2
Campo Elétrico no *Patch* Metálico

Neste capítulo, é apresentado o desenvolvimento da solução das Equações de Maxwell para o campo eletromagnético espalhado por um *patch* metálico. Tal estrutura é alimentada por um cabo coaxial situado no ponto (x_p, y_p). Um filamento de corrente na direção $\hat{z}$ de raio desprezível δ é o responsável pela indução de uma densidade superficial de corrente no *patch* metalizado e pela geração de campo elétrico. Como o *patch* está posicionado no plano $z = h$, paralelo ao plano xy, só há corrente induzida no plano $z = h$, ou seja, só é induzida corrente na superfície do *patch* além da corrente de excitação no ponto (x_p, y_p). É considerado que o substrato em questão é sem perdas e que o plano de terra no qual ele está apoiado (plano $z = 0$) é um condutor elétrico perfeito e infinito.

As equações de Maxwell podem ser escritas como:

$$\nabla \times \overline{E} = -j\omega\mu\overline{H} \qquad (2.1)$$

$$\nabla \times \overline{H} = j\omega\varepsilon\overline{E} + \overline{J} \qquad (2.2)$$

Estas equações são válidas para todo o espaço.

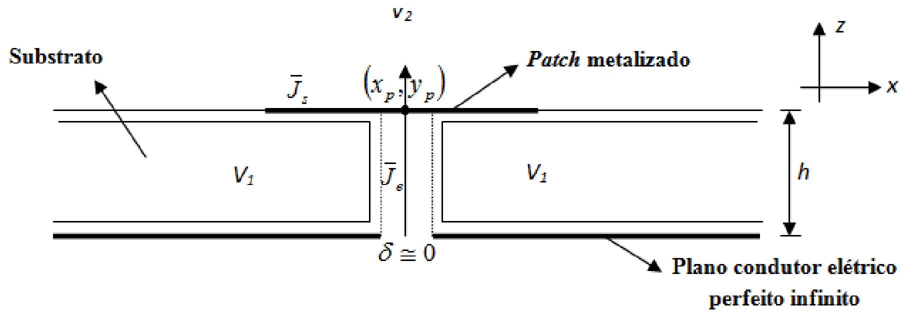

Figura 2.1 – *Patch* metálico sobre substrato apoiado em um plano de terra condutor elétrico perfeito infinito

O espaço pode ser dividido em duas regiões: V_1 e V_2, que excluem os contornos condutores e o filamento de corrente de excitação. Como só há corrente na superfície do *patch* e no filamento de corrente de excitação, pode-se dizer que $\overline{J}=0$ nas regiões V_1 e V_2. Nestas regiões as equações de Maxwell se tornam:

$$\nabla\times\overline{E}=-j\omega\mu\overline{H}$$

$$\nabla\times\overline{H}=j\omega\varepsilon\overline{E}$$

$$\overline{H}=\frac{\nabla\times\overline{E}}{-j\omega\mu} \tag{2.3}$$

$$\overline{E}=\frac{\nabla\times\overline{H}}{j\omega\varepsilon} \tag{2.4}$$

Substituindo a Equação 2.3 na Equação 2.4 e a Equação 2.4 na Equação 2.3, tem-se que:

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\overline{H}}{j\omega\varepsilon}\right)=-j\omega\mu\overline{H} \tag{2.5}$$

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\overline{E}}{-j\omega\mu}\right)=j\omega\varepsilon\overline{E} \tag{2.6}$$

$$-\nabla\times\nabla\times\overline{E}+\omega^2\mu\varepsilon\overline{E}=0 \tag{2.7}$$

$$-\nabla\times\nabla\times\overline{H}+\omega^2\mu\varepsilon\overline{H}=0 \tag{2.8}$$

Aplicando a identidade vetorial $\nabla\times\nabla\times\overline{A}=\nabla\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)-\nabla^2\overline{A}$, onde $\overline{A}$ é um vetor (e dessa forma pode ser substituído por $\overline{E}$ ou $\overline{H}$), tem-se que:

$$\nabla^2\overline{E}-\nabla\left(\nabla\cdot\overline{E}\right)+\omega^2\mu\varepsilon\overline{E}=0 \tag{2.9}$$

$$\nabla^2\overline{H}-\nabla\left(\nabla\cdot\overline{H}\right)+\omega^2\mu\varepsilon\overline{H}=0 \tag{2.10}$$

Como não há carga elétrica no espaço V_1 e V_2, pode ser aplicada a condição do divergente nulo $\nabla \cdot \overline{E} = 0$ à Equação 2.9 e $\nabla \cdot \overline{H} = 0$ à Equação 2.10:

$$\nabla^2 \overline{E} + \omega^2 \mu\varepsilon \overline{E} = 0 \tag{2.11}$$

$$\nabla^2 \overline{H} + \omega^2 \mu\varepsilon \overline{H} = 0 \tag{2.12}$$

As Equações 2.11 e 2.12 são equações vetoriais, que podem ser expressas por seis equações escalares, uma para cada direção x, y e z, uma vez que a base de vetores é retangular e o sistema de coordenadas é cartesiano. Resolvendo apenas as equações escalares para a componente na direção z, e usando a relação gerada entre as componentes pelas Equações de Maxwell 2.1 e 2.2, é possível chegar às expressões para os campos nas direções x e y. A partir das Equações 2.11 e 2.12, as equações escalares para a componente na direção z podem ser escritas como:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 z^2} + k^2 E_z = 0 \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial^2 z^2} + k^2 H_z = 0 \tag{2.14}$$

onde $k^2 = \mu\varepsilon$.

Como mostrado em [6], as soluções das Equações 2.13 e 2.14 podem ser expressas na forma de ondas planas $e^{(\pm jk_x x \pm jk_y y \pm jk_z z)}$, onde $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ é o quadrado da constante de propagação de onda, e a constante de propagação em cada direção é dada por k_x, k_y e k_z. A constante de propagação k_z pode ser escrita como:

$$k_z^2 = k^2 - \beta^2 \tag{2.15}$$

onde $\beta^2 = k_x^2 + k_y^2$.

O que se tem é $k_z^2 = \varepsilon_r k_0^2 - \beta^2 = k^2 - \beta^2$. Assumindo que $k_x = k\sin\theta\cos\phi$ e $k_y = k\sin\theta\sin\phi$, é possível dizer que: $k_x^2 + k_y^2 = k^2\sin^2\theta$ e, portanto $k_z^2 = k^2 - \left(k_x^2 + k_y^2\right) = k^2\cos^2\theta$. Assim, conclui-se que $k_z = k\cos\theta$, ou seja, a constante de propagação na direção $\hat{z}$ nada mais é que a projeção da constante de propagação da onda no plano xy. Dessa forma, é possível chegar à conclusão de que a onda é plana.

O *patch* metálico em questão está apoiado em uma camada de substrato com constante de permissividade relativa ao ar ε_r e constante de permeabilidade μ_0. Dessa forma, é possível separar o espaço em duas regiões com características de permeabilidade e permissividade distintas: o substrato (região I) com permeabilidade μ_0 e permissividade $\varepsilon_0\varepsilon_r$, e o ar (região II) com permeabilidade μ_0 e permissividade ε_0.

A expressão geral do campo elétrico e do campo magnético para cada região pode ser escrita como:

$$E_{z2} = Ae^{-jk_2 z} \text{ (região II)} \tag{2.16}$$

$$H_{z2} = Be^{-jk_2 z} \text{ (região II)} \tag{2.17}$$

$$E_{z1} = C\cos(k_1 z) + D\sin(k_1 z) \text{ (região I)} \tag{2.18}$$

$$H_{z1} = E\sin(k_1 z) + F\cos(k_1 z) \text{ (região I)} \tag{2.19}$$

As Equações 2.16 e 2.17 expressam a solução para os campos na região II, que é o espaço livre. No espaço livre, a onda se propaga sem reflexões e, portanto, expressamos a solução da equação de onda como uma onda propagante. Já as Equações 2.18 e 2.19 expressam os campos na região I, que é o substrato. Os campos gerados pelo *patch*, ao se propagarem no sentido do substrato, são refletidos pelo plano de terra e geram um padrão descrito pelos senos e cossenos. Na interface entre as regiões I e II, a descontinuidade também produz campos refletidos, fazendo com que parte dos campos gerados pelo *patch* fique presa no substrato, gerando assim uma onda estacionária na direção z. O substrato funciona, desse modo, como um guia de onda, onde as ondas ficam confinadas.

As constantes nas Equações 2.16-19 são obtidas ao serem aplicadas condições de contorno específicas para cada região, que são apresentadas a seguir. O princípio da superposição é utilizado, supondo primeiramente que há corrente induzida apenas na direção $\hat{x}$, e depois supondo que há corrente induzida apenas na direção $\hat{y}$. Depois é feito o somatório dos resultados dos campos encontrados. É possível observar que a equação de onda apresentada para E_z e H_z só vale para o volume V_1 e V_2, excluídos os contornos condutores metálicos, uma vez que é aplicada a condição do divergente nulo ao concluir que no interior destes volumes $\bar{J} = 0$. Isso não vale, no entanto, para os planos $z = h$ e $z = 0$. Para resolver o campo nesses planos são aplicadas as condições de contorno do problema, que são dadas por:

$$E_x = 0 \text{ para } z = 0 \tag{2.20}$$

$$E_y = 0 \text{ para } z = 0 \tag{2.21}$$

$$\text{Continuidade de } E_x \text{ em } z = h, \text{ ou seja}: E_{x1} = E_{x2} \tag{2.22}$$

$$\text{Continuidade de } E_y \text{ em } z = h, \text{ ou seja}: E_{y1} = E_{y2} \tag{2.23}$$

$$\text{Continuidade de } H_x \text{ em } z = h, \text{ ou seja}: H_{x1} = H_{x2} \tag{2.24}$$

$$\text{Continuidade de } H_y \text{ em } z = h, \text{ ou seja}: H_{y1} - H_{y2} = J_x \tag{2.25}$$

Para encontrar E_x, E_y, H_x e H_y é utilizada a relação entre o campo elétrico e o campo magnético que são dadas pelas Equações 2.1 e 2.2. Da Equação 2.1 é possível escrever:

$$H_x = \frac{1}{-j\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \tag{2.26}$$

$$H_y = \frac{1}{-j\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \tag{2.27}$$

$$H_z = \frac{1}{-j\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \tag{2.28}$$

Da Equação 2.2 é possível escrever:

$$E_x = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \tag{2.29}$$

$$E_y = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}\right) \tag{2.30}$$

$$E_z = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\right) \tag{2.31}$$

Para que seja possível chegar às expressões para E_x, E_y, H_x e H_y, através de uma série de manipulações apresentadas no Anexo, é aplicado o par de transformadas de Fourier:

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(k_x,k_y,z)e^{jk_x x}e^{jk_y y}dk_x dk_y \tag{2.32}$$

$$\tilde{\psi}(k_x,k_y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,y,z)e^{-jk_x x}e^{-jk_y y}dx\,dy \tag{2.33}$$

O par de transformadas acima é o par de transformadas de Fourier do domínio espacial para o espectral $(x \to k_x)$, $(y \to k_y)$. No domínio temporal, a transformada faz $(t \to \omega)$. O domínio espectral traz a vantagem de não ser necessário o trabalho com as derivadas envolvidas nas manipulações das Equações 2.26-31. Após as devidas manipulações e transformadas apresentadas no Anexo:

$$\tilde{E}_x = \frac{jk_x}{\beta^2}\frac{\partial\tilde{E}_z}{\partial z} + \frac{\omega\mu_0 k_y}{\beta^2}\tilde{H}_z \tag{2.34}$$

$$\tilde{E}_y = \frac{jk_y}{\beta^2}\frac{\partial\tilde{E}_z}{\partial z} - \frac{\omega\mu_0 k_x}{\beta^2}\tilde{H}_z \tag{2.35}$$

$$\tilde{H}_x = \frac{jk_x}{\beta^2}\frac{\partial\tilde{H}_z}{\partial z} - \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r k_y}{\beta^2}\tilde{E}_z \tag{2.36}$$

$$\tilde{H}_y = \frac{jk_y}{\beta^2}\frac{\partial\tilde{H}_z}{\partial z} + \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r k_x}{\beta^2}\tilde{E}_z \tag{2.37}$$

Aplicando a transformada de Fourier às Equações 2.16-19, é possível substituí-las nas Equações 2.34-37. As condições de contorno expressas pelas Equações 2.20-25 estão no domínio espacial, mas também valem para o domínio espectral, uma vez que o domínio espacial nada mais é que um somatório de todas as componentes do campo no domínio espectral. Dessa forma, para que o campo no domínio espacial atenda às condições de contorno, todas as suas componentes espectrais também devem atendê-las. Aplicando as condições de contorno no domínio espectral às expressões resultantes da substituição das Equações 2.16-19 no domínio espectral nas Equações 2.34-37, de acordo com o Anexo:

$$\tilde{E}_{z2} = \frac{k_x k_1 \sin(k_1 h)}{j\omega\varepsilon_0 T_m} e^{-jk_2(z-h)} \tilde{J}_x \tag{2.38}$$

$$\tilde{H}_{z2} = \frac{-jk_y \sin(k_1 h)}{T_e} e^{-jk_2(z-h)} \tilde{J}_x \tag{2.39}$$

$$\tilde{E}_{z1} = \frac{k_x k_2 \cos(k_1 z)}{\omega\varepsilon_0 T_m} \tilde{J}_x \tag{2.40}$$

$$\tilde{H}_{z1} = \frac{-jk_y \sin(k_1 z)}{T_e} \tilde{J}_x \tag{2.41}$$

onde:

$T_m = \varepsilon_r k_2 \cos(k_1 h) + jk_1 \sin(k_1 h)$

$T_e = k_1 \cos(k_1 h) + jk_2 \sin(k_1 h)$

$k_1^2 = \varepsilon_r k_0^2 - \beta^2$: quadrado da constante de propagação no meio 1

$k_2^2 = k_0^2 - \beta^2$: quadrado da constante de propagação no meio 2

As Equações 2.38-41, obtidas através das condições de contorno, expressam os campos elétrico e magnético no domínio espectral e, portanto, sua variação se dá com k_x, k_y e z. Quando a transformada inversa for aplicada, a variação se dará com x, y e z, que é o esperado.

Substituindo as Equações 2.38-41 nas Equações 2.34-37, chega-se às seguintes expressões para $z = h$ (o plano de interesse é o plano $z = h$ porque é onde o *patch* se encontra; como o mesmo está ligeiramente acima da fronteira entre o ar e o substrato, está localizado na região II, e por isso as expressões usadas são as relativas ao campo desta região):

$$\tilde{E}_x(k_x,k_y,h)=\frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[\frac{k_x^2k_1k_2\sin(k_1h)}{\beta^2T_m}+\frac{k_y^2k_0^2\sin(k_1h)}{\beta^2T_e}\right]\tilde{J}_x \tag{2.42}$$

$$\tilde{E}_y(k_x,k_y,h)=\frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[\frac{k_xk_yk_1k_2\sin(k_1h)}{\beta^2T_m}+\frac{k_xk_yk_0^2\sin(k_1h)}{\beta^2T_e}\right]\tilde{J}_x \tag{2.43}$$

$$\tilde{E}_z(k_x,k_y,h)=\frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\frac{k_xk_1\sin(k_1h)}{T_m}\tilde{J}_x \tag{2.44}$$

De forma análoga, é possível obter as expressões da transformada das componentes x, y e z do campo elétrico, quando é suposta apenas corrente induzida na direção $\hat{y}$, $\tilde{J}_y$ (a solução completa é obtida através da superposição das soluções apenas para $\tilde{J}_y$ com as soluções apenas para $\tilde{J}_x$):

$$\tilde{E}_y(k_x,k_y,h)=\frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[\frac{k_y^2k_1k_2\sin(k_1h)}{\beta^2T_m}+\frac{k_x^2k_0^2\sin(k_1h)}{\beta^2T_e}\right]\tilde{J}_y \tag{2.45}$$

$$\tilde{E}_x(k_x,k_y,h)=\frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[\frac{k_xk_yk_1k_2\sin(k_1h)}{\beta^2T_m}+\frac{k_xk_yk_0^2\sin(k_1h)}{\beta^2T_e}\right]\tilde{J}_y \tag{2.46}$$

$$\tilde{E}_z(k_x,k_y,h)=\frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\frac{k_yk_1\sin(k_1h)}{T_m}\tilde{J}_y \tag{2.47}$$

Aplicando o princípio da superposição, é possível expressar o campo elétrico de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\\ \tilde{E}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{Z}_{xx} & \tilde{Z}_{xy}\\ \tilde{Z}_{yx} & \tilde{Z}_{yy}\\ \tilde{Z}_{zx} & \tilde{Z}_{zy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{J}_x\\ \tilde{J}_y\end{bmatrix} \tag{2.48}$$

$$\tilde{E}_x=\tilde{Z}_{xx}\tilde{J}_x+\tilde{Z}_{xy}\tilde{J}_y \tag{2.49}$$

$$\tilde{E}_y = \tilde{Z}_{yx}\tilde{J}_x + \tilde{Z}_{yy}\tilde{J}_y \tag{2.50}$$

$$\tilde{E}_z = \tilde{Z}_{zx}\tilde{J}_x + \tilde{Z}_{zy}\tilde{J}_y \tag{2.51}$$

Assim, é possível obter as seguintes expressões para as funções de Green para o campo elétrico [6]:

$$\tilde{Z}_{xx} = \frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[\frac{k_x^2 k_1 k_2 \sin(k_1 h)}{\beta^2 T_m} + \frac{k_y^2 k_0^2 \sin(k_1 h)}{\beta^2 T_e}\right] \tag{2.52}$$

$$\tilde{Z}_{xy} = \tilde{Z}_{yx} = \frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[\frac{k_x k_y k_1 k_2 \sin(k_1 h)}{\beta^2 T_m} + \frac{k_x k_y k_0^2 \sin(k_1 h)}{\beta^2 T_e}\right] \tag{2.53}$$

$$\tilde{Z}_{yy} = \frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\left[\frac{k_y^2 k_1 k_2 \sin(k_1 h)}{\beta^2 T_m} + \frac{k_x^2 k_0^2 \sin(k_1 h)}{\beta^2 T_e}\right] \tag{2.54}$$

$$\tilde{Z}_{zx} = \frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\frac{k_x k_1 \sin(k_1 h)}{T_m} \tag{2.55}$$

$$\tilde{Z}_{zy} = \frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\frac{k_y k_1 \sin(k_1 h)}{T_m} \tag{2.56}$$