

- [1] GRAY, D. A Broadband Wireless Access System at 28 GHz. **IEEE Radio and Wireless Conference**, Boulder, CO, p. 1-7, ag. 1997.
- [2] SARI, H. Some Design Issues in Local Multipoint Distribution Systems. **International Symposium on Signals, Systems, and Electronics**, p. 13-19, 1998.
- [3] SEIDEL, S. Radio Propagation and Planning at 28 GHz for Local Multipoint Distribution Service (LMDS). **IEEE Antenna and Propagation Society International Symposium**, New York, v. 2, p. 622-625, 1998.
- [4] ROMAN, V. I. Frequency Reuse and System Deployment in Local Multipoint Distribution Service. **IEEE Personal Communications**, v. 6, p. 20-27, dez. 1999.
- [5] NORBOTTEN, A. LMDS Systems and their Application. **IEEE Communication Magazine**, p. 150-154, jun. 2000.
- [6] TAKEICHI, Y.; KATAGI, T. The Omnidirectional Horn-Reflector Antenna. **IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium**, v. 8, p. 40-47, set. 1970.
- [7] BERGMANN, J. R.; HASSELMANN, F. J. V.; BRANCO, M. G. C. A Shaped Reflector Antenna for Mobile Communication. **IEEE AP-S Int. Symp. Dig.**, v. 3, p. 2154-2157, 1999.
- [8] BERGMANN, J. R.; HASSELMANN, F. J. V.; BRANCO, M. G. C. A Single-Reflector Design for Omnidirectional Coverage. **Microwave and Optical Technology Letters**, v. 24, p. 426-429, abr. 2000.
- [9] KEZUKA, A.; KAZAMA, Y.; YAMADA, Y. Antennas with Coscant Square Radiation Pattern both Upward and Downward for FWA. **IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium**, v. 2, p. 782-785, jun. 2003.
- [10] NORRIS, A. P.; WADDOUP, W. D. A Millimetric Wave Omnidirectional Antenna with Prescribed Elevation Shaping. **In Proc. ICAP-4th Int. Conf. Antennas and Propagation**, p. 141-145, 1985.
- [11] OREFICE, M.; PIRINOLI, P. Dual Reflector Antenna with Narrow Broadside Beam for Omnidirectional Coverage. **Electron. Lett.**, v. 29, n. 25, p. 2158-2159, dec. 1993.
- [12] OREFICE, M.; PIRINOLI, P. A Dual Reflector Antenna for Omnidirectional Coverage. **IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium**, v. 1, p. 274-277, 1993.
- [13] ABDULLAH, H. B. A Prototype Q-Band Antenna for Mobile Communication Systems. **In Proc. ICAP-10th Int. Conf. Antennas and Propagation**, v. 1, p. 452-455, 1997.

- [14] BESSO, P. R. et al. A Millimetric Wave Omnidirectional Antenna with Cosecant Squared Elevation Pattern. **In Proc. ICAP-10th Int. Conf. Antennas and Propagation**, v. 1, p. 448–451, 1997.
- [15] VALLAURI, R. et al. Azimuthally Omnidirectional Antenna with Vertical or Horizontal Polarization for LMDS in the 40 GHz Band. **Int. Jour. Of Numerical Modelling Elect. Networks, Devices and Fields**, p. 1448-1451, 2000.
- [16] OREFICE, M.; TARTAGLIA, C. A Shaped-Omnidirectional Pattern Dual reflector antenna for MM-Waves. **IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium**, v. 2, p. 844-847, 1998.
- [17] PINO, A. G.; ACUÑA, A. M. A.; LOPEZ, J. O. R. An Omnidirectional Dual-Shaped Reflector Antenna. **Microwave and Optical Technology Letters**, v. 27, n. 5, p. 371–374, dec. 2000.
- [18] BERGMANN, J. R.; MOREIRA, F. J. S. An Omni Directional ADE Reflector Antenna. **Microwave and Optical Technology Letters**, v. 40, n. 3, p. 250-254, fev. 2004.
- [19] BERGMANN, J. R.; MOREIRA, F. J. S. Simple Design Equations for Omnidirectional Axis-Displaced Dual-Reflector Antennas. **Microwave and Optical Technology Letters**, v. 45, n. 2, p. 159-163, abr. 2005.
- [20] MOREIRA, F. J. S.; PRATA, Jr. A.; BERGMANN, J. R. GO Shaping of Omnidirectional Dual-Reflector Antennas for Maximum Gain. **International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC 05)**, Brasília, DF, Brazil, p. 665-668, jul. 2005.
- [21] MOREIRA, F. J. S.; BERGMANN, J. R. Classical Axis-Displaced Dual-Reflector Antennas for Omnidirectional Coverage. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 53, n. 9, p. 2799-2808, set. 2005.
- [22] MOREIRA, F. J. S.; BERGMANN, J. R. Axis-Displaced Dual-Reflector Antennas for Omnidirectional Coverage with Arbitrary Main-Beam Direction in the Elevation Plane. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 54, n. 10, p. 2854-2861, out. 2006.
- [23] MOREIRA, F. J. S.; PRATA, Jr. A.; BERGMANN, J. R. GO Shaping of Omnidirectional Dual-Reflector Antennas for a Prescribed Equi-Phase Aperture Field Distribution. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 55, n. 1, p. 99-106, jan. 2007.
- [24] MOREIRA, F. J. S.; BERGMANN, J. R. GO Aperture Field of Omnidirectional Axis-Displaced Dual-Reflector Antennas. **IEEE AP-S International Symposium on Antennas and Propagation**, Honolulu, HI, USA, p. 5167-5170, jun. 2007.
- [25] RESENDE, U. C.; MOREIRA, F. J. S.; PEREIRA FILHO, O. M. C. Analysis of Omnidirectional Dual-Reflector Antennas with Radomes. **International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC 07)**, Salvador, BA, Brazil, p. 70-74, out. 2007.
- [26] ZANG, S. R.; BERGMANN, J. R.; MOREIRA, F. J. S. Omnidirectional Dual-Reflector Antenna with a GO Shaped Main Reflector for an Arbitrary Far-Field Pattern in the Elevation Plane. **3rd European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2009)**, Berlin, Germany, p. 3047-3050, mar. 2009.
- [27] BERGMANN, J. R.; MOREIRA, F. J. S. Bandwidth Behavior of Omnidirectional Dual-Reflector Antennas Synthesized for Uniform

- Coverage. **Journal of Microwaves, Optoelectronics, and Electromagnetic Applications**, v. 8, n. 1, p. S1-S8, jun. 2009.
- [28] BERGMANN, J. R.; MOREIRA, F. J. S. Omnidirectional ADE Antenna with GO Shaped Main Reflector for Arbitrary Far-Field Pattern in the Elevation Plane. **IET Microwaves, Antennas & Propagation**, v. 3, n. 5, p. 1028-1035, out. 2009.
- [29] RESENDE, U. C.; MOREIRA, F. J. S.; BERGMANN, J. R. Analysis of Omnidirectional Antennas with Radome Operating in LMDS Band for Signals of Digital TV. **International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC 09)**, Belém, PA, Brasil, p. 83-86, nov. 2009.
- [30] KIMBER, B. Y. On Two Reflector Antennas. **Radio Eng. Electron Phys.**, v. 6, p. 914-921, jun. 1962.
- [31] GALINDO, V. Design of Dual Reflector Antennas with Arbitrary Phase and Amplitude Distribution. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. AP-12, p. 403-408, jul. 1964.
- [32] GALINDO, V.; MITTRA, R.; CHA, A. G. Aperture Amplitude and Phase Control o Offset Dual Reflectors. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. AP-27, n. 2, p. 154-164, mar. 1979.
- [33] LEE, J.; PARAD, L.; CHU, R. S. A Shaped Offset-Fed Dual Reflector Antennas. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. AP-27, n. 2, p. 165-171, mar. 1979.
- [34] CHA, A. G. An Offset Dual Shaped Reflector with 84.5% Efficiency. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. AP-31, n. 6, p. 896-902, nov. 1983.
- [35] WESTCOTT, B. S.; STEVENS, F. A.; BRIKELL, F. GO Synthesis of Offset Dual Reflectors. **Proc. IEE**, v. 128, n. 1, p.11-18, feb. 1981.
- [36] RUSCH, W. V. T.; POTTER, P. D. **Analysis of Reflector Antennas**. New York: Academic Press, 1970.
- [37] KOUYOUMJIAN, R. G.; PATHAK, P. H. A Uniform Geometrical Theory of Diffraction for an Edge in a Perfectly Conducting Surface. **Proc. IEEE**, n. 11, p. 1448-1461, nov. 1974.
- [38] ROSSEAU, P. R.; PATHAK, P. H. Time Domain Uniform Geometrical Theory of Diffraction for a Curved Wedge. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 43, n. 12, p. 1375–1382, dez. 1995.
- [39] HARRINGTON, R. F. **Fields Computation by Moment Methods**. New York: IEEE Press, 1993.
- [40] MOREIRA, F. S. J. **Design and Rigorous Analysis of Generalized Axially-Symmetric Dual-Reflector Antennas**. Tese de Doutorado, Dept. Electrical Engineering-Electrophysics, University of Southern California, Los Angeles, USA, ago. 1997.
- [41] GLISSON, A. W.; WILTON, D. R. Simple and Efficient Numerical Methods for Problems of Electromagnetic Radiation and Scattering from Surfaces. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, vol. AP-28, no. 5, pp. 593–603, September 1980.
- [42] TEIXEIRA, F. L.; BERGMANN, J. R. Spatial-Frequency Localized Representation for Integral Equation Reflector Analysis. **Proceedings of the 1996 IEEE AP-S International Symposium**, Baltimore, Maryland, p. 890–893, jul. 1996.

- [43] TEIXEIRA, F. L.; BERGMANN, J. R. Moment-Method Analysis of Circularly Symmetric Reflectors Using Bandlimited Basis Functions. **IEEE Proceedings Microwave Antennas and Propagation**, v. 144, N. 3, p. 179-183, jun. 1997.
- [44] BARCLAY, M. R.; RUSCH, W. V. T. Moment-Method Analysis of Large, Axially Symmetric Reflector Antenna Using Entire-Domain Functions. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 39, n. 4, p. 491-496, abr. 1991.
- [45] TEIXEIRA, F. L. **Aplicação do Método dos Momentos para a Análise de Refletores Circularmente Simétricos**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, mar. 1995.
- [46] MEDGYESI-MITSCHANG, L. N.; PUTNAM, J. M. Electromagnetic Scattering from Axially Inhomogeneous Bodies of Revolution. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 32, n. 8, p. 797-806, ago. 1984.
- [47] HUDDLESTON P. L.; MEDGYESI-MITSCHANG, L. N.; PUTNAM, J. M. Combined Field Integral Equation Formulation for Scattering by Dielectrically Coated Conducting. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. AP-34, n. 4, p. 510–520, abr. 1986.
- [48] KISHK, A. A.; SHAFI, L. Different Formulations for Numerical Solution of Single or Multibodies of Revolution with Mixed Boundary Conditions. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. AP-34, n. 5, p. 666–673, maio 1986.
- [49] RESENDE, U. C. **Análise de Antenas Refletores Circularmente Simétricas com a Presença de Corpos Dielétricos**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, maio 2007.
- [50] MARCUVITZ N. (Ed.). **Waveguide Handbook**. New York: McGraw-Hill, 1951.
- [51] WHINNERY, J. R.; JAMIESON, H. W. Equivalent circuits for discontinuities in transmission lines. **Proc. IRE**, v. 32, p. 98-115, fev. 1944.
- [52] WHINNERY, J. R.; JAMIESON, H. W. Coaxial-line discontinuities. **Proc. IRE**, v. 32, n. 11, p. 695-709, nov. 1944.
- [53] SILVESTER, P. P.; FERRARI, R. F. **Finite Element for Electrical engineer**. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [54] MAROUBY, E.; AUBBOURG, M.; GUILLON, P. Application of the finite element method to the design of transitions between coaxial lines. **Proc. Inst. Elec. Eng. Pt. H**, v. 137, n. 4, p. 219-225, ago. 1990.
- [55] SCOTT, W. R. Accurate modeling of axisymmetric two-port junction a coaxial lines using the finite element method. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, v. MTT-40, n. 8, p. 1712–1716, ago. 1992.
- [56] ZHU, N. Y.; LANDSTORFER, F. M. An efficient FEM formulation for rotationally symmetric coaxial waveguides. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, v. MTT-43, n. 2, p. 410–415, fev. 1995.
- [57] SMITH, G. D. **Numerical Solution of Partial Differential Equation: Finite Difference Methods**. Oxford: Clarendon Press, 1985.

- [58] JAMES, G. L. Analysis and design of TE<sub>11</sub>-to-HE<sub>11</sub> corrugated cylindrical waveguide mode converters. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, v. MTT-29, n. 10, p. 1059–1066, out. 1981.
- [59] STOCK, D. J. R.; KAJDAN, T. J. A Comment on the scattering matrix of cascaded 2n-ports. **IRE Trans. Microwave Theory Tech.**, v. MTT-9, p. 454, set. 1961.
- [60] YEE, K. S. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. AP-14, p. 302–307, maio 1966.
- [61] TAFLOVE, A. **Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time Domain Method**. Boston, MA: Artech House, 1995.
- [62] HOLLAND, R.; WILLAMS, J. Total Field versus Scattered-Field Finite-Difference. **IEEE Trans. Nuclear Science**, v. 30, p. 4583-4587, 1983.
- [63] BERENGER, J. P. A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. **J. Computat. Phys.**, v. 114, p. 185-200, out. 1993.
- [64] SACKS, Z. S. et al. A Perfectly Matched Anisotropic Absorber for Use as an Absorbing Condition. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 43, p. 1460-1463, dez. 1995.
- [65] ZHAO, L.; CONGELLARIS, A. C. A General Approach for the Development of Unsplit-Field Time-Domain Implementations of Perfectly Matched Layer for FDTD Grid Truncation. **IEEE Microwave and Guided Wave Letters**, v. 6, p. 209-211, maio 1996.
- [66] GEDNEY, S. D. An Anisotropic Perfectly Matched Layer-Absorbing Medium for the Truncation of FDTD Lattices. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 44, p. 1631-1639, dez. 1996.
- [67] KIM, T. J.; THIELE, G. A. A Hybrid Diffraction Technique-General Theory and Applications. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 30, n. 5, p. 888–897, set. 1982.
- [68] MEDGYESI-MITSCHANG, L. N.; WANG, D. S. A Hybrid Solution for Scattering from Perfectly Conducting Bodies of Revolution. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 31, n. 4, p. 570–583, jul. 1983.
- [69] THIELE, G. A.; NEWHOUSE, T. H. A Hybrid Technique for Combining Moments Methods with the Geometrical Theory of Diffraction. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. AP-23, p. 62–69, jan. 1975.
- [70] KÜHM, E.; HOMBACH, V. Computer-Aided Analysis of Corrugated Horns with Axial Ring or Ring-Loaded Radial Slots. **In Proc. Int. Antennas Propagation Conference**, Norwich, U.K., p. 293–296, mar. 1983.
- [71] WOLFF, K. et al. Hybrid Field Design of Square Potter Horns. **In Proc. Int. Antennas Propagation Conference**, York, U.K., p. 210–213, mar. 1987.
- [72] WRIEDT, T. et al. Rigorous Hybrid Field Theoretic Design of Stepped Rectangular Waveguide Mode Converters Including the Horn Transmission into Half-Space. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 37, p. 780–790, jun. 1989.

- [73] LIU, K.; BALANIS, C. A.; BIRTCHER, C. R. Analysis of Pyramidal Horn Antennas Using Moment Methods. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 41, p. 1379–1389, out. 1993.
- [74] BUNGER, R.; BEYER, R.; ARNDT, F. Rigorous Combined Mode-Matching Integral Equation Analysis of Horn Arbitrary Cross Section. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 47, p. 1641–1648, nov. 1999.
- [75] BOLLI, P. et al. A Hybrid Perturbative Technique to Characterize the Coupling Between a Corrugated Horn and a Reflector Dish. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 54, n. 2, fev. 2006.
- [76] GENTILI, G. G. et al. High-Order FEM Mode Matching Analysis of Circular Horns With Rotationally Symmetric Dielectrics. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 55, n. 10, out. 2007.
- [77] ZHENG, B.; SHEN, Z. Analysis of Dielectric-Loaded Waveguide Slot Antennas by the Hybrid Mode-Matching/Moment Method. **IEICE Trans. Commun.**, v. E88-B, n. 8, ago. 2005.
- [78] BHATTACHARYYA A. K. On the Convergence of MoM and Mode Matching Solution for Infinite Array and Waveguide Problems. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 51, p. 1599–1606, n. 7, jul. 2003.
- [79] ARNDT, F. et al. Fast CAD and Optimization of Waveguide Components and Aperture Antennas by Hybrid MM/FE/MoM/FD Methods – State-of-the-Art and Recent Advances. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, v. 52, n. 1, p. 292-305, jan. 2004.
- [80] BEYER, R.; ARNDT F. Efficient Modal Analysis of Waveguide Filters Including the Orthogonal Mode Coupling Elements by an MM/FE Method. **IEEE Microwave Guided Wave Letter**, v. 5, p. 1–3, jan. 1995.
- [81] MONTEJO-GARAI, J. R.; ZAPATA, J. Full-Wave Design and Realization of Multicoupled Dual-Mode Circular Waveguide Filters. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, v. 43, p. 1290–1297, jun. 1995.
- [82] ARNDT, F. et al. Automated Design of Waveguide Components using Hybrid Mode-Matching/Numerical EM Building Blocks in Optimization-Oriented CAD Frama-Works – State-of-the-Arts and Recent Advances. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, v. 45, p. 747–760, maio 1997.
- [83] SILVA, L. C. **Estruturas de acoplamento entre guias lisos e alimentadores corrugados circulares**. CETUC: PUC-Rio, fev. 1986.
- [84] HARRINGTON, R. F. **Time-Harmonic Electromagnetic Fields**. New York: McGraw Hill, 1961.
- [85] BALANIS, C. A. **Advanced Engineering Electromagnetics**. New York: Wiley, 1989.
- [86] DEMMERLE, F.; WIESBECK, W. A biconical multibeam antenna for space-division multiple access. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 46, n. 6, p. 782–787, jun. 1998.
- [87] MAUTZ, J. R.; HARRINGTON, R. F. H-Field, E-Field and Combined Fields Solutions for Bodies of Revolution. **Tech. Report TR-77-2**, Dept. Electrical and Computer Engineering, Syracuse University, 1977.

- [88] POGGIO, A. J.; MILLER, E. K. **Integral Equations Solutions of Three-Dimensional Scattering Problems**. R. Mittra Edition, Pergamon Press, Oxford, 1973.
- [89] ISKANDER, K. A.; SHAFI, L. Application of Impedance Boundary Condition to Numerical Solution of Corrugated Circular Horns. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. AP-30, n. 3, p. 366-372, maio 1983.
- [90] MAUTZ, J. R.; HARRINGTON, R. F. An Improved E-Field Solutions for a Conducting Body of Revolution. **Tech. Report TR-80-1**, Dept. Electrical and Computer Engineering, Syracuse University, 1980.
- [91] WANG, J. J. **Generalized Method of Moments in Electromagnetics**. New York: John Wiley & Son, 1991.
- [92] SILVER, S. (Ed.). **Microwave Antenna Theory and Design**. London: Peter Peregrinus, 1984.
- [93] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. (Eds.). **Handbook of Mathematical Functions**. New York: Dover Publications, Inc., 1965.
- [94] SPENCER, R. C.; HYDE, G. Studies of the Region of a Spherical Reflector: Geometric Optics. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. AP-16, n. 3, p. 317-324, maio 1968.

## Apêndice A

### Campos Modais para Guias de Ondas Coaxiais

A Figura A.1 ilustra a geometria de uma seção de guia de onda coaxial e o sistema de coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$  que será utilizado na representação dos campos. O eixo de simetria do guia de onda coincide com o eixo  $z$ , e os cilindros condutores interno e externo têm raio  $a$  e  $b$ , respectivamente. Assume-se que as paredes desses dois cilindros são compostas de condutores perfeitos. Considera-se que, em cada seção de guia de onda coaxial, o meio de propagação da onda eletromagnética é constante e caracterizado pela permissividade  $\varepsilon$  e permeabilidade  $\mu$ .

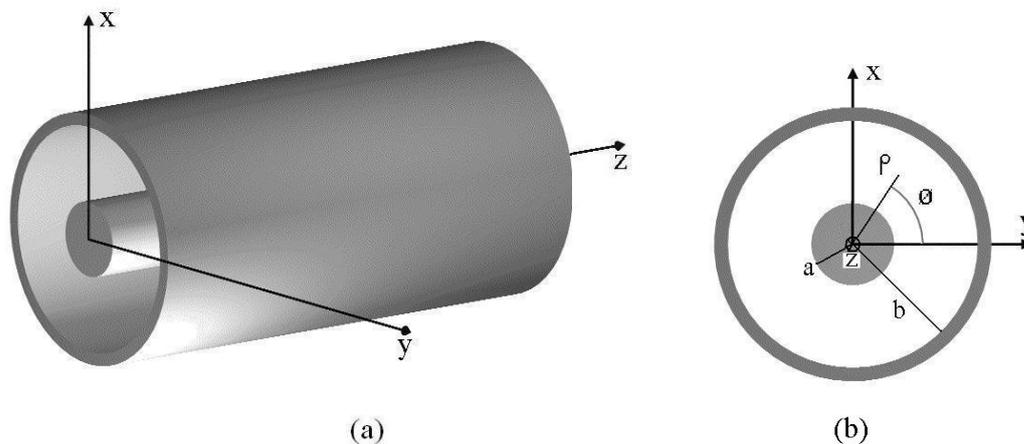


Figura A.1 – Geometria do problema proposto. (a) seção de guia de onda coaxial e (b) sistema de coordenadas cilíndricas.

#### A.1.

#### Solução da Equação Homogênea em Coordenadas Cilíndricas

Como descrito em [84] e [85], os vetores potenciais elétrico  $\vec{F}$  e magnético  $\vec{A}$  podem ser utilizados para expressar as equações de Maxwell em um meio linear, homogêneo, isotrópico, sem fontes e sem perdas, resultando nas seguintes expressões para os campos elétrico  $\vec{E}$  e magnético  $\vec{H}$ :

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \frac{1}{\epsilon}\nabla\times\vec{F} \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A} - j\omega\vec{F} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\vec{F}) \quad (\text{A.2})$$

onde  $\vec{A}$  e  $\vec{F}$  devem satisfazer a equação de onda homogênea:

$$\nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla^2\vec{F} + k^2\vec{F} = 0, \quad (\text{A.4})$$

e  $k$  é a constante de onda expressa por:

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi f\sqrt{\mu\epsilon} \quad (\text{A.5})$$

Para representar de forma genérica a solução das equações homogêneas (A.3) e (A.4), utiliza-se o vetor  $\vec{\psi}$ , onde  $\vec{A}(\rho, \phi, z) = \vec{F}(\rho, \phi, z) = \vec{\psi}(\rho, \phi, z)$ , que pode ser representado por:

$$\vec{\psi}(\rho, \phi, z) = \hat{a}_\rho\psi_\rho(\rho, \phi, z) + \hat{a}_\phi\psi_\phi(\rho, \phi, z) + \hat{a}_z\psi_z(\rho, \phi, z) \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.6) nas equações (A.3) e (A.4), obtém-se:

$$\nabla^2(\hat{a}_\rho\psi_\rho + \hat{a}_\phi\psi_\phi + \hat{a}_z\psi_z) + k^2(\hat{a}_\rho\psi_\rho + \hat{a}_\phi\psi_\phi + \hat{a}_z\psi_z) = 0 \quad (\text{A.7})$$

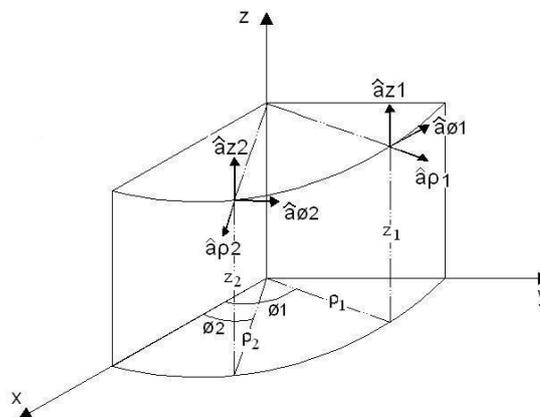


Figura A.2 – Representação dos vetores unitários em coordenadas cilíndricas para dois pontos distintos  $(\rho_1, \phi_1, z_1)$  e  $(\rho_2, \phi_2, z_2)$ .

Observa-se na Figura A.2 que, para dois pontos distintos  $(\rho_1, \phi_1, z_1)$  e  $(\rho_2, \phi_2, z_2)$ , os vetores unitários  $\hat{a}_\rho$  e  $\hat{a}_\phi$  não são paralelos, o que faz com que os mesmos não possam ser tratados como constantes, pois são função de  $(\rho, \phi, z)$ . Logo, a equação (A.7) nas direções  $\rho$  e  $\phi$  resulta em:

$$\nabla^2 \psi_\rho + \left( -\frac{\psi_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \psi_\phi}{\partial \phi} \right) + k^2 \psi_\rho = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla^2 \psi_\phi + \left( -\frac{\psi_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \phi} \right) + k^2 \psi_\phi = 0 \quad (\text{A.9})$$

Nas direções  $\rho$  e  $\phi$ , (A.7) é representada por um sistema de duas equações diferenciais parciais de segunda ordem, (A.8) e (A.9) respectivamente, envolvendo as duas componentes  $\psi_\rho$  e  $\psi_\phi$ . Exigi-se a solução conjunta dessas duas equações diferenciais para chegar-se a uma solução para (A.7).

Por outro lado, para quaisquer pontos distintos na Figura A.2, os vetores unitários  $\hat{a}_z$  são paralelos, fazendo com que, na direção  $z$ , a equação vetorial (A.7) seja representada unicamente por:

$$\nabla^2 \psi_z + k^2 \psi_z = 0 \quad (\text{A.10})$$

A equação (A.10) é conhecida como equação homogênea de Helmholtz e envolve somente a componente  $\psi_z$ . Se a solução dessa equação satisfizer as condições de contorno do problema analisado, pode-se dizer que ela representa a solução do problema proposto.

A solução da equação (A.10), descrita em [84], pode ser obtida através do método de separação de variáveis, onde a função de onda escalar  $\psi_z$  é representada pelo produto de três funções:

$$\psi_z(\rho, \phi, z) = Z(\rho)G(\phi)H(z) \quad (\text{A.11})$$

A substituição da função  $\psi_z$ , dada pela equação (A.11), na equação homogênea de Helmholtz (A.10) resulta em:

$$GH \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho^2} + \frac{GH}{\rho} \frac{\partial Z}{\partial \rho} + \frac{ZH}{\rho^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} + ZG \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + k^2 ZGH = 0 \quad (\text{A.12})$$

a qual pode ser representada por três equações diferenciais distintas, onde cada uma envolve unicamente  $H(z)$ ,  $G(\phi)$  e  $Z(\rho)$ .

Para  $H(z)$ , tem-se:

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = -H \beta^2, \quad (\text{A.13})$$

com solução dada por:

$$H(z) = e^{\mp j \beta z} \quad (\text{A.14})$$

A equação (A.14), para  $\beta$  real, representa uma onda se propagando ao longo do eixo  $z$ , sendo  $\beta$  a constante de propagação da onda e o sentido é definido pela opção  $\mp$ .

A parcela referente à  $G(\phi)$  é dada por:

$$\frac{d^2 G}{d\phi^2} = -G l^2, \quad (\text{A.15})$$

que tem como solução:

$$G(\phi) = C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi) \quad (\text{A.16})$$

que representa o comportamento azimutal periódico da distribuição de campo no interior do guia de onda coaxial, onde  $l$  representa a dependência azimutal da onda e  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias que definem a polarização dos campos ao longo da seção transversal do guia.

Para  $Z(\rho)$ , tem-se:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Z}{\partial \rho} + \left[ (k^2 - \beta^2) - \frac{l^2}{\rho^2} \right] Z = 0 \quad (\text{A.17})$$

que apresenta como solução a combinação linear das funções de Bessel de primeira e segunda espécie de ordem  $l$ ,  $J_l(\chi\rho)$  e  $N_l(\chi\rho)$ , respectivamente, expressa por:

$$Z_l(\rho) = AJ_l(\chi\rho) + BN_l(\chi\rho), \quad (\text{A.18})$$

onde,

$$\chi = \sqrt{k^2 - \beta^2} \quad (\text{A.19})$$

Essa distribuição de campo  $Z_l(\rho)$  ao longo da direção  $\rho$  representa um comportamento estacionário da onda. Essa função possui infinitas raízes  $\chi$  que serão determinadas juntamente com os coeficientes A e B, de forma a satisfazer as condições de contorno do problema.

Substituindo (A.14), (A.16) e (A.18) em (A.11), tem-se a função de onda escalar que representa a solução da equação homogênea de Helmholtz, expressa por:

$$\psi_z(\rho, \phi, z) = [AJ_l(\chi\rho) + BN_l(\chi\rho)] \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \text{sen}(l\phi)\} e^{\mp j\beta z} \quad (\text{A.20})$$

A solução encontrada será utilizada para representar tanto o vetor potencial elétrico  $\vec{A}_z$ , quanto o vetor potencial magnético  $\vec{F}_z$ . As expressões das componentes de campo elétrico e magnético em coordenadas cilíndricas, obtidas a partir das equações (A.1) e (A.2), em função dos potenciais elétrico e magnético  $\vec{A}_z$  e  $\vec{F}_z$ , respectivamente, podem ser expressas por [85]:

$$E_\rho = -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial\rho\partial z} - \frac{1}{\epsilon\rho} \frac{\partial F_z}{\partial\phi} \quad (\text{A.21})$$

$$E_\phi = -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon\rho} \frac{\partial^2 A_z}{\partial\phi\partial z} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial F_z}{\partial\rho} \quad (\text{A.22})$$

$$E_z = -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z \quad (\text{A.23})$$

$$H_\rho = \frac{1}{\mu\rho} \frac{\partial A_z}{\partial\phi} - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 F_z}{\partial\rho\partial z} \quad (\text{A.24})$$

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial\rho} - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon\rho} \frac{\partial^2 F_z}{\partial\phi\partial z} \quad (\text{A.25})$$

$$H_z = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) F_z \quad (\text{A.26})$$

Os modos que serão excitados no interior do guia de onda coaxial podem ser obtidos através das configurações dos campos em função dos vetores potenciais elétrico e magnético  $\vec{A}_z$  e  $\vec{F}_z$ , respectivamente. Assim têm-se três casos: o Transversal Eletromagnético ( $TEM^z$ ), quando as componentes dos campos elétrico e magnético forem transversais à direção de propagação, o que implica em  $\vec{E}_z = \vec{H}_z = 0$ ; o Transversal Magnético ( $TM^z$ ), quando as componentes de campo magnético forem transversais à direção de propagação da onda, o que implica em  $\vec{H}_z = 0$ ; e o Transversal Elétrico ( $TE^z$ ), quando as componentes de campo elétrico forem transversais à direção de propagação da onda, o que implica em  $\vec{E}_z = 0$ . Essas três configurações serão expressas no desenvolvimento que segue.

## A.2. Modo Transversal Magnético $TM^z$

Para o modo  $TM^z$ , considera-se  $H_z = 0$ . As componentes dos campos elétrico e magnético em coordenadas cilíndricas, descritas pelas equações de (A.21)-(A.26), serão expressas unicamente em termos de  $\vec{A} = A_z \hat{a}_z = \psi_z \hat{a}_z$ , dado por:

$$A_z(\rho, \phi, z) = [AJ_l(\chi\rho) + BN_l(\chi\rho)] \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \text{sen}(l\phi)\} e^{\mp j\beta z} \quad (\text{A.27})$$

Substituindo (A.27) nas equações (A.21)-(A.26) e efetuando as derivações correspondentes, obtêm-se as componentes dos campos elétrico e magnético para os modos  $TM_{lm}^z$ , expressos por:

$$e_{\rho_m}^{TM} = \pm \frac{\chi_{lm}^{TM} \beta_{lm}^{TM}}{\omega \mu \epsilon} \left[ AJ_l'(\chi_{lm}^{TM} \rho) + BN_l'(\chi_{lm}^{TM} \rho) \right] \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \text{sen}(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TM} z}, \quad (\text{A.28})$$

$$e_{\phi_m}^{TM} = \pm \frac{l \beta_{lm}^{TM}}{\omega \mu \epsilon \rho} \left[ AJ_l(\chi_{lm}^{TM} \rho) + BN_l(\chi_{lm}^{TM} \rho) \right] \{C_1 \cos(l\phi) - C_2 \text{sen}(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TM} z},$$

(A.29)

$$e_{z_m}^{TM} = \pm j \frac{(\chi_{lm}^{TM})^2}{\omega \mu \varepsilon} \left[ AJ_l(\chi_{lm}^{TM} \rho) + BN_l(\chi_{lm}^{TM} \rho) \right] \{ C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi) \} e^{\mp j \beta_{lm}^{TM} z},$$

(A.30)

$$h_{\rho_m}^{TM} = - \frac{e_{\phi_m}^{TM}}{\eta_{lm}^{TM}}$$

(A.31)

$$h_{\phi_m}^{TM} = \frac{e_{\rho_m}^{TM}}{\eta_{lm}^{TM}}$$

(A.32)

$$h_{z_m}^{TM} = 0$$

(A.33)

onde,

$$\eta_{lm}^{TM} = \frac{\partial}{\partial \rho}$$

(A.34)

e  $\eta_{lm}^{TM}$  consiste na impedância transversal de onda para o modo  $TM_{lm}^z$  e é expresso por:

$$\eta_{lm}^{TM} = \frac{\beta_{lm}^{TM}}{\omega \varepsilon}$$

(A.35)

Os parâmetros A, B,  $\chi_{lm}^{TM}$  e  $\beta_{lm}^{TM}$  são determinados através da aplicação da condição de contorno para a componente tangencial de campo elétrico sobre as paredes cilíndricas metálicas do guia da onda coaxial, que exige que  $e_z$  e  $e_\phi$  sejam nulos em  $\rho = a$  e  $\rho = b$ . Essas condições resultam em:

$$Z_l(\chi_{lm}^{TM} a) = AJ_l(\chi_{lm}^{TM} a) + BN_l(\chi_{lm}^{TM} a) = 0, \text{ para } \rho = a$$

(A.36)

$$Z_l(\chi_{lm}^{TM} b) = AJ_l(\chi_{lm}^{TM} b) + BN_l(\chi_{lm}^{TM} b) = 0, \text{ para } \rho = b$$

(A.37)

Da equação (A.36), obtém-se a relação:

$$\frac{A}{B} = - \frac{N_l(\chi_{lm}^{TM} a)}{J_l(\chi_{lm}^{TM} a)}$$

(A.38)

Dividindo a equação (A.37) por  $B$ , substituindo (A.38) e reorganizando a equação, obtém-se:

$$J_l(\chi_{lm}^{TM} a)N_l(\chi_{lm}^{TM} b) - J_l(\chi_{lm}^{TM} b)N_l(\chi_{lm}^{TM} a) = 0, \quad (\text{A.39})$$

o que resulta em:

$$\begin{cases} A = -N_l(\chi_{lm}^{TM} a) \\ B = J_l(\chi_{lm}^{TM} a) \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

A equação (A.39) possui um número infinito de soluções  $\chi_{lm}^{TM}$ , conhecidas como números de onda de corte, associadas aos modos  $TM_{lm}^z$  de ordem  $m$  e relacionadas com a constante de propagação  $\beta_{lm}^{TM}$  através de:

$$\beta_{lm}^{TM} = \sqrt{k^2 - (\chi_{lm}^{TM})^2}, \quad (\text{A.41})$$

onde  $k$  é dado por (A.5) e a frequência de onda de corte do modo  $TM$ , de ordem  $m$  e dependência azimutal  $l$ , pode ser expressa por:

$$f_{c_{lm}}^{TM} = \frac{\chi_{lm}^{TM}}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (\text{A.42})$$

o que permite representar  $\beta_{lm}^{TM}$  em função de  $f$  e  $f_{c_{lm}}^{TM}$ :

$$\beta_{lm}^{TM} = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{lm}}^{TM}}{f}\right)^2} \quad (\text{A.43})$$

Se  $f > f_{c_{lm}}^{TM}$ ,  $\beta_{lm}^{TM}$  é real e dado por (A.43), e o modo é propagante.

Porém, se  $f < f_{c_{lm}}^{TM}$ ,  $\beta_{lm}^{TM}$  é imaginário e o modo é evanescente, sendo expresso por:

$$\beta_{lm}^{TM} = -j\chi_{lm}^{TM} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_{c_{lm}}^{TM}}\right)^2} \quad (\text{A.44})$$

Através da expansão assintótica das funções de Bessel que compõem a equação (A.39), pode-se estabelecer uma relação entre a frequência de onda de corte e as dimensões dos cilindros interno e externo.

Essas expansões assintóticas das funções de Bessel de primeira e segunda espécie, para argumento grande, são dadas por:

$$J_l(\chi_{lm}^{TM} \rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \chi_{lm}^{TM} \rho}} \cos\left(\chi_{lm}^{TM} \rho - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.45})$$

$$N_l(\chi_{lm}^{TM} \rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \chi_{lm}^{TM} \rho}} \text{sen}\left(\chi_{lm}^{TM} \rho - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.46})$$

Aplicando as equações (A.45) e (A.46) em (A.39), obtém-se:

$$\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{uv}} [\cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \text{sen} \alpha] = 0, \quad (\text{A.47})$$

onde:

$$\alpha = \left(u - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{A.48})$$

$$\beta = \left(v - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{A.49})$$

$$u = \chi_{lm}^{TM} a, \quad (\text{A.50})$$

$$v = \chi_{lm}^{TM} b \quad (\text{A.51})$$

Reescrevendo a equação (A.47), obtém-se:

$$\text{sen}(\beta - \alpha) = 0 \quad (\text{A.52})$$

Logo:

$$\beta - \alpha = \chi_{lm}^{TM} (b - a) = n\pi, \quad (\text{A.53})$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Da equação (A.53) obtém-se a relação entre as dimensões dos cilindros condutores interno e externo necessária para que o modo  $TM_{lm}^z$  de ordem  $m$  se propague:

$$\frac{a}{b} > 1 - \frac{m\sqrt{\mu\epsilon}}{2bf_{c_{lm}}^{TM}} \quad (\text{A.54})$$

A Figura A.3 ilustra os valores da frequência de onda de corte  $f_{c_{lm}}^{TM}$ , obtidos através da solução numérica da equação (A.39) para os primeiros modos  $TM_{lm}^z$ , em função da razão  $a/b$ . Considera-se que  $a$  e  $b$  são os raios dos condutores interno e externo, respectivamente, sendo  $b = 15\text{mm}$ . Para o modo  $TM_{01}^z$ , a Figura A.4 ilustra a distribuição das componentes transversais de campo. Esses resultados apresentam concordância quando comparados com os apresentados na referência [86].

Substituindo a equação (A.40) nas equações (A.28)-(A.30), obtém-se:

$$e_{\rho_m}^{TM} = \pm \frac{\chi_{lm}^{TM} \beta_{lm}^{TM}}{\omega\mu\epsilon} Z_1'(\chi_{lm}^{TM} \rho) \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TM} z}, \quad (\text{A.55})$$

$$e_{\phi_m}^{TM} = \pm \frac{l\beta_{lm}^{TM}}{\omega\mu\epsilon\rho} Z_1(\chi_{lm}^{TM} \rho) \{C_1 \cos(l\phi) - C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TM} z}, \quad (\text{A.56})$$

$$e_{z_m}^{TM} = \pm j \frac{(\chi_{lm}^{TM})^2}{\omega\mu\epsilon} Z_1(\chi_{lm}^{TM} \rho) \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TM} z}, \quad (\text{A.57})$$

$$h_{\rho_m}^{TM} = -\frac{e_{\phi_m}^{TM}}{\eta_{lm}^{TM}} \quad (\text{A.58})$$

$$h_{\phi_m}^{TM} = \frac{e_{\rho_m}^{TM}}{\eta_{lm}^{TM}} \quad (\text{A.59})$$

$$h_{z_m}^{TM} = 0, \quad (\text{A.60})$$

onde  $\eta_{lm}^{TM}$  é dado por (A.35) e:

$$Z_1(\chi_{lm}^{TM} \rho) = J_1(\chi_{lm}^{TM} a) N_1(\chi_{lm}^{TM} \rho) - N_1(\chi_{lm}^{TM} a) J_1(\chi_{lm}^{TM} \rho), \quad (\text{A.61})$$

$$Z_1'(\chi_{lm}^{TM} \rho) = J_1(\chi_{lm}^{TM} a) N_1'(\chi_{lm}^{TM} \rho) - N_1(\chi_{lm}^{TM} a) J_1'(\chi_{lm}^{TM} \rho) \quad (\text{A.62})$$

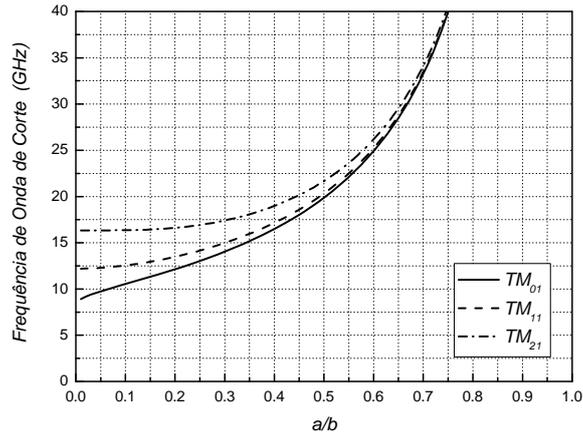


Figura A.3 –  $f_{c_{lm}}^{TM}$  em função de  $a/b$  para os primeiros modos  $TM_{lm}^z$ , obtidos através da solução numérica da equação (A.39), considerando  $b = 15mm$ .

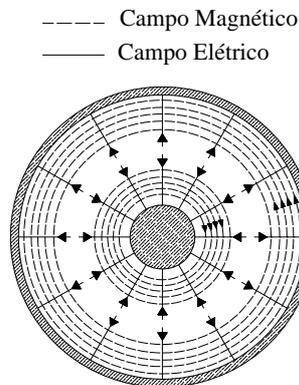


Figura A.4 – Distribuição das componentes transversais de campo no interior do guia de onda coaxial para o modo  $TM_{01}^z$ .

### A.3. Modo Transversal Elétrico $TE^z$

Para o modo  $TE^z$ , considera-se  $E_z = 0$ . As componentes dos campos elétrico e magnético em coordenadas cilíndricas, descritos pelas equações (A.21)-(A.26), serão expressas unicamente em termos de  $\vec{F} = F_z \hat{a}_z = \psi_z \hat{a}_z$ , dado por:

$$F_z(\rho, \phi, z) = [AJ_l(\chi\rho) + BN_l(\chi\rho)] \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta z} \quad (\text{A.63})$$

Substituindo (A.63) nas equações (A.21)-(A.26) e efetuando as derivações correspondentes, obtêm-se as componentes dos campos elétrico e magnético para os modos  $TE_{lm}^z$ , expressos por:

$$e_{\rho_m}^{TE} = -\frac{l}{\varepsilon\rho} \left[ AJ_l(\chi_{lm}^{TE}\rho) + BN_l(\chi_{lm}^{TE}\rho) \right] \{C_1 \cos(l\phi) - C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TE}z}, \quad (\text{A.64})$$

$$e_{\phi_m}^{TE} = \frac{\chi_{lm}^{TE}}{\varepsilon} \left[ AJ_l'(\chi_{lm}^{TE}\rho) + BN_l'(\chi_{lm}^{TE}\rho) \right] \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TE}z}, \quad (\text{A.65})$$

$$e_{z_m}^{TE} = 0 \quad (\text{A.66})$$

$$h_{\rho_m}^{TE} = \pm \frac{e_{\phi_m}^{TE}}{\eta_{lm}^{TE}} \quad (\text{A.67})$$

$$h_{\phi_m}^{TE} = \mp \frac{e_{\rho_m}^{TE}}{\eta_{lm}^{TE}} \quad (\text{A.68})$$

$$h_{z_m}^{TE} = \pm j \frac{(\chi_{lm}^{TE})^2}{\omega\mu\varepsilon} \left[ AJ_l(\chi_{lm}^{TE}\rho) + BN_l(\chi_{lm}^{TE}\rho) \right] \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TE}z}, \quad (\text{A.69})$$

onde,

$$J' = \frac{\partial J}{\partial \rho}, \quad N' = \frac{\partial N}{\partial \rho} \quad (\text{A.70})$$

e  $\eta_{lm}^{TE}$  consiste na impedância transversal de onda para o modo  $TE_{lm}^z$  e é expresso por:

$$\eta_{lm}^{TE} = \frac{\omega\mu}{\beta_{lm}^{TE}} \quad (\text{A.71})$$

Os parâmetros A, B,  $\chi_{lm}^{TE}$  e  $\beta_{lm}^{TE}$  são determinados através da aplicação da condição de contorno para a componente tangencial do campo elétrico sobre as paredes cilíndricas metálicas do guia da onda coaxial, que exige que  $e_z$  e  $e_\phi$  sejam nulos em  $\rho = a$  e  $\rho = b$ . Essas condições resultam em:

$$Z_l'(\chi_{lm}^{TE}a) = AJ_l'(\chi_{lm}^{TE}a) + BN_l'(\chi_{lm}^{TE}a) = 0, \quad \text{para } \rho = a \quad (\text{A.72})$$

$$Z'_l(\chi_{lm}^{TE} b) = AJ'_l(\chi_{lm}^{TE} b) + BN'_l(\chi_{lm}^{TE} b) = 0, \text{ para } \rho = b \quad (\text{A.73})$$

Da equação (A.72), obtém-se a relação:

$$\frac{A}{B} = -\frac{N'_l(\chi_{lm}^{TE} a)}{J'_l(\chi_{lm}^{TE} a)} \quad (\text{A.74})$$

Dividindo a equação (A.73) por  $B$ , substituindo (A.74) e reorganizando a equação, obtém-se:

$$J'_l(\chi_{lm}^{TE} a)N'_l(\chi_{lm}^{TE} b) - J'_l(\chi_{lm}^{TE} b)N'_l(\chi_{lm}^{TE} a) = 0, \quad (\text{A.75})$$

o que resulta em:

$$\begin{cases} A = -N'_l(\chi_{lm}^{TE} a) \\ B = J'_l(\chi_{lm}^{TE} a) \end{cases} \quad (\text{A.76})$$

A equação (A.75) possui um número infinito de soluções  $\chi_{lm}^{TE}$ , conhecidas como números de onda de corte, associadas aos modos  $TE_{lm}^z$  de ordem  $m$  e relacionadas com a constante de propagação  $\beta_{lm}^{TE}$  através de:

$$\beta_{lm}^{TE} = \sqrt{k^2 - (\chi_{lm}^{TE})^2} \quad (\text{A.77})$$

onde  $k$  é dado por (A.5) e a frequência de onda de corte do modo  $TE$ , de ordem  $m$  e dependência azimutal  $l$ , pode ser expressa por:

$$f_{c_{lm}}^{TE} = \frac{\chi_{lm}^{TE}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (\text{A.78})$$

o que permite representar  $\beta_{lm}^{TE}$  em função de  $f$  e  $f_{c_{lm}}^{TE}$ :

$$\beta_{lm}^{TE} = k \sqrt{1 - \left( \frac{f_{c_{lm}}^{TE}}{f} \right)^2} \quad (\text{A.79})$$

Se  $f > f_{c_{lm}}^{TE}$ ,  $\beta_{lm}^{TE}$  é real e dado por (A.79), e o modo é propagante.

Porém, se  $f < f_{c_{lm}}^{TE}$ ,  $\beta_{lm}^{TE}$  é imaginário e o modo é evanescente, sendo expresse por:

$$\beta_{lm}^{TE} = -j \chi_{lm}^{TE} \sqrt{1 - \left( \frac{f}{f_{c_{lm}}^{TE}} \right)^2} \quad (\text{A.80})$$

A Figura A.5 ilustra os valores da frequência de onda de corte  $f_{c_{lm}}^{TE}$ , obtidos através da solução numérica da equação (A.75) para os primeiros modos  $TE_{lm}^z$ , em função da razão  $a/b$ . Considera-se que  $a$  e  $b$  são os raios dos condutores interno e externo, respectivamente, sendo  $b = 15\text{mm}$ . Para os modos  $TE_{11}^z$  e  $TE_{21}^z$ , as Figuras A.6.(a) e A.6.(b), respectivamente, ilustram a distribuição das componentes transversais de campo. Esses resultados apresentam concordância quando comparados com os apresentados na referência [86].

Substituindo a equação (A.76) nas equações (A.64)-(A.69), obtém-se:

$$e_{\rho_m}^{TE} = -\frac{l}{\varepsilon \rho} Z_l(\chi_{lm}^{TE} \rho) \{C_1 \cos(l\phi) - C_2 \text{sen}(l\phi)\} e^{\mp j \beta_{lm}^{TE} z}, \quad (\text{A.81})$$

$$e_{\phi_m}^{TE} = \frac{\chi_{lm}^{TE}}{\varepsilon} Z_l'(\chi_{lm}^{TE} \rho) \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \text{sen}(l\phi)\} e^{\mp j \beta_{lm}^{TE} z}, \quad (\text{A.82})$$

$$e_{z_m}^{TE} = 0, \quad (\text{A.83})$$

$$h_{\rho_m}^{TE} = \pm \frac{e_{\phi_m}^{TE}}{\eta_{lm}^{TE}}, \quad (\text{A.84})$$

$$h_{\phi_m}^{TE} = \mp \frac{e_{\rho_m}^{TE}}{\eta_{lm}^{TE}}, \quad (\text{A.85})$$

$$h_{z_m}^{TE} = \pm j \frac{(\chi_{lm}^{TE})^2}{\omega \mu \varepsilon} Z_l(\chi_{lm}^{TE} \rho) \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \text{sen}(l\phi)\} e^{-j \beta_{lm}^{TE} z}, \quad (\text{A.86})$$

onde  $\eta_{lm}^{TE}$  é dado por (A.71) e:

$$Z_l(\chi_{lm}^{TE} \rho) = J_l'(\chi_{lm}^{TE} a) N_l(\chi_{lm}^{TE} \rho) - N_l'(\chi_{lm}^{TE} a) J_l(\chi_{lm}^{TE} \rho), \quad (\text{A.87})$$

$$Z_l'(\chi_{lm}^{TE} \rho) = J_l'(\chi_{lm}^{TE} a) N_l'(\chi_{lm}^{TE} \rho) - N_l'(\chi_{lm}^{TE} a) J_l'(\chi_{lm}^{TE} \rho) \quad (\text{A.88})$$

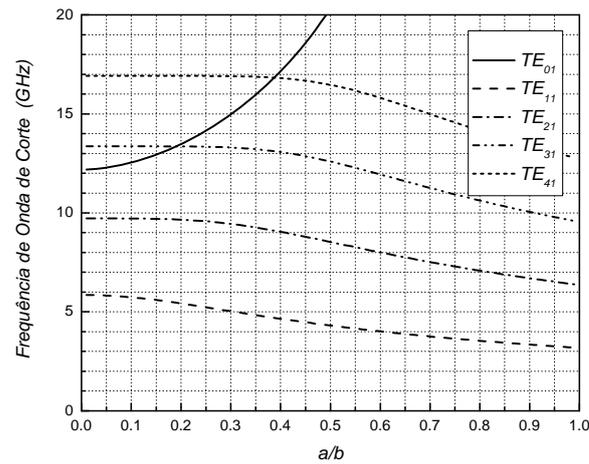


Figura A.5 –  $f_{c_{lm}}^{TE}$  em função de  $a/b$  para os primeiros modos  $TE_{lm}^z$ , obtidos através da solução numérica da equação (A.75), considerando  $b = 15\text{mm}$ .

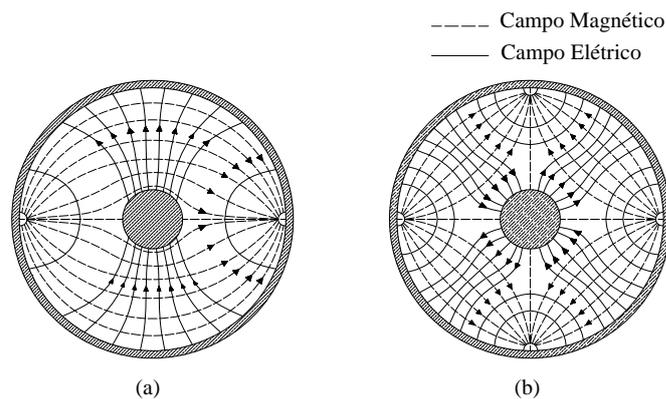


Figura A.6 – Distribuição das componentes transversais de campo no interior do guia de onda coaxial para os modos (a)  $TE_{11}^z$  e (b)  $TE_{21}^z$ .

#### A.4. Modo Transversal Eletromagnético TEM<sup>z</sup>

O modo  $TEM^z$  é o modo de mais baixa ordem. Para esse modo, as componentes de campo elétrico e magnético são transversais à direção de propagação, onde  $E_z = H_z = 0$ . Esse modo é obtido quando  $l = 0$  e  $k = \beta$ . Com essas considerações, a equação diferencial que envolve a função  $Z$ , relacionada à parcela da equação homogênea de Helmholtz expressa em termos de  $\rho$  e descrita por (A.17), será dada por:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Z}{\partial \rho} = 0 \quad (\text{A.89})$$

que tem como solução:

$$Z = \ln(\rho) \quad (\text{A.90})$$

Substituindo (A.90), (A.14) e (A.16) em (A.11), para  $l = 0$ , obtém-se:

$$\psi_z = \ln(\rho) e^{\mp jkz} \quad (\text{A.91})$$

As componentes do campo elétrico  $\vec{e}$  são dadas por:

$$\vec{E} = \nabla \psi_z \quad (\text{A.92})$$

o que resulta em:

$$e_{\rho}^{TEM} = \frac{1}{\rho} e^{\mp jkz}, \quad (\text{A.93})$$

$$e_{\phi}^{TEM} = e_z^{TEM} = 0 \quad (\text{A.94})$$

As componentes do campo magnético  $\vec{h}$  são dadas por:

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \vec{E} \quad (\text{A.95})$$

o que resulta em:

$$h_{\phi}^{TEM} = \pm \frac{1}{\eta\rho} e^{\mp jkz}, \quad (\text{A.96})$$

$$h_{\rho}^{TEM} = h_z^{TEM} = 0, \quad (\text{A.97})$$

onde:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (\text{A.98})$$

A Figura A.7 ilustra a distribuição das componentes transversais de campo para o modo  $TEM^z$ .

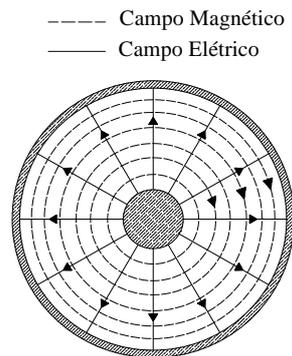


Figura A.7 – Distribuição das componentes transversais de campo no interior do guia de onda coaxial para o modo  $TEM^z$ .

### A.5. Modos $TM^z$ e $TE^z$ para $l = 0$

Como mencionado anteriormente, as estruturas de acoplamento serão excitadas pelo modo  $TEM^z$ . Portanto, as seções de guias de onda coaxiais que compõem essas estruturas serão dimensionadas de forma que somente o modo  $TEM^z$  se propague e todos os modos superiores sejam evanescentes. Através dessa consideração, as equações de campos modais para os modos  $TM^z$  e  $TE^z$  serão reescritas para  $l = 0$ .

- **Modo Transversal Magnético ( $TM^z$ )**

$$e_{\rho_m}^{TM} = \pm \frac{\chi_{0m}^{TM} \beta_{0m}^{TM}}{\omega \mu \epsilon} Z_0'(\chi_{0m}^{TM} \rho) e^{\mp j \beta_{0m}^{TM} z} \quad (\text{A.99})$$

$$h_{\phi_m}^{TM} = \frac{e_{\rho_m}^{TM}}{\eta_{0m}^{TM}} \quad (\text{A.100})$$

$$e_{\phi_m}^{TM} = e_{z_m}^{TM} = h_{\rho_m}^{TM} = h_{z_m}^{TM} = 0 \quad (\text{A.101})$$

onde  $\eta_{0m}^{TM}$  é dado por (A.35), para  $l = 0$ , e:

$$Z_0'(\chi_{0m}^{TM} \rho) = J_0(\chi_{0m}^{TM} a) N_0'(\chi_{0m}^{TM} \rho) - N_0(\chi_{0m}^{TM} a) J_0'(\chi_{0m}^{TM} \rho) \quad (\text{A.102})$$

- **Modo Transversal Elétrico ( $TE^z$ )**

$$e_{\phi_m}^{TE} = \frac{\chi_{0m}^{TE}}{\varepsilon} Z_0'(\chi_{0m}^{TE} \rho) e^{\mp j \beta_{0m}^{TE} z} \quad (\text{A.103})$$

$$h_{\rho_m}^{TE} = \pm \frac{e_{\phi_m}^{TE}}{\eta_{0m}^{TE}} \quad (\text{A.104})$$

$$e_{\rho_m}^{TE} = e_{z_m}^{TE} = h_{\phi_m}^{TE} = h_{z_m}^{TE} = 0 \quad (\text{A.105})$$

onde  $\eta_{0m}^{TE}$  é dado por (A.71), para  $l = 0$ , e:

$$Z_0'(\chi_{0m}^{TE} \rho) = J_0'(\chi_{0m}^{TE} a) N_0'(\chi_{0m}^{TE} \rho) - N_0'(\chi_{0m}^{TE} a) J_0'(\chi_{0m}^{TE} \rho) \quad (\text{A.106})$$

## Apêndice B

### Limitações Teóricas do MMT Aplicado na Análise de Estruturas Coaxiais

Na aplicação do MMT na análise de estruturas coaxiais existem dois problemas a serem considerados quando a descontinuidade se dá nos cilindros condutores interno e externo simultaneamente, como ilustrado na Figura B.1 e dimensões apresentadas na Tabela B.1. O primeiro envolve a montagem mecânica do dispositivo, que apresenta dificuldades para o alinhamento perfeito dos cilindros condutores, interno e externo, devendo-se considerar possíveis discrepâncias no posicionamento relativo dos condutores. O segundo problema está relacionado às limitações teóricas que envolvem a aplicação do Método de Casamento de Modos nesse tipo de estrutura. Para que o método seja aplicável, a área livre de seção reta do guia de onda coaxial da direita deve estar contida totalmente na área livre de seção reta do guia de onda coaxial da esquerda em cada descontinuidade considerada, como ilustrado na Figura 2.3, o que não ocorre neste caso.

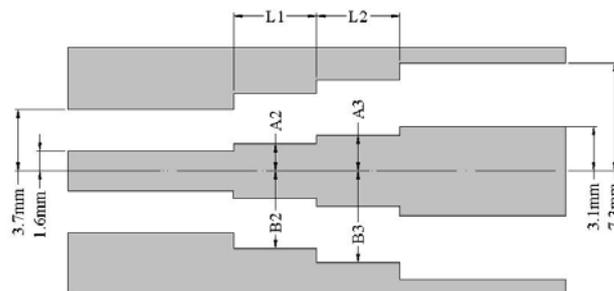


Figura B.1 – Estrutura de acoplamento entre dois guias de onda coaxiais de dimensões diferentes.

Seção de guia de onda coaxial	A (mm)	B (mm)
Seção 2	2,00	4,60
Seção 3	2,50	5,75

Tabela B.1 – Dimensões dos cilindros condutores interno e externo para o acoplador da Figura B.1.

Para contornar essa limitação teórica e, ao mesmo tempo, prever o comportamento desses desajustes mecânicos, será incluído um pequeno deslocamento  $G$  do condutor central para a direita ou à esquerda, o que pode ocorrer em um caso real, como ilustrado na Figura B.2. Um ponto importante a ser considerado na inclusão desse deslocamento, como discutido na Seção 2.3.1 do capítulo anterior, é o fato de que o número máximo de modos  $N$  a ser considerado na aproximação dos campos no interior do guia de onda coaxial liso cresce à medida que  $G$  diminui, aumentando, assim, o tempo computacional necessário no cálculo das matrizes de espalhamento associadas a essas seções de guias de onda coaxiais lisos.

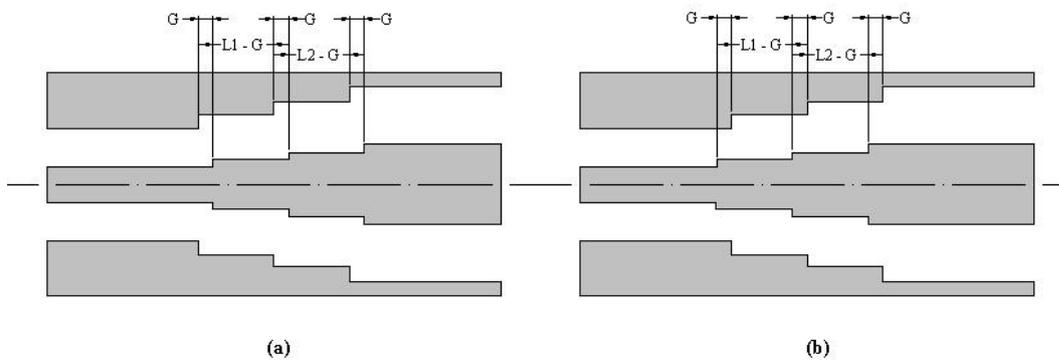


Figura B.2 – Estrutura de acoplamento com deslocamento  $G$  no cilindro condutor central (a) para a direita e (b) para a esquerda.

Considerando-se a estrutura ilustrada na Figura B.2 e dimensões listadas na Tabela B.1, onde  $L_1 = L_2 = 10\text{mm}$ , a convergência de  $|S_{11_{00}}|(dB)$  em função do número máximo  $N$  de modos  $TM_{0n}$  é ilustrada no conjunto de Figuras B.3.(a)-(d), sendo adotados diferentes valores de  $G$  para esse dispositivo na frequência de 1 GHz. O conjunto de Figuras B.4.(a)-(d) ilustra a convergência de  $|S_{11_{00}}|(dB)$  em função do número máximo  $N$  de modos  $TM_{0n}$  para a frequência de 3 GHz, considerando-se os mesmos valores de  $G$ ,  $L_1$  e  $L_2$ .

Analisando-se os resultados ilustrados nos conjuntos de Figuras B.3 e B.4, observa-se que, em ambos os casos, à medida que  $G$  aumenta, a convergência de  $|S_{11_{00}}|(dB)$  ocorre para poucos modos. Porém, os deslocamentos para a direita ou à esquerda convergem para valores diferentes. Por outro lado, à medida que  $G$  diminui, os valores de  $|S_{11_{00}}|(dB)$  convergem para o mesmo

valor, tanto para o deslocamento para a direita. Entretanto, necessita-se considerar um número maior de modos para a aproximação dos campos no interior do guia de onda coaxial liso. Observa-se que, para  $G=10^{-3}mm$  e considerando-se 20 modos TM no cálculo das matrizes de espalhamento, a discrepância entre os resultados obtidos nos deslocamentos para a direita e esquerda são da ordem de 0,089 dB nos dados obtidos para a frequência de 1 GHz, Figura B.3.(c), e 0,095 dB nos dados obtidos para a frequência de 3 GHz, Figura B.4.(c).

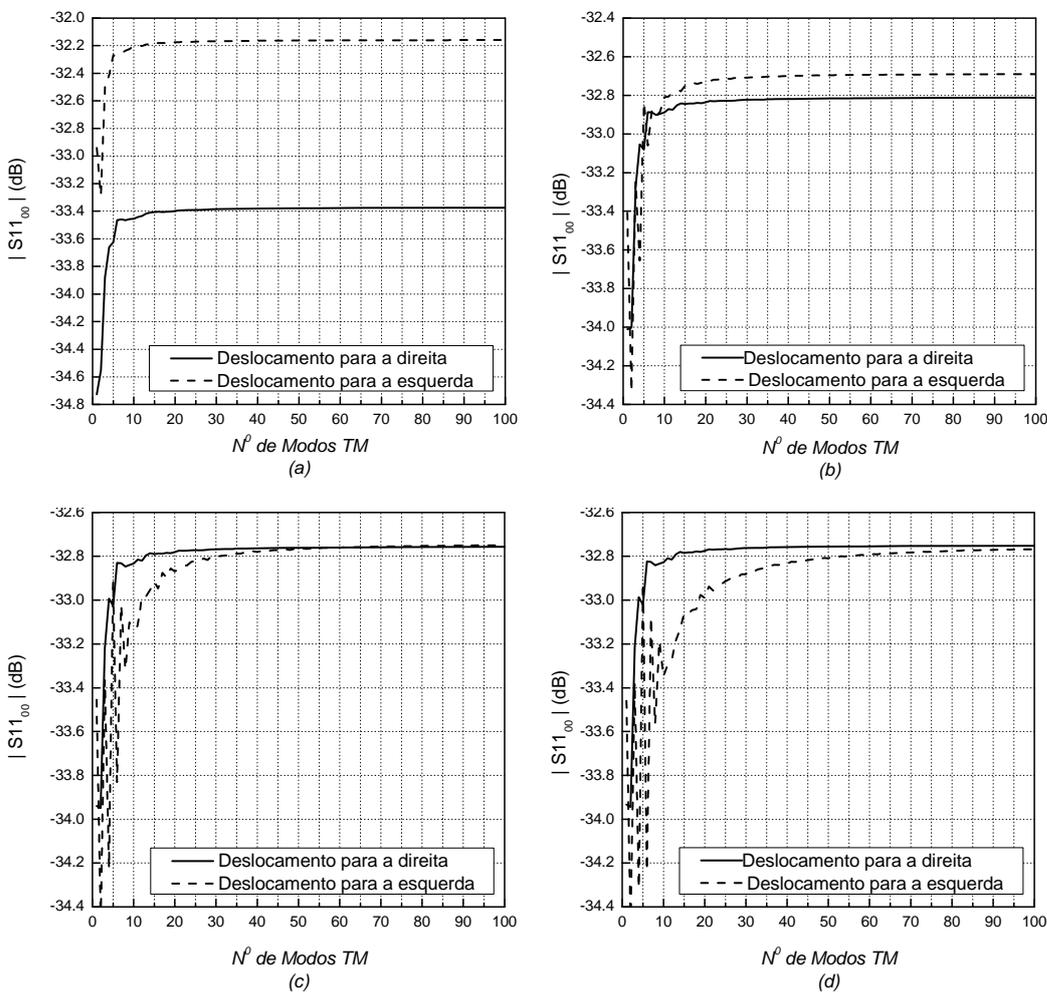


Figura B.3 – Convergência dos valores de  $|S_{11_{00}}|$  (dB) em função do número máximo  $N$  de modos  $TM_{0n}$ , para a frequência de 1 GHz, considerando (a)  $G = 0,1mm$ , (b)

$G = 10^{-2}mm$ , (c)  $G = 10^{-3}mm$  e (d)  $G = 10^{-4}mm$ , da estrutura de acoplamento ilustrada na Figura B.2.

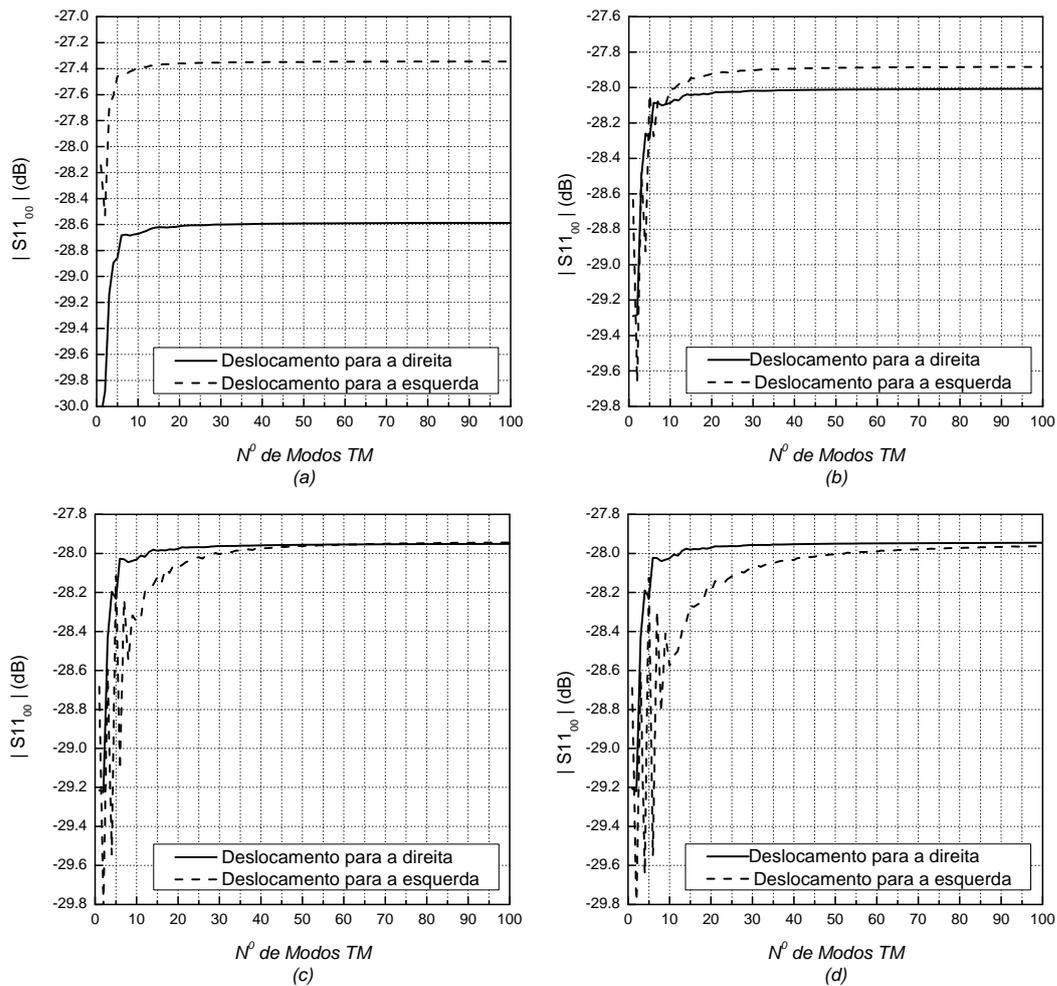


Figura B.4 – Convergência dos valores de  $|S_{11_{00}}|$  (dB) em função do número máximo  $N$  de modos  $TM_{0n}$ , para a freqüência de 3GHz, considerando (a)  $G = 0,1mm$ , (b)  $G = 10^{-2}mm$ , (c)  $G = 10^{-3}mm$  e (d)  $G = 10^{-4}mm$ , da estrutura de acoplamento ilustrada na Figura B.2.

## Apêndice C

### Solução de Referência: MoM+IBC

Neste Apêndice são apresentadas, de forma breve, formulações para a análise numérica do espalhamento eletromagnético por corpos de revolução (BOR), de geometria apresentada na Seção 3.1, constituídos por condutor elétrico perfeito (PEC) através da utilização da Equação Integral do Campo Elétrico (EFIE) [40, 84, 87, 88] resolvida através da aplicação do Método dos Momentos (MoM) [39, 40] com o auxílio da técnica *Impedance Boundary Condition (IBC)* [89]. A formulação apresentada neste apêndice será implementada em um algoritmo computacional escritos em linguagem *FORTRAN* e será usada como solução de referência para a comparação com resultados obtidos pelo método híbrido MMT/MoM proposto neste trabalho.

#### C.1. Impedance Boundary Condition – IBC

Como ilustrado na Figura C.1, é utilizada a técnica *Impedance Boundary Condition (IBC)* [89], para simular uma condição de contorno absorvente na superfície interna da antena (parede final em  $z = z_p$ ). As dimensões do guia de onda coaxial de alimentação,  $a_g$  e  $b_g$ , são tais que só se propague o modo fundamental TEM e a IBC possui o valor da impedância deste modo que será absorvido, de forma que não ocorram reflexões e a estrutura de alimentação seja vista como um guia de onda coaxial infinito. A Figura C.1 ilustra, também, a distribuição das fontes de corrente elétrica e magnética,  $\vec{J}_g(\vec{r})$  e  $\vec{M}_g(\vec{r})$ , respectivamente, que excitarão o modo TEM [39], onde, devido à parede absorvente, para  $z < z_g$  existe apenas o modo TEM se propagando no sentido negativo do eixo  $z$  e para  $z > z_g$  existe apenas o modo TEM se propagando em ambos os sentidos do eixo  $z$ . A posição destas fontes e da parede final de absorção deve ser escolhida em uma região onde exista apenas a presença do modo fundamental TEM, logo, esta seção de guia de onda coaxial deve ser

suficientemente grande para que as amplitudes dos modos superiores TM evanescentes sejam suficientemente pequenas em  $z = z_p$  e  $z = z_g$ .

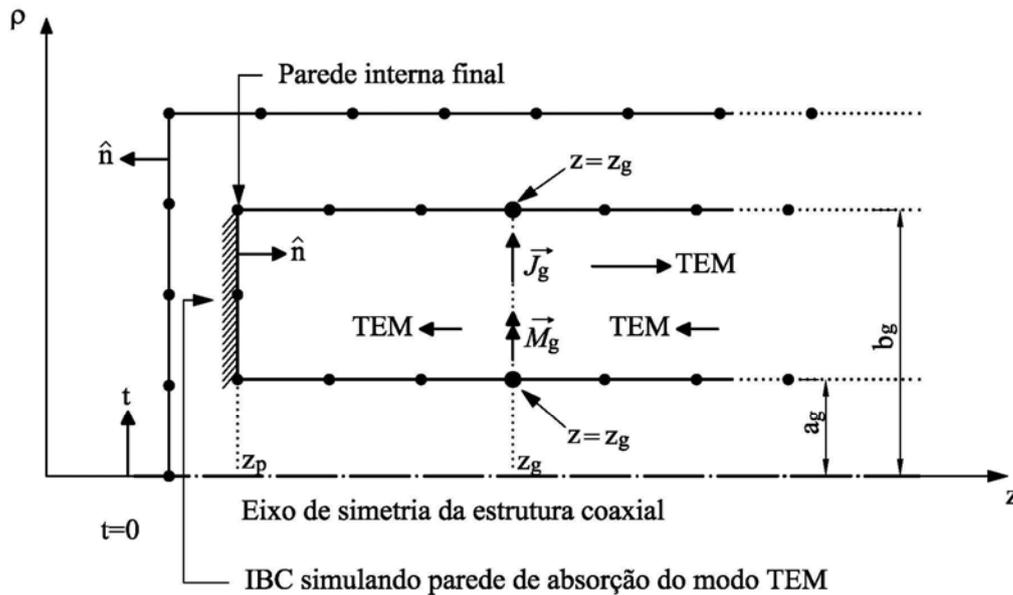


Figura C.1 – Representação da IBC como parede de absorção do modo TEM.

A IBC representa a uma relação entre as componentes tangenciais do campo elétrico e magnético sobre a superfície absorvente, escrita utilizando-se o sistema de coordenadas ortonormais ilustrado na Figura 2.1, expressa por [84, 89]:

$$Z_t^{IBC} = -\frac{E_t}{H_\phi} \quad (C.1)$$

A corrente magnética superficial equivalente  $\vec{M}_s(\vec{r})$  pode ser relacionada com a corrente elétrica superficial equivalente  $\vec{J}_s(\vec{r})$  através da IBC, expressa por:

$$\vec{M}_s(\vec{r}) = -Z_t^{IBC} \vec{J}_s(\vec{r}) \hat{\phi} \quad (C.2)$$

onde  $\vec{M}_s(\vec{r}')$  será definido apenas sobre a parede absorvente, já que  $Z_t^{IBC}$  possui o valor da impedância do modo TEM sobre esta parede e será nula para o restante da superfície do BOR.

## C.2. Solução da Equação Integral do Campo Elétrico (EFIE) através do Método dos Momentos (MoM)

Dada a definição da *impedance Boundary Condition (IBC)*, a Equação Integral do Campo Elétrico (EFIE) será expressa por:

$$\frac{\vec{E}(\vec{r})}{\Gamma(\vec{r})} = -\frac{j}{4\pi} \int_{s'} \left\{ \omega\mu_0 \vec{J}_s(\vec{r}') \Psi_0(\vec{r}, \vec{r}') - j\vec{M}_s(\vec{r}') \times \nabla' \Psi_0(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{1}{\omega\epsilon_0} \nabla' \cdot \vec{J}_s(\vec{r}') \nabla' \Psi_0(\vec{r}, \vec{r}') \right\} ds' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}) \quad (C.3)$$

onde  $\vec{E}^{inc}(\vec{r})$  é o campo elétrico incidente produzido pelas fontes externas a superfície do BOR,  $\vec{J}_g(\vec{r})$  e  $\vec{M}_g(\vec{r})$ , situadas em  $z = z_g$ , como ilustrado na Figura C.1.

Considerando o mesmo raciocínio feito nas Seções 3.2 e 3.3, onde são impostas as condições de contorno sobre a componente tangencial dos campos na interface  $S$  na forma tangencial, assumindo que a interface  $S$  seja suave, ou seja,  $\Gamma(\vec{r}) = 2$ , e transformando a EFIE em um sistema linear de equações algébricas através a aplicação do Método dos Momentos, a equação (C.3) pode ser reescrita como:

$$[V] = [Z^{IBC}] [I] \quad (C.4)$$

Os elementos das matrizes  $[V]$  e  $[Z]$  são:

$$V_i = \int_s \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \vec{E}^{inc}(\vec{r}) ds \quad (C.5)$$

$$Z_{ij}^{IBC} = Z_{ij} + Y_{ij} \quad (C.6)$$

sendo

$$Z_{ij} = \frac{j\eta_0}{4\pi k_0} \iint_s \iint_{s'} \left[ k_0^2 \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_j(\vec{r}') - (\nabla \cdot \vec{W}_i(\vec{r})) (\nabla' \cdot \vec{J}_j(\vec{r}')) \right] \Psi_0(\vec{r}, \vec{r}') ds' ds \quad (C.7)$$

$$Y_{ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_s \iint_{s'} \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \left[ \vec{M}_j(\vec{r}') \times \nabla' \Psi_0(\vec{r}, \vec{r}') \right] ds' ds - \frac{1}{2} \int_s \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \left[ \vec{M}_j(\vec{r}) \times \hat{n} \right] ds \quad (C.8)$$

onde  $\vec{M}_j(\vec{r}')$  é expresso em (C.2) e o  $j$ -ésimo elemento da matriz coluna  $[I]$  são os coeficientes desconhecidos associados à corrente superficial equivalente elétrica,  $\vec{J}_s(\vec{r})$ , obtidos através da solução do sistema linear expresso em (C.4). Percebe-se que a equação (C.7) é idêntica a (3.41) e, salvo a troca de sinal e a presença da constante  $Z_t^{IBC}$ , a equação (C.8) é semelhante a (3.42), logo a avaliação numérica e o tratamento de singularidades feitos no Apêndice D podem ser aplicados a ambas as equações (C.7) e (C.8).

## Apêndice D

### Avaliação Numérica e Tratamento das singularidades das Integrais das Matrizes Impedância e Admitância

#### D.1.

#### Avaliação Numérica das Integrais das Matrizes Z e Y

O tratamento empregado na avaliação numérica das integrais das equações (3.99)-(3.106) é semelhante ao apresentado em [40, 49, 90], onde esta avaliação numérica é inteiramente conduzida utilizando quadraturas Gaussianas, para o caso em que as integrais não apresentam singularidades, e, para os casos em que o ponto de observação está muito próximo do ponto da fonte apresentando as singularidades, é empregado um tratamento especial que combina a utilização de quadraturas Gaussianas e soluções analíticas, sendo apresentado na próxima seção.

As integrais em relação à  $\alpha$  e  $\alpha'$  nas equações (3.99)-(3.106) quando realizadas por quadratura Gaussianas de  $n_\alpha$  e  $n'_\alpha$  pontos, respectivamente, geram as seguintes expressões:

$$G_{00}^v(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} A_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} A_{\xi'} G_v(t, t'), \quad v = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (\text{D.1})$$

$$G_{01}^v(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} A_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} \alpha'_{\xi'} A_{\xi'} G_v(t, t'), \quad v = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (\text{D.2})$$

$$G_{02}^v(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} A_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} \alpha_{\xi'}^2 A_{\xi'} G_v(t, t'), \quad v = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (\text{D.3})$$

$$G_{10}^v(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} \alpha_\xi A_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} A_{\xi'} G_v(t, t'), \quad v = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (\text{D.4})$$

$$G_{20}^v(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} \alpha_\xi^2 A_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} A_{\xi'} G_v(t, t'), \quad v = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (\text{D.5})$$

$$G_{11}^v(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} \alpha_\xi A_\xi \sum_{\xi'=1}^{n_\alpha} \alpha_{\xi'} A_{\xi'} G_v(t, t'), \quad v=1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (\text{D.6})$$

$$G_{12}^v(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} \alpha_\xi A_\xi \sum_{\xi'=1}^{n_\alpha} \alpha_{\xi'}^2 A_{\xi'} G_v(t, t'), \quad v=1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (\text{D.7})$$

$$G_{21}^v(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} \alpha_\xi^2 A_\xi \sum_{\xi'=1}^{n_\alpha} \alpha_{\xi'} A_{\xi'} G_v(t, t'), \quad v=1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (\text{D.8})$$

onde  $\alpha_\xi$ ,  $A_\xi$ ,  $\alpha_{\xi'}$  e  $A_{\xi'}$  são as abscissas e os pesos das quadraturas de  $n_\alpha$  e  $n_\alpha$  pontos, respectivamente. Para a integral em  $\phi''$ , considerando quadraturas Gaussianas de  $n_{\phi''}$  pontos, as equações (3.84) e (3.87) podem ser expressas por:

$$G_1(t, t') = \sum_{g=1}^{n_{\phi''}} A_g \cos \phi_g'' G_E, \quad (\text{D.9})$$

$$G_2(t, t') = \sum_{g=1}^{n_{\phi''}} A_g G_E, \quad (\text{D.10})$$

$$G_3(t, t') = \sum_{g=1}^{n_{\phi''}} A_g (1 - \cos \phi_g'') G_H, \quad (\text{D.11})$$

$$G_4(t, t') = \sum_{g=1}^{n_{\phi''}} A_g \cos \phi_g'' G_H, \quad (\text{D.12})$$

onde

$$\phi_g'' = \frac{\pi}{2} (\chi_\beta + 1), \quad (\text{D.13})$$

$A_g$  e  $\chi_\beta$  são os pesos e as abscissas da quadratura Gaussiana de  $n_{\phi''}$  pontos, respectivamente. Utilizando os parâmetros das quadraturas Gaussianas, as equações (3.88), (3.91) e (3.92) podem ser reescritas como:

$$R = \sqrt{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 + 4\rho\rho' \sin^2 \left( \frac{\phi_g''}{2} \right)} \quad (\text{D.14})$$

$$T_i(t) = \begin{cases} \alpha_\xi, & \text{para } T_i^{tL}, \text{ logo } \begin{cases} \rho = \rho_{i-1} + \alpha_\xi \Delta \rho_i \\ z = z_{i-1} + \alpha_\xi \Delta z_i \end{cases} \\ 1 - \alpha_\xi, & \text{para } T_i^{tR}, \text{ logo } \begin{cases} \rho = \rho_i + \alpha_\xi \Delta \rho_{i+1} \\ z = z_i + \alpha_\xi \Delta z_{i+1} \end{cases} \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

$$T_j'(t) = \begin{cases} \alpha'_\xi, & \text{para } T_j'^{tL}, \text{ logo } \begin{cases} \rho' = \rho'_{j-1} + \alpha'_\xi \Delta \rho'_j \\ z' = z'_{j-1} + \alpha'_\xi \Delta z'_j \end{cases} \\ 1 - \alpha'_\xi, & \text{para } T_j'^{tR}, \text{ logo } \begin{cases} \rho' = \rho'_j + \alpha'_\xi \Delta \rho'_{j+1} \\ z' = z'_j + \alpha'_\xi \Delta z'_{j+1} \end{cases} \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

Para garantir a acuracidade dos resultados, o número total de pontos  $n_{\phi''}^T$  utilizados na avaliação das integrais em  $\phi''$  expressas em D.9 a D.12 é determinado em função do comportamento do integrando das equações (3.84) a (3.87) correspondentes. Para isto, determina-se o número de oscilações do integrando  $NO$ , obtido a partir do valor de  $\phi'' = \phi''_{\max}$  onde o argumento da exponencial  $e^{-jkR}$  tem sua variação máxima, definido em [40] como:

$$NO \approx \frac{\pi \Delta R}{2\lambda \delta} \quad (\text{D.17})$$

onde  $\Delta R = R(\phi'' = \phi''_2) - R(\phi'' = \phi''_1)$ ,  $\phi''_1 = \phi''_{\max} + \delta$ ,  $\phi''_2 = \phi''_{\max} - \delta$  e  $\delta = \pi/36$ . A partir do valor de  $NO$ ,  $n_{\phi''}^T$  é definido como [40]:

$$n_{\phi''}^T = 4NO \quad (\text{D.18})$$

## D.2. Tratamento das Singularidades

As singularidades presentes na avaliação numérica das integrais nas equações (3.99)-(3.106) ocorrem quando o ponto de observação,  $\vec{r}$ , está muito próximo do ponto da fonte,  $\vec{r}'$ . Neste caso, as equações (D.1)-(D.12) não podem ser aplicadas. Para contornar este problema, são utilizados três métodos para tratar estas singularidades, descritos a seguir [40, 49, 90].

O *Método 1* é aplicado quando a distância entre os segmentos  $k$  e  $q$  é maior que  $0.1\rho_q$  e menor que  $\Delta q$ , ou seja, quando estes segmentos estão próximos entre si e próximos do eixo de simetria, onde a integral em  $\alpha'$  apresenta resultados pouco precisos no limite  $\phi'' \rightarrow 0$ , devido à grande variação de  $R$ . Neste caso, o *Método 1* é aplicado apenas para o primeiro subintervalo da integral em  $\phi''$  para as integrais em relação à  $\alpha'$ , que podem ser extraídas das equações (3.99)-(3.106) e reescritas como:

$$G_0^E = \int_0^1 \frac{e^{-ikR}}{kR} d\alpha' = \int_0^1 \frac{e^{-ikR} - 1}{kR} d\alpha' + \int_0^1 \frac{1}{kR} d\alpha' = G_{0a}^E + G_{0b}^E \quad (D.19)$$

$$G_1^E = \int_0^1 \frac{e^{-ikR}}{kR} \alpha' d\alpha' = \int_0^1 \frac{e^{-ikR} - 1}{kR} \alpha' d\alpha' + \int_0^1 \frac{\alpha'}{kR} d\alpha' = G_{1a}^E + G_{1b}^E \quad (D.20)$$

$$G_0^H = \int_0^1 G_H d\alpha' = \int_0^1 (G_H - G_H^\Delta) d\alpha' + \int_0^1 G_H^\Delta d\alpha' = G_{0a}^H + G_{0b}^H \quad (D.21)$$

$$G_1^H = \int_0^1 G_H \alpha' d\alpha' = \int_0^1 (G_H - G_H^\Delta) \alpha' d\alpha' + \int_0^1 G_H^\Delta \alpha' d\alpha' = G_{1a}^H + G_{1b}^H \quad (D.22)$$

$$G_2^H = \int_0^1 G_H \alpha'^2 d\alpha' = \int_0^1 (G_H - G_H^\Delta) \alpha'^2 d\alpha' + \int_0^1 G_H^\Delta \alpha'^2 d\alpha' = G_{2a}^H + G_{2b}^H \quad (D.23)$$

onde  $G_H$  é expresso em (3.71) e  $G_H^\Delta$  é definido em [40] como:

$$G_H^\Delta = \frac{1}{(kR)^3} + \frac{1}{2kR} - \frac{i}{3} \quad (D.24)$$

As integrais  $G_{0a}^E$ ,  $G_{1a}^E$ ,  $G_{0a}^H$ ,  $G_{1a}^H$  e  $G_{2a}^H$  não apresentam singularidade e podem ser avaliadas usando quadratura Gaussiana de  $n_{\alpha'}$  pontos. As integrais  $G_{0b}^E$ ,  $G_{1b}^E$ ,  $G_{0b}^H$ ,  $G_{1b}^H$  e  $G_{2b}^H$  são avaliadas analiticamente. Para isto tem-se:

$$\rho' = \rho'_{q-1} + \alpha' \Delta t'_q \sin u'_q \quad (D.25)$$

$$z' = z'_{q-1} + \alpha' \Delta t'_q \cos u'_q \quad (D.26)$$

O que permite expressar  $R$  na equação (D.14) como:

$$R = [A\alpha'^2 + B\alpha' + C]^{1/2} \quad (D.27)$$

onde

$$A = \Delta t_q'^2 \quad (D.28)$$

$$B = 2\Delta t_q' \left[ (\rho'_{q-1} - \rho_k) \sin u'_q + (z'_{q-1} - z_k) \cos u'_q + 2\rho_k \sin u'_q \sin^2 \left( \frac{\phi''}{2} \right) \right] \quad (D.29)$$

$$C = (\rho'_{q-1} - \rho_k)^2 + (z'_{q-1} - z_k)^2 + 4\rho_k \rho'_{q-1} \sin^2 \left( \frac{\phi''}{2} \right) \quad (D.30)$$

Utilizando a equação (D.27), a integração de  $G_{0b}^E$ ,  $G_{1b}^E$ ,  $G_{0b}^H$ ,  $G_{1b}^H$  e  $G_{2b}^H$  nas equações de (D.19)-(D.23) fornece:

$$G_{0b}^E = \frac{1}{k\sqrt{A}} \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad (D.31)$$

$$G_{1b}^E = \frac{1}{k} \left( \frac{\alpha_0 - \sqrt{C}}{A} - \frac{B}{2A^{3/2}} \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \quad (D.32)$$

$$G_{0b}^H = \frac{1}{k^3} \left[ \frac{2(2A+B)\sqrt{C} - 2\alpha_0 B}{\alpha_0(4AC - B^2)\sqrt{C}} \right] + \frac{1}{2k\sqrt{A}} \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{i}{3} \quad (D.33)$$

$$G_{1b}^H = \frac{1}{k^3} \left[ \frac{2(B+2C)\sqrt{C} - 4\alpha_0 C}{\alpha_0(B^2 - 4AC)\sqrt{C}} \right] + \frac{1}{2k} \left\{ \frac{\alpha_0 - \sqrt{C}}{A} - \frac{B}{2A^{3/2}} \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right\} - \frac{i}{6} \quad (D.34)$$

$$G_{2b}^H = \frac{1}{k^3} \left[ \frac{(2B^2 - 4AC) + 2BC}{\alpha_0(4AC - B^2)} + \frac{1}{A^{3/2}} \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right] + \frac{1}{2k} \left[ \frac{\alpha_0(2A - 3B) + 3B\sqrt{C}}{4A^2} + \frac{3B^2 - 4AC}{8A^{5/2}} \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right] - \frac{i}{9} \quad (D.35)$$

onde

$$\alpha_0 = \sqrt{A+B+C} \quad (D.36)$$

$$\alpha_1 = 2\alpha_0\sqrt{A} + 2A + B \quad (D.37)$$

$$\alpha_2 = 2\sqrt{A}\sqrt{C} + B \quad (\text{D.38})$$

O Método 2 é aplicado quando a distância entre os segmentos  $k$  e  $q$  é menor que  $0.1\rho_q$ , ou seja, quando estes segmentos estão próximos entre si e afastados do eixo de simetria. Neste caso, o integrando de  $G_2(t, t')$  na equação (3.85) é bem comportado e o método é aplicado somente às integrais  $G_1(t, t')$ ,  $G_3(t, t')$  e  $G_4(t, t')$  em relação à  $\phi''$  nas equações (3.84), (3.86) e (3.87), respectivamente, onde o problema da singularidade ocorre próximo de  $\phi'' = 0$ . Nesta região, os integrandos de  $G_1(t, t')$ ,  $G_3(t, t')$  e  $G_4(t, t')$  podem ser aproximados por:

$$\lim_{\phi'' \rightarrow 0} [\cos \phi'' G_E] \approx \frac{1}{k} \left[ (\rho' - \rho_k)^2 + (z' - z_k)^2 + \rho_k \rho' \phi''^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{D.39})$$

$$\lim_{\phi'' \rightarrow 0} \left[ 2 \sin^2 \left( \frac{\phi''}{2} \right) G_H \right] \approx \frac{\phi''^2}{2k^3} \left[ (\rho' - \rho_k)^2 + (z' - z_k)^2 + \rho_k \rho' \phi''^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{D.40})$$

$$\lim_{\phi'' \rightarrow 0} [\cos \phi'' G_H] \approx \frac{1}{k^3} \left[ (\rho' - \rho_k)^2 + (z' - z_k)^2 + \rho_k \rho' \phi''^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{D.41})$$

As integrais  $G_1(t, t')$ ,  $G_3(t, t')$  e  $G_4(t, t')$  são calculadas através das equações (D.9), (D.11) e (D.12), respectivamente, subtraindo destes resultados as respostas da quadratura Gaussiana de  $n_{\phi''}$  pontos aplicada às equações (D.39)-(D.40), respectivamente, e somando a estes resultados a solução exata das equações (D.39)-(D.40). Este processo resulta em:

$$G_1(t, t') = \frac{\pi}{2} \sum_{g=1}^{n_{\phi''}} A_g \cos \phi_g'' G_E + I_1 - \frac{\pi}{2} \sum_{g=1}^{n_{\phi''}} \frac{A_g}{k} \left[ (\rho' - \rho_k)^2 + (z' - z_k)^2 + \rho_k \rho' \phi_g''^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{D.42})$$

$$G_3(t, t') = 2\pi \sum_{g=1}^{n_{\phi''}} A_g \sin^2 \left( \frac{\phi_g''}{2} \right) G_H + I_2 - \frac{\pi}{2} \sum_{g=1}^{n_{\phi''}} \frac{A_g \phi_g''^2}{k^3} \left[ (\rho' - \rho_k)^2 + (z' - z_k)^2 + \rho_k \rho' \phi_g''^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{D.43})$$

$$G_4(t, t') = \frac{\pi}{2} \sum_{g=1}^{n_{\phi''}} A_g \cos \phi_g'' G_H + I_3$$

$$- \frac{\pi}{2} \sum_{g=1}^{n_{\phi''}} \frac{A_g}{k^3} \left[ (\rho' - \rho_k)^2 + (z' - z_k)^2 + \rho_k \rho' \phi_g''^2 \right]^{-\frac{3}{2}}$$
(D.44)

onde

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \left[ (\rho' - \rho_k)^2 + (z' - z_k)^2 + \rho_k \rho' \phi''^2 \right]^{-\frac{1}{2}} d\phi''$$

$$= \frac{1}{k \sqrt{\rho_k \rho'}} \ln \left( v_1 + \sqrt{1 + v_1^2} \right)$$
(D.45)

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\phi''^2}{k^3} \left[ (\rho' - \rho_k)^2 + (z' - z_k)^2 + \rho_k \rho' \phi''^2 \right]^{-\frac{3}{2}} d\phi''$$

$$= \frac{1}{(k^2 \rho_k \rho')^{3/2}} \left[ \ln \left( v_1 + \sqrt{1 + v_1^2} \right) - \frac{v_1}{\sqrt{1 + v_1^2}} \right]$$
(D.46)

$$I_3 = \int_0^{\pi} \frac{1}{k^3} \left[ (\rho' - \rho_k)^2 + (z' - z_k)^2 + \rho_k \rho' \phi''^2 \right]^{-\frac{3}{2}} d\phi''$$

$$= \frac{\pi \left[ (\rho' - \rho_k)^2 + (z' - z_k)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}}{k^3 \sqrt{1 + v_1^2}}$$
(D.47)

sendo

$$v_1 = \pi \sqrt{\frac{\rho' \rho_k}{(\rho' - \rho_k)^2 + (z' - z_k)^2}}$$
(D.48)

O *Método 3* é aplicado sempre que os segmentos fonte e observação são coincidentes. Neste caso, o integrando de  $G_2(t, t')$  na equação (3.85) é bem comportado e  $G_4(t, t')$  na equação (3.87) é multiplicado por zero e, conseqüentemente, não é necessário remover as singularidades desta integral. Assim, o *Método 3* é aplicado apenas às integrais das equações (3.99)-(3.106) para  $\nu = 1$  e 3, onde a singularidade ocorre para  $\alpha = \alpha'$  e  $\phi'' = 0$ . Nesta região os integrandos de  $G_1(t, t')$  e  $G_3(t, t')$  podem ser aproximados por:

$$\lim_{\substack{\phi'' \rightarrow 0 \\ \alpha \rightarrow 0}} [\cos \phi'' G_E] \approx \frac{1}{k} [(\alpha \Delta_k)^2 + (\rho_k \phi'')^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{D.49})$$

$$\lim_{\substack{\phi'' \rightarrow 0 \\ \alpha \rightarrow 0}} \left[ 2 \sin^2 \left( \frac{\phi''}{2} \right) G_H \right] \approx \frac{\phi''^2}{2k^3} [(\alpha \Delta_k)^2 + (\rho_k \phi'')^2]^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{D.50})$$

De forma semelhante ao que foi feito no *Método 2*, as integrais  $G_1(t, t')$  e  $G_3(t, t')$  avaliadas pelo *Método 3* são expressas por:

$$\begin{aligned} G_1(t, t') &= \frac{\pi}{2} \sum_{g=1}^{n_{\phi''}} A_g \cos \phi_g'' \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} A_{\xi} G_E + I_4 \\ &- \frac{\pi}{2} \sum_{g=1}^{n_{\phi''}} A_g \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} \frac{A_{\xi}}{k} [(\alpha_{\xi} \Delta_k)^2 + (\rho_k \phi_g'')^2]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{D.51})$$

$$\begin{aligned} G_3(t, t') &= \pi \sum_{g=1}^{n_{\phi''}} A_g \sin^2 \left( \frac{\phi_g''}{2} \right) \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} A_{\xi} G_H + I_5 \\ &- \frac{\pi}{4} \sum_{g=1}^{n_{\phi''}} A_g \phi_g''^2 \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} \frac{A_{\xi}}{k^3} [(\alpha_{\xi} \Delta_k)^2 + (\rho_k \phi_g'')^2]^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (\text{D.52})$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{1}{k} [(\alpha \Delta_k)^2 + (\rho_k \phi'')^2]^{-\frac{1}{2}} d\phi'' d\alpha \\ &= \frac{1}{k \rho_k} \left[ \ln(\gamma_2 + \sqrt{1 + \gamma_2^2}) + \gamma_2 \ln \left( \frac{1}{\gamma_2} + \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma_2^2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.53})$$

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{\phi''^2}{2k^3} [(\alpha \Delta_k)^2 + (\rho_k \phi'')^2]^{-\frac{3}{2}} d\phi'' d\alpha \\ &= \frac{1}{2(k \rho_k)^3} \ln(\gamma_2 + \sqrt{1 + \gamma_2^2}) \end{aligned} \quad (\text{D.54})$$

$$\gamma_2 = \frac{2\pi \rho_k}{\Delta_k} \quad (\text{D.55})$$

## Apêndice E

### Técnica de Otimização

O ajuste correto das dimensões das diversas partes que constituem uma antena é fundamental na busca pela solução que maximize o seu desempenho. Em se tratando das estruturas de acoplamento necessárias para fazer a transição entre o conector e o guia de onda de alimentação destas antenas como, por exemplo, a ilustrada na Figura 7.3, é essencial o ajuste das dimensões deste dispositivo buscando minimizar suas perdas de retorno ao longo da banda de operação. A busca dessa solução ótima será realizada através da utilização de um algoritmo de otimização baseado no método quasi-Newton com gradiente determinado pelo Método de Diferenças Finitas (*DBCONF / IMSL*). Esse algoritmo busca um vetor de  $X$  variáveis que minimiza uma função objetivo de entrada.

A função objetivo a ser minimizada foi construída a partir das diferenças entre os valores da perda de retorno obtidos através da simulação numérica e um valor estabelecido como objetivo, o que é ilustrado na Figura E.1. Essas diferenças são obtidas para um conjunto de freqüências ao longo da banda de operação.

$$F(x) = \sum_{f=f_i}^{f_N} \begin{cases} (\Delta P_f(x))^q \rightarrow \Delta P_f(x) > 0 \\ 0 \rightarrow \Delta P_f(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

onde  $f_i$  e  $f_N$  são as freqüências inicial e final, respectivamente;  $x$  são as variáveis;  $q$  é o expoente a que essa diferença será elevada e, à medida que se aumenta o seu valor, aumentará também a influência das diferenças maiores de  $\Delta P_f(x)$  na composição da função objetivo.  $\Delta P_f(x)$  será expresso por:

$$\Delta P_f(x) = \frac{P_f^S(x) - P_f^{obj}(x)}{\Delta_f} \quad (\text{E.2})$$

onde  $P_f^S(x)$  é a perda de retorno calculada através das matrizes de espalhamento, utilizando-se o Método de Casamento de Modos discutido no

Capítulo 2;  $P_f^{obj}(x)$  é a perda de retorno mínima que se deseja obter; e  $\Delta_f$  é o peso para o resíduo em cada frequência ao longo da banda passante.

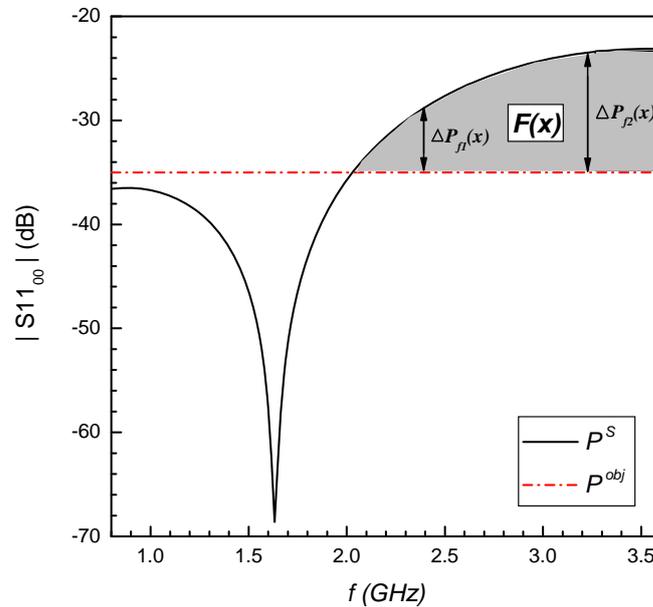


Figura E.1 – Visualização da função objetivo  $F(x)$ .

Como ilustrado na Figura E.1, a função  $F(x)$  utilizada faz o somatório das diferenças positivas para cada frequência dentro da banda passante, ou seja, quando a perda de retorno calculada através das matrizes de espalhamento está acima da perda mínima estabelecida. Portanto, para  $F(x) = 0$  tem-se uma perda de retorno ao longo da banda passante abaixo de um limiar pré-estabelecido para cada frequência, obtendo-se, então, as dimensões otimizadas do acoplador que produzirão essa perda de retorno abaixo desse limiar.