

3 Fratura

O modelo de deformação serve o propósito de simular fisicamente um objeto deformável composto por várias partes, as quais foram determinadas pelo modelo de segmentação. O modelo de fratura proposto age em conjunto com o de deformação, visando detectar a partir das posições dos vértices dos diferentes agrupamentos quando ocorreu uma fratura entre eles e, tendo detectado, desconectar os dois agrupamentos entre si. A detecção de fraturas e a separação dos agrupamentos ocorrem em uma fase posterior a da aplicação das forças externas, e seu algoritmo pode ser encontrado delineado no Algoritmo 3, abaixo.

Algoritmo 3 Visão geral do algoritmo de detecção e tratamento de fraturas.

Parâmetros: Conexões K^* , grafos de agrupamentos de vértices G_v

```
para cada  $k_{ij}$  em  $K^*$ 
  se ocorreu ruptura de  $k_{ij}$ 
    remove  $k_{ij}$  de  $K^*$ 
    para cada  $v$  em  $K_{ij}$ 
       $G_v(c_i, c_j) \leftarrow false$ 
      se  $G_v$  está particionado
        cria  $v'$  como duplicata de  $v$ 
      fim
    fim
  fim
fim
```

3.1 Detecção de Separação de Agrupamentos

O algoritmo de detecção de fraturas se baseia na utilização das conexões k do conjunto K^* criadas na segmentação da malha. Uma conexão k_{ij} representa a ligação entre agrupamentos c_i e c_j . Denotaremos os vértices os quais pertencem a essa conexão k_{ij} como V^k .

Nossa detecção se baseia em uma heurística, a qual aproxima a tensão total que existe entre os agrupamentos c conectados pela tensão existente entre os centros de massa $cm(c)$ dos mesmos. Esse artifício trata as conexões entre os agrupamentos como uma corda elástica que os mantém ligados, a qual se rompe quando é esticada o suficiente para a razão entre seu comprimento original e o atual ultrapassar o *coeficiente de ruptura* $\sigma > 1$ do objeto. Essa técnica oferece uma maneira imediata e quantitativa de determinar se uma conexão entre dois agrupamentos se rompeu. A Figura 3.1 ilustra esse critério.

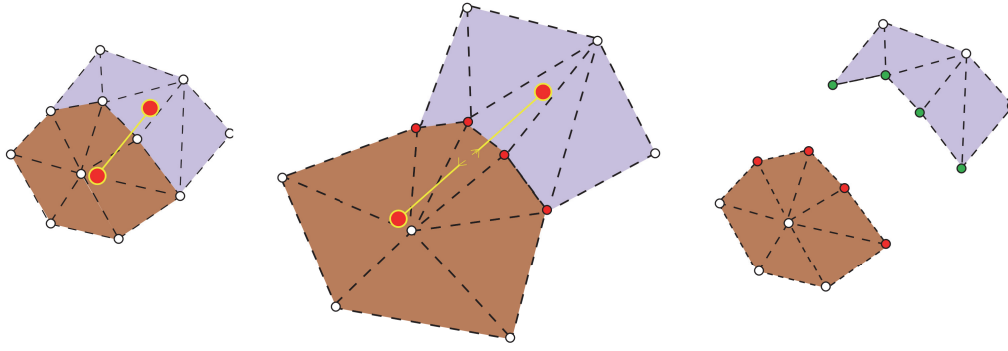


Figura 3.1: Fratura entre dois agrupamentos. No primeiro quadro, o estado inicial de dois agrupamentos conectados, com sua conexão em amarelo e os vértices que pertencem a ela em vermelho. O segundo quadro mostra uma situação que poderia ocasionar uma separação entre os dois. No terceiro quadro, os pesos dos vértices já foram recalculados e os vértices da conexão já foram duplicados (suas novas instâncias aparecem em verde).

Definindo a norma $|k_{ij}|$ em K^* como a distância entre os centros de massa dos agrupamentos c_i e c_j , a verificação de fratura para cada conexão consiste em recalculer os centros de massa $cm(c_i)$ e $cm(c_j)$, recalculer $|k_{ij}|$ a partir deles e verificar se a conexão se encontra “esticada” ou “comprimida” o suficiente para que seja rompida. Definindo $|k_{ij}|_0$ como a notação para o comprimento original da conexão k_{ij} , podemos dizer que essa conexão se rompe sempre que:

$$\left| \frac{|cm(c_i) - cm(c_j)|}{|k_{ij}|_0} - 1 \right| > \sigma - 1. \quad (3-1)$$

3.2 Algoritmo de Fratura

A heurística que determina quando dois agrupamentos se desconectam abstrai a conexão entre eles como apenas uma linha que liga seus centros de massa. Precisamos ainda traduzir essa fratura em uma alteração na malha do objeto. Fraturas são percebidas na estrutura da malha quando ocorre *duplicação de vértices*, como ilustrado na Figura 3.1. Nas Seções 3.2.1 e 3.2.2, vamos determinar as condições que ocasionam em uma duplicação de vértice e também como essa duplicação é executada, com relação à distribuição de pesos dos vértices e à reconstrução dos triângulos da malha. Esses cálculos representam a porção final da lógica da modelagem física.

Vamos utilizar a notação $G_V(c_i, c_j)$ para representar a conectividade entre os agrupamentos c_i e c_j no grafo de agrupamentos G_V e $P(G_v)$ o conjunto contendo os subgrafos das partições desse grafo.

3.2.1

Detecção de Duplicação

Para que as fraturas dos agrupamentos afetem a malha do objeto, precisamos duplicar os vértices, para que haja de fato uma fratura. Contudo, não podemos duplicar os vértices da malha sempre que ocorre uma fratura. Nessa Seção explicamos o critério que deve ser empregado para detectar quando o vértice deve ser duplicado.

Cada vértice v possui associado a ele o grafo G_v não direcionado dos agrupamentos para os quais v o conecta a outro agrupamento. Sempre que uma conexão k_{ij} se rompe, percorremos todos os vértices $v \in k_{ij}$ refletindo essa quebra em G_v e desconectando os agrupamentos c_i e c_j do grafo. Só iremos duplicar o vértice v na malha quando as remoções de arestas do grafo G_v transformarem-no em um *grafo particionado*, ou seja, quando se criarem duas partições diferentes de agrupamentos.

O motivo pelo qual se deve utilizar o critério das partições é simples: até que o grafo esteja particionado, todos os agrupamentos conectados pelo vértice ainda estão conectados entre si, mesmo que não diretamente, o que impossibilita qualquer duplicação do vértice. Nosso critério então passa a ser

$$v \text{ será duplicado iff } \#P(G_v) = 2, \quad (3-2)$$

onde $\#$ indica a cardinalidade do conjunto P . Não é possível que um grafo de agrupamentos G_v seja quebrado em mais de duas partições, pois removemos uma aresta por vez e, assim que uma partição é encontrada, as partições desse grafo se tornam os novos grafos G_v do vértice v e $G_{v'}$ de sua duplicata v' a qual será criada.

Exemplo Seja um vértice v o qual faz parte de quatro agrupamentos, c_1 , c_2 , c_3 e c_4 . Inicialmente, o grafo G_v possui todos os agrupamentos conectados entre si.

Assume-se que houve uma separação entre os agrupamentos c_1 e c_2 . Nosso algoritmo irá atualizar o grafo G_v , desconectando c_1 de c_2 :

$$G_v(c_1, c_2) \leftarrow \text{false}. \quad (3-3)$$

O grafo ainda não se tornou uma partição, logo, não devemos ainda duplicar o vértice: o significado disso pode ser visto no fato de que embora c_1 e c_2 não estejam conectados, c_1 ainda está conectado a c_3 e c_3 está conectado a c_2 . Não podemos duplicar o vértice pois ele de fato ainda não foi partido. Contudo, separações subsequentes entre os agrupamentos

$$G_v(C_3, C_4) \leftarrow \text{false}, \quad (3-4)$$

Figura 3.2: Exemplo de duplicação de vértice ocorrendo em função de sequência de separações de agrupamentos.

$$G_v(C_2, C_4) \leftarrow false, \quad (3-5)$$

$$G_v(C_1, C_3) \leftarrow false, \quad (3-6)$$

fazem com que o grafo G_v fique particionado: as partições $P1$ e $P2$ são:

$$P1 = \{C_1, C_4\}, \quad (3-7)$$

$$P2 = \{C_2, C_3\}. \quad (3-8)$$

Com essa partição, poderíamos agora duplicar o vértice v , pois podemos dividi-lo em dois vértices sem que haja compartilhamento de pesos entre eles. Para um diagrama ilustrado desse exemplo, consulte a Figura 3.2.

3.2.2

Duplicação dos Vértices

O algoritmo de duplicação dos vértices ocorre sobre o vértice v quando se detecta que a ruptura de uma conexão particionou o grafo de agrupamentos G_v . A técnica de duplicação cria um novo vértice v' na malha a partir do antigo, v . A cada um dos vértices é atribuído um dos grafos de $P(G_v)$, e em função dos seus grafos de agrupamentos, o algoritmo recalcula seus pesos nos agrupamentos aos quais pertencem, e, sabendo agora a quais agrupamentos o novo vértice v' pertence, é possível atualizar a incidência dos triângulos na malha.

Toda duplicação de vértices ocorre como resultado de uma separação de dois agrupamentos¹, o que, em outras palavras, significa a ruptura de uma conexão: nessa Seção, denotaremos por k_{ij} essa conexão rompida. Vamos denotar também como $P2$ e $P1$ as partições de agrupamentos aos quais serão associados aos vértices v_2 , a duplicata do vértice v e de v_1 , a versão atualizada do vértice original v , respectivamente. Vamos usar também a notação K_v para simbolizar o conjunto das conexões k das quais $v \in k$.

A duplicação do vértice v em v' envolve uma série de operações para que a simulação mantenha-se consistente:

- **Cópia de velocidade e posição:** as informações de posição x_i e velocidade v_i de v são copiadas em v_2 .

¹Embora a separação de dois agrupamentos não seja condição suficiente, é necessária: veja o Exemplo da Seção 3.2.1.

- **Cálculo das conexões de v_2 :** Precisamos associar a v_2 todas as conexões de v as quais ainda não foram rompidas, de forma que os futuros rompimentos dessas conexões possam afetar a duplicata do vértice. O conjunto K_{v_2} de conexões que são associadas a v_2 pode ser escrito como:

$$K_{v_2} = \{k \in K^* \mid v \in K \text{ e } k \neq k_{ij}\}. \quad (3-9)$$

- **Recálculo de pesos de v_1 e v_2 :** Agora que a ruptura de k_{ij} de v origina v_1 e v_2 , precisamos recalcular o peso que cada um desses vértices ocupa nos agrupamentos dos quais v fazia parte. Para evitarmos descon- tinuidades ou alterações das propriedades físicas da malha, precisamos garantir que a influência dos agrupamentos em cada vértice se mantenha proporcional à distribuição original de v . Para tal, vamos definir como *peso total* de v na partição P como $m(v, P)$:

$$m(v, P) = \sum_{c \in P} m(v, c). \quad (3-10)$$

Os pesos totais $m(v_1, P)$ e $m(v_2, P)$ representam os pesos acumulados em cada um dos vértices resultantes da duplicação. Não ocorre aumento no peso total pois temos que $m(v, P) \leq m(v)$ para $P = P1$ e $P = P2$: na verdade, como $P1$ e $P2$ são partições de G_v , temos que $m(v, P1) + m(v, P2) = m(v)$. Os novos pesos de v_1 e v_2 então podem ser calculados da seguinte forma:

$$m(v_1, C) = c \in P1? \frac{m(v, c)}{m(v, P1)} : 0, \quad (3-11)$$

$$m(v_2, C) = c \in P2? \frac{m(v, c)}{m(v, P2)} : 0. \quad (3-12)$$

- **Gerar grafos de agrupamentos G_{v_1} e G_{v_2} :** com a duplicação de v em v_1 e v_2 , precisamos fazer com que os grafos de agrupamentos G_{v_1} e G_{v_2} desses vértices agora contenham apenas os agrupamentos de sua partição: como os pesos acima mostram, v_1 só possui pesos para os agrupamentos da partição $P1$, assim como v_2 para $P2$. Por fim, atualizamos os grafos para refletir essa alteração:

$$G_{v_1} = P1, e \quad (3-13)$$

$$G_{v_2} = P2 \quad (3-14)$$