

2 Segmentação e Deformação

2.1 Visão Geral

Apresentaremos nossos métodos através de suas duas técnicas principais, a segmentação do objeto e a sua simulação física. As próximas Seções visam explicar em profundidade os conceitos matemáticos utilizados e os algoritmos implementados:

- **Segmentação do Objeto:** importa-se uma malha 3D triangular para o sistema, segmentando-a no número de agrupamentos de vértices desejados. Será explicada na Seção 2.2;
- **Simulação do Objeto:** executa-se a simulação física da qual o objeto faz parte. Os procedimentos utilizados na simulação serão explicados nas Seções 2.4 e no Capítulo 3. Pode ser subdividido nos seguintes passos:
 - **Aplicação de forças externas:** são computadas forças externas em geral, como a força da gravidade;
 - **Deteção e tratamento de fraturas:** detecta-se fraturas entre os agrupamentos do objeto e os desconectam;
 - **Aplicação de forças de resposta à colisão:** é computada a força externa de resposta às colisões com o ambiente;
 - **Simulação das forças internas:** são computadas as forças internas de restituição da forma do objeto, na qual cada agrupamento contribui com suas forças de restituição da posição dos vértices. Essa fase ocorre para cada agrupamento de cada objeto deformável;
 - **Integração do modelo:** são atualizadas as posições e as velocidades das partículas do objeto em função das forças encontradas nas duas fases anteriores. Essa fase ocorre para cada objeto deformável.

2.2 Modelo de Segmentação

2.2.1 Algoritmo de Segmentação

O algoritmo proposto por Attene *et al.* (1) classifica-se como uma variação de um algoritmo de segmentação de malhas triangulares conhecido por Agrupamento de Faces Hierárquico, ou HFC (Hierarchical Face Clustering). O objetivo da técnica HFC é encontrar os N agrupamentos de faces da malha de um objeto que melhor aproximam uma primitiva de um conjunto de primitivas básicas (Plano, Esfera e Cilindro) escolhidas manualmente para o objeto. Seu intuito é agrupar as faces do objeto que representem partes naturais do mesmo. O HFC iterativamente aglomera agrupamentos de faces da malha com seus agrupamentos vizinhos. Os agrupamentos escolhidos a cada passo para serem unidos hierarquicamente são aqueles que, juntos, formarão a aglomeração ótima para aquela iteração, a qual melhor satisfaz o critério de aproximação das primitivas.

O processo de segmentação começa com a construção de uma hierarquia de agrupamentos de faces (as quais, em nosso caso, são triângulos). Uma hierarquia de agrupamentos de faces é uma árvore na qual agrupamentos hierarquicamente superiores representam uma aglomeração de todos os agrupamentos que se encontram sob ele. Inicialmente, cada um dos triângulos da malha produz um agrupamento que o contém apenas, e a hierarquia não possui nenhum agrupamento superior a outro (pois nenhum agrupamento foi ainda aglomerado). A cada iteração o HFC aglomera o par de agrupamentos que compartilhe arestas que melhor aproximam as primitivas do conjunto escolhido. Attene *et al.* chama dois agrupamentos de faces *adjacentes* se eles compartilham pelo menos uma aresta de um de seus triângulos.

Utilizaremos uma notação similar à utilizada em (1) para a descrever o grafo dual D de adjacências no método HFC. Seja

$$M = (V, E, T) \quad (2-1)$$

a malha triangular a ser segmentada, onde o conjunto V representa seus vértices, E suas arestas e T seus triângulos. Podemos definir o grafo dual de adjacências D de M como:

$$D = (C, A), \quad (2-2)$$

onde cada elemento c de C representa um agrupamento de triângulos em T da malha M . Em D , existe um arco dual a em A conectando dois agrupamentos em C caso eles sejam adjacentes um ao outro.

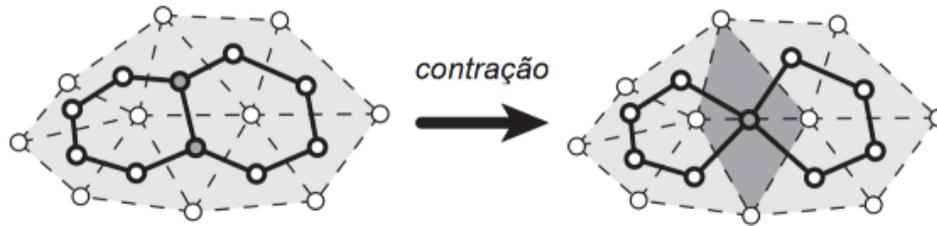


Figura 2.1: Os círculos em evidência na imagem acima são os nós do grafo dual. Os dois nós em cinza escuro, ao sofrerem uma contração, transformam-se em apenas um nó (um agrupamento), herdando os triângulos que pertenciam aos nós que compõe sua hierarquia de faces. Note que os triângulos da malha permanecem inalterados. Fonte: (7)

Após o grafo D ter sido criado, cada iteração do processo executa uma contração de arco a qual aglomera dois agrupamentos c do grafo dual em um novo agrupamento, como ilustrado na Figura 2.1. O arco $a \in A$ escolhido para sofrer a contração através é sempre o arco de menor custo de contração. Cada contração reduz o número de total de agrupamentos em um. O algoritmo termina quando o número desejado de agrupamentos é atingido.

A operação da contração do HFC, diferente de métodos de simplificação baseado em hierarquias de vértices, não diminui o número de faces ou vértices da malha nem a altera: seu objetivo é apenas montar uma hierarquia de faces que já existem. A Figura 2.2 ilustra quatro passos desse procedimento. Como essa contração cria um novo agrupamento agrupando os dois anteriores, ela exige que os arcos previamente conectados aos agrupamentos vizinhos sejam atualizados com relação aos seus custos ao serem ligados ao novo, como apresentado no Algoritmo 1.

A forma como o cálculo dos custos dos arcos duais é realizada define qual o objetivo final das iterações; em outras palavras, define qual são as hierarquias desejadas para os agrupamentos e quais são suas formas finais desejadas. Esse cálculo dos custos é computado como em (1), através de um método baseado em aproximação de formas. O custo de uma contração é dado em função do menor erro de aproximação entre os vértices pertencentes aos dois agrupamentos a serem aglomerados e três primitivas básicas: Plano, Esfera e Cilindro. Essa função de custo faz com que a implementação do algoritmo guloso favoreça iterativamente agrupamentos os quais aproximem melhor uma das três primitivas, gerando assim malhas cujos segmentos aproximem de maneira natural essas formas básicas.

Algoritmo 1 Algoritmo para segmentação da malha.

Parâmetros: Malha M , quantidade desejada de agrupamentos N

para cada $t \in T$ **de** M
 cria agrupamento c em C a partir de t
fim

para cada $e \in E$ **de** M
 cria aresta a em A para agrupamento c_1 e c_2 cujos t_1 e t_2 compartilhem e
 calcula custo C_a de a
 insere a em lista L ordenada por C_a
fim

enquanto $\#L > N$
 remove a de menor custo de L e de A
 une agrupamentos c_1 e c_2 de a em um agrupamento c_3 em C
 atualiza arestas de c_1 e c_2 em c_3 , recalculando seus custos
fim

retorna C contendo N agrupamentos e A contendo adjacências entre os elementos de C

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012674/CA

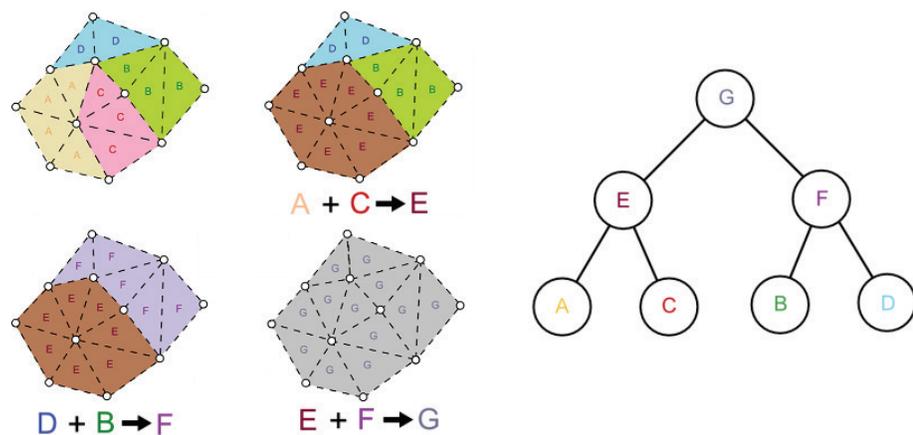


Figura 2.2: Os quadros à esquerda mostram um exemplo de uma sequência de três contrações entre agrupamentos de faces. Nela, contrai-se sequencialmente os agrupamentos A e C, D e B e E e F. À direita se encontra a hierarquia de agrupamentos de faces final correspondente.

2.2.2

Primitivas e suas Funções de Custo

Para que o método HFC funcione corretamente, precisamos estipular o custo de cada contração de arco. A função de custo escolhida, assim como em (1), equivale ao erro L^2 , calculado como a soma dos quadrados das distâncias dos vértices dos triângulos dos agrupamentos envolvidos para a superfície da primitiva que melhor os aproxima. Para uma apuração mais correta do erro de aproximação de cada vértice, ele é modulado pela *área de Voronoi* $a(v)$ a qual pode ser calculada como

$$a(v) = \sum_{t \in T(v)} \frac{a(t)}{3}, \quad (2-3)$$

onde $a(t)$ equivale a área do triângulo t e o conjunto $T(v)$ equivale ao subconjunto de T em M o qual incide sobre v . A função de custo total para cada primitiva então pode ser escrita na forma

$$L_S^2 = \sum_{v \in C} a(v) d_S(v)^2, \quad (2-4)$$

na qual $d_S(v)$ representa a distância do vértice v à superfície S da primitiva do conjunto P de primitivas a serem aproximadas. Como se está interessado que os agrupamentos aproximem qualquer uma delas, escolhe-se como custo total do arco L^2 como na equação:

$$L^2 = \min_{S \in P} (L_S^2). \quad (2-5)$$

Para que se possa calcular $d_S(v)$ para cada uma das superfícies que melhor aproximam os vértices, contudo, é preciso encontrar os parâmetros que as definem analiticamente. A primitiva esférica, por exemplo, pode ser descrita por quatro parâmetros: sua posição (X, Y, Z) no espaço e seu raio R . Cada uma das primitivas emprega uma técnica diferente para ser determinada, embora todas elas tenham por objetivo encontrar a primitiva a qual minimiza L_S^2 . Essas técnicas são descritas nas Seções posteriores, nas quais descrevemos suas funções de distância $d_S(v)$ específicas e como elas são devidamente parametrizadas, em função da forma aproximada.

Plano

Um plano pode ser parametrizado por um ponto p_0 e uma normal unitária \mathbf{n} . A distância geométrica de um ponto qualquer v a esse plano pode ser escrita como

$$d_S(v) = \mathbf{n} \cdot (v - p_0). \quad (2-6)$$

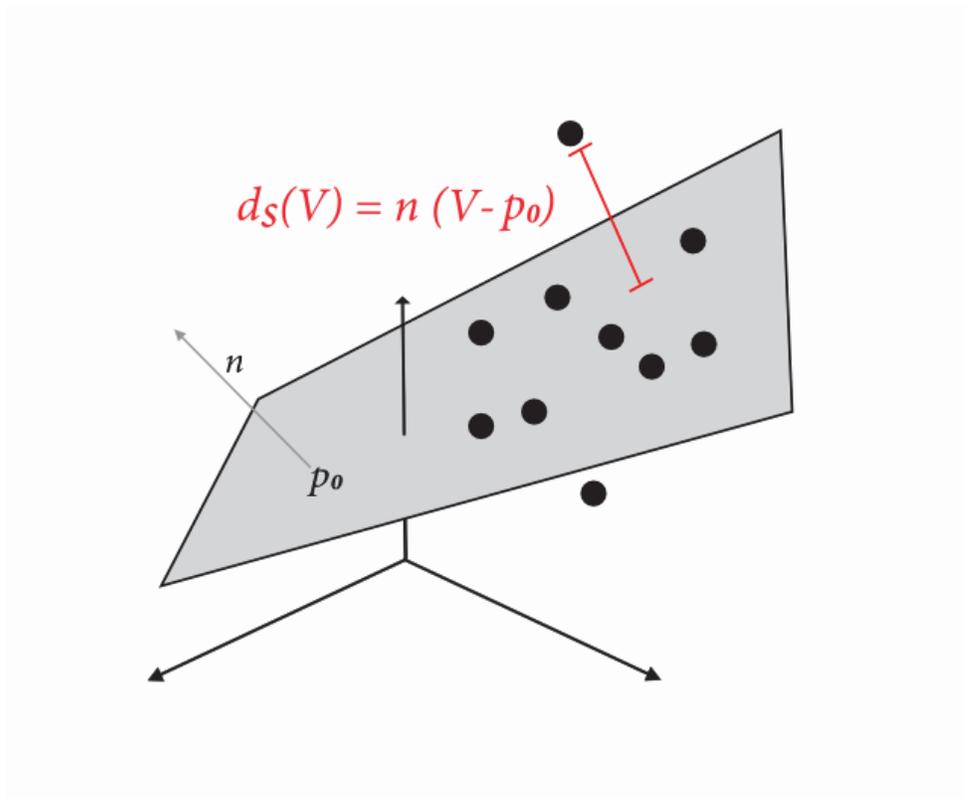


Figura 2.3: Os pontos são aproximados por um plano formado por p_0 e \mathbf{n} de forma a minimizar a soma total do quadrado das distâncias $d_s(v)$.

O plano que melhor aproxima um conjunto de pontos v_i pode ser encontrado através de um método clássico baseado em Análise de Componentes Principais (7). Essa técnica utiliza a matriz de covariância Cov dos pontos

$$Cov = \sum_i a(v_i)(v_i - \bar{v})(v_i - \bar{v})^T, \tag{2-7}$$

onde

$$\bar{v} = \frac{\sum_i a(v_i)v_i}{\sum_i a(v_i)}. \tag{2-8}$$

Como o ponto \bar{v} pertence ao plano buscado, pode-se usá-lo como p_0 e resta apenas encontrar a normal do plano para poder parametrizá-lo. O plano que melhor aproxima os vértices tem sua normal \mathbf{n} no autovetor \mathbf{e}_0 o qual corresponde ao autovalor mínimo da matriz Cov . Logo, é possível escrever a função $d_S(v)$ e, conseqüentemente, a L_S^2 do plano, respectivamente:

$$d_S(v) = \mathbf{e}_0 \cdot (v - \bar{v}), \tag{2-9}$$

$$L_S^2 = \sum_{v \in C} a(v)[\mathbf{e}_0 \cdot (v - \bar{v})]^2. \tag{2-10}$$

A Figura 2.3 representa esse processo.

Esfera

Uma esfera pode ser parametrizada por um ponto c , seu centro, e seu raio r . A função que determina a distância de um ponto v para a superfície dessa esfera pode ser escrita como

$$d_S(v) = |v - c| - r. \quad (2-11)$$

Para encontrar a esfera que melhor aproxima um conjunto de pontos v_i utiliza-se um método de otimização por mínimos quadrados. A solução se aproveita dos resultados do trabalho de Pratt (18) para encontrar os parâmetros da esfera que melhor aproxima os pontos v_i . Em seu artigo, Pratt utiliza-se do conceito de *distância algébrica* a fim de solucionar problemas de aproximação de forma diretamente, não iterativamente, argumentando que a distância algébrica é uma alternativa robusta à distância geométrica. Essa argumentação é o que possibilita encontrar os parâmetros desejados como no método abaixo: nele, minimiza-se a distância algébrica.

Utilizando esse conhecimento, reescreve-se a equação da esfera

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 = r^2 \quad (2-12)$$

na forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 - 2c_x x - 2c_y y - 2c_z z - r^2 = 0. \quad (2-13)$$

Essa equação pode ser reescrita como um produto escalar, a fim de isolar as incógnitas em um dos vetores:

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \\ r^2 - c_x^2 - c_y^2 - c_z^2 \end{bmatrix} = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2-14)$$

Essa relação permite, usando as coordenadas x_i , y_i e z_i dos pontos v_i , montar um sistema linear que pode ser resolvido diretamente através do método dos mínimos quadrados. O sistema, da forma $\mathbf{A}x = b$, pode ser escrito como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & 1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_n & 2y_n & 2z_n & 1 \end{bmatrix}, \quad (2-15)$$

$$x = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \\ r^2 - c_x^2 - c_y^2 - c_z^2 \end{bmatrix}, \quad (2-16)$$

$$b = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 \end{bmatrix}, \quad (2-17)$$

onde n é a cardinalidade do conjunto v_i . A solução direta desse sistema é encontrada através da equação

$$x = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T b. \quad (2-18)$$

O ponto x oferece diretamente o ponto c de suas três primeiras coordenadas (x_1 , x_2 e x_3), enquanto que r pode ser trivialmente encontrado através da equação $r = \sqrt{x_4 + c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$. Embora esse método seja frequentemente usado como passo para a estimativa inicial de técnicas de regressão não linear (como o método Gauss-Newton), Attene *et al.* (1) atesta que, para fins de determinação de segmentos da malha, a esfera encontrada através desse método é suficientemente precisa. Pode-se, então, escrever a equação para L_S^2 :

$$L_S^2 = \sum_{v \in C} a(v) (|v - c| - r)^2. \quad (2-19)$$

Cilindro

Um cilindro pode ser parametrizado por seu eixo \mathbf{n} , por um ponto no espaço para onde esse eixo é deslocado c e pelo raio do cilindro, r . A função que determina a distância de um ponto v para a superfície de um cilindro pode ser escrita como:

$$d_S(v) = |(v - c) \times \mathbf{n}| - r. \quad (2-20)$$

Inicialmente, o método encontra o vetor do eixo do cilindro \mathbf{n} através da variância das normais dos triângulos do agrupamento. Um cilindro ideal apresenta uma variância nula das normais em uma direção: a direção de seu eixo. Nesse sentido, podemos encontrar o eixo do cilindro aproximado encontrando o mais próximo de uma variância nula que nossos vértices fornecem, a variância de normal mínima. Esse vetor da direção da variância normal mínima corresponde ao autovetor \mathbf{e}_0 de autovalor máximo da matrix de covariância Cov abaixo:

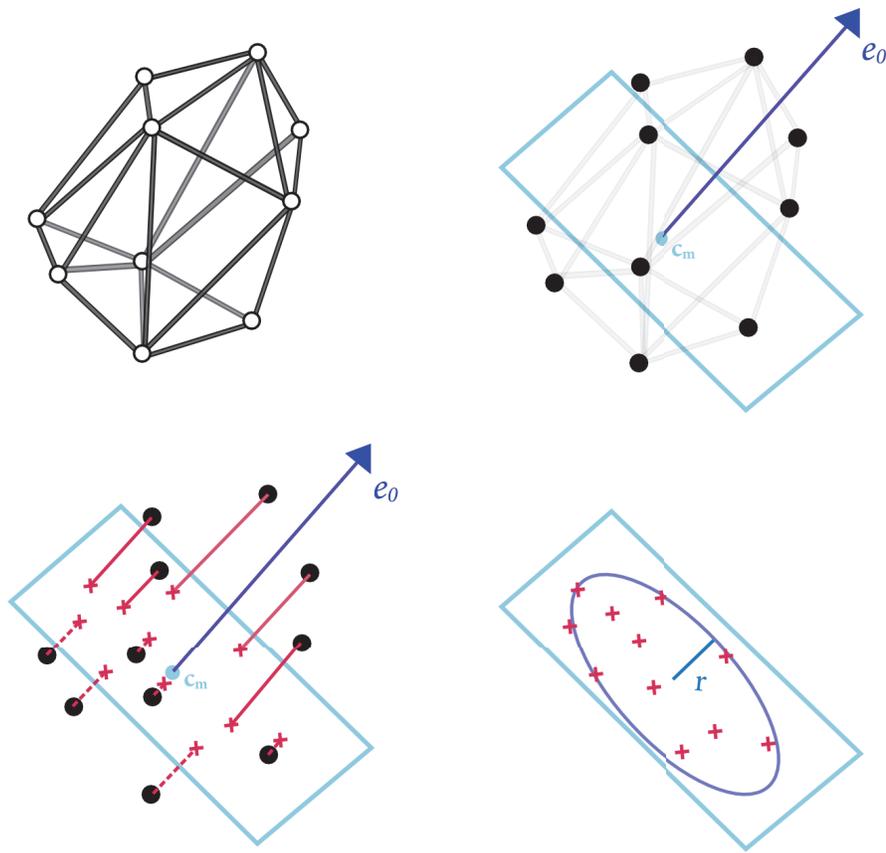


Figura 2.4: Passos correspondentes a determinação dos parâmetros \mathbf{e}_0 e r do cilindro que melhor aproxima uma parte de um modelo 3D de exemplo.

$$Cov = \sum_{\mathbf{e} \in C} |\mathbf{e}| \beta(\mathbf{e}) \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{e}}^T, \quad (2-21)$$

onde $\mathbf{e} \in C$ são as arestas dos triângulos do agrupamento C , $\bar{\mathbf{e}}$ o vetor direção normalizado da aresta e $\beta(\mathbf{e})$ o ângulo entre as normais dos dois triângulos que compartilham a aresta \mathbf{e} . Como o agrupamento é composto por um conjunto de triângulos T , suas arestas \mathbf{e} são os únicos pontos onde há alteração das normais na superfície do agrupamento, com efeito as únicas regiões para as quais precisa ser contabilizada a covariância.

Através do eixo do cilindro \mathbf{e}_0 encontrado, encontram-se os parâmetros restantes. O método consiste em projetar os pontos de C em um plano e encontrar os parâmetros ainda não determinados aproximando os pontos no plano a um círculo e encontrando através dele o centro do cilindro c e seu raio r . Seja c_m o centro de massa dos pontos v_i e α base ortonormal $\{n, e_x, e_y\}$. Projetamos nossos pontos v no plano definido por c_m e \mathbf{e}_0 através da função:

$$\wp : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (2-22)$$

$$\wp(v) = \begin{bmatrix} (v - c_m) \cdot \mathbf{e}_x & (v - c_m) \cdot \mathbf{e}_y \end{bmatrix}. \quad (2-23)$$

Com o problema reduzido a encontrar o círculo que melhor aproxima um conjunto de pontos \hat{V} em \mathfrak{R}^2 (a notação \hat{x} aqui simboliza vetores na base α), volta-se à solução para a esfera, reduzindo-a em uma dimensão: resolve-se $x = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T b$ para as matrizes abaixo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2\hat{x} & 2\hat{y}_1 & 1 \\ 2\hat{x}_2 & 2\hat{y}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\hat{x}_n & 2\hat{y}_n & 1 \end{bmatrix}, \quad (2-24)$$

$$x = \begin{bmatrix} \hat{c}_x \\ \hat{c}_y \\ r^2 - \hat{c}_x^2 - \hat{c}_y^2 \end{bmatrix}, \quad (2-25)$$

$$b = \begin{bmatrix} \hat{x}_1^2 + \hat{y}_1^2 \\ \hat{x}_2^2 + \hat{y}_2^2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n^2 + \hat{y}_n^2 \end{bmatrix}. \quad (2-26)$$

Tendo encontrado r e \hat{c} , basta-nos realizar uma troca de base a fim de obter c a partir de \hat{c} :

$$c = c_m + \mathbf{e}_x \hat{c}_x + \mathbf{e}_y \hat{c}_y. \quad (2-27)$$

Com isso, encontramos o cilindro que melhor aproxima os pontos v_i do agrupamento, como apresentado na Figura 2.4. Através dos seus parâmetros, define-se, então, L_S^2 :

$$L_S^2 = \sum_{v \in C} a(v) (|(v - c) \times \mathbf{e}_0| - r)^2. \quad (2-28)$$

2.2.3

Agrupamentos de Vértices

Os modelos de deformação e fratura assumem que suas simulações ocorrem sobre agrupamentos de vértices. Agrupamentos de vértices são coleções não exclusivas de vértices da malha: com efeito, diferentes agrupamentos podem possuir o mesmo vértice e, em uma malha segmentada, esse entrelaçamento entre os agrupamentos através de seus vértices em comum mantém os segmentos da malha unidos e conectados. No modelo de deformação, são esses vértices em comum que fazem com que a malha se comporte como um objeto composto por diferentes partes que se influenciam. No modelo de fraturas, replicamos esses vértices e atribuímos as réplicas para os segmentos que o compartilham

quando queremos que dois segmentos se partam.

Para que vértices possam estar em dois ou mais agrupamentos, é preciso distribuir os pesos de sua partícula entre eles. Em Müller *et al.* (11) não é estabelecido como esses pesos são calculados, ou mesmo se seus pesos sofrem influência dos agrupamentos ao qual pertence. Nosso trabalho estabelece uma forma de se distribuir esses pesos. Um mesmo vértice, quando pertence a diferentes agrupamentos, é influenciado por cada um deles de forma não uniforme. Calculamos esses pesos utilizando dois conceitos: o conceito de *influência local*, no qual o que importa são os agrupamentos aos quais pertencem os triângulos que incidem sobre o vértice, e a *influência global*, na qual só importa a consistência interna entre todos os agrupamentos do objeto. Esses conceitos foram parcialmente inspirados no trabalho de Cuno *et al.* (3). O valor final do peso para cada agrupamento é calculado sequencialmente: primeiro calculam-se as influências locais para que depois esses valores possam ser diluídos por todo o objeto através da influência global. As fórmulas para o cálculo dos pesos podem ser encontradas nas Seções abaixo.

Influência Local

Inicialmente, calculamos o peso local dos vértices $m_l(v, c)$ destinado a cada agrupamento através da seguinte fórmula:

$$m_l(v, c) = V_m \frac{T_v(c)}{T_v}, \quad (2-29)$$

onde V_m é o peso total do vértice, T_v é o número total de triângulos os quais incidem no vértice v e $T_v(c)$ é o número total de triângulos que incide sobre v mas que pertencem ao agrupamento c . Em outras palavras, garantimos que o peso dos vértices para cada agrupamento é proporcional à razão entre o número de triângulos incidentes os quais pertencem àquele agrupamento sobre o número total de triângulos incidentes. A Figura 2.5 oferece um exemplo.

Influência Global

Utilizados os pesos que correspondem apenas à influência local $m_l(v, c)$ dos agrupamentos sobre os vértices, obtêm-se um objeto o qual se comporta como um tecido ou como um objeto conectado nas fronteiras dos agrupamentos por juntas. Isso ocorre pois a única influência que um agrupamento exerce sobre outro é realizada através dos vértices de sua fronteira compartilhada. Usar somente a influência local dos agrupamentos nos vértices não confere nenhuma consistência interna ou estrutura ao objeto.

Dessa forma, faz-se necessário criar um parâmetro para controlar a influência que os agrupamentos exercem sobre outros a qual independe da

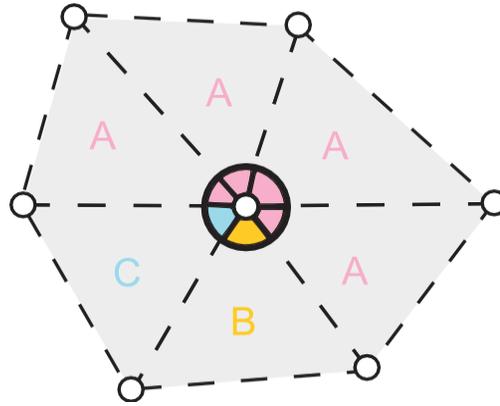


Figura 2.5: O vértice central da figura possui 4 triângulos incidentes os quais pertencem ao agrupamento A, e um triângulo incidente pertencente aos agrupamentos B e C cada, o que acarreta em valores de $\frac{T_v(A)}{T_v} = \frac{4}{6}$ e $\frac{T_v(B)}{T_v} = \frac{T_v(C)}{T_v} = \frac{1}{6}$.

posição de seus vértices na malha. Parametrizamos através da variável δ essa influência global ($\delta \in [0, 1]$), que chamamos de *coeficiente de distribuição total dos pesos*. Esse parâmetro atua sobre os pesos locais dos vértices diluindo-as entre todos os agrupamentos do objeto através da seguinte fórmula, a qual calcula os valores finais dos pesos de cada vértice $m(v, c)$:

$$m(v, c) = (1 - \delta)m_l(v, c) + \delta\left(\frac{1}{N}\right). \quad (2-30)$$

Na fórmula acima, N corresponde ao número total de agrupamentos.

2.2.4 Conexões entre Agrupamentos

A determinação dos valores de $m_l(v, c)$ para cada um dos vértices serve a um segundo propósito: estabelecer as *conexões* entre os agrupamentos. As conexões entre os agrupamentos são estruturas que representam a conectividade dos segmentos da malha e é através delas que podemos acelerar a detecção de fraturas entre seus agrupamentos. Chamamos de K^* o conjunto de conexões estabelecidas, e de k_{ij} uma conexão que liga os agrupamentos c_i e c_j . Há uma relação de equivalência em K^* na qual $k_{ij} = k_{ji}$. Podemos estabelecer as conexões de uma malha observando os pesos de cada vértice v com relação aos seus agrupamentos. Para cada par de agrupamentos que um vértice v possuir um peso maior que zero, uma conexão k deve existir.

O Algoritmo 2 explica com mais detalhes o procedimento de geração das conexões, e a Figura 2.6 o ilustra. Esse procedimento nos fornece também duas relações muito importantes as quais serão usadas pelos algoritmos do Capítulo 3 para fraturar a malha corretamente:

- **Vértices v associados a cada conexão k_{ij} :** a fim de saber quais são os vértices que fazem parte da conexão k_{ij} , uma referência para o vértice v é adicionada em k_{ij} .
- **Grafo de Agrupamentos G_v os quais possuem v :** para cada vértice, criaremos um grafo G_v não direcionado o qual possui todos os agrupamentos c para os quais uma de suas conexões contém v . Esse grafo é importante na determinação de quando um vértice se rompe na malha (é duplicado). A notação $G_v(c_i, c_j)$ indica se existe aresta que conecta os agrupamentos no grafo. O grafo produzido por esse algoritmo é um grafo completo, e a utilização desse grafo será mais explicada no Capítulo 3.

Algoritmo 2 Algoritmo que explica a criação das conexões entre agrupamentos do objeto.

Parâmetros: Malha M , conjunto de agrupamentos C

para cada $v \in V$ **de** M

para cada c_i e c_j em C **tais que** $m_l(v, c_i) > 0$ e $m_l(v, c_j) > 0$

cria conexão k_{ij} , **se** k_{ij} não existe

associamos v à k_{ij}

$G_v(c_i, c_j) \leftarrow true$

adiciona k_{ij} à K^*

fim

fim

retorna Conjunto de conexões K^* , grafos de agrupamentos G_v para cada vértice v de M

2.3

Heurísticas para Segmentação

O modelo de segmentação apresentado nessa Seção utiliza a técnica do HFC para determinar quais triângulos da malha pertencem a quais agrupamentos. Entretanto, essa é apenas uma maneira possível de se estabelecer os agrupamentos. Qualquer outro método capaz de agrupar triângulos pode ser utilizado para a segmentação, desde que ele garanta que todos os triângulos de um agrupamento compartilhem pelo menos uma aresta, no intuito de evitar segmentos desconexos. Heurísticas para tipos específicos de objetos, as quais conhecidamente podem gerar agrupamentos mais naturais, podem ser utilizadas e integradas ao modelo de segmentação; essa estratégia foi utilizada na Seção 4.1.4.

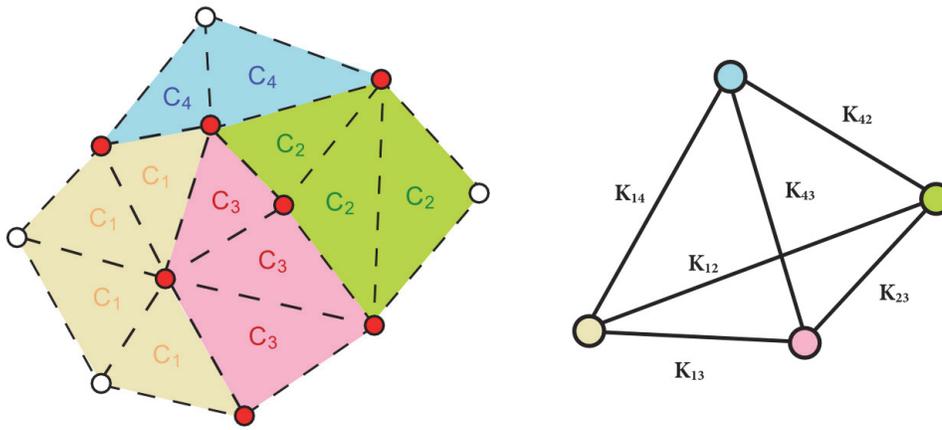


Figura 2.6: Diagrama contendo exemplo de trecho um objeto 3D com quatro agrupamentos c_1 , c_2 , c_3 e c_4 e seu grafo de conexões. O quadro da esquerda mostra os triângulos e vértices de cada agrupamento. Os vértices destacados em vermelho pertencem a alguma conexão entre os agrupamentos. O quadro da direita mostra as conexões k_{12} , k_{13} , k_{14} , k_{24} , k_{42} e k_{43} que ligam esses vértices. Para cada uma dessas conexões k_{ij} existe um vértice sobre o qual incidem triângulos do agrupamento c_i e do c_j .

2.4 Modelo de Deformação

O modelo de deformação usado neste trabalho é responsável pela parte cinética da simulação. Atua simultaneamente com o modelo de fratura sobre os objetos simulados: o modelo de deformação, responsável por simular os movimentos dos vértices da malha, trata cada um dos vértices como uma partícula, atualizando suas posições e velocidades, enquanto que o modelo de fraturas atua na detecção de rompimentos entre as conexões dos agrupamentos utilizando as posições atualizadas desses vértices.

O modelo de deformações adotado é o de Müller *et al.* (11) para a simulação de objetos deformáveis. Os objetivos encontrados nesse trabalho estão em consonância com nossos interesses: em seus resultados, obtiveram um modelo de deformações de motivação puramente geométrica, capaz de reproduzir simulações em objetos que podem variar de simulações de corpos rígidos para simulações de corpos deformáveis através da configuração de poucas variáveis. Os graus de liberdade conferidos ao movimento dos vértices da malha por esse modelo, simulados essencialmente como partículas, são o que precisamos para que haja uma potencial fratura entre os agrupamentos da malha: com uma simulação estrita de corpos rígidos, não há mudança no estado das conexões entre os agrupamentos e, conseqüentemente, não há fratura.

O algoritmo de integração modela deformações como a resposta de forças

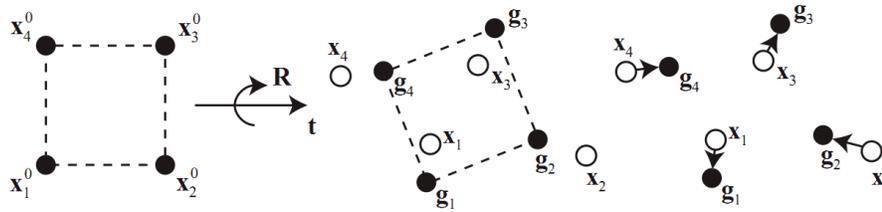


Figura 2.7: Diagrama representando o laço principal do modelo de deformação. No primeiro quadro, o objeto se encontra em estado de repouso; no segundo quadro, as posições ideais são calculadas a partir dos vértices; no terceiro quadro, as forças internas de restituição empurram ou puxam os vértices na direção das posições ideais. Fonte: (11)

internas ao efeito de forças externas a um objeto sobre suas partículas, as quais, para a utilização do modelo, correspondem aos vértices da malha e serão referidos nessa Seção de forma equivalente. Cada uma dessas fases será explicada nas Seções posteriores, e um quadro geral dessas fases pode ser encontrado na Figura 2.7.

2.4.1 Cinética e Colisões

Na simulação cinética do modelo de Müller *et al.*, cada um dos vértices da malha é tratado como uma partícula, dotada de massa, posição no espaço e velocidade. Nessa fase atuam sobre as partículas forças externas como a força da gravidade e as forças em resposta a colisões.

A resposta a colisões não recebeu atenção especial, pois foi dado foco aos modelos de deformação e fratura. Portanto, não apresentamos um sistema de colisão outro que não seja o das partículas com o ambiente. Não há tratamento para interações entre partículas ou entre a malha e o ambiente. O modelo de deformações escolhido e o modelo de fraturas criado, contudo, se propõe a agir de forma posterior e desacoplada da simulação cinética, o que prenuncia que alterações nessa fase não devem impactar a lógica e o funcionamento das fases seguintes.

2.4.2 Forças Internas

Após terem sido atualizadas as posições e velocidades das partículas do objeto, precisa-se computar as forças internas de restituição de forma que atuam sobre elas. Essas forças respondem à movimentação das partículas tentando restaurar suas posições relativas originais nos agrupamentos, preser-

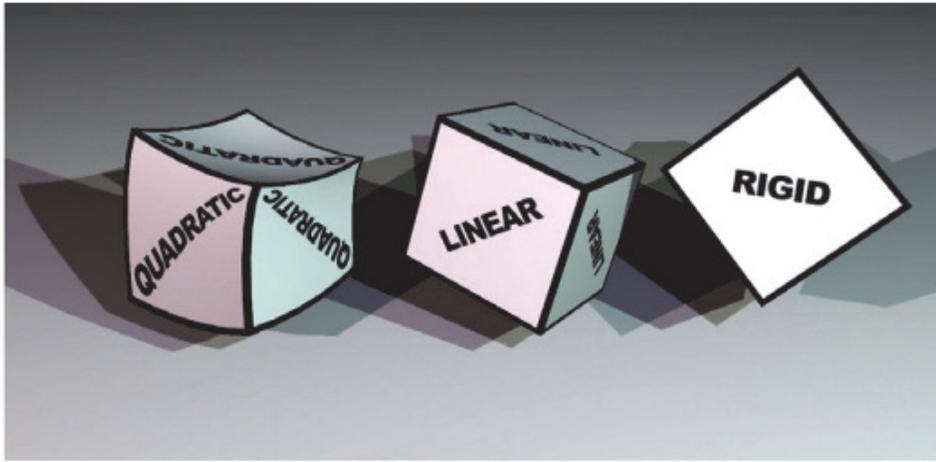


Figura 2.8: Resultados obtidos por Müller *et al.* (11) para a simulação um cubo com dois diferentes modos de deformação, quadrático e linear, e a simulação desse mesmo cubo como corpo rígido. Fonte: (11)

vando assim a forma original do objeto.

Chamam-se essas posições relativas originais dos agrupamentos de *posições ideais*, ou g_i^C . É na direção dessas posições g_i^C que as forças internas de restituição dos agrupamentos tentam empurrar os vértices v_i , como ilustrado na terceira fase da Figura 2.7. As posições ideais estão no cerne do modelo de deformação criado por Müller *et al.* (11), e existem diferentes formas de encontrá-las, todas elas baseadas em métodos puramente matemáticos de casamento de forma. As variações desses métodos recebem o nome de *modos de deformação*, para os quais o modelo de Müller *et al.* possui três¹:

- **Corpos Rígidos:** não contempla nenhuma deformação por parte dos objetos.
- **Deformações Lineares:** estende o modo de Corpos Rígidos para que contemple deformações de caráter linear, como alongamentos.
- **Deformações Quadráticas:** estende o modo de Deformações Lineares, para que contemple deformações de caráter quadrático, como torções.

Os diferentes modos de deformação têm por objetivo garantir diferentes graus de liberdade para a deformação dos objetos. A Figura 2.8 ilustra as deformações resultantes dos diferentes modos de deformação para um objeto simples, como obtidas por Müller *et al.* (11).

¹Utilizamos a nomenclatura de (11) para os modos de deformação, onde a ordem (linear ou quadrática) do modo de deformação não denota a ordem do deslocamento no modelo, e sim a ordem do problema de casamento de forma utilizado pelo modo.

Corpos Rígidos

O modo de deformação para corpos rígidos apresenta a base da qual os outros modos de deformação são derivados, e consiste, em sua essência, de um problema de casamento de forma. Enuncia-se esse problema também como um problema de minimização para o qual deseja-se encontrar, para os conjuntos de pontos x_i e x'_i , respectivamente os pontos originais e alterados, a matrix \mathbf{R} e os vetores \mathbf{t} e \mathbf{t}' tais que minimizam

$$\sum_i w_i (\mathbf{R}(x_i - \mathbf{t}) - (x'_i - \mathbf{t}'))^2, \quad (2-31)$$

onde w_i são os pesos de cada um dos pares de pontos na minimização, o que equivale ao peso do vértice no agrupamento. Essa matrix \mathbf{R} equivale a matrix de rotação que melhor aproxima os pontos x'_i , quando utilizada para transformar o conjunto de pontos inicial x_i .

Utilizaremos a solução adotada por (18). Podemos encontrar \mathbf{t} e \mathbf{t}' através dos centros de massa dos respectivos conjuntos de pontos:

$$\mathbf{t} = x_0 = \frac{\sum_i w_i x_i}{\sum_i w_i}, \quad (2-32)$$

$$\mathbf{t}' = x'_0 = \frac{\sum_i w_i x'_i}{\sum_i w_i}. \quad (2-33)$$

Para encontrar a rotação \mathbf{R} , define-se, como posições dos pontos relativas aos seus centros de massa,

$$\mathbf{q}_i = x_i - x_0, \quad (2-34)$$

$$\mathbf{p}_i = x'_i - x'_0, \quad (2-35)$$

e estende-se a matrix \mathbf{R} para que represente uma transformação linear qualquer \mathbf{A} . Essas alterações nos permitem reescrever a equação a qual queremos minimizar como a função

$$\varphi(\mathbf{A}) = \sum_i w_i (\mathbf{A}\mathbf{q}_i - \mathbf{p}_i)^2. \quad (2-36)$$

Podemos derivar φ com relação aos coeficientes de \mathbf{A} e igualar a função a zero a fim de encontrar \mathbf{A} na seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \left(\sum_i w_i \mathbf{p}_i \mathbf{q}_i^T \right) \left(\sum_i w_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T \right)^{-1} = \mathbf{A}_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \mathbf{A}_{\mathbf{q}\mathbf{q}}. \quad (2-37)$$

Como $\mathbf{A}_{\mathbf{q}\mathbf{q}}$ é a inversa do produto tensorial de \mathbf{q}_i com \mathbf{q}_i , temos que é simétrica, o que pelo Teorema Espectral nos garante que essa matrix, a menos de uma transformação ortogonal, é diagonal, o que equivale a dizer que não possui componente de rotação, apenas escala. A partir disso, conclui-se que

a matriz \mathbf{R} é a parte rotacional de $\mathbf{A}_{\mathbf{pq}}$, a qual pode-se encontrar através de uma decomposição polar

$$\mathbf{A}_{\mathbf{pq}} = \mathbf{R}\mathbf{S}, \quad (2-38)$$

onde

$$\mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{A}_{\mathbf{pq}}^T \mathbf{A}_{\mathbf{pq}}}, \quad (2-39)$$

o que faz com que possamos encontrar o valor da matriz \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_{\mathbf{pq}}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{A}_{\mathbf{pq}}(\sqrt{\mathbf{A}_{\mathbf{pq}}^T \mathbf{A}_{\mathbf{pq}}})^{-1}. \quad (2-40)$$

Através da matriz \mathbf{R} encontram-se as posições ideais g_i^C do conjunto de pontos x_i para o modo de deformação para corpos rígidos. As posições as quais os pontos x_i ocupariam caso fossem rotacionados da forma a melhor aproximar o conjunto de pontos x'_i do agrupamento C são escritas como:

$$g_i^C = \mathbf{R}(x_i - x_0) - x'_0. \quad (2-41)$$

Deformações Lineares

O modo de deformações para deformações lineares é uma extensão do modo para corpos rígidos. A fim de permitir que agrupamentos de vértices apresentem deformações como alongamentos, altera-se a forma como se calcula g_i utilizando a variante \mathbf{L} da matriz \mathbf{R} a qual pode ser calculada de acordo com a equação abaixo (por enquanto, sem preservação de volume):

$$\mathbf{L} = \beta\mathbf{A} + (1 - \beta)\mathbf{R}. \quad (2-42)$$

A matriz \mathbf{L} é resultado de uma interpolação linear entre a matriz de rotação \mathbf{R} e a transformação linear \mathbf{A} , ambas encontradas para o modo de deformação para corpos rígidos. Essa interpolação é modulada pelo parâmetro β do agrupamento, $\beta \in [0, 1]$, o qual controla a suscetibilidade do agrupamento a deformações lineares (para $\beta = 0$, nota-se que degenera-se o modo de deformação para corpos rígidos). A matriz \mathbf{A} , vale lembrar, satisfaz a decomposição polar

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{S}, \quad (2-43)$$

o que implica que a interpolação age sobre duas transformações: uma de rotação e escala, e outra somente apresentando rotação.

Incluído o componente da escala nesse modo de deformação, surge a necessidade de impor uma característica inspirada na física para os modelos de deformação: a preservação de volumes. Para alcançar tal efeito, normaliza-se \mathbf{A} na matriz \mathbf{A}' antes de utilizá-la no cálculo de \mathbf{L} :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} / \sqrt[3]{\det(\mathbf{A})}. \quad (2-44)$$

Essa normalização garante que $\det(\mathbf{A}') = 1$, e, com efeito, que alongamentos em um dos eixos locais causem achatamentos nos eixos remanescentes (e vice versa), simulando assim o Efeito de Poisson para corpos deformáveis. O cálculo de \mathbf{L} então pode ser atualizado para

$$\mathbf{L} = \beta \mathbf{A}' + (1 - \beta) \mathbf{R}. \quad (2-45)$$

Usa-se \mathbf{L} então no lugar de \mathbf{R} para determinar as posições ideais:

$$g_i^C = \mathbf{L}(x_i - x_0) - x'_0. \quad (2-46)$$

Deformações Quadráticas

A fim de simular efeitos como torções ou flexões, o modo de deformações quadráticas estende os cálculos para utilizar transformações quadráticas. Definimos uma transformação quadrática $\tilde{\mathbf{A}}$ como

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{x} = \tilde{y}, \quad (2-47)$$

onde $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^9$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^9$ e $\tilde{y} \in \mathbb{R}^3$.

A transformação quadrática de deformação $\tilde{\mathbf{A}}$ pode ser escrita através dos blocos A , Q , e $M \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. A contém os coeficientes lineares da transformação, Q os coeficientes quadráticos e M os coeficientes mistos. De forma semelhante, \tilde{x} é escrito a partir de um ponto $x \in \mathbb{R}^3$ tal que contenha seus coeficientes lineares, quadráticos e mistos:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A & Q & M \end{bmatrix}, \quad (2-48)$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x & y & z & x^2 & y^2 & z^2 & xy & yz & xz \end{bmatrix}. \quad (2-49)$$

Utiliza-se esse conceito de transformação quadrática para estender o problema de casamento de forma através de uma alteração da função φ no intuito de minimizar uma transformação quadrática:

$$\varphi(\tilde{\mathbf{A}}) = \sum_i w_i (\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{q}}_i - \mathbf{p}_i)^2, \quad (2-50)$$

na qual

$$\tilde{\mathbf{q}}_i = \begin{bmatrix} q_x & q_y & q_z & q_x^2 & q_y^2 & q_z^2 & q_x q_y & q_y q_z & q_x q_z \end{bmatrix}. \quad (2-51)$$

A solução desse problema é análoga ao caso linear, e se escreve como:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\sum_i w_i \mathbf{p}_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \right) \left(\sum_i w_i \tilde{\mathbf{q}}_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \right)^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{pq}} \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{qq}}. \quad (2-52)$$

Para manter esse modo de deformação também modulado por β , cria-se a matriz $\tilde{\mathbf{R}}$ a partir de \mathbf{R} :

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2-53)$$

Com isso, encontra-se a equação a versão quadrática $\tilde{\mathbf{L}}$ da matriz \mathbf{L} e pode-se determinar as posições ideais g_i^C para o modo de deformação quadrático:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \beta \tilde{\mathbf{A}} + (1 - \beta) \tilde{\mathbf{R}}, \quad (2-54)$$

$$g_i^C = \tilde{\mathbf{L}}(x_i - x_0) - x'_0. \quad (2-55)$$

2.4.3

Integração

Independentemente de qual é o modo de deformação sendo usado, encontradas as posições ideais g_i^C na fase anterior, as posições e velocidades das partículas são atualizadas através de um método de integração. Precisamos, para cada vértice da malha, atualizar suas velocidades levando em conta as forças internas exercidas por cada um dos agrupamentos, e com as velocidades atualizadas, atualizar suas posições. A atuação dessas forças internas de restituição dos agrupamentos sobre os vértices da malha pode ser descrita como um sistema massa-mola, para o qual o vértice x_i tem como posição de repouso, para a fase de integração da malha, sua posição ideal g_i .

Para um objeto deformável com múltiplos agrupamentos, as equações do sistema de integração, de acordo com Müller *et al.*(11), são:

$$\mathbf{v}_i(t+h) = \mathbf{v}_i(t) + \alpha \sum_{c \in C} \left(\frac{g_i^C(t) - x_i(t)}{h} \right) + h \frac{\mathbf{f}_{\text{ext}}(t)}{m(x_i)}, \quad (2-56)$$

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h \mathbf{v}_i(t+h), \quad (2-57)$$

onde $h > 0$ corresponde a qualquer incremento no tempo da simulação e $\alpha \in [0, 1]$, que chamamos de *coeficiente de restituição*, corresponde à força com a qual o objeto restitui sua forma. Fazemos uma adição a esse esquema de integração. Nossa equação modula a contribuição de cada agrupamento na velocidade de cada vértice utilizando o peso do vértice x_i , $m(x_i, c)$, alterando a equação de integração da velocidade. Com isso, temos um sistema de integração que pode ser escrito como:

$$\mathbf{v}_i(t+h) = \mathbf{v}_i(t) + \alpha \sum_{c \in C} \frac{m(x_i, c)}{m(x_i)} \left(\frac{g_i^C(t) - x_i(t)}{h} \right) + h \frac{\mathbf{f}_{\text{ext}}(t)}{m(x_i)}, \quad (2-58)$$

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h \mathbf{v}_i(t+h). \quad (2-59)$$

2.4.4 Plasticidade

Objetos os quais são capazes de sofrer deformações irreversíveis em sua estrutura como produto de sua natureza plástica podem ser simulados através do modelo de deformações. Caso a malha seja configurada como suscetível a deformações plásticas, um procedimento é executado para cada agrupamento após terem sido computadas suas contribuições nas forças internas de restituição da malha. Esse procedimento constitui-se de uma verificação de quantidade de deformação, a fim de determinar se foi suficiente para deformar plasticamente a estrutura inicial do agrupamento, seguido da alteração em si.

Para a modelagem de plasticidade, é associada a cada agrupamento uma matriz \mathbf{S}^P , a qual representa seu estado de deformação plástica. Essa matriz, inicializada como $\mathbf{S}^P = \mathbf{I}$, retém as deformações plásticas que ocorrem no objeto e altera as posições iniciais dos vértices nos agrupamentos, alterando assim a forma do mesmo. Esse modelo inspira-se na plasticidade de O'Brien *et al* (15). Os parâmetros c_{yield} e c_{creep} possuem relação com as constantes γ_1 e γ_2 do critério de Von Mises utilizadas em (15), podendo ser configuradas de forma análoga.

Verificação de Deformação Plástica

Para quantificar a quantidade de deformação sofrida por um agrupamento, é suficiente olhar para a matriz \mathbf{A} a qual equivale a transformação de deformação puramente linear. Através de sua decomposição polar $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{S}$, pode-se separar a componente de rotação \mathbf{R} da componente de deformação pura \mathbf{S} , sendo essa segunda matriz a representação da característica a qual desejamos medir.

Um agrupamento sofre deformação plástica sempre que

$$\|\mathbf{S} - \mathbf{I}\|_2 > c_{yield}, \quad (2-60)$$

no qual $\|\cdot\|_2$ representa a norma de Frobenius e c_{yield} representa a barreira inicial do material do objeto para que ele sofra os efeitos permanentes das deformações plásticas. Essa condição busca quantificar a deformação sofrida pelo agrupamento no atual passo de integração; em outras palavras, o quão distante da matriz identidade \mathbf{I} a matriz de deformação pura \mathbf{S} está. Quando essa condição é satisfeita, altera-se a estrutura do agrupamento.

Deformação Plástica

Sempre que a condição previamente apresentada é atingida, atualiza-se a matriz \mathbf{S}^P e os valores das posições iniciais relativas $\mathbf{q}_i = x_i - x_0$ no

intuito de simular deformações permanentes no agrupamento. Com a intenção de simplesmente atualizar a matriz \mathbf{S}^P , pode-se computá-la como

$$\mathbf{S}^P \leftarrow [\mathbf{I} + hc_{creep}(\mathbf{S} - \mathbf{I})]\mathbf{S}^P, \quad (2-61)$$

onde o parâmetro c_{creep} representa a suscetibilidade da malha a deformações plásticas. Essa atribuição, entretanto, não é suficiente. É necessário tratar o novo valor da matriz \mathbf{S}^P segundo os seguintes critérios:

- **Preservação de Volume:** como a transformação \mathbf{S}^P será utilizada para alterar as posições originais dos vértices do agrupamento, deseja-se que essa transformação preserve o volume total do agrupamento, assim como com a matriz \mathbf{A} de deformações lineares. Logo, \mathbf{S}^P precisa ser normalizada, ou seja, dividida por $\sqrt[3]{\det(\mathbf{S}^P)}$.
- **Limites Máximos:** para evitar que deformações plásticas atuem indefinidamente, desconfigurando a malha, realiza-se uma segunda verificação, para a qual a condição $\|\mathbf{S}^P - \mathbf{I}\|_2 > c_{max}$ determina que a matriz \mathbf{S}^P deve ser limitada. Quando isso ocorre, reatribui-se \mathbf{S}^P como na equação abaixo, a qual aproxima \mathbf{S}^P da matriz identidade (abrandando o efeito da deformação plástica) de forma proporcional à razão entre c_{max} e $\|\mathbf{S}^P - \mathbf{I}\|_2$:

$$\mathbf{S}^P \leftarrow \mathbf{I} + \frac{c_{max}}{\|\mathbf{S}^P - \mathbf{I}\|_2}(\mathbf{S}^P - \mathbf{I}). \quad (2-62)$$

Tendo a matriz do estado da deformação plástica \mathbf{S}^P atualizada, atualizam-se as posições relativas originais do agrupamento:

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{S}^P(x_i - x_0). \quad (2-63)$$

Essa alteração nas posições relativas originais \mathbf{q}_i altera o resultado dos cálculos para a determinação das posições ideais g_i^C : será na direção das novas posições relativas que os vértices serão direcionados pelas forças internas de restituição, causando efetivamente uma alteração na forma do agrupamento.

2.4.5 Relaxação

Com relação à sua ordem de execução, o algoritmo de deformações lida antes com as forças de resposta de colisão para depois tratar da aplicação das forças internas de restituição de forma. As forças de restituição de forma, contudo, podem invalidar as posições dos vértices da malha, levando-os efetivamente para dentro dos objetos com os quais eles colidem. A fim de minimizar esse aspecto, implementamos um sistema de relaxação, o qual intercala repetidamente aplicações dos algoritmos de aplicação das forças internas (como apresentado na Seção 2.4.1) com o de aplicação das forças de colisão (como

apresentado na Seção 2.4.2). Esses passos correspondem aos quadros 2 e 3 da Figura 2.7. Essa repetição atua como um algoritmo de “acomodação” do objeto deformável.