6
Modelagem do manipulador

Neste capítulo, primeiramente a cinemática do manipulador é estudada. A cinemática direta do manipulador é apresentada e, em seguida, a cinemática inversa é calculada.

Após concluir o estudo cinemático do manipulador, é apresentada sua modelagem dinâmica. Nesta análise, os torques que atuam sobre o manipulador, e suas implicações no movimento, são analisados.

6.1.
Cinemática direta

Na realização de qualquer tarefa, a localização da extremidade do manipulador em relação à sua base deve ser conhecida [29]. Na cinemática direta, as variáveis das juntas são assumidas como conhecidas, e o problema se resume em encontrar a posição e orientação da extremidade do manipulador.

A Figura 43 mostra um diagrama esquemático do manipulador construído para esta dissertação, incluindo os sistemas de coordenadas em cada elo seguindo a convenção de Denavit-Hartenberg [29].

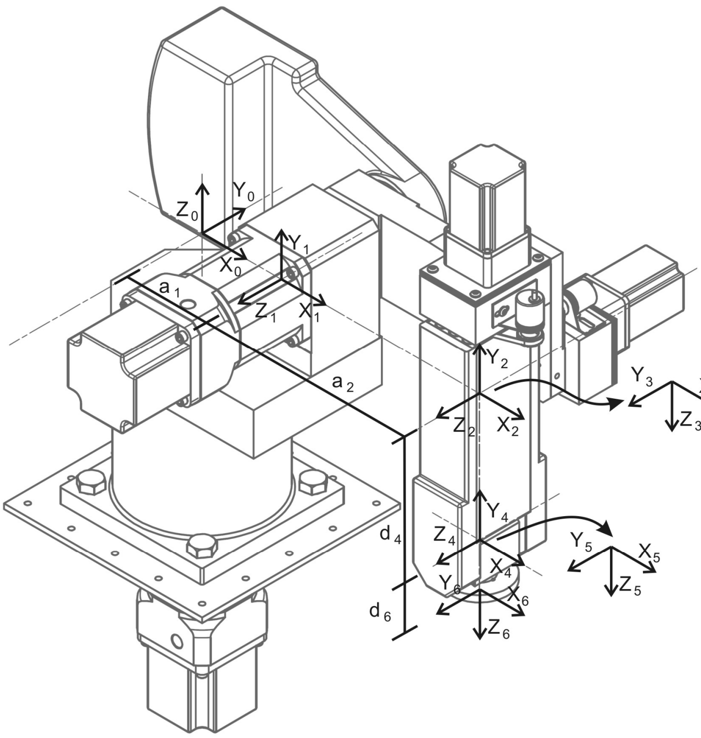

Figura 43 – Diagrama dos eixos coordenados

Usando os sistemas de coordenadas estabelecidos na Figura 43, a Tabela 4 apresenta os parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH) de cada elo do manipulador.

Tabela 4 – Parâmetros de DH

Elo	a_i	d_i	α_i	θ_i
1	$a_1 = 0{,}10m$	0	$+90º$	θ_1
2	$a_2 = 0{,}25m$	0	0	θ_2
3	0	0	$+90º$	θ_3
4	0	$d_4 = 0{,}16m$	$-90º$	θ_4
5	0	0	$+90º$	θ_5
6	0	$d_6 = 0{,}05m$	0	θ_6

onde:

a_i – comprimento da normal comum entre o eixo da junta i e da junta $i-1$;

d_i – distância entre a origem do sistema $i-1$ e a normal comum;

α_i – ângulo entre o eixo z_{i-1} e o eixo z_i, na direção de x_i;

θ_i – ângulo entre o eixo x_{i-1} e o eixo x_i, medido na direção de z_{i-1}.

A partir desta tabela, podem-se substituir os valores dos parâmetros de DH para escrever as matrizes homogêneas de transformação, que relacionam as translações e rotações entre os sistemas de coordenadas:

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1 \cdot c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1 \cdot s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 \cdot c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 \cdot s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

$$A_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

$$A_5^4 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

$$A_6^5 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

onde definem-se $c_i = \cos(\theta_i)$, $s_i = sen(\theta_i)$, $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$ e $s_{ij} = sen(\theta_i + \theta_j)$.

A cinemática direta deste manipulador pode ser obtida através da multiplicação destas matrizes [30] para obter a matriz homogênea que relaciona o sistema da extremidade com o da base

$$A_6^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 \cdot A_3^2 \cdot A_4^3 \cdot A_5^4 \cdot A_6^5 \tag{6.7}$$

A localização da extremidade do manipulador pode ser extraída da quarta coluna da matriz A_6^0 de transformação homogênea [29]:

$$A_6^0 = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & q_x \\ u_y & v_y & w_y & q_y \\ u_z & v_z & w_z & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

onde os elementos q_x, q_y e q_z definem a posição da extremidade em relação ao sistema da base. A orientação da extremidade pode ser obtida através dos cossenos diretores do sistema de coordenadas da extremidade, calculados a partir dos vetores unitários $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ nas direções de, $\boldsymbol{x_6}$, $\boldsymbol{y_6}$ e $\boldsymbol{z_6}$, respectivamente, vide eq. (6.8).

Após calcular o produto da eq. (6.7) e simplificar as equações usando algumas identidades trigonométricas, os elementos de A_6^0 são obtidos:

$$u_x = c_1\left[c_{23}\left(c_4c_5c_6 - s_4s_6\right) - s_{23}s_5c_6\right] + s_1\left(s_4c_5c_6 + c_4s_6\right) \tag{6.9}$$

$$u_y = s_1\left[c_{23}\left(c_4c_5c_6 - s_4s_6\right) - s_{23}s_5c_6\right] - c_1\left(s_4c_5c_6 + c_4s_6\right) \tag{6.10}$$

$$u_z = s_{23}\left(c_4c_5c_6 - s_4s_6\right) + c_{23}s_5c_6 \tag{6.11}$$

$$v_x = c_1\left[-c_{23}\left(c_4c_5s_6 + s_4c_6\right) + s_{23}s_5s_6\right] + s_1\left(-s_4c_5s_6 + c_4c_6\right) \tag{6.12}$$

$$v_y = s_1\left[-c_{23}\left(c_4c_5s_6 + s_4c_6\right) + s_{23}s_5s_6\right] - c_1\left(-s_4c_5s_6 + c_4c_6\right) \tag{6.13}$$

$$v_z = -s_{23}\left(c_4c_5c_6 + s_4c_6\right) - c_{23}s_5s_6 \tag{6.14}$$

$$w_x = c_1\left(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5\right) + s_1s_4c_5 \tag{6.15}$$

$$w_y = c_1\left(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5\right) - c_1s_4s_5 \tag{6.16}$$

$$w_z = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \tag{6.17}$$

$$q_x = c_1\left[a_1 + a_2c_2 + d_4s_{23} + d_6\left(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5\right)\right] + d_6s_1s_4s_5 \tag{6.18}$$

$$q_y = s_1\left[a_1 + a_2c_2 + d_4s_{23} + d_6\left(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5\right)\right] - d_6c_1s_4s_5 \tag{6.19}$$

$$q_z = a_2s_2 - d_4c_{23} + d_6\left(s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5\right) \tag{6.20}$$

Com esses elementos calculados, a posição e orientação da extremidade a partir dos ângulos das juntas são obtidas. Logo, a cinemática direta do manipulador é conhecida. A partir de alguns elementos da cinemática direta, e utilizando algumas propriedades geométricas do manipulador, a cinemática inversa é calculada a seguir.

6.2.
Cinemática inversa

O problema da cinemática inversa é determinar os valores das variáveis das juntas dada uma posição e orientação desejadas da extremidade [30]. Para um manipulador genérico, este problema não possui solução analítica. Para o manipulador desenvolvido, seria necessário resolver o sistema de equações (6.9)-(6.20). No entanto, estas equações são não-lineares e complexas de resolver. Uma solução alternativa, utilizando propriedades geométricas desse manipulador específico, é mais simples de ser obtida, e apresentada a seguir.

A Figura 44 mostra como os sistemas de coordenadas da base e do centro do punho se relacionam. Observando esta figura, a posição do centro do punho (origem do sistema de coordenadas 4) não depende dos ângulos das últimas três juntas. Isso ocorre porque os eixos de rotação das últimas três juntas se interceptam em um único ponto. Assim, a solução da cinemática inversa pode ser dividida em duas partes: obtenção da posição do centro do punho e obtenção da orientação da extremidade.

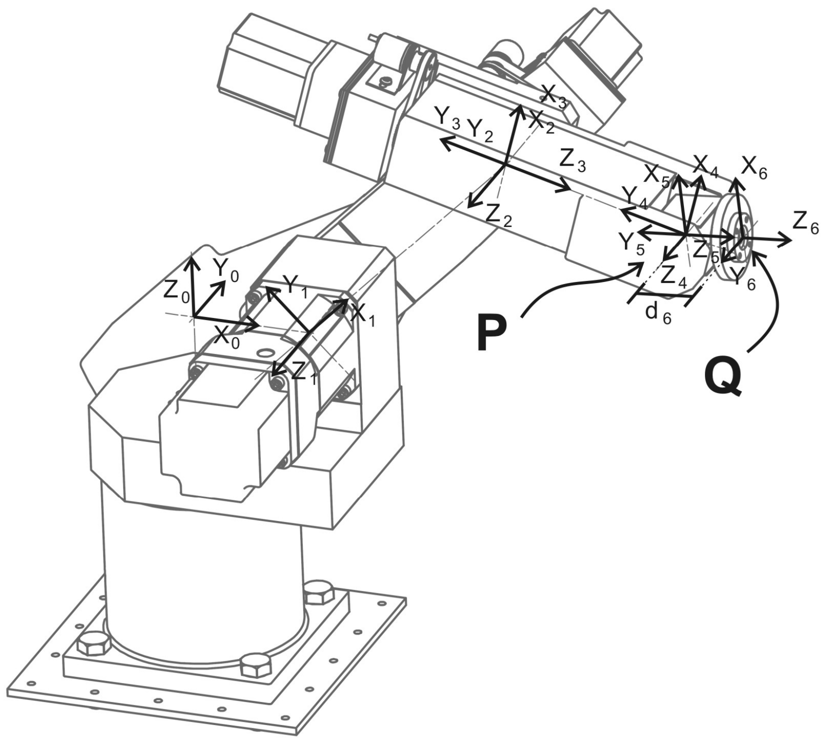

Figura 44 – Posição do centro do punho

Na Figura 44, o sistema *0* é o sistema de coordenadas da base, o ponto *P* é o centro do punho e o ponto *Q* é a extremidade do manipulador. A posição do ponto *P* usando o sistema de coordenadas da extremidade vale

$$ {}^{6}p = \overline{QP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d_6 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{6.21} $$

Essa mesma posição no sistema de coordenadas da base vale

$$ {}^{6}p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x - d_6 w_x \\ q_y - d_6 w_y \\ q_z - d_6 w_z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.22} $$

e no sistema de coordenadas da junta 3 resulta em

$$ {}^{3}p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_4 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{6.23} $$

Pode-se então calcular ${}^{3}p$ usando a matriz de transformação A_3^0:

$$ {}^{0}p = A_3^{0}\,{}^{3}p \tag{6.24} $$

onde A_3^0 é dada por

$$ A_3^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 & c_1 & c_1(a_1 + a_2 c_2) \\ s_1 c_{23} & c_1 & s_1 & s_1(a_1 + a_2 c_2) \\ s_{23} & 0 & c_{23} & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.25} $$

Multiplicando-se ambos os lados de (6.24) pela inversa de A_1^0, obtém-se

$$ \left(A_1^0\right)^{-1}\,{}^{0}p = A_3^{1}\,{}^{3}p \tag{6.26} $$

e, substituindo as eq.(6.1) – (6.3) em (6.26), resulta em

$$ p_x c_1 + p_y s_1 - a_1 = a_2 c_2 + d_4 s_{23} \tag{6.27} $$

$$ p_z = a_2 s_2 + d_4 c_{23} \tag{6.28} $$

$$ p_x s_1 - p_y c_1 = 0 \tag{6.29} $$

onde p_x, p_y e p_z são dados pela eq. (6.22). A partir da eq. (6.29), uma expressão para θ_1 em função de p_x e p_y pode ser obtida

$$ \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{p_y}{p_x}\right) \tag{6.30} $$

A partir da eq. (6.30), é observado que para cada solução $\theta_1{}^*$, existe (matematicamente) outra solução $\theta_1{}^* + \pi$. Mas, devido a limitações mecânicas no manipulador, somente a primeira solução é válida, a outra não pode ser atingida sem colisão entre os elos.

Elevando os dois lados das eq. (6.27) – (6.29) ao quadrado, e somando todas as equações, obtém-se

$$\kappa_1 = \kappa_2 s_3 \tag{6.31}$$

onde

$$\kappa_1 = p_x^{\,2} + p_y^{\,2} + p_z^{\,2} - 2a_1 p_x c_1 - 2a_1 p_y s_1 + a_1^{\,2} - a_2^{\,2} - d_4^{\,2}$$

$$\kappa_2 = 2a_2 d_4$$

A partir da eq. (6.31), a expressão para θ_3 é obtida:

$$\theta_3 = sen^{-1}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right) \tag{6.32}$$

Assumindo que $\theta_3 = \theta_3{}^*$ uma solução, onde $0 \le \theta_3{}^* \le \pi/4$, conclui-se que $\theta_3 = \pi - \theta_3{}^*$ também é solução. A Figura 45 mostra as duas possibilidades de configuração para a mesma posição do ponto *P*, conhecidas popularmente em outros manipuladores como "cotovelo para cima" (*upper elbow*) ou "cotovelo para baixo" (*lower elbow*).

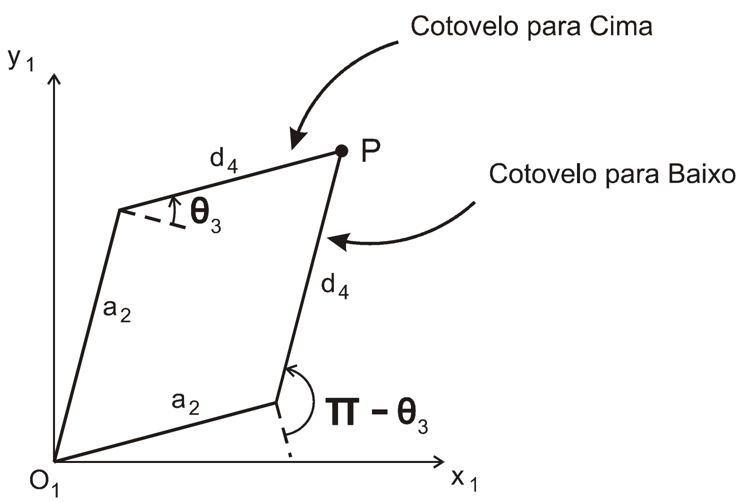

Figura 45 – Duas soluções da junta 3

Devido à possível colisão do motor da junta 4 com os demais elos, somente a solução de θ_3 onde o cotovelo fica para cima é possível. Em seguida, as eq. (6.27) e (6.28) são expandidas, obtendo-se

$$\mu_1 c_2 - \mu_2 s_2 = \gamma_1 \tag{6.33}$$

$$\mu_2 c_2 + \mu_1 s_2 = \gamma_2 \tag{6.34}$$

onde

$$\mu_1 = a_2 + d_4 s_3$$

$$\mu_2 = -d_4 c_3$$

$$\gamma_1 = p_x c_1 + p_y s_1 - a_1$$

$$\gamma_2 = p_z$$

A partir das eq. (6.33) e (6.34) é obtida uma expressão para o seno do ângulo θ_2 da junta 2, s_2, e uma expressão para o seu cosseno, c_2:

$$s_2 = \frac{\mu_1\gamma_2 - \mu_2\gamma_1}{\mu_1^2 + \mu_2^2} \tag{6.35}$$

$$c_2 = \frac{\mu_1\gamma_1 + \mu_2\gamma_2}{\mu_1^2 + \mu_2^2} \tag{6.36}$$

Os valores de s_2 e c_2 são usados para determinar θ_2 por

$$\theta_2 = atan2(s_2, c_2) \tag{6.37}$$

onde a função $\theta = atan2(a, b)$ é definida tal que $sin\theta = a$ e $cos\theta = b$.

A partir das equações apresentadas, duas possíveis soluções para a junta 1 e duas para junta 3 são obtidas, o que resulta em quatro possíveis combinações. Entretanto, devido a limitações mecânicas do manipulador anteriormente mencionadas, apenas uma solução da cinemática inversa é possível de ser alcançada.

Uma vez que se conhece a posição do centro do punho do manipulador em relação à sua base, é necessário cálculo da orientação da extremidade para obter a solução completa da cinemática inversa. Como θ_1, θ_2 e θ_3 já foram calculados pelas equações anteriores, a matriz homogênea A_3^0 relacionando os sistemas 0 e 3 é conhecida. Esta matriz satisfaz a relação

$$A_6^0 = A_3^0 A_6^3 \tag{6.38}$$

Multiplicado ambos os lados da eq. (6.38) pela inversa de A_3^0, obtém-se

$$A_6^3 = \left(A_3^0\right)^{-1} A_6^0 \tag{6.39}$$

Como o elemento 3x3 de A_6^3 é igual ao cosseno do ângulo da junta 5, c_5, parte da multiplicação do lado direito da eq. (6.39) pode ser efetuada para calcular este elemento, como representado a seguir, onde os elementos que não participam da multiplicação estão suprimidos por “ _ ”:

$$\begin{bmatrix} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & c_5 & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ c_1 s_{23} & s_1 s_{23} & -c_{23} & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \_ & \_ & w_x & \_ \\ \_ & \_ & w_y & \_ \\ \_ & \_ & w_z & \_ \\ \_ & \_ & 0 & \_ \end{bmatrix} \tag{6.40}$$

A partir desta multiplicação matricial, é possível obter uma expressão para θ_5:

$$\theta_5 = \cos^{-1}\left(w_x c_1 s_{23} + s_1 s_{23} w_y - c_{23} w_z\right) \tag{6.41}$$

Como o elemento 1x3 de A_6^3 é igual a $c_4 s_5$, ele pode ser calculado a partir da eq. (6.39), como representado a seguir:

$$\begin{bmatrix} \_ & \_ & c_4 s_5 & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & s_1 s_{23} & s_{23} & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \_ & \_ & w_x & \_ \\ \_ & \_ & w_y & \_ \\ \_ & \_ & w_z & \_ \\ \_ & \_ & 0 & \_ \end{bmatrix} \tag{6.42}$$

A partir desta multiplicação matricial, obtém-se uma expressão para o cosseno do ângulo da junta 4, c_4, válida desde que $s_5 \neq 0$:

$$c_4 = \frac{w_x c_1 c_{23} + w_y s_1 c_{23} + w_z s_{23}}{s_5} \tag{6.43}$$

A matriz A_6^3 possui o elemento 2x3 igual a $s_4 s_5$, portanto a partir da eq. (6.39) pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & s_4 s_5 & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_ & \_ & \_ & \_ \\ s_1 & -c_1 & 0 & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \_ & \_ & w_x & \_ \\ \_ & \_ & w_y & \_ \\ \_ & \_ & w_z & \_ \\ \_ & \_ & 0 & \_ \end{bmatrix} \tag{6.44}$$

A partir desta multiplicação matricial, obtém-se uma expressão para s_4, válida desde que $s_5 \neq 0$:

$$s_4 = \frac{w_x s_1 - w_y c_1}{s_5} \tag{6.45}$$

A partir dos valores de s_4 e c_4 calculados, pode-se calcular o valor de θ_4:

$$\theta_4 = atan2(s_4, c_4) \tag{6.46}$$

Como o elemento 3x1 de A_6^3 é igual a $-s_5c_6$, parte da multiplicação do lado direito da eq. (6.39) resulta neste elemento:

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ -s_5c_6 & - & - & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ c_1s_{23} & s_1s_{23} & -c_{23} & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & - & - & - \\ u_y & - & - & - \\ u_z & - & - & - \\ 0 & - & - & - \end{bmatrix} \tag{6.47}$$

e, a partir desta multiplicação matricial, obtém-se c_6:

$$c_6 = -\frac{u_xc_1s_{23} + u_ys_1s_{23} - u_zc_{23}}{s_5} \tag{6.48}$$

Analogamente, como o elemento 3x2 de A_6^3 é igual a s_5s_6, pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & s_5s_6 & - & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ c_1s_{23} & s_1s_{23} & -c_{23} & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & v_x & - & - \\ - & v_y & - & - \\ - & v_z & - & - \\ - & 0 & - & - \end{bmatrix} \tag{6.49}$$

E, a partir desta multiplicação matricial, obtém-se s_6:

$$s_6 = \frac{v_xc_1s_{23} + v_ys_1s_{23} - v_zc_{23}}{s_5} \tag{6.50}$$

Finalmente, a partir dos valores de s_6 e c_6 calculados, obtém-se o valor do ângulo da junta da 6, θ_6:

$$\theta_6 = atan2(s_6, c_6) \tag{6.51}$$

Devido limitações mecânicas da junta 5, seu espaço de trabalho está compreendido entre, aproximadamente $\pm 90°$. Logo, quando $s_5 = 0$, conclui-se que $\theta_5 = 0$. Nesta situação singular, a solução da eq. (6.46) para θ_4 não pode ser usada. Quando isto ocorre, apenas a diferença entre θ_4 e θ_6 pode ser computada, porque os eixos z_4 e z_6 se tornam coincidentes.

Uma vez conhecido o comportamento cinemático do manipulador, pode-se derivar seu comportamento dinâmico, como descrito a seguir.

6.3. Dinâmica

O desenvolvimento do modelo dinâmico do manipulador é importante para diversos fins. Primeiro, um modelo dinâmico pode ser usado para simular o comportamento do manipulador sobre várias condições de operação. Segundo, pode ser usado para desenvolver estratégias de controle mais eficientes. Terceiro, a análise dinâmica do manipulador permite calcular todas as forças e torques necessários para seguir trajetórias de interesse, e assim poder dimensionar os seus elos, atuadores e mancais [29].

A equação de movimento para um manipulador serial genérico é descrita por [28]

$$\sum_{j=0}^{n} M_{ij}\ddot{q}_j + V_i + G_i = Q_i \qquad \text{para } i = 1, 2, ..., n. \tag{6.52}$$

onde:

$$V_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{6.53}$$

$$G_i = -\sum_{j=1}^{n} m_j \overline{g}^T J_{vj}^i \tag{6.54}$$

Na eq. (6.52), a matriz M é a matriz de inércia do manipulador, q é o vetor de coordenadas generalizadas das juntas, n é o número de graus de liberdade, V é o vetor com termos associados a forças inerciais centrífugas e de Coriolis, G_i é o torque devido à força da gravidade atuando na junta i, Q_i é a força generalizada correspondente a junta i, J_{vj}^i é a *j-ésima* coluna da matriz Jacobiana linear do elo i, m_j é a massa do elo j, e $\overline{g}$ é o vetor da aceleração gravitacional.

A matriz M pode ser calculada a partir de

$$M = \sum_{i=1}^{n}\left(J_{vi}^T m_i J_{vi} + J_{\omega i}^T I_i J_{\omega i}\right) \tag{6.55}$$

onde $J_{\omega i}$ é a sub-matriz Jacobiana associada à velocidade angular do elo i, J_{vi} é a sub-matriz Jacobiana associada à velocidade linear do centro de massa do elo i, e I_i é a matriz de inércia do elo i em relação ao centro de massa, usando o sistema de coordenadas da base [28].

As massas de cada elo, obtidas a partir do *software* CAD utilizado no projeto, são

$$m_1 = 12{,}1kg \tag{6.56}$$

$$m_2 = 21{,}7kg \tag{6.57}$$

$$m_3 = 3{,}69kg \tag{6.58}$$

$$m_4 = 4{,}02kg \tag{6.59}$$

$$m_5 = 0.203kg \tag{6.60}$$

$$m_6 = 0.369kg \tag{6.61}$$

e as matrizes de inércia dos elos, em relação a seus respectivos centros de gravidade e usando os sistemas de coordenadas locais de cada junta, são

$${}^1I_1 = \begin{bmatrix} 0{,}1314 & -0{,}0178 & 0{,}0143 \\ -0{,}0178 & 0{,}1314 & -0{,}0250 \\ 0{,}0143 & -0{,}0250 & 0{,}0727 \end{bmatrix} kg.m^2 \tag{6.62}$$

$${}^2I_2 = \begin{bmatrix} 0{,}0626 & 0{,}0028 & -0{,}0050 \\ -0{,}0028 & 0{,}5190 & -0{,}0002 \\ 0{,}0050 & -0{,}0002 & 0{,}5418 \end{bmatrix} kg.m^2 \tag{6.63}$$

$${}^3I_3 = \begin{bmatrix} 0{,}0222 & 0{,}0002 & 0 \\ 0{,}0002 & 0{,}0196 & 0{,}0058 \\ 0 & 0{,}0058 & 0{,}0059 \end{bmatrix} kg.m^2 \tag{6.64}$$

$${}^4I_4 = \begin{bmatrix} 0{,}0281 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0044 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0260 \end{bmatrix} kg.m^2 \tag{6.65}$$

$${}^5I_5 = \begin{bmatrix} 0{,}00010 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}00012 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}00011 \end{bmatrix} kg.m^2 \tag{6.66}$$

$${}^6I_6 = \begin{bmatrix} 0{,}00011 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}00011 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}00017 \end{bmatrix} kg.m^2 \tag{6.67}$$

Os vetores que descrevem a posição do centro de gravidade do elo i, usando o sistema de coordenadas local do próprio elo i, são

$${}^1r_{c1} = \begin{bmatrix} -0{,}027228 \\ -0{,}047041 \\ 0{,}041620 \end{bmatrix} m \tag{6.68}$$

$${}^2r_{c2} = \begin{bmatrix} -0{,}338365 \\ 0{,}000378 \\ -0{,}132453 \end{bmatrix} m \tag{6.69}$$

$$ {}^{3}r_{c3} = \begin{bmatrix} 0{,}001933 \\ -0{,}031652 \\ -0{,}113306 \end{bmatrix} m \tag{6.70} $$

$$ {}^{4}r_{c4} = \begin{bmatrix} -0{,}000103 \\ 0{,}119374 \\ 0{,}000103 \end{bmatrix} m \tag{6.71} $$

$$ {}^{5}r_{c5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}000257 \\ 0{,}004616 \end{bmatrix} m \tag{6.72} $$

$$ {}^{6}r_{c6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}012196 \end{bmatrix} m \tag{6.73} $$

Como este manipulador possui apenas juntas rotativas, a matriz J_{vi} pode ser calculada a partir de

$$ J_{vi}^{j} = z_{j-1} \times {}^{j-1}p_{ci}^{\,*} \tag{6.74} $$

onde ${}^{j-1}p_{ci}^{\,*}$ é o vetor que define a posição do centro de massa do elo i, em relação à origem do elo $j-1$, escrito no sistema de coordenadas da base. Este vetor pode ser calculado usando as eqs. (6.68-6.73) e as eqs. (6.1-6.6). A coluna j é definida como nula se $j > i$, uma vez que a velocidade do centro de massa de um elo i de um manipulador serial não depende dos ângulos das juntas posteriores a ele, entre i+1 e n.

O cálculo das forças centrífugas e de Coriolis necessitam das derivadas parciais da matriz de inércia em relação às coordenadas das juntas. Devido à quantidade de termos da matriz de inércia, aproximações numéricas das derivadas são calculadas. As aproximações das forças centrífugas e de Coriolis são calculadas por

$$ V_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\Delta M_{ij}}{\Delta q_k} - \frac{1}{2} \frac{\Delta M_{jk}}{\Delta q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \tag{6.75} $$

onde Δq_k e Δq_i são incrementos pequenos nas coordenadas das juntas k e i, respectivamente. A aproximação da derivada com relação s q_k é calculada a partir da diferença entre a matriz de inércia calculada com $q_k + \Delta q_k$ e a matriz original, e essa diferença é divida por Δq_k. Esta derivada é estimada por

$$\frac{\Delta M_{ij}}{\Delta q_k} = \frac{M_{ij}(q_k + \Delta q_k) - M_{ij}(q_k)}{\Delta q_k} \tag{6.76}$$

Analogamente, a derivada com relação a q_i é estimada por

$$\frac{\Delta M_{jk}}{\Delta q_i} = \frac{M_{jk}(q_i + \Delta q_i) - M_{jk}(q_i)}{\Delta q_i} \tag{6.77}$$

Desse modo, o estudo da dinâmica do manipulador está completo. Com a cinemática direta e inversa calculadas, o modelo do manipulador proposto está concluído, e pode ser simulado, como descrito no próximo capítulo.