3
Análise Eletromagnética de Antenas Microfita

3.1.
Introdução

Neste capítulo é feita uma análise eletromagnética de uma antena microfita retangular alimentada por um cabo coaxial conforme a estrutura apresentada na Figura 3.1.

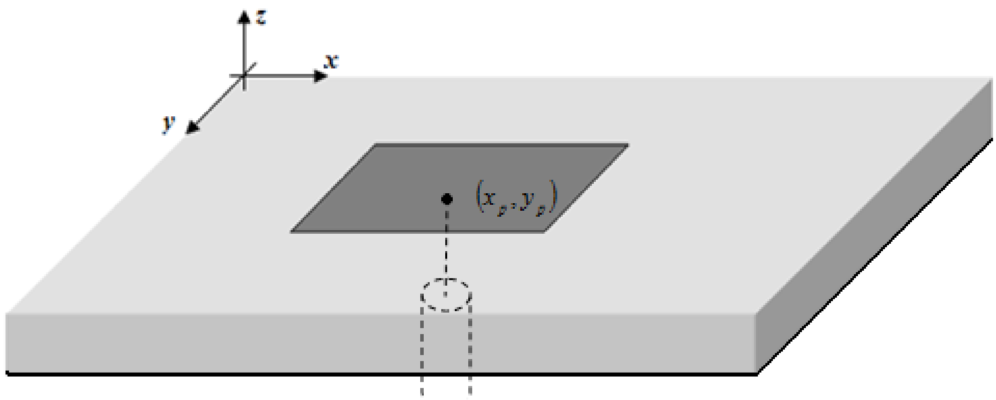

Figura 3.1 – Antena microfita com alimentação coaxial

A configuração apresentada na Figura 3.1 consiste em um *patch* metálico apoiado em uma camada de substrato de constante dielétrica ε_r sobre um plano metálico condutor infinito. Duas regiões se formam: a primeira é a camada de substrato de constante dielétrica $\varepsilon_r \neq 1$ abaixo do *patch* metalizado, e a segunda é a camada de ar acima do *patch* metalizado ($\varepsilon_r = 1$). A alimentação está localizada no ponto (x_p, y_p) e consiste em um cabo coaxial de impedância característica $Z_0 = 50\Omega$.

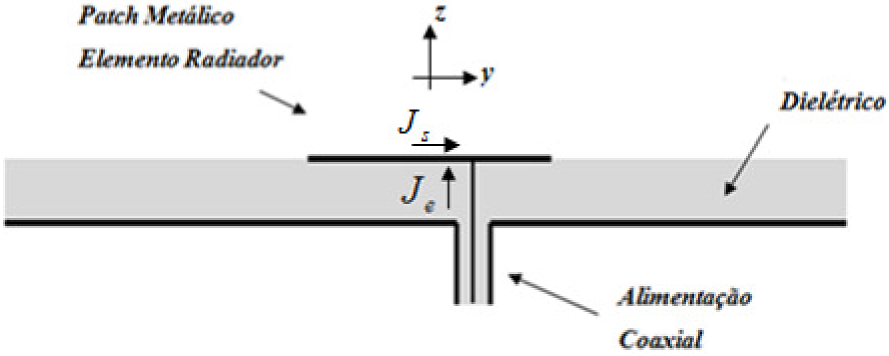

Figura 3.2 – Vista lateral da antena microfita

3.2. Descrição do método de análise

Para aplicação do método de análise, a excitação gerada pelo cabo coaxial é representada por uma fonte de corrente impulsiva no ponto (x_p, y_p) que induz uma corrente de superfície com densidade $\bar{J}_s$ sobre o *patch* metalizado. Dessa forma, na antena microfita em análise, há dois tipos de corrente: a corrente de excitação com densidade $\bar{J}_e$ e a corrente de superfície no *patch* com densidade $\bar{J}_s$, conforme indicado na figura 3.2.

O campo elétrico gerado por essas correntes deve satisfazer a condição de contorno sobre o plano condutor elétrico infinito em $z = 0$ e sobre o *patch* metálico em $z = h$. Dessa forma, ao aplicar esta condição de contorno, tem-se que:

$$\hat{z} \times \left[\bar{E}(\bar{J}_e) + \bar{E}(\bar{J}_s)\right] = 0 \text{, para todos os pontos na superfície do } patch \qquad (3.1)$$

Considerando $\bar{J}_e$ conhecida, é possível determinar a distribuição de corrente $\bar{J}_s$ sobre o *patch*. Neste trabalho, o Método dos Momentos é utilizado para determinar $\bar{J}_s$ que é representada através de uma expansão em funções de base, onde os coeficientes desta expansão são as incógnitas do problema, e descrita pela seguinte expressão, onde N_x e N_y são escolhidos para assegurar adequada representação das correntes:

$$\bar{J}_s = \hat{x}\sum_{n_x=1}^{N_x} I_{n_x} J_{n_x}(x,y) + \hat{y}\sum_{n_y=1}^{N_y} I_{n_y} J_{n_y}(x,y) \tag{3.2}$$

No problema em questão, há corrente induzida nas direções $\hat{x}$ e $\hat{y}$, e ambas as componentes variam tanto com x quanto com y. $J_{n_x}(x,y)$ e $J_{n_y}(x,y)$ são as funções de expansão na direção $\hat{x}$ e $\hat{y}$ e I_{n_x} e I_{n_y} os seus respectivos coeficientes. Da Equação 3.1, é possível dizer que:

$$\{\hat{z}\times[\bar{E}(\bar{J}_e)+\bar{E}(\bar{J}_s)]\} = \{\hat{z}\times[\bar{E}_{TOTAL}]\} = \{\hat{z}\times[\hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z]\} =$$
$$[\hat{y}E_x - \hat{x}E_y] = 0$$

Dessa forma, $E_x^{TOTAL} = 0$ e $E_Y^{TOTAL} = 0$. O produto do campo total por uma função de teste $\bar{J}_{teste}$ conhecida resulta em:

$$[\bar{E}(\bar{J}_e)+\bar{E}(\bar{J}_s)]\cdot\bar{J}_{teste} = [\bar{E}_{TOTAL}]\cdot\bar{J}_{teste} = [E_x^{TOTAL}J_X^{teste} + E_y^{TOTAL}J_Y^{teste}] =$$
$$[0J_X^{teste} + 0J_Y^{teste}] = 0$$

Dessa forma, podemos dizer que:

$$[\bar{E}(\bar{J}_e)+\bar{E}(\bar{J}_s)]\cdot\bar{J}_{teste} = 0 \tag{3.3}$$

O produto interno do campo elétrico total pela função de teste $\bar{J}_{teste}$, de acordo com a Equação 3.3, resulta em:

$$\langle[\bar{E}(\bar{J}_e)+\bar{E}(\bar{J}_s)],\bar{J}_{teste}\rangle = 0$$
$$\langle\bar{E}(\bar{J}_e),\bar{J}_{teste}\rangle + \langle\bar{E}(\bar{J}_s),\bar{J}_{teste}\rangle = 0 \tag{3.4}$$

O desenvolvimento do produto interno da Equação 3.4 permite que a equação seja reescrita como:

$$\iint_S \overline{E}(\overline{J}_e)\cdot\overline{J}_{teste}dS = -\iint_S \overline{E}(\overline{J}_s)\cdot\overline{J}_{teste}dS \tag{3.5}$$

onde S, domínio de integração, é a superfície do *patch*, localizado no intervalo $\frac{-L}{2} < x < \frac{L}{2}$ e $\frac{-W}{2} < y < \frac{W}{2}$.

A substituição da corrente induzida no *patch* pela expansão em funções de base, conforme a Equação 3.2, resulta em:

$$\iint_S \overline{E}(\overline{J}_e)\cdot\overline{J}_{teste}dS = -\iint_S \overline{E}\left(\hat{x}\sum_{n_x=1}^{N_x} I_{n_x} J_{n_x}(x,y) + \hat{y}\sum_{n_y=1}^{N_y} I_{n_y} J_{n_y}(x,y)\right)\cdot\overline{J}_{teste}dS$$

$$\iint_S \overline{E}(\overline{J}_e)\cdot\overline{J}_{teste}dS = -\iint_S \overline{E}\left(\sum_{n=1}^{N_x+N_y} I_n \overline{J}_n\right)\cdot\overline{J}_{teste}dS \tag{3.6}$$

Devido à linearidade das propriedades dos meios de propagação e à linearidade das Equações de Maxwell, a equação 3.6 pode ser reescrita como:

$$\iint_S \overline{E}(\overline{J}_e)\cdot\overline{J}_{teste}dS = -\iint_S \sum_{n=1}^{N_x+N_y} I_n \overline{E}(\overline{J}_n)\cdot\overline{J}_{teste}dS = \sum_{n=1}^{N_x+N_y} -I_n \iint_S \overline{E}(\overline{J}_n)\cdot\overline{J}_{teste}dS$$

$$\iint_S \overline{E}(\overline{J}_e)\cdot\overline{J}_{teste}dS = \sum_{n=1}^{N_x+N_y} -I_n \iint_S \overline{E}(\overline{J}_n)\cdot\overline{J}_{teste}dS \tag{3.7}$$

Para solução numérica deste problema via Método dos Momentos, é aplicado o método de Galerkin [6], onde a função de teste usada é idêntica à função de expansão, ou seja, para um coeficiente m qualquer, temos $\overline{J}_{teste} = \overline{J}_m$.

Para cada índice m há uma função de expansão $\overline{J}_m$ distinta e, portanto, a partir da Equação 3.7, é possível chegar a um sistema linear de equações integrais, onde as parcelas $\iint_S \overline{E}(\overline{J}_e)\cdot\overline{J}_m dS$ e $-\iint_S \overline{E}(\overline{J}_n)\cdot\overline{J}_m dS$ são conhecidas e I_n são as incógnitas.

Para fins de representação matricial do sistema linear de equações integrais, são criadas a matriz $[Z]$ impedância $(N_x + N_y)\times(N_x + N_y)$ e o vetor $[V]$ voltagem de $(N_x + N_y)$ elementos, tal que:

$$V_m = \iint_S \bar{E}(\bar{J}_e)\cdot\bar{J}_m dS \tag{3.8}$$

$$Z_{mn} = -\iint_S \bar{E}(\bar{J}_n)\cdot\bar{J}_m dS \tag{3.9}$$

Se $[I]$ for suposto um vetor de dimensão $(N_x + N_y)$, onde cada elemento, I_{n_x} ou I_{n_y}, é uma incógnita da expansão da corrente induzida no *patch*, podemos escrever que:

$$[Z][I] = \left[\sum_n - I_n \iint_S \bar{E}\ (\bar{J}_n)\cdot\bar{J}_1 dS \quad \ldots \quad \sum_n - I_n \iint_S \bar{E}\ (\bar{J}_n)\cdot\bar{J}_N dS \right] \tag{3.10}$$

Para uma linha m do produto $[Z][I]$ na Equação 3.10:

$$[Z][I]_m = \sum_n - I_n \iint_S \bar{E}\ (\bar{J}_n)\cdot\bar{J}_m dS$$

$$[Z][I]_m = \sum_n - \iint_S \bar{E}\ (\bar{J}_n) I_n \cdot\bar{J}_m dS$$

$$[Z][I]_m = -\iint_S \left[\sum_n \bar{E}\ (\bar{J}_n) I_n \right] \bar{J}_m dS = V_m \tag{3.11}$$

Dessa forma, podemos dizer que:

$$[Z][I] = [V] \tag{3.12}$$

De acordo com a Equação 3.2 é possível obter a densidade de corrente induzida nas direções $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Assim, o sistema linear de equações integrais da Equação 3.12 pode ser detalhado da seguinte forma:

$$\begin{array}{c} N_x \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \\ N_y \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \begin{bmatrix} [Z^{xx}\ldots & Z^{xx}]_{N_x} & [Z^{xy}\ldots & Z^{xy}]_{N_y} \\ [Z^{xx}\ldots & Z^{xx}]_{N_x} & [Z^{xy}\ldots & Z^{xy}]_{N_y} \\ [Z^{yx}\ldots & Z^{yx}]_{N_x} & [Z^{yy}\ldots & Z^{yy}]_{N_y} \\ [Z^{yx}\ldots & Z^{yx}]_{N_x} & [Z^{yy}\ldots & Z^{yy}]_{N_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_x]_{N_x} \\ \\ [I_y]_{N_y} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [V_x]_{N_x} \\ \\ [V_y]_{N_y} \\ \\ \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

O sistema linear apresentado na Equação 3.13 é resolvido com o objetivo de gerar os elementos do vetor $[I]$ e com isso, ser possível calcular a densidade de corrente espalhada no *patch* metalizado.

3.3. Diádica de Green

Para solução dos campos elétricos, é possível adotar duas abordagens distintas: a solução pelo método das integrais ou a solução pela diádica de Green. Pela abordagem da diádica, o campo elétrico devido à corrente induzida pode ser definido como:

$$\bar{E}(\bar{J}_s) = \iint \bar{J}_s \cdot \overline{\overline{G}}(x, y | x_0, y_0) dx_0 dy_0 \tag{3.14}$$

onde $\overline{\overline{G}}(\cdot|\cdot)$ é a função diádica de Green para o campo elétrico. Para obter esta relação pode-se aplicar a transformada inversa de Fourier definida na Equação 2.32, onde $\tilde{E}$, campo elétrico no domínio espectral, é definido pelas equações 2.42 a 2.47, e determinar $\overline{\overline{G}}$. Comparando a expressão do campo elétrico pela abordagem da diádica, Equação 3.14, com a expressão do campo elétrico, obtida quando são resolvidas as equações de Maxwell no domínio espectral, Equações 2.49 a 2.51, é possível observar que $\tilde{Z}_{xx}$, $\tilde{Z}_{xy}$, $\tilde{Z}_{yx}$, $\tilde{Z}_{yy}$, $\tilde{Z}_{zx}$ e $\tilde{Z}_{zy}$ nada mais são que as funções de Green para o campo elétrico. Isso faz com que fique bem mais simples a análise do campo elétrico pela abordagem da diádica. Dessa forma:

$$\bar{E}(\bar{J}_n) I_n = I_n \iint \bar{J}_n \cdot \overline{\overline{G}}(x, y/x_0, y_0) dx_0 dy_0 = \iint I_n \bar{J}_n \cdot \overline{\overline{G}}(x, y/x_0, y_0) dx_0 dy_0 = \bar{E}(I_n \bar{J}_n) \tag{3.15}$$

3.4. Análise dos elementos da matriz impedância e do vetor voltagem

Considerando as componentes x e y de $\bar{E}\left(\bar{J}_n\right)$, de $\bar{J}_n$ e de $\bar{J}_m$, a expressão geral de Z_{mn} na Equação 3.9 é:

$$Z_{mn}^{ij} = -\iint_S E_i\left(J_{nj}\right)J_{mi}dS \ \text{ com } i, j = x, y \tag{3.16}$$

onde J_{mi} é a componente na direção i de $\bar{J}_m$ e $\bar{E}_i\left(\bar{J}_{nj}\right)$ é o campo elétrico na direção i gerado pela corrente $\bar{J}_{nj}$ na direção j.

De acordo com as Equações 2.49 a 2.51, o campo elétrico $\tilde{E}_i$ no domínio de Fourier gerado por uma densidade de corrente na direção j é dado por:

$$\tilde{E}_i\left(J_{nj}\right) = \tilde{Z}_{ij}\tilde{J}_{nj} \tag{3.17}$$

A substituição da transformada inversa da Equação 3.17 na Equação 3.16 resulta em:

$$Z_{mn}^{ij} = -\frac{1}{4\pi^2}\iint_S\left(\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \tilde{Z}_{ij}\tilde{J}_{nj}e^{jk_x x}e^{jk_y y}dk_x dk_y\right)\cdot J_{mi}dS$$

$$Z_{mn}^{ij} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\left(\iint_S J_{mi}e^{jk_x x}e^{jk_y y}dS\right)\tilde{Z}_{ij}\tilde{J}_{nj}dk_x dk_y$$

A parcela $\iint_S J_{mi}e^{jk_x x}e^{jk_y y}dS$ nada mais é que a transformada de Fourier conjugada da função de base J_{mi}, que é conhecida. A equação acima pode ser reescrita como:

$$Z_{mn}^{ij} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int F^*\left(J_{mi}\right)\tilde{Z}_{ij}F\left(J_{nj}\right)dk_x dk_y \tag{3.18}$$

onde $F(J_{nj}) = \tilde{J}_{nj}$ é a transformada de Fourier de J_{nj}, e $F^*(J_{mi}) = \iint_S J_{mi} e^{jk_x x} e^{jk_y y} dS$ é a transformada conjugada de Fourier de J_{mi}.

Para os elementos do vetor voltagem, de acordo com a Equação 3.7:

$$V_m = \iint_S \bar{E}(\bar{J}_e) \cdot \bar{J}_{ms} dS$$

onde $\bar{E}(\bar{J}_e)$ é o campo elétrico gerado pela corrente de excitação $\bar{J}_e$.

A corrente de excitação em questão pode ser considerada um impulso localizado no ponto (x_p, y_p). Dessa forma, é possível escrever que:

$$\bar{J}_e = \hat{z}\delta(x - x_p)(y - y_p) \tag{3.19}$$

Com a aplicação do teorema da reciprocidade [6], é possível trocar a fonte de excitação com o campo que ela produz. De acordo com o teorema em questão, dado que J_1 e J_2 são correntes de excitação distintas:

$$\int_V E_{12} J_1 dV = \int_V E_{21} J_2 dV \tag{3.20}$$

onde E_{12} é o campo produzido por J_2 em uma primeira antena e E_{21} é o campo produzido por J_1 em uma segunda antena.

A aplicação do teorema da reciprocidade na Equação 3.7 resulta em:

$$V_m = \iint_S \bar{E}(\bar{J}_e) \cdot \bar{J}_m dS = \iiint_{V_{excitação}} \bar{J}_e \cdot \bar{E}(\bar{J}_m) dV = \iiint_{V_{excitação}} \bar{J}_e \cdot \bar{E}(\bar{J}_m) dxdydz \tag{3.21}$$

A função de expansão $\bar{J}_m$ é usada para o cálculo da corrente induzida na superfície do *patch* metálico e por isso só tem componentes nas direções $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Dessa forma, a integração é feita apenas na superfície do *patch*, onde é induzida a corrente. Após a aplicação do teorema da reciprocidade, a corrente em questão passa a ser a corrente da fonte de excitação, um cabo coaxial, e assim, a integração deve ser feita ao longo do volume do cabo, $V_{excitação}$.

A substituição da Equação 3.19 na Equação 3.21 resulta em:

$$V_m = \iiint_{V_{excitação}} \hat{z}\delta(x - x_p)(y - y_p) \cdot \overline{E}(\overline{J}_m) dxdydz$$

$$V_m = \iiint_{V_{excitação}} \delta(x - x_p)(y - y_p) E_z(\overline{J}_m) dxdydz$$

e considerando as componentes x e y de $\overline{J}_m$, obtém-se a seguinte expressão:

$$V_m^i = \iiint_{V_{excitação}} \delta(x - x_p)(y - y_p) E_z(J_{mi}) dxdydz \text{, com } i = x, y \qquad (3.22)$$

Para o cabo coaxial de excitação, $0 < z < h$ e, portanto, a região em questão é a região I. Dessa forma, a equação que expressa a componente na direção $\hat{z}$ do campo elétrico gerado pela densidade de corrente J_{mi}, onde $i = x, y$, é obtida ao substituir J_x por J_{mi} na Equação 2.40, o que resulta em:

$$\widetilde{E}_z(J_{mi}) = \frac{k_i k_2 \cos(k_1 z)}{\omega\varepsilon_0 T_m} \widetilde{J}_{mi} \text{, com } i = x, y \qquad (3.23)$$

A resolução da integral em z da Equação 3.23, resulta na seguinte expressão:

$$\int_0^h \widetilde{E}_z(J_{mi}) dz = \int_0^h \frac{k_i k_2 \cos(k_1 z)}{\omega\varepsilon_0 T_m} \widetilde{J}_{mi} dz = \frac{k_i k_2 \sin(k_1 h)}{\omega\varepsilon_0 k_1 T_m} \widetilde{J}_{mi} = \widetilde{Z}_{zi} F(J_{mi}) \qquad (3.24)$$

onde $\widetilde{Z}_{zi} = \dfrac{k_i k_2 \sin(k_1 h)}{\omega\varepsilon_0 k_1 T_m}$ e $F(J_{mi})$ é a transformada de Fourier de J_{mi}. A substituição da Equação 3.24 na Equação 3.22, resulta em:

$$V_m^i = \iiint_{V_{excitação}} \delta(x-x_p)(y-y_p)E_z(J_{mi})dxdydz$$

$$= \iint\left(\int_0^h E_z(J_{mi})dz\right)\delta(x-x_p)(y-y_p)dxdy =$$

$$= \iint_S\left(\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int \tilde{Z}_{zi}F(J_{mi})e^{jk_x x}e^{jk_y y}dk_x dk_y\right)\delta(x-x_p)(y-y_p)dxdy =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int\left(\iint_S \delta(x-x_p)(y-y_p)e^{jk_x x}e^{jk_y y}dxdy\right)\tilde{Z}_{zi}F(J_{mi})dk_x dk_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int\left(e^{jk_x x_p}e^{jk_y y_p}\right)\tilde{Z}_{zi}F(J_{mi})dk_x dk_y$$

$$V_m^i = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int \tilde{Z}_{zi}F(J_{mi})e^{jk_x x_p}e^{jk_y y_p}dk_x dk_y \tag{3.25}$$

A representação matricial de Z, de acordo com a Equação 3.18, fica:

$$Z = \begin{bmatrix} \left[-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int F^*(J_{mx})\tilde{Z}_{xx}F(J_{nx})dk_x dk_y\right] & \left[-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int F^*(J_{mx})\tilde{Z}_{xy}F(J_{ny})dk_x dk_y\right] \\ \left[-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int F^*(J_{my})\tilde{Z}_{yx}F(J_{nx})dk_x dk_y\right] & \left[-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int F^*(J_{my})\tilde{Z}_{yy}F(J_{ny})dk_x dk_y\right] \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

A representação matricial de V, de acordo com a Equação 3.25, fica:

$$V = \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int \tilde{Z}_{zx}F(J_{mx})e^{jk_x x_p}e^{jk_y y_p}dk_x dk_y\right] \\ \left[\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int \tilde{Z}_{zy}F(J_{my})e^{jk_x x_p}e^{jk_y y_p}dk_x dk_y\right] \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

3.5.
Impedância de entrada ou auto-impedância

De posse dos elementos do vetor $[I]$, a impedância de entrada na antena microfita pode ser calculada. A impedância de entrada de uma antena pode ser dada pela relação entre a tensão aplicada na entrada da antena microfita (tensão de RF no ponto de excitação) e a corrente da fonte:

$$Z_{in} = \frac{V}{I_{fonte}}$$

Por simplicidade, a amplitude da corrente impulsiva é escolhida $I_{fonte} = 1\text{A}$, e, assim, é possível dizer que $Z_{in} = V$, ou seja:

$$Z_{in} = V = -\int_v \overline{E}(\overline{J}_s) \cdot J_e dv$$

De acordo com as Equações 3.2 e 3.6, é possível dizer que:

$$\overline{E}(\overline{J}_s) = \overline{E}\left(\hat{x}\sum_{n_x=1}^{N_x} I_{n_x} J_{n_x}(x,y) + \hat{y}\sum_{n_y=1}^{N_y} I_{n_y} J_{n_y}(x,y) \right) = \overline{E}\left(\sum_{n=1}^{N_x+N_y} I_n \overline{J}_n \right)$$

Devido à linearidade das propriedades dos meios de propagação e à linearidade das Equações de Maxwell, é possível dizer que:

$$\int_v \overline{E}(\overline{J}_s) \cdot J_e dv = \sum_{n=1}^{N_x+N_y} I_n \int_v \overline{E}(\overline{J}_n) \cdot J_e dv$$

A substituição da Equação 3.21 na equação acima resulta em:

$$Z_{in} = -\sum_{n=1}^{N_x+N_y} I_n V_n = -[I]^t [V] \tag{3.28}$$

3.6. Solução numérica dos elementos da matriz impedância e do vetor voltagem

Para a integração numérica dos elementos de $[Z]$ e de $[V]$, é feita a seguinte troca de variáveis:

$$k_x = \beta \cos \alpha \tag{3.29}$$

$$k_y = \beta \sin \alpha \tag{3.30}$$

A substituição de variáveis representada pelas Equações 3.29-30 nas Equações 3.18 e 3.25, possibilita chegar às seguintes expressões:

$$Z_{mn}^{ij} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F^*(J_{mi}) \tilde{Z}_{ij} F(J_{nj}) \beta d\beta d\alpha \tag{3.31}$$

$$V_m^i = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \tilde{Z}_{zi} F(J_{mi}) e^{j\beta \cos \alpha x_p} e^{j\beta \sin \alpha y_p} \beta d\beta d\alpha \tag{3.32}$$

A substituição das expressões para $\tilde{Z}_{ij}$ (Equações 2.52 a 2.54) na Equação 3.31 resulta em:

$$Z_{mn}^{ij} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F^*(J_{mi}) \left\{ \left[\frac{-j}{\omega \varepsilon_0} \frac{k_i k_j k_1 k_2 \sin(k_1 h)}{\beta^2 T_m} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k_{\tilde{i}} k_{\tilde{j}} k_0^2 \sin(k_1 h)}{\beta^2 T_e} \right] \right\} F(J_{nj}) \beta d\beta d\alpha \tag{3.33}$$

onde $\tilde{i}, \tilde{j} = x$, quando $i, j = y$ e $\tilde{i}, \tilde{j} = y$, quando $i, j = x$.

A integral da Equação 3.33 é resolvida numericamente. Para garantir a eficiência da integração, deve ser feita uma análise cuidadosa do comportamento do integrando nas integrações em α e β.

Conforme ilustrado na Figura 3.3, o caminho de integração em β apresenta singularidades, quando as funções T_m ou T_e envolvidas no denominador do integrando são nulas, e *branch points*, devido à possibilidade de duplo sinal na raiz quadrada das expressões de k_1 ($k_1^2 = \varepsilon_r k_0^2 - \beta^2$) e k_2 ($k_2^2 = k_0^2 - \beta^2$), que devem ser analisados. A presença de singularidades na integração em β, faz com que a integração tenha uma convergência mais lenta. Por outro lado, se β for mantido constante na Equação 3.33, é possível observar que o integrando de Z_{mn}^{ij} é uma função senoidal em α, sem singularidades, e, portanto, no intervalo $0 < \alpha < 2\pi$, a integral em α não apresenta problemas de convergência. A análise para os elementos do vetor voltagem, V_m^i, é análoga.

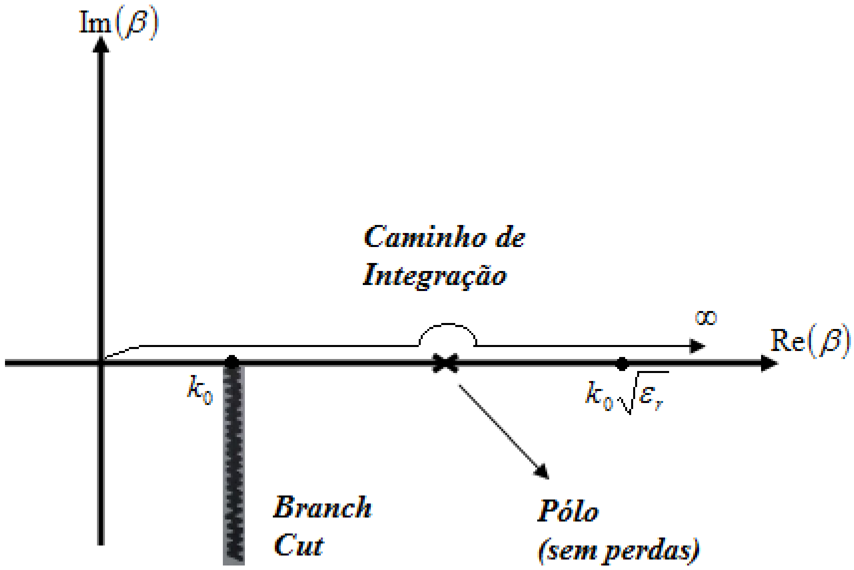

Figura 3.3 – Caminho de integração de Z_{mn}^{ij}

Posição dos *branch points*

A presença de *branch points* no caminho de integração em β faz com que seja necessária uma análise do integrando com o objetivo de garantir que a integral tenha um valor único.

Para o integrando em questão, os *branch points* ocorrem quando a raiz quadrada na expressão de k_1 ($k_1^2 = \varepsilon_r k_0^2 - \beta^2$) e k_2 ($k_2^2 = k_0^2 - \beta^2$) tem radicando nulo. De acordo com as Equações 3.31, 3.32 e 2.52 a 2.56, o termo k_1 faz parte do argumento apenas de funções pares. Dessa forma, o sinal de k_1 não influencia no valor da integral. Por outro lado, k_2 requer uma análise cuidadosa, pois faz parte das funções ímpares. Assim os *branch points* ocorrem apenas em $\beta = \pm k_0$. O sinal de k_2 deve ser escolhido de forma que a onda radiada esteja se propagando e sendo atenuada à medida que se afasta da fonte. Assim devemos ter:

$$\mathrm{Im}(k_2) < 0, \mathrm{e}\ \mathrm{Re}(k_2) > 0 \tag{3.34}$$

Posição dos pólos

Devido à existência de singularidades, que ocorrem quando $T_m = 0$ ou quando $T_e = 0$, a integração apresenta comportamento divergente. Por isso, é importante a identificação dos pontos onde estas singularidades ocorrem.

Os pólos do integrando nas Equações 3.31 e 3.32 surgem quando $T_m = 0$ ou $T_e = 0$, no denominador de $\tilde{Z}_{ij}$. As singularidades do integrando estão associadas às ondas de superfície excitadas na antena microfita que correspondem aos modos TE e TM do substrato. O modo fundamental TM_0 não tem frequência de corte [6] e, portanto, é sempre excitado na antena microfita.

As frequências de corte para os modos mais elevados TE_n e TM_n foram calculadas em [7] e são dadas por:

$$f_c = \frac{nc}{4h\sqrt{\varepsilon_r - 1}} \tag{3.35}$$

onde c é a velocidade da luz, h é a altura da camada de substrato da antena ε_r é a constante dielétrica do substrato e n é a ordem do modo. Para os modos TM, $n = 0,2,4...$ e para os modos TE, $n = 1,3,5...$. A substituição de $n = 1$ na Equação 3.35 resulta na frequência de corte do modo TE_1:

$$f_c^{TE_1} = \frac{c}{4h\sqrt{\varepsilon_r - 1}} \tag{3.36}$$

Uma aproximação de ordem zero da relação entre a frequência de ressonância da antena e o comprimento do *patch* metalizado é dada por:

$$f_r = \frac{c}{2L\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{3.37}$$

A relação entre a frequência de corte do modo TE_1 e a frequência de ressonância da antena é obtida da divisão da Equação 3.36 pela Equação 3.37:

$$\frac{f_c^{TE_1}}{f_r} = \frac{L\sqrt{\varepsilon_r}}{2h\sqrt{\varepsilon_r - 1}} \tag{3.38}$$

Neste trabalho, é considerado que o substrato é fino de modo que $L >> h$. A partir da análise da Equação 3.38, é possível concluir que a frequência de corte do modo TE_1 é muito mais alta que a frequência de operação da antena. Antenas microfita apresentam uma banda estreita que, normalmente, não ultrapassa o valor de 10% da frequência de ressonância. Assim, a frequência de corte do modo TE_1 é superior à faixa de frequências de operação da antena, e com isso apenas o modo TM_0 é excitado. Os zeros da função T_e não são analisados já que os modos TE não são excitados.

A expressão para o denominador T_m envolve funções transcendentais e a determinação do zero ou pólo (β_0) do integrando é realizada numericamente. A reorganização da expressão $T_m = 0$ resulta em:

$$h\varepsilon_r\sqrt{\left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2 - 1} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2 - \varepsilon_r}\, h \tanh\left(h\sqrt{\left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2 - \varepsilon_r}\right) = 0 \tag{3.39}$$

Supondo o substrato de constante dielétrica ε_r eletricamente fino, ou seja, $h << \lambda_0$, podemos dizer que $\frac{\beta}{k_0} \approx 1$. Utilizando uma variável auxiliar $z = \frac{\beta}{k_0}$, podemos expandir o termo $\sqrt{\varepsilon_r - z^2}\tan\left(k_0 h\sqrt{\varepsilon_r - z^2}\right)$ na Equação 3.39 em torno do ponto $z = 1$. Assim, $z = \frac{\beta}{k_0} = 1 + \delta$, onde $\delta \approx 0$, e a expansão em série de Taylor resulta em:

$$\varepsilon_r\sqrt{2\delta + \delta^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \delta^n = 0 \tag{3.40}$$

O somatório da Equação 3.40 representa a série de Taylor para a função $\sqrt{\varepsilon_r - z^2}\tan\left(k_0 h\sqrt{\varepsilon_r - z^2}\right)$. A aproximação apenas com o termo dominante φ_0 resulta em:

$$\frac{\beta_0}{k_0} \cong 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}k_0 h\right)^2 \tag{3.41}$$

Se fosse usada a aproximação com os termos φ_0 e φ_1:

$$\frac{\beta_0}{k_0} \cong 1 + \frac{\varphi_0\varphi_1 - \varepsilon_r^2 + \varepsilon_r\sqrt{\varepsilon_r^2 - 2\varphi_0\varphi_1 + \varphi_0^2}}{\varepsilon_r^2 - \varphi_1^2} \tag{3.42}$$

onde $\varphi_1 = -\frac{1}{s}\left[\tan(k_0 hs) + \frac{k_0 hs}{\cos^2(k_0 hs)}\right]$, $\varphi_0 = s\tan(k_0 hs)$ e $s = \sqrt{\varepsilon_r - 1}$.

Neste trabalho, é considerada a aproximação apenas com o termo dominante φ_0 e, portanto, a Equação 3.41 aproxima a posição do pólo da integral nas Equações 3.31 e 3.32. Se o substrato tiver uma perda diferente de zero, a sua constante de permissividade relativa será definida por $\varepsilon_r(1 - j\tan\gamma)$, onde $\tan\gamma$ é a tangente de perda do substrato. Nesse caso, o pólo será complexo e definido por $\beta_r + j\beta_i$. O valor de β_r é aproximado pela Equação 3.41 ou pela Equação 3.42 e o valor aproximado de β_i é apresentado em [8]:

$$\beta_i = (\varepsilon_r - 1)\tan\gamma\left(\frac{k_0 h}{\varepsilon_r}\right)^2 \tag{3.43}$$

Em função da presença da singularidade, as integrais das Equações 3.31 e 3.32 são divididas em três intervalos: $0 < \beta < k_0$, $k_0 < \beta < k_0\sqrt{\varepsilon_r}$ e $k_0\sqrt{\varepsilon_r} < \beta < \infty$. Assim:

$$Z_{mn}^{ij} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{k_0} F^*(J_{mi})\tilde{Z}_{ij}F(J_{nj})\beta d\beta + \int_{k_0}^{k_0\sqrt{\varepsilon_r}} F^*(J_{mi})\tilde{Z}_{ij}F(J_{nj})\beta d\beta + \right.$$
$$\left. + \int_{k_0\sqrt{\varepsilon_r}}^{\infty} F^*(J_{mi})\tilde{Z}_{ij}F(J_{nj})\beta d\beta \right] d\alpha \quad (3.44)$$

$$V_m^i = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{k_0}\tilde{Z}_{zi}F(J_{mi})e^{j\beta\cos\alpha x_p}e^{j\beta\sin\alpha y_p}\beta d\beta + \right.$$
$$\left. + \int_{k_0}^{k_0\sqrt{\varepsilon_r}}\tilde{Z}_{zi}F(J_{mi})e^{j\beta\cos\alpha x_p}e^{j\beta\sin\alpha y_p}\beta d\beta + \int_{k_0\sqrt{\varepsilon_r}}^{\infty}\tilde{Z}_{zi}F(J_{mi})e^{j\beta\cos\alpha x_p}e^{j\beta\sin\alpha y_p}\beta d\beta \right] d\alpha \quad (3.45)$$

As integrais apresentadas nas Equações 3.44 e 3.45 são discutidas a seguir.

3.6.1. Primeiro intervalo de integração

A integral no intervalo $0 < \beta < k_0$ pode ser representada por:

$$Z_{mn,1}^{ij} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{k_0} F^*(J_{mi})\tilde{Z}_{ij}F(J_{nj})\beta d\beta\right] d\alpha \quad (3.46)$$

$$V_{m,1}^{i} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{k_0}\tilde{Z}_{zi}F(J_{mi})e^{j\beta\cos\alpha x_p}e^{j\beta\sin\alpha y_p}\beta d\beta\right] d\alpha \quad (3.47)$$

A substituição, na Equação 3.46, da expressão de $\tilde{Z}_{ij}$, de acordo com as Equações 2.52 a 2.54, e, na Equação 3.47, da expressão de $\tilde{Z}_{zi}$, de acordo com as Equações 2.55 e 2.56, resulta em:

$$Z_{mn,1}^{ij} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{k_0} F^*(J_{mi})\left\{\left[\frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\frac{k_i k_j k_1 k_2 \sin(k_1 h)}{\beta^2 T_m} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{k_{\tilde{i}} k_{\tilde{j}} k_0^2 \sin(k_1 h)}{\beta^2 T_e}\right]\right\} F(J_{nj})\beta d\beta d\alpha \quad (3.48)$$

$$V_{m,1}^{i} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{k_0}\left[\frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\frac{k_i k_1 \sin(k_1 h)}{T_m}\right] F(J_{mi})e^{j\beta\cos\alpha x_p}e^{j\beta\sin\alpha y_p}\beta d\beta\right] d\alpha \quad (3.49)$$

De acordo com as características de convergência em α, é possível considerar que apenas a integral em β nas Equações 3.46 e 3.47 merece especial preocupação. Se α é mantido constante nas Equações 3.48 e 3.49, no intervalo de integração $0 < \beta < k_0$, os integrandos das integrais $Z_{mn,1}^{ij}$ e $V_{m,1}^{i}$ são bem comportados, o que garante um comportamento convergente das integrais. As transformadas $F(J_{mi})$ e $F^*(J_{mi})$ não apresentam singularidades, como é mostrado mais adiante, no item 3.7, que trata sobre funções de expansão.

As integrais apresentadas nas Equações 3.48 e 3.49 são resolvidas numericamente com o uso da regra da quadratura gaussiana.

3.6.2.
Segundo intervalo de integração

A singularidade do integrando ocorre no intervalo $k_0 < \beta < k_0\sqrt{\varepsilon_r}$, o que gera uma necessidade por um cuidado especial com a integração neste intervalo.

O intervalo $k_0 < \beta < k_0\sqrt{\varepsilon_r}$ é dividido em três subintervalos: $k_0 < \beta < \beta_0 - \delta$, $\beta_0 - \delta < \beta < \beta_0 + \delta$ e $\beta_0 + \delta < \beta < k_0\sqrt{\varepsilon_r}$, onde, de acordo com [4], $\delta = 0{,}001k_0$. Nos subintervalos $k_0 < \beta < \beta_0 - \delta$ e $\beta_0 + \delta < \beta < k_0\sqrt{\varepsilon_r}$ não existem singularidades, o integrando é bem comportado e, portanto, a integral é resolvida numericamente através da regra da quadratura gaussiana. Já no intervalo $\beta_0 - \delta < \beta < \beta_0 + \delta$, é feita a extração da singularidade do integrando, onde a parcela responsável pela singularidade é integrada analiticamente e a parcela resultante da extração da singularidade é integrada numericamente, através da regra de quadratura gaussiana. É apresentada a análise da extração da singularidade apenas para os elementos da matriz impedância. A análise para os elementos do vetor voltagem é análoga.

Chamando de $Z_{mn,2}^{ij}$ a parcela de Z_{mn}^{ij} referente ao intervalo de integração $\beta_0 - \delta < \beta < \beta_0 + \delta$, temos que $Z_{mn,2}^{ij} = \int_{\beta_0-\delta}^{\beta_0+\delta} F^*(J_{mi})\tilde{Z}_{ij}F(J_{nj})\beta d\beta$. Dessa forma, a seguinte integral é analisada:

$$Z_{mn,2}^{ij} = \int_{\beta_0-\delta}^{\beta_0+\delta} f(\beta)d\beta \tag{3.50}$$

Onde:

$$f(\beta) = F^*(J_{mi})\tilde{Z}_{ij}F(J_{nj})\beta \tag{3.51}$$

A função $f(\beta)$ é singular no segundo intervalo de integração. É considerado que existe apenas um pólo no integrando. É possível reescrever $f(\beta)$ como $f(\beta) = [f(\beta) - f_{\text{sing}}(\beta)] + f_{\text{sing}}(\beta)$.

A parcela $f(\beta) - f_{\text{sing}}(\beta)$ é bem comportada no entorno do pólo e pode ser integrada numericamente utilizando poucos pontos de amostragem através da regra de quadratura gaussiana. Já a parcela $f_{\text{sing}}(\beta)$ é uma função escolhida por apresentar o mesmo comportamento singular no entorno de β_0, mas permite a solução analítica.

Para determinar $f_{\text{sing}}(\beta)$, $f(\beta)$ é reescrita como $f(\beta) = \left[\frac{g(\beta)}{T_m} + \frac{h(\beta)}{T_e}\right]$, a partir das Equações 2.52 a 2.54. A parcela $\frac{h(\beta)}{T_e}$ não apresenta singularidade, e, portanto, $[f(\beta) - f_{\text{sing}}(\beta)] = \frac{h(\beta)}{T_e}$. Já a parcela $\frac{g(\beta)}{T_m}$ apresenta comportamento singular e, portanto, $f_{\text{sing}}(\beta) = \frac{g(\beta)}{T_m}$.

Como a singularidade de $f_{\text{sing}}(\beta)$ se dá quando $T_m = 0$, é feita a expansão de T_m em série de Taylor, em torno do ponto $\beta = \beta_0$. Dessa forma, a parcela T_m pode ser reescrita como $T_m = T_m(\beta_0) + (\beta - \beta_0)T_m^{'}(\beta_0) + (\beta - \beta_0)^2 T_m^{''}(\beta_0) + \ldots$.

$T_m(\beta_0) = 0$, já que β_0 é a raiz de $T_m(\beta)$. Utilizando a expansão em Taylor até o elemento de primeira ordem, a função T_m é aproximada por $T_m = (\beta - \beta_0)T_m^{'}(\beta_0)$. Dessa forma, é possível dizer que

$f_{\text{sing}}(\beta)=\dfrac{g(\beta)}{(\beta-\beta_0)T_m^{'}(\beta_0)}=\dfrac{g(\beta)}{T_m^{'}(\beta_0)}\cdot\dfrac{1}{(\beta-\beta_0)}$. A aplicação do teorema dos resíduos de Cauchy, conforme citado em [4] e [9], resulta em:

$$\int_{\beta_0-\delta}^{\beta_0+\delta} f_{\text{sing}}(\beta)d\beta=\int_{\beta_0-\delta}^{\beta_0+\delta}\left[\frac{g(\beta)}{T_m^{'}(\beta_0)}\cdot\frac{1}{(\beta-\beta_0)}\right]d\beta=-\frac{j\pi g(\beta_0)}{T_m^{'}(\beta_0)} \qquad (3.52)$$

3.6.3. Terceiro intervalo de integração

No intervalo $k_0\sqrt{\varepsilon_r}<\beta<\infty$, para altos valores de β, o integrando das Equações 3.44 e 3.45 assume um comportamento de oscilação intensa, o que acaba gerando uma convergência lenta nas integrais em α, sendo necessários mais pontos para garantir a convergência. Além disso, como o intervalo em questão vai até o infinito, geralmente o limite superior em β que garante a convergência das integrais é alto (aproximadamente $200k_0$). Foi feito um estudo comparativo de técnicas computacionais que garantem um melhor desempenho da integração numérica em termos de demanda computacional e precisão de resultados.

Diversas técnicas computacionais foram propostas para garantir um melhor desempenho computacional de códigos numéricos para solução eletromagnética de antenas. Em [10], [11] e [12], é proposta uma técnica de extração do valor assintótico do integrando de Z_{mn}^{ij} (de forma análoga, o mesmo processo pode ser aplicado para extração do valor assintótico de V_m^i).

Para o cálculo do valor assintótico do integrando de Z_{mn}^{ij}, é analisado somente Z_{mn}^{xx}. A análise de Z_{mn}^{xy}, Z_{mn}^{yx} e Z_{mn}^{yy} é análoga. Chamando de $Z_{mn,3}^{xx}$ a parcela de Z_{mn}^{xx} referente ao terceiro intervalo de integração, é possível dizer que:

$$Z_{mn,3}^{xx}=\int_0^{2\pi}\int_{k_0\sqrt{\varepsilon_r}}^{\infty} F^*(J_{mx})\tilde{Z}_{xx}F(J_{nx})\beta d\beta d\alpha \qquad (3.53)$$

Considerando que as transformadas de Fourier das funções de expansão são bem comportadas, uma vez que as funções de expansão são supostas funções senoidais, a parcela que contribui para o comportamento assintótico do integrando de $Z_{mn,3}^{xx}$ é $\tilde{Z}_{xx}$. Fazendo $\beta \to \infty$ em k_1 e k_2 e observando a condição de que a onda radiada esteja se propagando e sendo atenuada à medida que se afasta da fonte, o que leva à condição imposta para k_2 na Equação 3.34 (análise análoga para k_1), é possível dizer que:

$$\lim_{\beta\to\infty} k_1 = -j\beta$$
$$\lim_{\beta\to\infty} k_2 = -j\beta$$

Fazendo $\beta \to \infty$ na Equação 2.52, é possível dizer que:

$$\lim_{\beta\to\infty} \tilde{Z}_{xx} = \frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[\frac{k_x^2(-j\beta)(-j\beta)\sin(-j\beta h)}{\beta^2 T_m} + \frac{k_y^2 k_0^2 \sin(-j\beta h)}{\beta^2 T_e}\right] =$$
$$= \frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[-\frac{k_x^2\beta^2(-j)\sinh(\beta h)}{\beta^2 T_m} + \frac{k_y^2 k_0^2(-j)\sinh(\beta h)}{\beta^2 T_e}\right]$$

onde:

$$\lim_{\beta\to\infty} T_m = \varepsilon_r(-j\beta)\cos(-j\beta h) + j(-j\beta)\sin(-j\beta h) =$$
$$= \varepsilon_r(-j\beta)\cosh(\beta h) + j(-j\beta)(-j)\sinh(\beta h)$$
$$\lim_{\beta\to\infty} T_e = (-j\beta)\cos(-j\beta h) + j(-j\beta)\sin(-j\beta h) =$$
$$= (-j\beta)\cosh(\beta h) + j(-j\beta)(-j)\sinh(\beta h)$$

Como $\lim_{\beta\to\infty}\cosh(\beta h) = \frac{e^{\beta h}}{2}$ e $\lim_{\beta\to\infty}\sinh(\beta h) = \frac{e^{\beta h}}{2}$, é possível dizer que:

$$\lim_{\beta\to\infty} \tilde{Z}_{xx} = \frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[-\frac{k_x^2\beta^2(-j)\left(e^{\beta h}/2\right)}{\beta^2 T_m} + \frac{k_y^2 k_0^2(-j)\left(e^{\beta h}/2\right)}{\beta^2 T_e}\right]$$

onde:

$$\lim_{\beta\to\infty} T_m = \varepsilon_r(-j\beta)\left(e^{\beta h}\big/2\right) + j(-j\beta)(-j)\left(e^{\beta h}\big/2\right) = (-j\beta)\left(e^{\beta h}\big/2\right)(\varepsilon_r + 1)$$
$$\lim_{\beta\to\infty} T_e = (-j\beta)\left(e^{\beta h}\big/2\right) + j(-j\beta)(-j)\left(e^{\beta h}\big/2\right) = 2(-j\beta)\left(e^{\beta h}\big/2\right)$$

Dessa forma:

$$\lim_{\beta\to\infty} \tilde{Z}_{xx} = \frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[-\frac{k_x^2\beta^2(-j)\left(e^{\beta h}\big/2\right)}{\beta^2\left[(-j\beta)\left(e^{\beta h}\big/2\right)(\varepsilon_r+1)\right]} + \frac{k_y^2 k_0^2(-j)\left(e^{\beta h}\big/2\right)}{\beta^2\left[2(-j\beta)\left(e^{\beta h}\big/2\right)\right]}\right] =$$
$$= \frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[-\frac{k_x^2\beta^2}{\beta^2[\beta(\varepsilon_r+1)]} + \frac{k_y^2 k_0^2}{\beta^2[2\beta]}\right] =$$
$$= \frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[-\frac{k_x^2}{\left[2\beta\left(\frac{\varepsilon_r+1}{2}\right)\right]} + \frac{k_y^2 k_0^2}{\beta^2[2\beta]}\right]$$

Como $k_x = \beta\cos\alpha$ e $k_y = \beta\sin\alpha$, é possível dizer que $k_y^2 = \beta^2 - k_x^2$ e, portanto, quando $\beta \to \infty$, $\lim_{\beta\to\infty} k_y = \beta$. Assim:

$$\lim_{\beta\to\infty} \tilde{Z}_{xx} = \frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[-\frac{k_x^2}{\left[2\beta\left(\frac{\varepsilon_r+1}{2}\right)\right]} + \frac{k_0^2\beta^2}{\beta^2[2\beta]}\right] = \tag{3.54}$$
$$= \frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[-\frac{k_x^2}{2\beta\varepsilon_e} + \frac{k_0^2}{2\beta}\right]$$

onde:

$$\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} \tag{3.55}$$

A forma assintótica da função de Green $\tilde{Z}_{xx}$, $\tilde{Z}_{xx}^{A}$, pode então ser escrita como:

$$\tilde{Z}_{xx}^{A} = \lim_{\beta\to\infty} \tilde{Z}_{xx} = -\frac{j}{\omega\varepsilon_0}\left(\frac{k_0^2}{2\beta} - \frac{k_x^2}{2\beta\varepsilon_e}\right) \tag{3.56}$$

Na técnica de extração de comportamento assintótico, a parcela $\tilde{Z}_{xx}^{A}$ é extraída da função de Green antes da integração. Ao aplicar a técnica de extração de comportamento assintótico proposta em [10], [11] e [12]:

$$Z_{mn,3}^{xx} = \int_0^{2\pi}\int_{k_0\sqrt{\varepsilon_r}}^{\infty} F^*(J_{mx})\left(\tilde{Z}_{xx} - \tilde{Z}_{xx}^{A}\right)F(J_{nx})\beta d\beta d\alpha + Z_{mn,3}^{xx,A} \tag{3.57}$$

onde:

$$Z_{mn,3}^{xx,A} = \int_0^{2\pi}\int_{k_0\sqrt{\varepsilon_r}}^{\infty} F^*(J_{mx})\tilde{Z}_{xx}^{A}F(J_{nx})\beta d\beta d\alpha \tag{3.58}$$

A primeira integral do lado direito da Equação 3.57 agora converge mais rapidamente se comparada com a integral da Equação 3.53 e pode ser resolvida usando a mesma técnica de integração numérica dos outros intervalos, através da regra da quadratura gaussiana. O integrando da segunda integral é ainda muito oscilatório e o seu comportamento assintótico faz com que a integral convirja muito lentamente. Algumas técnicas foram propostas para a solução dessa integral.

Em [11], ao invés de realizar as integrações no terceiro intervalo das Equações 3.31 e 3.32 em coordenadas polares, uma maneira alternativa é realizar as integrações em coordenadas cartesianas, onde é garantido um integrando mais bem comportado.

Chamando de $V_{m,3}^{i}$, a parcela de V_m^{i} referente ao terceiro intervalo de integração, é possível dizer que $V_{m,3}^{i} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_{k_0\sqrt{\varepsilon_r}}^{\infty} \tilde{Z}_{zi}F(J_{mi})e^{j\beta\cos\alpha x_p}e^{j\beta\sin\alpha y_p}\beta d\beta d\alpha$. O integrando de $Z_{mn,3}^{ij}$ tem um comportamento muito menos oscilatório que $V_{m,3}^{i}$, devido à presença, neste último, dos fatores $e^{j\beta\cos\alpha x_p}$ e $e^{j\beta\sin\alpha y_p}$. Com isso, a convergência de $Z_{m,3}^{ij}$ é alcançada facilmente em coordenadas polares. A análise de comportamento assintótico é, dessa forma, feita apenas para $V_{m,3}^{i}$, onde a intensa oscilação do integrando em coordenadas polares faz com que a convergência seja mais difícil de ser alcançada que no caso de $Z_{mn,3}^{ij}$.

Ao passar $V_{m,3}^{i}$ para coordenadas cartesianas, é possível dizer que:

$$V_{m,3}^{i} = \frac{1}{4\pi^2}\left[\int_{0}^{\infty} dk_y \int_{k_0\sqrt{\varepsilon_r}}^{\infty} dk_x \tilde{Z}_{zi} F(J_{mi}) e^{jk_x x_p} e^{jk_y y_p} \right.$$
$$+ \int_{k_0\sqrt{\varepsilon_r}}^{\infty} dk_y \int_{0}^{k_0\sqrt{\varepsilon_r}} dk_x \tilde{Z}_{zi} F(J_{mi}) e^{jk_x x_p} e^{jk_y y_p}$$
$$\left. + \int_{0}^{k_0\sqrt{\varepsilon_r}} dk_y \int_{\sqrt{\varepsilon_r k_0^2 - k_y^2}}^{k_0\sqrt{\varepsilon_r}} dk_x \tilde{Z}_{zi} F(J_{mi}) e^{jk_x x_p} e^{jk_y y_p} \right] \tag{3.59}$$

Neste trabalho, foi possível alcançar a convergência das integrais em $V_{m,3}^{i}$ apenas com a passagem para coordenadas cartesianas, conforme proposto em [11] e apresentado na Equação 3.59.

A Tabela 3.1 apresenta a comparação entre os resultados numéricos de $V_{m,3}^{i}$ para a integração em coordenadas polares ($I_{3,V}^{polar}$) e cartesianas ($I_{3,V}^{cartesiana}$). São comparados o número de amostras para convergência numérica e o tempo de processamento computacional para cada uma das integrais:

$$I_{3,V}^{cartesiana} = \int_{0}^{\infty} dk_y \int_{k_0\sqrt{\varepsilon_r}}^{\infty} dk_x \tilde{Z}_{zi} F(J_{mi}) e^{jk_x x_p} e^{jk_y y_p} + \int_{k_0\sqrt{\varepsilon_r}}^{\infty} dk_y \int_{0}^{k_0\sqrt{\varepsilon_r}} dk_x \tilde{Z}_{zi} F(J_{mi}) e^{jk_x x_p} e^{jk_y y_p} +$$
$$+ \int_{0}^{k_0\sqrt{\varepsilon_r}} dk_y \int_{\sqrt{\varepsilon_r - k_0^2 - k_y^2}}^{k_0\sqrt{\varepsilon_r}} dk_x \tilde{Z}_{zi} F(J_{mi}) e^{jk_x x_p} e^{jk_y y_p}$$

$$I_{3,V}^{polar} = \int_{0}^{2\pi} \int_{k_0\sqrt{\varepsilon_r}}^{\infty} \tilde{Z}_{zi} F(J_{mi}) e^{jk_x x_p} e^{jk_y y_p} \beta d\beta d\alpha$$

Método de integração	Coordenadas polares (α e β)	Coordenadas cartesianas (k_x e k_y)
$I_{3,V}$	-0.04986 + 58.2168j	-0.04986 + 58.2130j
Número de amostras ($n\alpha \times n\beta$ ou $nk_x \times nk_y$) de $I_{3,V}$	3139000	2481600
Tempo de processamento para $I_{3,V}$	10 s	39 s

Tabela 3.1 – Comparação entre $I_{3,V}^{polar}$ e $I_{3,V}^{cartesiana}$

É possível observar na Tabela 3.1 que a mudança para coordenadas cartesianas diminui o número de pontos necessários para convergência numérica em 1/3 com relação ao número de pontos utilizados em coordenadas polares, mas, em contrapartida, o tempo de processamento aumenta quase quatro vezes para que seja alcançada a mesma precisão. O computador utilizado nas simulações tem uma capacidade de processamento elevada, suficiente para garantir a simulação com integração em ambas as coordenadas. Como o tempo de processamento para o cálculo de $I_{3,V}$ é menor em coordenadas polares, neste trabalho optou-se pela solução das integrais nessas coordenadas.

As Figuras 3.4 e 3.5 mostram a convergência da parte real da integral $I_{3,V}$ em coordenadas cartesianas com o número de pontos em α e β, respectivamente. Já as Figuras 3.6 e 3.7 mostram a convergência da parte imaginária da integral $I_{3,V}$ em coordenadas cartesianas com o número de pontos em α e β, respectivamente.

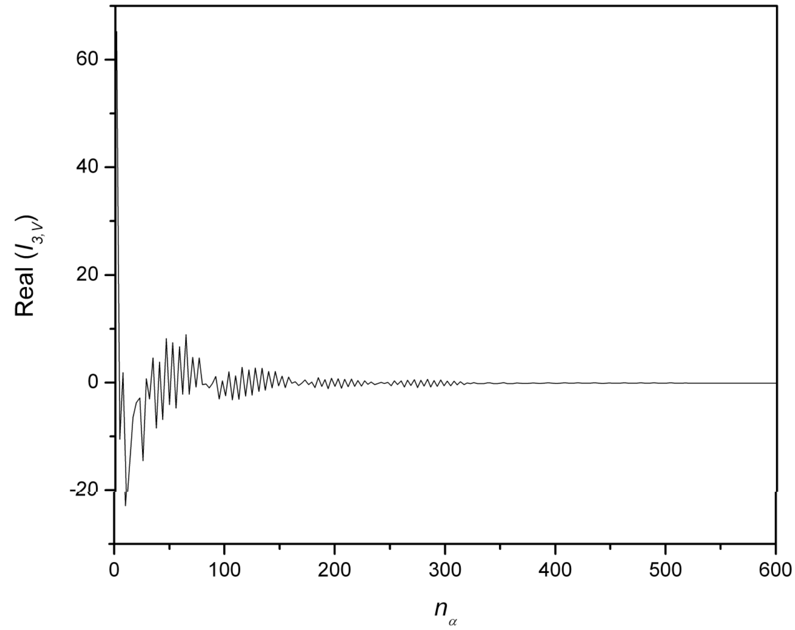

Figura 3.4 – Convergência da parte real da integral $I_{3,V}$ em coordenadas cartesianas com o número de pontos em α

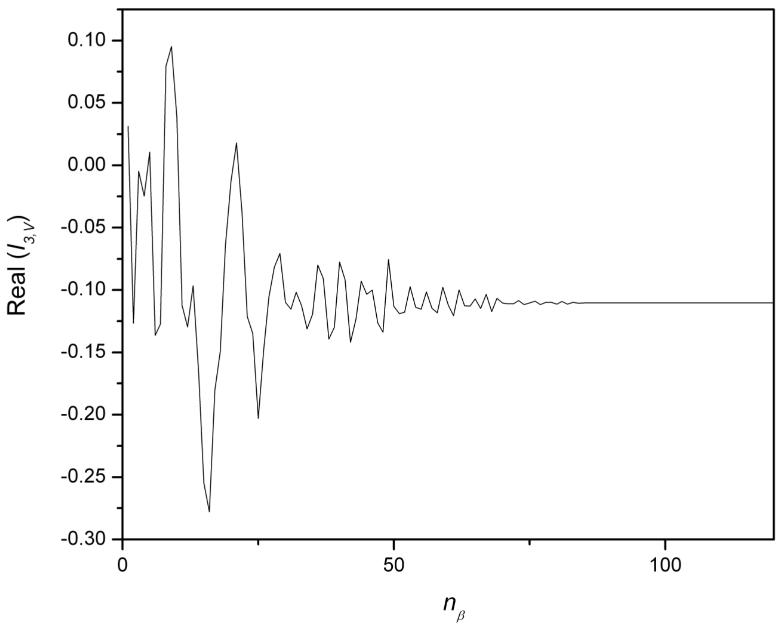

Figura 3.5 – Convergência da parte real da integral $I_{3,V}$ em coordenadas cartesianas com o número de pontos em β

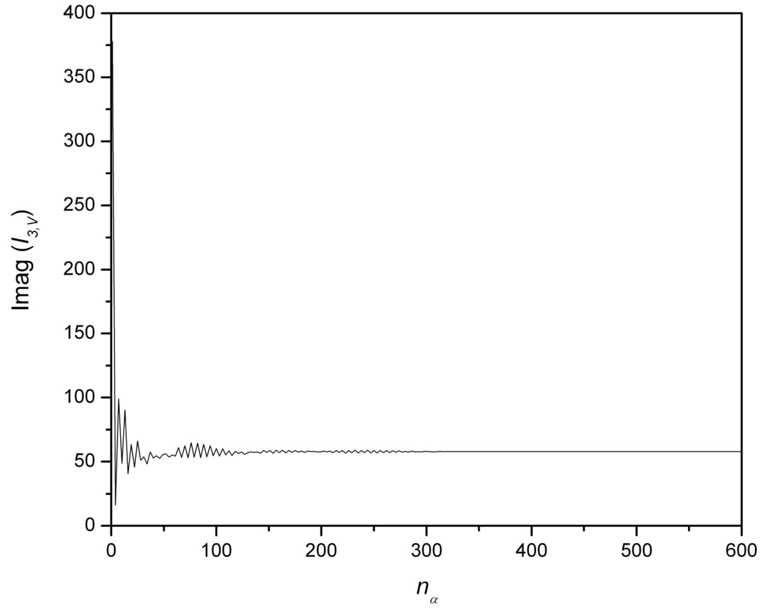

Figura 3.6 – Convergência da parte imaginária da integral $I_{3,V}$ em coordenadas cartesianas com o número de pontos em α

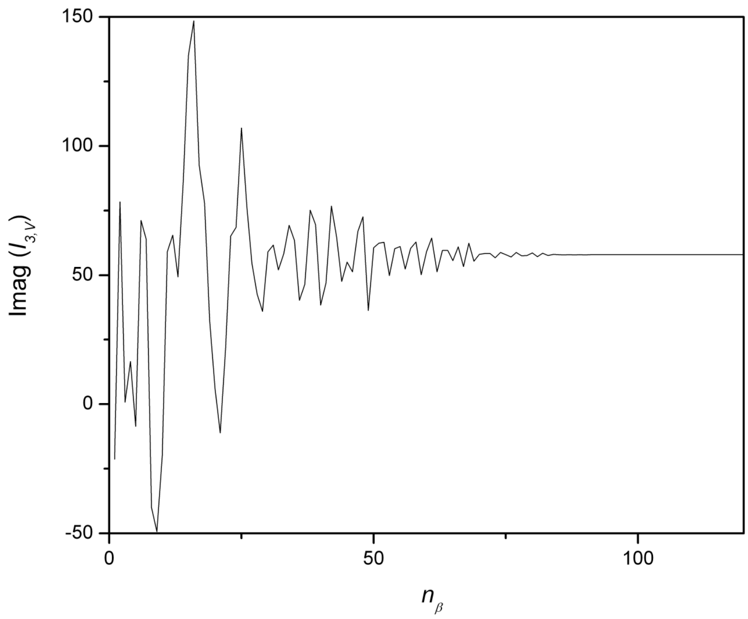

Figura 3.7 – Convergência da parte imaginária da integral $I_{3,V}$ em coordenadas cartesianas com o número de pontos em β

Os resultados apresentados nas Figuras 3.4-7 mostram que com 600 pontos em α e 110 pontos em β a integração numérica $I_{3,V}$ em coordenadas cartesianas atinge a convergência até o oitavo dígito significativo (erro na ordem de 10^{-8}).

3.7. Funções de Expansão

Nesta seção é feita uma análise da escolha da função de expansão usada no Método dos Momentos para o cálculo da densidade superficial de corrente induzida no *patch* metálico devida a uma fonte de corrente $\bar{J}_e$ localizada no ponto (x_p, y_p) na superfície do mesmo.

A escolha da função de base deve ser cuidadosa, pois ela é fundamental para garantir a eficiência, a estabilidade e a convergência da solução do Método dos Momentos. As funções de base para a análise de antenas microfita podem ser de dois tipos: funções de base *entire domain* ou funções de base *subdomain*. A primeira é definida ao longo de toda a estrutura da antena. Já a segunda é definida ao longo de células nas quais a antena é dividida. O uso da última é indicado para quando se tem uma distribuição de corrente arbitrária ao longo do *patch* metálico ou para quando se tem um *patch* metálico de geometria arbitrária. Para antenas formadas por *patches* metálicos de geometria regular, como no caso estudado neste trabalho, é indicado o uso das funções de base *entire domain*.

Para que a função de expansão seja coerente com a distribuição real de corrente na superfície do *patch*, é necessário ter variação tanto na direção $\hat{x}$ quanto na direção $\hat{y}$. Assim, conforme proposto em [6] e [13], são usadas as funções de base do tipo *entire domain*:

Na direção $\hat{x}$:

$$J_{xm} = J_{xkl}(x, y) = \sin\left[\frac{k\pi}{L}\left(x + \frac{L}{2}\right)\right]\cos\left[\frac{l\pi}{W}\left(y + \frac{W}{2}\right)\right]\hat{x} \tag{3.60}$$

Na direção $\hat{y}$:

$$J_{ym} = J_{ykl}(x, y) = \cos\left[\frac{k\pi}{L}\left(x+\frac{L}{2}\right)\right]\sin\left[\frac{l\pi}{W}\left(y+\frac{W}{2}\right)\right]\hat{y} \tag{3.61}$$

onde k e l são inteiros.

Em [13], é dito que os seguintes modos são suficientes para um bom resultado: $(k,l)=(1,0),(3,0),(5,0),(7,0)$ para a direção $\hat{x}$ e $(k,l)=(0,1),(0,2)$ para a direção $\hat{y}$. Dessa forma, conclui-se que é suficiente, para a obtenção de um bom resultado, supor que na direção $\hat{x}$ a corrente varia apenas em x e que na direção $\hat{y}$ a corrente varia apenas com y. Tal abordagem para as funções de expansão também é observada em [14].

Assim, chega-se à seguinte representação matricial para os modos das funções de expansão, considerando que elas aparecem nas expressões de Z_{mn} seguindo a representação abaixo:

$$[Z]_{mn} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{24em}}^{x}} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hspace{11em}}^{y}} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} [(1,0),(1,0)] & [(1,0),(3,0)] & [(1,0),(5,0)] & [(1,0),(7,0)] & [(1,0),(0,1)] & [(1,0),(0,2)] \\ [(3,0),(1,0)] & [(3,0),(3,0)] & [(3,0),(5,0)] & [(3,0),(7,0)] & [(3,0),(0,1)] & [(3,0),(0,2)] \\ [(5,0),(1,0)] & [(5,0),(3,0)] & [(5,0),(5,0)] & [(5,0),(7,0)] & [(5,0),(0,1)] & [(5,0),(0,2)] \\ [(7,0),(1,0)] & [(7,0),(3,0)] & [(7,0),(5,0)] & [(7,0),(7,0)] & [(7,0),(0,1)] & [(7,0),(0,2)] \\ [(0,1),(1,0)] & [(0,1),(3,0)] & [(0,1),(5,0)] & [(0,1),(7,0)] & [(0,1),(0,1)] & [(0,1),(0,2)] \\ [(0,2),(1,0)] & [(0,2),(3,0)] & [(0,2),(5,0)] & [(0,2),(7,0)] & [(0,2),(0,1)] & [(0,2),(0,2)] \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} x \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} y \end{array} \tag{3.62}$$

As transformadas ficam:

$$\tilde{J}^{*}_{xm}(x, y) = \tilde{J}^{*}_{xkl}(x, y) = \frac{\dfrac{k\pi}{L}}{k_x^2 - \left(\dfrac{k\pi}{L}\right)^2}\left[e^{jk_x\frac{L}{2}}\cos(k\pi) - e^{-jk_x\frac{L}{2}}\right]\frac{jk_y}{k_y^2 - \left(\dfrac{l\pi}{W}\right)^2}\left[e^{-jk_y\frac{W}{2}} - \cos(l\pi)e^{jk_y\frac{W}{2}}\right] \tag{3.63}$$

$$\tilde{J}_{xn}(x,y)=\tilde{J}_{xkl}(x,y)=\frac{\frac{k\pi}{L}}{k_x^2-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}\left[e^{-jk_x\frac{L}{2}}\cos(k\pi)-e^{jk_x\frac{L}{2}}\right]\frac{jk_y}{k_y^2-\left(\frac{l\pi}{W}\right)^2}\left[e^{-jk_y\frac{W}{2}}\cos(l\pi)-e^{jk_y\frac{W}{2}}\right]$$

(3.64)

$$\tilde{J}^*_{ym}(x,y)=\tilde{J}^*_{ykl}(x,y)=\frac{\frac{l\pi}{W}}{k_y^2-\left(\frac{l\pi}{W}\right)^2}\left[e^{jk_y\frac{W}{2}}\cos(l\pi)-e^{-jk_y\frac{W}{2}}\right]\frac{jk_x}{k_x^2-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}\left[e^{-jk_x\frac{L}{2}}-\cos(k\pi)e^{jk_x\frac{L}{2}}\right]$$

(3.65)

$$\tilde{J}_{yn}(x,y)=\tilde{J}_{ykl}(x,y)=\frac{\frac{l\pi}{W}}{k_y^2-\left(\frac{l\pi}{W}\right)^2}\left[e^{-jk_y\frac{W}{2}}\cos(l\pi)-e^{jk_y\frac{W}{2}}\right]\frac{jk_x}{k_x^2-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}\left[e^{-jk_x\frac{L}{2}}\cos(k\pi)-e^{jk_x\frac{L}{2}}\right]$$

(3.66)

São essas transformadas das funções de base que aparecem nas integrais a serem resolvidas para o cálculo da distribuição de corrente induzida no *patch* metálico devido a uma corrente de excitação $\bar{J}_e$ conhecida.

Análise de singularidades nas transformadas das funções de expansão

Para análise de singularidades nas transformadas apresentadas nas Equações 3.63 a 3.66, iremos nos ater apenas à transformada (Equação 3.64) da função de expansão na direção $\hat{x}$ (Equação 3.60). De acordo com a Equação 3.64, a singularidade ocorreria quando os denominadores $k_x^2-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ e $k_y^2-\left(\frac{l\pi}{W}\right)^2$ assumissem o valor nulo. Isso ocorre sempre que $k_x=\pm\frac{k\pi}{L}$ ou $k_y=\pm\frac{l\pi}{W}$. Quando $k_x=\frac{k\pi}{L}$, resulta em:

$$\frac{\frac{k\pi}{L}}{\left(k_x-\frac{k\pi}{L}\right)\left(\frac{k\pi}{L}+\frac{k\pi}{L}\right)}\left[e^{-j\frac{k\pi}{L}\frac{L}{2}}\cos(k\pi)-e^{j\frac{k\pi}{L}\frac{L}{2}}\right]=\frac{1}{2\left(k_x-\frac{k\pi}{L}\right)}\left[e^{-j\frac{k\pi}{2}}\cos(k\pi)-e^{j\frac{k\pi}{2}}\right]$$

(3.67)

A expressão acima resulta em um limite do tipo $\frac{\sin x}{x}$ quando $x \to 0$. Análise análoga pode ser feita quando $k_x = -\frac{k\pi}{L}$ ou quando $k_y = \pm\frac{l\pi}{W}$. Dessa forma, as transformadas das funções de expansão não apresentam singularidades.