# 3
# Modelos de Apreçamento de Opções

Preços de futuros na Bolsa de Valores, na prática, são definidos de forma livre na BM&FBOVESPA a partir das relações apresentadas entre oferta e demanda. Para que a formação de tais preços possa ser estabelecida de forma relativamente justa, é fundamental que o mercado à vista do ativo seja competitivo e livre, sem controle do governo sobre os preços e não permitindo a determinação de preços por parte de alguns indivíduos ou grupos participantes das negociações. No entanto, existem falhas no apreçamento dos futuros e agentes do mercado definidos como *hedgers*, especuladores e arbitradores se movimentam de forma a aproveitar tais deficiências.

Duan (1995) utiliza a classe dos modelos GARCH no desenvolvimento de um modelo de apreçamento de opções que satisfaz a chamada relação de apreçamento localmente neutra ao risco (LRNVR). No artigo, afirma-se que devido a natureza complexa do modelo GARCH, há a necessidade de uma versão generalizada da neutralização ao risco, intitulada de LRNVR. Há demonstrações de que o processo GARCH, em geral, se mantém intacto com relação a neutralização do risco podendo ser usado para fins de apreçamento.

No Brasil, é possível encontrar na literatura alguns modelos de apreçamento para o mercado de opções, em especial, para opções da Telebrás, Petrobras e Vale. Araújo et. al. (2003) aplicam o modelo de Duan para apreçamento de opções de compra da Telebrás. Na construção do modelo foram utilizados os processos GARCH(1,1), TARCH(1,1) e EGARCH(1,1) comparados aos resultados obtidos com o modelo de B&S. Em geral, as diferenças do modelo de B&S se mostraram quase sempre menores que as obtidas com o modelo de Duan quando comparados ao mercado.

Beltramini (2009) estabelece um modelo de apreçamento baseado na técnica de *Support Vector Regression* (SVR) com aplicação para o mercado de opções sobre ações da Petrobras. A técnica se baseia no aprendizado supervisionado estatístico para estabelecer uma função de apreçamento a partir do reconhecimento de padrões e tendências do mercado. Os resultados decorrentes do modelo SRV apresentaram-se superiores em todas as comparações realizadas com o modelo de B&S.

## 3.1
## O modelo de Black&Scholes (B&S)

No ano de 1973, Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton apresentaram um modelo para apreçamento de opções que mais adiante estaria entre os mais aplicados no mercado financeiro. O modelo ganhou mais prestígio após os autores Scholes e Merton receberem o prêmio Nobel de Economia em 1997. Atualmente, a fórmula é freqüentemente empregada por muitos agentes do mercado de derivativos no mundo.

Apesar de apresentar simplificações questionáveis, a fórmula conta a seu favor, em especial, com sua facilidade de aplicação. As principais críticas ao modelo estão relacionadas, especialmente, às premissas assumidas pelos autores. Hull (2005) as destaca:

i) Preços dos ativos seguem processo estocástico com média e volatilidade constantes e distribuição lognormal.

ii) Não há restrições para a venda a descoberto dos títulos.

iii) Não há custos ou taxas de transações. Todos os títulos são perfeitamente divisíveis.

iv) Não há pagamento de dividendos durante a vida do derivativo.

v) Não há oportunidades de arbitragem sem risco.

vi) Negociações dos títulos são contínuas.

vii) A taxa de juros livre de risco (r) é constante para todos os prazo de vencimento.



Ao assumir as premissas acima e por meio da formação de uma carteira livre de risco, B&S mostra que o preço de uma opção européia de compra segue a seguinte equação diferencial estocástica

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{\partial C_t}{\partial t} - rC_t = 0 \qquad (3.1)$$

O preço da opção de venda, por sua vez, é obtido a partir do preço da opção de compra ($C_t$) calculado. A solução da equação acima é o preço de uma opção de compra que não distribui dividendo, sendo dada pela expressão:

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2) \tag{3.2}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \tag{3.3}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \tag{3.4}$$

$N(d_1)$ e $N(d_2)$ se referem, respectivamente, a probabilidade acumulada nos pontos $d_1$ e $d_2$ de uma distribuição normal padronizada.

Conforme a fórmula apresentada acima, verifica-se que o preço de uma opção européia de compra ($C_t$) é obtido a partir do preço atual do ativo-base ($S_t$) juntamente ao preço de exercício da opção (K), da taxa de juros livre de risco (r), do prazo de vencimento da opção (t) e da volatilidade do ativo (σ).

Para apreçamento de opções que distribuem dividendos, Merton (1973) apresentou uma extensão da versão do modelo de Black & Scholes a qual resulta na substituição do valor de $C_t$ e $d_1$, respectivamente, por:

$$C_t = S_t e^{-qt} N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2) \tag{3.5}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \tag{3.6}$$

Nesse caso, a taxa de dividendos paga é representada por q. Vale ressaltar que esta última deve ser medida na mesma unidade de tempo que a taxa de juros livre de risco e volatilidade do ativo. A expressão de $d_2$ permanece igual à da eq. (3.4).

Em maiores detalhes, a primeira premissa do modelo de B&S estabelece que o preço do ativo subjacente a opção ($S_t$) segue um Movimento Geométrico Browniano (MGB), o que implica em satisfazer a seguinte equação:

$$\frac{\delta S_t}{S_t} = \mu\delta t + \sigma\varepsilon_t\sqrt{\delta t}\ , \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \tag{3.7}$$

Na equação acima, uma versão discreta do referido processo estocástico, $\delta S$ é referente à mudança no preço do ativo num pequeno intervalo de tempo

$\delta t$. O retorno do ativo está representado, dessa forma, por $\frac{\delta S}{S}$. O parâmetro $\mu$ é a taxa de retorno esperada do ativo por unidade de tempo e $\sigma$ a volatilidade do preço do ativo, ambos assumidos como constantes no modelo. E por fim, $\varepsilon$ é definido como uma variável aleatória que possui distribuição normal padronizada.

Esta última premissa de normalidade implica em retornos do ativo subjacente a opção seguindo distribuição normal de média $\mu\delta t$ e desvio-padrão $\sigma\sqrt{t}$. Para processos do tipo da eq. (3.7) e retorno logarítmicos num tempo futuro (T) [$r_T=\ln(S_T/S_{T-1})$], é possível demonstrar, de acordo com o Lema de Itô, que os mesmos se distribuem normalmente com média $\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T$ e desvio-padrão igual a $\sigma\sqrt{T}$.

Dentre as principais críticas do modelo B&S estaria a premissa citada anteriormente de retornos apresentando distribuição normal bem como da volatilidade constante no tempo. Tais premissas não se mostram condizentes com as evidências empíricas[5] as quais apontam distribuição dos retornos das ações apresentando caudas largas, assimetria e variância não constante ao longo do tempo.

Araújo et. al. (2003) indicam ainda deficiências do modelo B&S no resultado do apreçamento de opções tais como: sub-apreçamento de opções fora-do-dinheiro, de opções de ações com baixa volatilidade ou ainda de opções com curto tempo para vencimento. O modelo resulta ainda em diferentes volatilidades implícitas para distintas opções sob a mesma ação.

Dessa forma, diversos autores buscam alternativas que visam contornar as principais falhas do modelo de B&S apresentadas. Tais alternativas se encontram expostas mais a frente nesse capítulo. Dentre elas estão o uso do modelo Binomial, dos modelos GARCH, da Simulação de Monte Carlo entre outros.



[5] Para maiores detalhes ver Franses & van Dijk (2000) e Tsay (2005).

## 3.2
## Simulação de Monte Carlo

Com o surgimento do modelo de Black & Scholes (B&S), diversas propostas foram desenvolvidas no âmbito de apreçamento de opções. No entanto, muitas delas não forneciam uma solução analítica fechada como no caso dos dois autores. Cox & Ross (1976), propuseram uma estrutura alternativa para apreçamento de opções ao assumirem que o preço dos ativos subjacentes a opção seguiriam um processo de difusão com elasticidade da variância constante. Foram ainda os que propuseram o uso de probabilidades neutras ao risco no apreçamento de opções. No entanto, nesse caso, suas soluções devem ser obtidas por integração o que resulta, muitas vezes, na necessidade de avaliação por métodos numéricos.

A simulação de Monte Carlo se constitui de um método numérico amplamente utilizado para fins de apreçamento de opções. Boyle (1977) foi o pioneiro a aplicar o método para tal finalidade. Até então, segundo o autor, só existiam dois métodos numéricos para avaliação de preços de opções, sendo um deles específico para o apreçamento de opções de venda americanas. A proposta do seu artigo foi de apresentar a simulação de Monte Carlo como um terceiro método para obtenção de soluções numéricas para problemas de apreçamento de opções. A técnica proposta era simples e flexível tendo em vista que poderia ser adaptada facilmente para diferentes processos assumidos para os retornos dos ativos subjacentes a opção.

No artigo são apresentadas aplicações do método para a obtenção de estimativas de preços, inclusive de opções européias de compra que distribuem dividendos. Ao considerar a condição de neutralidade ao risco proposta por Cox e Ross (1976), o retorno esperado de uma ação é dado por:

$$E(S_T \mid S_t) = \exp[r(T-t)] \tag{3.8}$$

Assumindo ainda que $S_{t+1} \mid S_t$ apresenta distribuição lognormal com média igual à exp(r) e realizando algumas transformações, obtém-se a variável aleatória ilustrada na eq. (3.9).

$$S_{t+1} = S_t \exp\left(r - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma\tilde{x}\right) \tag{3.9}$$

Em que $\tilde{x}$ é uma variável aleatória com distribuição normal padrão.

Admite-se ainda que a unidade do tempo seja medida em trimestres e que $S_t$ represente o preço da ação imediatamente após o dividendo trimestral $D_t$ ter sido pago. Dessa forma, inicia-se o método de simulação ao gerar o valor de $S_{t+1}$. Caso o valor gerado seja maior que $D_{t+1}$ então $S_{t+1} - D_{t+1}$ é usado como valor inicial no começo do segundo período e o procedimento prossegue até a obtenção do valor de $S_T$. Após a realização de uma grande quantidade de simulações, estima-se o valor esperado do Max[$S_T$-K;0] e desconta-se desse valor a taxa de juros livre de risco para a obtenção do valor da opção em T. Intervalos de confiança podem ainda ser construídos[6].

Vale ressaltar também que o erro padrão de uma estimativa de Monte Carlo é inversamente proporcional a raiz quadrada do número de trajetórias amostrais simuladas.

O método pode ser aplicado ainda para diferentes distribuições de probabilidade da variável aleatória, para retornos gerados por misturas de processos estocásticos, para obtenção dos preços de opções americanas, entre outros. O artigo de Hull & White (1987) apresenta uma aplicação do método de simulação de Monte Carlo para a obtenção do preço de opções sob ativos com volatilidade estocástica. Para isso, faz-se necessário apenas o relaxamento de algumas premissas adotadas pelos autores. Duan (1995) também utiliza a simulação de Monte Carlo para o cálculo dos preços de opções via modelo GARCH bem como para obtenção dos deltas das opções (variação no preço da opção em relação a mudanças no preço do ativo subjacente). O método foi usado pelo autor por ser considerado conveniente pelo fato da distribuição dos retornos dos ativos temporalmente agregados não poder ser derivada analiticamente.

## 3.3
## Modelos GARCH

Em 1987, Hull e White propuseram um modelo de apreçamento de opções que, diferentemente do modelo de B&S, assume um processo estocástico para a volatilidade dos retornos dos ativos. A partir daí, modelos de volatilidade variante no tempo vêm sendo utilizados para o apreçamento de opções. Dentre eles estão os modelos GARCH.

[6] Para maiores detalhes ver Boyle (1977).

Lehar, Scheicher & Schittenkopf (2001) realizaram a comparação dos modelos GARCH, de volatilidade estocástica e de Black & Scholes para apreçamento das opções do FTS100 (índice das 100 maiores empresas listadas na London Stock Exchange). Os resultados obtidos, referentes ao desempenho do apreçamento das opções fora da amostra, indicaram que o modelo GARCH obteve destaque evidente quando comparado aos outros dois modelos de *benchmark*.

À luz do modelo ARCH desenvolvido por Engle (1982), surgiram os modelos GARCH com o propósito de incluir termos na variância condicional dos retornos, não contemplados na proposta inicial do autor. Assim como nos modelos ARCH, assume-se que os choques dos retornos dos ativos sejam dependentes, mas não correlacionados serialmente. No entanto, diferentemente do modelo original, a dependência dos choques seria descrita não somente por funções quadráticas de seus valores defasados, como também das defasagens das variâncias dos retornos do ativo de interesse.

De acordo com Tsay (2005), modelos do tipo ARCH requerem muitos parâmetros para descrever adequadamente o processo de volatilidade do retorno de um ativo. Dessa forma, Bollerslev em 1986 propôs o modelo ARCH generalizado (GARCH) com a seguinte estrutura:

$$r_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t \tag{3.10}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{3.11}$$

Em que $\sigma_t^2 = Var(r_t \mid \underset{\sim t-1}{r}),\ \underset{\sim t}{r} = (r_t, r_{t-1}, ..., r_2, r_1)$.

Nas equações (3.10) e (3.11), $e_t = \sigma_t \varepsilon_t$, $r_t$ representa os retornos dos ativos utilizados, $\sigma_t$ a volatilidade desses retornos e $\varepsilon_t$ é definido como uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com média 0 e variância 1. São impostas no modelo as seguintes restrições: $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0,\quad \beta_j \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_j) < 1$. As três primeiras são necessárias para garantir a positividade da variância condicional dos retornos e a última para garantir variância incondicional dos retornos finita.

O modelo ARCH, por sua vez, pode ser obtido como um caso particular da eq. (3.11) nos casos em que q seja igual a zero. Os parâmetros $\alpha_i$ $e$ $\beta_j$ se referem, respectivamente, aos parâmetros ARCH e GARCH.

A partir da proposta de Bollerslev, variações na estrutura da volatilidade foram exploradas por outros autores. Nas seções abaixo são apresentadas as variações do modelo GARCH mais comumente adotadas na literatura para a volatilidade dos retornos.

## 3.3.1
## Alternativas para a especificação da volatilidade

### 3.3.1.1
### GARCH Exponencial (EGARCH) - Nelson (1991).

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_t + \sum_{j=1}^{q} \beta_j g(\varepsilon_{t-j}) \qquad (3.12)$$

$$g(\varepsilon_t) = \theta\varepsilon_t + \gamma\left[\left|\varepsilon_t\right| - E\left|\varepsilon_t\right|\right] \quad , \quad g(\varepsilon_t) = \begin{Bmatrix} (\theta+\gamma)\varepsilon_t - \gamma E\left|\varepsilon_t\right| & se & \varepsilon_t \geq 0 \\ (\theta-\gamma)\varepsilon_t - \gamma E\left|\varepsilon_t\right| & se & \varepsilon_t < 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.13)$$

Nesse caso, $\varepsilon_t$ é uma seqüência i.i.d com distribuição contínua cuja média é nula. Nelson (1991) desenvolveu o modelo acima como forma de considerar as evidências empíricas de que os retornos das ações sejam negativamente correlacionados com mudanças na volatilidade dos retornos (efeito alavancagem). Isso implica em afirmar que a volatilidade dos retornos tende a aumentar em resposta a más notícias do mercado (excesso de retornos mais baixos que o esperado) e a cair nos casos de boas notícias (excesso de retornos mais altos que o esperado). Dessa forma, seu modelo assume uma forma para a volatilidade dos retornos que responde assimetricamente a resíduos positivos e negativos. Diz-se que o efeito alavancagem é presente para valores positivos de $\theta$.

A forma proposta, ao ser considerada em função de ln $\sigma_t^2$, dispensa ainda as restrições impostas nos parâmetros da variância condicional como no modelo GARCH de Bollerslev (1986), os quais garantiriam a não negatividade da mesma. O modelo é proposto ainda para facilitar a avaliação da persistência dos choques de volatilidade, quando comparado ao modelo GARCH.

### 3.3.1.2
### GJR GARCH - Glosten, Jagannathan and Runkle (1993)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{P} \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{Q} \beta_j e_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{Q} \gamma_j I_{t-j} e_{t-j}^2 \tag{3.14}$$

$$I_{t-j} = \begin{cases} 1, & e_{t-j} < 0 \\ 0, & e_{t-j} \geq 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

No modelo acima, $I_{t-j}$ é uma variável *dummy* (indicadora) que assume valor um para choques defasados negativos e valor zero caso contrário.

A forma para a variância condicional sugerida por GJR é uma adaptação do modelo EGARCH com a alternativa de utilização de variáveis indicadoras para a incorporação do efeito alavancagem presente nos retornos. Nesse caso, para valores positivos de $\gamma_j$, diz-se que o efeito alavancagem existe.

Nesse caso, são admitidas as mesmas restrições do modelo GARCH além da seguinte restrição para estacionariedade da variância: $\sum_{i=1}^{P} \alpha_i + \sum_{j=1}^{Q} \beta_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{Q} \gamma_j < 1$.

### 3.3.1.3
### GARCH Não Linear (NGARCH) - Engle and Ng (1993)

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha (e_{t-1} - \theta \sigma_{t-1})^2 \tag{3.16}$$

Também conhecido como GARCH assimétrico não linear, o modelo NGARCH acima impõe um mínimo para a curva de impacto das notícias (choques) do mercado. O parâmetro $\theta$ costuma ser positivo para as séries de retornos apontando a existência do efeito alavancagem. Ou seja, retornos negativos com maiores impactos na volatilidade futura quando comparados aos retornos positivos.

### 3.3.1.4
### GARCH Integrado (IGARCH) - Bollerslev (1986)

O modelo IGARCH coincide com o GARCH. No entanto, não considera a condição de covariância estacionária admitida no modelo GARCH com a seguinte restrição: $\sum_{i=1}^{\max(m,s)}(\alpha_i + \beta_j) < 1.$ O modelo IGARCH admite a existência de raiz unitária (não estacionariedade) no processo da variância ao assumir a restrição de que $\sum_{i=1}^{\max(p,q)}(\alpha_i + \beta_j) = 1.$

Dessa forma, choques externos na volatilidade são permanentes, o que não resulta em volatilidades com reversão a média.

### 3.3.2
### Estimação dos parâmetros

Os parâmetros de interesse dos modelos GARCH e suas variações são comumente estimados por meio da maximização da função *log-verossimilhança* abaixo.

$$L(\theta) = \ln\ f(r_1,...,r_T;\theta) = \ln\left[\left(\prod_{t=2}^{T} f(r_t \mid \underset{\sim}{r}_{t-1};\theta\right) \times f(r_1;\theta)\right] \qquad (3.17)$$

Dado que $r_t$ seja o retorno das ações de interesse e supondo inovações ( $\varepsilon_t$ ) normalmente distribuídas com média nula e variância $\sigma_t^2$ têm-se que

$$L(\theta) = \ln\ f(r_1,...,r_T;\theta) = f(r_1;\theta) - \frac{1}{2}\sum_{t=2}^{T}\left[\ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) + \frac{r_t^2}{\sigma_t^2}\right] \qquad (3.18)$$

Vale ressaltar que outras distribuições podem ser especificadas para $\varepsilon_t$ tais como t-Student, GED, entre outras. A estimativa de máxima verossimilhança (EMV) do vetor $\theta$ (px1), denotada por $\hat{\theta}_{MV}$ é aquela que maximiza a função objetivo explicitada em (4.19) para toda a série em questão.

A estimativa de máxima verossimilhança para $\theta$ deve atender as condições de 1ª e 2ª ordem. A primeira condição segue exposta na eq. (3.19) enquanto a segunda, a qual garante que a solução seja um ponto de máximo, estabelece que a matriz de segundas derivadas (Hessiana) ilustrada na eq. (3.20) seja negativa definida.

$$\sum_{i=1}^{T}\left(\frac{\partial L_t \theta}{\partial \theta}\right) = \sum_{i=1}^{T}\left[\frac{1}{2\sigma_t^2}\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}-1\right)\right] = 0 \tag{3.19}$$

$$H_t = \sum_{i=1}^{T}\left(\frac{\partial^2 L_t \theta}{\partial \theta \partial \theta^T}\right) = \sum_{i=1}^{T}\left[\frac{1}{2\sigma_t^2}\frac{\partial^2 \sigma_t^2}{\partial \theta \partial \theta^T}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}-1\right)+\frac{1}{\sigma_t^4}\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta}\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta^T}\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}\right)\right] \tag{3.20}$$

Para a obtenção da estimativa de máxima verossimilhança, é necessário ainda o cálculo de gradientes bem como da matriz de informação de Fisher. O cálculo da segunda derivada de $\varepsilon_t$ com relação a $\theta$ na eq. (3.20) do Hessiano pode não ser muito fácil.

As derivadas de primeira ordem do logaritmo da função de verossimilhança, também chamado de função *score,* no caso dos modelos GARCH são não lineares, não podendo serem resolvidas explicitamente para a obtenção das estimativas de MV. Dessa forma, alguns procedimentos numéricos devem ser utilizados como forma de obter as soluções de interesse. Dentre os algoritmos mais utilizados na estimação de modelos de volatilidade: BFGS, Marquadt, método Newton-Raphson, dentre outros.

## 3.4
## O modelo GARCH de apreçamento via Simulação Histórica Filtrada *(GARCH-SHF)*

Baroni-Adesi, Engle e Mancini (2008) propuseram uma nova metodologia de apreçamento com resultados empíricos para as opções européias do índice S&P500 (índice das 500 ações mais importantes do mercado). O método se baseia na estimativa de parâmetros de apreçamento de um modelo GJR GARCH calibrados diretamente nos preços de opções do mercado, demandando deste modo razoável esforço computacional para a sua implementação. Além disso, diferentemente da grande parte dos modelos GARCH de apreçamento de opções, as simulações dos retornos de interesse são realizadas com base em inovações empíricas resultando em um método não paramétrico de apreçamento, no que concerne a distribuição das inovações.

A calibração do modelo é feita com o auxílio da função *fminsearch* que, baseada no algoritmo de Nelder-Mead, o qual realiza a busca pelo mínimo irrestrito de funções custo não lineares. Nesse método, a minimização de sua função arbitrária de n variáveis é efetuada pela comparação dos valores da função em n+1 vértices de um simplex. Dentre suas vantagens está o fato de não haver necessidade do cálculo de gradientes, resultando em esforços computacionais mais baixos e, em alguns casos, estimativas semelhantes às obtidas nos demais algoritmos de otimização para funções não-lineares. Para a calibração dos modelos foi utilizado o *software* R versão 2.12. Para algumas análises descritivas utilizou-se ainda o EViews versão 5.

Nas próximas seções serão apresentados os procedimentos realizados para a obtenção das estimativas dos preços de opções sobre ações com base no modelo proposto pelos referidos autores.

### 3.4.1
### Metodologia

O processo de estimação dos preços das opções, com base no modelo proposto, se dá por uma sequência de passos cujo propósito final é obter estimativas dos parâmetros de um modelo GJR GARCH que minimizem a raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM) de apreçamento das opções, conforme eq. (3.21). O modelo é calibrado de forma a obter estimativas dos parâmetros GARCH que resultem em preços estimados das opções mais condizentes com os verificados no mercado.

$$REQM = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N_t}\left[C_j - C_{SHF;j}(\underset{\sim}{\theta})\right]^2}{N_t}} \tag{3.21}$$

$C_{SHF;j}$ se refere ao preço resultante do modelo GARCH-SHF sob o vetor de parâmetros ($\underset{\sim}{\theta} = [\alpha_0^*; \alpha_1^*; \beta^*; \alpha_2^*]$) calibrado e $C_j$ ao preço de mercado da opção j negociada na data t. O preço dado pelo modelo $C_{SHF;j}$ é obtido da seguinte forma:

$$C_{SHF;j}(\underset{\sim}{\theta}) = e^{-r\tau} E\{Max[(S_{t+\tau} \mid \underset{\sim}{\theta}) - K_j ; 0]\} \qquad (3.22)$$

Em que $S_{t+\tau}$ é o vetor (nx1) dos preços simulados da ação na data t+$\tau$ de vencimento da opção e $K_j$ se refere ao preço de exercício estabelecido para a opção do tipo j. Maiores detalhes a respeito da obtenção do preço da ação em t+$\tau$ se encontram mais adiante (3ª etapa) . O total de diferentes opções negociadas na data t é representado por $N_t$.

O exercício de calibração do modelo foi feito uma vez por semana, a cada quarta-feira do ano de 2010. Optou-se pela quarta-feira por se tratar do dia da semana em que foi verificada maior liquidez média nas negociações das opções em estudo, além de possuir a menor quantidade de feriados no ano em questão.

A função a ser minimizada (REQM) na calibração dos parâmetros é não linear e sem restrições. Para se garantir as restrições impostas pelo modelo GJR GARCH, a calibração é realizada com funções[7] dos seus parâmetros.

Para se obter os preços estimados das opções ($C_{SHF;j}$), conforme modelo aplicado, deverão ser seguidas as seguintes etapas.

**1ª etapa: Estimação do modelo GJR GARCH**

Nessa etapa, estima-se um modelo GJR GARCH para uma série de retornos logarítmicos diários com tamanho previamente determinado. Optou-se pela utilização dessa especificação para a volatilidade tendo em vista que a mesma considera, de forma simplificada, o efeito alavancagem, fato estilizado presente nas séries financeiras.

No trabalho em questão, considerou-se uma série de 800 retornos - aproximadamente 4 anos de retornos, o que é prática no mercado - como suficiente para se obter estimativas mais precisas dos parâmetros de interesse. Segue a forma do modelo estimado sob medida física P:

$$r_t = \log(S_t / S_{t-1}) = \mu + e_t \qquad (3.23)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta e_{t-1}^2 + \alpha_2 I_{t-1} e_{t-1}^2 \qquad (3.24)$$

[7] Para maiores detalhes consultar o apêndice B.

Em que $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0,\ \beta \geq 0$ e $\alpha_0 + \alpha_1 + \beta + \frac{1}{2}\alpha_2 < 1$

Nas eqs. (3.23-24), os retornos diários logarítmicos são representados por $r_t$ e os preços de fechamento da ação na data t por $S_t$. O erro $e_t = \sigma_t z_t$, em que $\sigma_t$ é a volatilidade condicional diária do retorno e $z_t$ é uma inovação originária de uma distribuição teórica cuja média é zero e variância unitária, $z_t \sim f(0,1)$. $I_{t-1}$ é uma variável indicadora que será igual a 1 para todos $e_{t-1} < 0$ e igual a zero caso contrário.

Verifica-se ainda que t varia entre t-800 e t, cujo t se refere a data do apreçamento em questão.

A estimação dos parâmetros das eqs. (3.23-24) se dá por maximização da função de pseudo-verossimilhança, conforme Gourieroux (1984).

O conjunto de parâmetros estimados no modelo acima $\theta = [\alpha_0; \alpha_1; \beta; \alpha_2]$ será utilizado como valor inicial para os parâmetros GARCH-SHF de apreçamento sob medida neutra ao risco Q, a serem calibrados $\underset{\sim}{\theta} = [\alpha_0^*; \alpha_1^*; \beta^*; \alpha_2^*]$. Tais parâmetros serão utilizados para a simulação da variância condicional dos retornos conforme eq. (3.25).

$$\sigma_t^2 = \alpha_0^* + \alpha_1^* \sigma_{t-1}^2 + \beta^* e_{t-1}^2 + \alpha_2^* I_{t-1} e_{t-1}^2 \tag{3.25}$$

**2ª etapa: Estimação das volatilidades de** $t+1$ a $t+\tau$.

Com base nas inovações estimadas $\hat{z}_t$ resultantes da eq. (3.23) e nos parâmetros calibrados $[\alpha_0^*; \alpha_1^*; \beta^*; \alpha_2^*]$ referentes à eq. (3.25), são simuladas 20.000 realizações de variâncias diárias dos retornos no intervalo de $t+1$ a $t+\tau$ conforme matriz abaixo. Em que $\tau$ se refere ao maior prazo de vencimento observado dentre as opções negociadas na data t.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t+1}^2 & \sigma_{1,t+2}^2 & \cdots & \sigma_{1,t+\tau}^2 \\ \sigma_{2,t+1}^2 & \sigma_{2,t+2}^2 & \cdots & \sigma_{2,t+\tau}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{20.000,t+1}^2 & \sigma_{20.000,t+2}^2 & \cdots & \sigma_{20.000,t+\tau}^2 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Para a simulação das variâncias condicionais $\tau$ passos a frente, serão selecionadas inovações, pelo procedimento de *bootstrap,* a partir das inovações estimadas na eq. (3.23), que por sua vez alimentarão os erros presentes na eq. (3.25). Utiliza-se a variância $\hat{\sigma}_t^2$ estimada na eq. (3.26) para inicializar tais volatilidades a serem previstas $\tau$ passos a frente, em que $\tau$ se refere ao prazo de vencimento máximo observado na quarta-feira em questão.

**3ª etapa: Simulação dos preços da ação de** $t+1$ a $t+\tau$ .

Os preços das ações são simulados $\tau$ passos à frente conforme equação[8] de um MGB (Movimento Geométrico Browniano) neutro ao risco, ilustrada abaixo.

$$S_{t+\tau} = S_{t+\tau-1} \exp( r - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{t+\tau}^2 + \hat{\sigma}_{t+\tau}\hat{z}_{t+\tau} ) \qquad (3.27)$$

Na eq. (3.27) r se refere a taxa de juros diária livre de risco. Como aproximação para a referida taxa, optou-se por trabalhar com a taxa DI para diferentes prazos disponibilizada no site da BM&FBovespa. A taxa de dividendos foi obtida como uma média das taxas observadas nos últimos 3 anos (2008, 2009 e 2010).

A matriz de variâncias simuladas em (3.26) será utilizada na eq. (3.27) para obtenção dos preços $\tau$ passos à frente resultando em uma matriz de preços com dimensão 20.000 x $\tau$ .

Após a simulação dos preços da ação de $t+1$ até $t+\tau$, são realizadas correções de *martingale* em tais preços ao multiplicá-los por um fator de correção resultando nos seguintes preços corrigidos:

$$\tilde{S}[i,j] = S[i,j] * \left[ \frac{S_0 \exp\left((r-q)j\right)}{\bar{S}_j} \right] \qquad (3.28)$$

[8] A taxa de dividendos foi desconsiderada para a simulação dos preços das ações pela equação (3.28) pelo fato dos preços das opções disponibilizados na base de dados utilizada não estarem corrigidos para dividendos.

em que $S_0$ é dado pelo preço da ação de interesse na data t de apreçamento, $\overline{S}_j$ é obtido pela média da j-ésima coluna da matriz de preços simulada anteriormente e j se refere ao prazo de vencimento de interesse.

A correção realizada anteriormente conclui o processo designado por Simulação Empírica de Martingale definida a partir de uma adaptação do procedimento de Simulação de Monte Carlo. Este tipo de simulação se apresenta mais adequada para o cálculo dos preços de derivativos a partir do momento em que se impõe a propriedade de *martingale* nas trajetórias das amostras simuladas para os preços da ação subjacente. Tal imposição assegura que o preço estimado pela simulação satisfaz os limites de apreçamento de uma opção racional. Conforme Duan e Simonato (1998), isso seria correspondente a garantir que $C_0(t) > \max(S_0 - Ke^{-r_f t}, 0)$. De acordo com os autores, falhas na propriedade de *martingale* podem levar ainda a violações na paridade *call-put*.

Ainda segundo os autores, o método reduz consideravelmente o erro nos preços estimados das ações, especialmente no caso das opções dentro e no dinheiro, podendo ser facilmente utilizado como um método de redução de variância e, ao mesmo tempo, obtendo maior eficiência computacional.

**4ª etapa: Estimação dos preços das opções**

Por fim, os preços das opções de compra verificados na data t de apreçamento, cujo prazo de vencimento seja igual a $\tau$, são obtidos conforme eq. (3.29).

$$C_{SHF;j} = e^{-r\tau} E[Max(\tilde{S}_{t+\tau} - K_j; 0)] \tag{3.29}$$

Dessa forma, supondo uma opção sobre ações da VALE5, cujo prazo de vencimento seja de 15 dias e preço de exercício correspondente a R$45, o preço da opção por meio do modelo GARCH-SHF é dado por:

$$C_{SHF;j} = e^{-15r} E[Max(\tilde{S}[\ ,15] - 45; 0)] \tag{3.30}$$