da dinâmica direta é fundamental em aplicações que envolvem a simulação dinâmica do robô manipulador, e consiste em determinar a resposta dinâmica do mesmo, ou seja, a evolução temporal das posições e velocidade das juntas em função dos esforços aplicados pelos atuadores.

Computar as trajetórias da junta que correspondem à resposta aos esforços aplicados pelos atuadores é um problema que deve ser resolvido quando se deseja simular computacionalmente o comportamento dinâmico. A expressão analítica vetorial que descreve a aceleração das juntas em função dos esforços aplicados pelos atuadores é denominada equação de dinâmica direta, a qual, de

modo análogo à equação de dinâmica inversa, é constituída por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, não lineares e acopladas. Esta equação pode ser decomposta e obtida diretamente a partir da dinâmica inversa.

A eficiência computacional depende não só do algoritmo mas também da máquina onde esse algoritmo vai ser implementado, e do próprio compilador. Assim, na tentativa de determinar os fatores mais decisivos na eficiência computacional do sistema, realizaram-se diversos estudos que envolveram: tempo de computação em diversos sistemas computacionais para varias operações matemáticas e lógicas, comportamento de um modelo matemático, e tempo de computação no mesmo processador para diversas operações em vírgula flutuante, com quatro e oito bytes de precisão.

Para simplificar o problema da dinâmica direta, define-se a forma da equação geral do movimento por:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (3-22)$$

onde;

$\mathbf{H}(\mathbf{q})$ é a matriz de inércia não singular $n \times n$ do manipulador.

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é a matriz $n \times n$ dos esforços das acelerações centrífuga e de coriolis.

$\mathbf{G}(\mathbf{q})$ é o vetor $n \times 1$ dos esforços da gravidade.

\mathbf{q} é o vetor $n \times 1$ das posições das juntas.

$\boldsymbol{\tau}$ é o vetor $n \times 1$ dos torques nas juntas.

Para solucionar esta equação, Walter e Orin [54] propõem 4 métodos diferentes, que diferem entre si pela eficiência computacional. O Apêndice A descreve os métodos 1 e 3, onde este último dá a maior eficiência computacional. Então, o método 3 será usado para achar a dinâmica direta do robô manipulador, requisito necessário para as seguintes etapas no desenvolvimento da geração de trajetórias e o controle do manipulador .

No próximo capítulo, os modelos desenvolvidos para o robô Titan IV, são usados para implementar seu controle de movimento.