# 2
# MODELOS DE BIELAS E TIRANTES

Este capítulo apresenta uma sucinta revisão bibliográfica sobre os modelos de bielas e tirantes e uma contextualização do assunto no trabalho de pesquisa. Posteriormente, é feita uma discussão sobre esses modelos e sua concepção e aplicabilidade na engenharia de estruturas. Os aspectos mais comuns de sua utilização são listados e sua formulação definida através do teorema do limite inferior da teoria da plasticidade. Estratégias usuais e avançadas para obtenção das topologias dos modelos são mostradas, e as técnicas para geração automática dos modelos comentadas.

A ideia do uso do modelo de treliça para projeto e detalhamento das estruturas de concreto não é recente. O conceito foi proposto por Ritter (1899) e Mörsch (1909) para o dimensionamento a cisalhamento de vigas fletidas. Contribuições foram feitas por Leonhardt (1965) e Lampert e Thurliman (1971) para estruturas de concreto submetidas a cisalhamento e torção. Na década de 80 um grande avanço foi feito com publicações sobre o assunto.

Existe um significante número de artigos de pesquisa e outras publicações versando sobre a aplicabilidade dos modelos de bielas e tirantes (*Strut-and-tie models* – STM). A maioria dos artigos existentes pode ser categorizada como documentos que relatam sobre os princípios gerais da modelagem dos modelos de bielas e tirantes, os processos para determinação da resistência apropriada das bielas, tirantes e nós, aplicações práticas dos modelos de bielas e tirantes em específicos modelos estruturais, requerimentos de serviço ou a combinação desses itens.

Informações esclarecendo os princípios de funcionamento geral da modelagem utilizando os modelos de bielas e tirantes são os textos mais encontrados. Geralmente, estes artigos informam os procedimentos para determinação de regiões com e sem descontinuidade, determinação das condições de contorno, concepção dos modelos de treliça no interior do contínuo de concreto, resolução dos esforços nas barras, escolha e detalhamento das armaduras e verificação das tensões nodais e das bielas de concreto. Os trabalhos feitos por Marti (1985), Collins e Mitchell (1986) e Schlaich et al (1987) são os mais completos nessa área. Além dos procedimentos usuais sobre a utilização dos modelos de bielas e tirantes, esses trabalhos sugerem valores para resistências das bielas e nós e também mostram alguns modelos básicos para elementos estruturais simples. Nestes documentos é chamada a atenção para necessidade de pesquisas mais profundas em itens como as resistências das bielas e nós, requerimentos de ancoragem e detalhamento das armaduras e concepção de modelos para elementos estruturais complexos. O trabalho feito por Bergmeister et al (1993) resume os resultados de uma série de pesquisas nesse sentido.

Uma grande produção científica também foi feita para validação dos valores de resistência das bielas e nós. A determinação de uma apropriada resistência efetiva à compressão para diferentes tipos de nós e bielas tem sido de interesse de vários pesquisadores. Pesquisas nessa área têm tentado determinar a resistência de diferentes tipos de nós e bielas através de testes de laboratório e correspondentes formulações analíticas. Bergmeister (1993) fez sugestões nesse sentido com base num banco de dados coletado em vários experimentos. Outros, como Alshegeir (1992) e Yun e Ramirez (1996), fizeram comparações com outros trabalhos e fizeram uma análise não linear em elementos finitos de maneira a determinar a resistência efetiva à compressão das bielas e nós. Apesar de uma vasta literatura sobre o assunto nessa área, ainda não há um consenso entre os pesquisadores sobre a resistência dos nós e bielas.

Também há muitas referências cujo interesse está na definição do tipo de modelo a ser aplicado em um elemento estrutural específico. Os elementos estruturais mais utilizados são as zonas de ancoragens, os consolos curtos, as vigas paredes e os blocos de fundações entre outros. Normalmente, artigos relacionados a esse assunto comparam o desempenho de um determinado elemento estrutural baseado em projetos feitos com diferentes tipos de modelos de bielas e tirantes para determinar quais deles são mais adequados para utilização prática. Maxwell e Breen (2000) fizeram estudos desse tipo em vigas paredes com furos. Além disso, alguns artigos nessa área também exploraram os efeitos da mudança dos detalhamentos das armaduras para um mesmo modelo de bielas e tirantes. Os itens que usualmente eram variados incluem mudanças de tipos de ancoragem, espaçamento dos estribos, espaçamento do reforço longitudinal e armadura de controle de fissuração. Aguilar et al (2002) fez experimentos desse tipo em modelos de bielas e tirantes aplicados a vigas parede.

Atualmente, parece ainda não haver um nível satisfatório de pesquisas que esclareçam requerimentos de serviço no projeto de bielas e tirantes. Existem ainda diferenças grandes nas especificações para controle da fissuração feitas por diversos pesquisadores indicando que não há nenhum consenso sobre qual o nível mínimo de requerimento de serviço que deve ser utilizado em projetos dessa natureza. Pesquisas que tratam com controle de fissuração em modelos de bielas e tirantes são muito limitadas. Zhu et al (2003) tem feito pesquisas relativas a aberturas de fissuras em vigas Gerber e consolos, mas não há nenhuma recomendação com relação aos efeitos da armadura de controle de fissuração. Brown e Bayrak (2006) estudaram a quantidade de armadura mínima em bielas do tipo garrafa e propuseram uma taxa de armadura mínima de armadura para controle de fissuração.

Na parte de aplicações, os maiores avanços têm sido feitos no campus de Urbana-Champaign da Universidade de Illinois/USA sobre a orientação do professor Daniel A. Kuchma idealizador do programa CAST que tem uma interface gráfica auxiliar na concepção dos modelos topológicos. O programa faz análises lineares e não lineares de modelos de bielas e tirantes e permite, além disso, seu dimensionamento e detalhamento. Vale citar entre outros, os trabalhos de Tjhin e Kuchma (2002 a,b), Tjhin e Kuchma (2007), Park e Kuchma (2007), Park et al (2010 a,b) e Reineck e Novak (2010).

No Brasil os trabalhos de Silva (1991), Oliveira (1995), Silva (1998), Alves (1998), Silva e Giongo (2000), Vieira et al (2000), Souza (2004) e Santos (2006), mostram o esforço da comunidade científica no sentido de clarear a aplicação dos fundamentos básicos dos modelos de bielas e tirantes no contexto da engenharia estrutural nacional.

## 2.1
## Concepção dos Modelos de Bielas e Tirantes

Ritter (1899) e Mörsch (1909) conceberam a clássica analogia da treliça no início do século XX. Mantendo-se as hipóteses básicas inalteradas, numerosas pesquisas foram desenvolvidas nos último seculo no sentido de aperfeiçoá-la e adequá-la aos resultados experimentais.

Schlaich et al (1987) propuseram uma generalização dos modelos de treliça tornando sua aplicação bastante geral e sendo sua utilização estendida a uma gama bastante variada de elementos estruturais. Na análise proposta o comportamento dos elementos seria considerado nos seus estados limites, tanto no estado elástico como plástico, através da modelagem. Denominou-se a esse modelo generalizado de modelo das bielas e tirantes.

No modelo das bielas e tirantes, as bielas e tirantes são representações discretas dos campos de tensões resultantes dos carregamentos aplicados e condições de contorno existentes dentro dos elementos estruturais de concreto armado. Os campos de tensões de compressão serão então idealizados através das bielas e os campos tensionais de tração pelos tirantes. Em alguns casos específicos os campos de tensões de tração poderão ser absorvidos pelas bielas. Os encontros existentes entre as bielas, tirantes e/ou cargas atuantes (ações ou reações) são denominados nós.

O modelo de bielas e tirantes apresenta como uma de suas vantagens a generalidade, ou seja, é capaz de representar, de modo aproximado, porém realista e sistemático, grande parte dos elementos estruturais de concreto armado e protendido. Isso possibilita ao engenheiro estrutural ter uma visualização físico-intuitiva bastante clara e abrangente do comportamento do elemento estrutural em consideração.

A aplicabilidade desse modelo deu-se principalmente em elementos com algum tipo de descontinuidade tais como consolos, apoios em dentes, aberturas em vigas, vigas paredes e nós de pórtico. Elementos estruturais deste tipo inicialmente eram projetados levando-se em consideração recomendações práticas ou baseando-se em experiências anteriores. Caso haja uma situação de cálculo desconhecida, este procedimento pode, no entanto, não levar a bons resultados.

Sendo assim, o modelo das bielas e tirantes propõe uma sistematização no dimensionamento desses tipos de elementos possibilitando ao projetista estrutural um entendimento bastante completo do funcionamento da estrutura. O modelo estrutural a ser adotado poderá ser inicialmente concebido através do campo de tensões elásticas ou mesmo pelo fluxo interno de tensões existente no contínuo (concreto). Isso feito, as forças atuantes nos elementos serão automaticamente calculadas por meio do equilíbrio de forças externas e internas. Assim projeta-se a estrutura do modelo pelo teorema do limite inferior da teoria da plasticidade considerando-se um modelo estaticamente admissível.

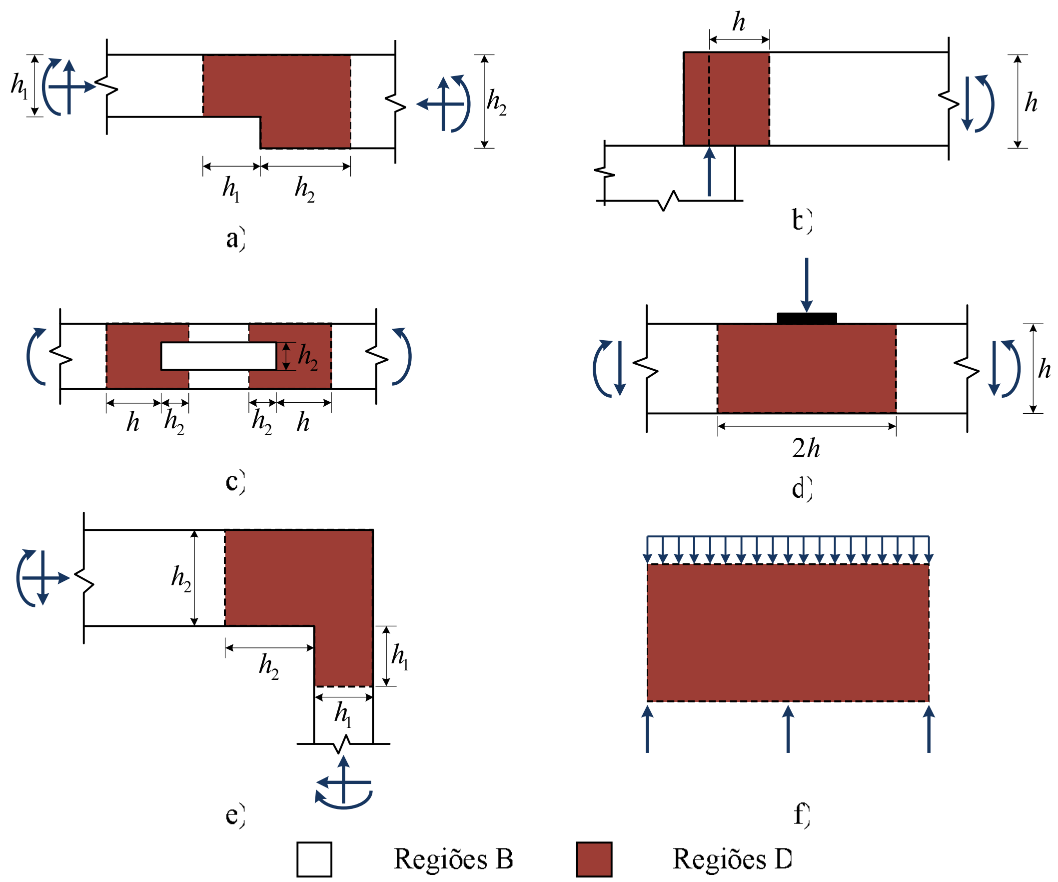



***Figura 2-1: Exemplos de regiões com descontinuidades estáticas b), d), f) ou geométricas a), c), e).***

Na concepção inicial do modelo devemos dividir a estrutura em análise em regiões B e D. Nas regiões B vale as hipóteses de Bernoulli, onde uma distribuição linear de deformações pode ser adotada ao longo da seção transversal. Por outro lado, nas regiões D, as hipóteses anteriormente definidas não permanecem válidas. Assim, pode-se definir uma nova região constituída através do princípio de Saint Venant, sendo assim denominada região de Saint Venant ou regiões D, onde o dimensionamento deverá ser formulado de uma forma mais apropriada. A Figura 2.1 ilustra regiões desse tipo.

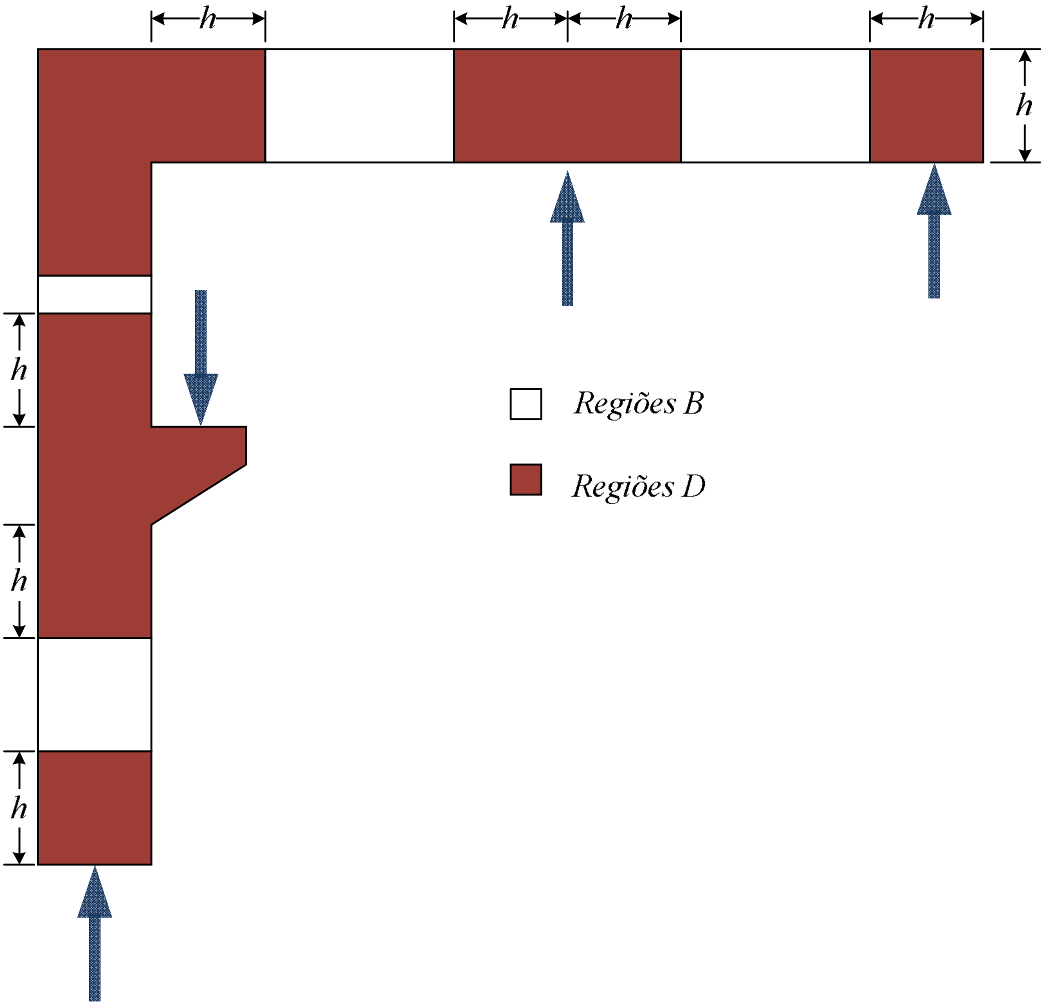



***Figura 2-2: Divisão da estrutura em regiões B e D no modelo de bielas e tirantes***

Exemplos de forças concentradas atuantes e reações de apoios são casos de descontinuidades estáticas, enquanto aberturas de furos em vigas, mudanças bruscas de geometria e nós de pórtico são exemplos de descontinuidades geométricas (Figura 2-1).

Sendo assim, após a divisão da estrutura em regiões B e D, o projeto das regiões B poderá ser feito de modo convencional. Para as regiões D, uma vez conhecidos os esforços nos contornos das mesmas via análise estrutural global, procede-se ao dimensionamento através do modelo de bielas e tirantes (Figura 2.2).

Fica claro que o modelo adotado será então função da geometria e das forças atuantes no seu contorno. Estruturas com mesma geometria, porém com carregamentos diferentes terão soluções diferentes para modelagem. Isso mostra que parâmetros do tipo relação entre vão/altura empregados usualmente na classificação de alguns tipos de estruturas com descontinuidades não são suficientes para avaliação e modelagem dos mesmos.

A utilização desses modelos requer do projetista alguma experiência ou conhecimento prévio, uma vez que o modelo escolhido deve representar o mais realisticamente possível o funcionamento da estrutura. Dessa forma pode-se comparar esse tipo de determinação necessária à estruturação do modelo como uma espécie de lançamento estrutural muito comum na concepção dos edifícios.

Sendo assim, a utilização desses modelos na prática não tem sido feita de modo intensivo, talvez pela falta de difusão dos assuntos, devido à falta de consenso entre as normas especializadas ou mesmo pela dificuldade existente na sistematização completa de sua metodologia. Isso explica a utilização muito comum de soluções práticas bastante simplificadas e muitas vezes inseguras no dimensionamento desses tipos de elementos estruturais.



## 2.2
## Definição da Topologia

Para aplicação do modelo de bielas e tirantes é necessária a determinação da topologia do modelo estrutural dentro da estrutura de concreto em análise. Essa geometria pode-se obtida com base nas cargas atuantes, ângulos entre as bielas e tirantes, as áreas de aplicação das forças atuantes (carregamentos e restrições de apoio), quantidade de armaduras dos tirantes e cobrimentos das armaduras.

A distribuição das tensões elásticas dentro da estrutura de concreto devido aos carregamentos atuantes normalmente é utilizada como uma referência inicial para determinação do posicionamento e dos ângulos entre as bielas e tirantes do modelo estrutural idealizado. As dimensões das bielas e das regiões nodais dependerão da área de aplicação das forças (ações e reações), do número de camadas das armaduras existentes e do cobrimento adotado para as mesmas.

As bielas e tirantes devem ser dispostos de tal forma que os centros de gravidade de cada elemento da treliça conjuntamente com a linha de ação das forças atuantes coincidam em cada nó. Essa é uma exigência que acaba por limitar a largura das bielas. Também o número de camadas de armadura existente e o cobrimento adotado serão responsáveis pela determinação das regiões nodais. A Figura 2.3 mostra esquematicamente como o processo de concepção do modelo é feito.

Existe uma gama variada de formas para definição do modelo a ser utilizado no dimensionamento da estrutura. Segundo Schlaich et al (1987), uma modelagem poderá ser feita considerando a geometria do modelo por meio das tensões elásticas e dimensionando a mesma pelo teorema do limite inferior da plasticidade, ou seja, considerando o campo de tensões/esforços na estrutura como estaticamente admissível. Este tipo de análise, no entanto, poderá negligenciar a capacidade última da estrutura impedindo o cálculo de sua carga de colapso conforme salientado por Souza (2004).

Uma das justificativas da utilização de tensões elásticas na modelagem é o fato de que, segundo Souza (2004), estruturas dimensionadas desta forma apresentam um bom controle de fissuração sob cargas de serviço. Isso parece ser aceito pelo código CEB-FIP Model Code 1990 (1993), uma vez que de acordo com suas instruções, armaduras que forem dimensionadas e detalhadas de acordo com os campos de tensões elásticas ficam dispensadas das verificações de serviço.

A seguir várias possibilidades correntes na literatura dos modelos de bielas e tirantes serão apresentadas e sucintamente discutidas de modo a esclarecer os pontos principais necessários ao lançamento desse tipo de modelo.

Vale salientar que a concepção de modelos para esse tipo de abordagem ainda é um ponto que necessita ser explorado, uma vez que uma excessiva dependência da experiência do projetista estrutural nessa fase pode dificultar a divulgação e aplicabilidade da metodologia.

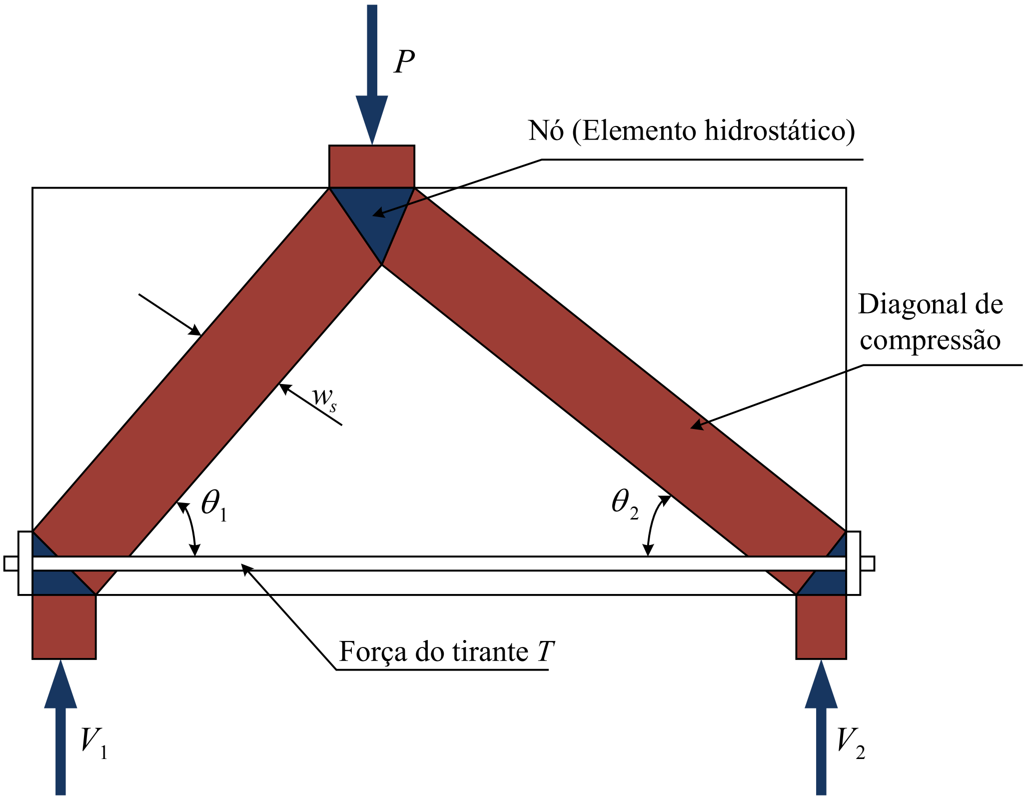



*Figura 2-3: Modelo de bielas e tirantes numa viga parede*

## 2.2.1 Processos convencionais

Em geral, o modelo de bielas e tirantes é concebido com base na sua geometria, fluxo de tensões no interior da estrutura e nas condições de apoio e distribuição dos carregamentos atuantes. Os tipos de ações atuantes, área de aplicação das ações e reações, ângulos existente entre as barras, espessura da camada para distribuição das armaduras, cobrimentos, entre outros, são os parâmetros definidores da geometria do modelo.

Conforme sugerido por Schlaich et al (1987), a idealização do modelo topológico pode ser feito com base no fluxo de tensões elásticas e de suas direções principais obtidas através de uma análise elástica. Atualmente, a escolha do modelo para dimensionamento pode seguir processos convencionais já estabelecidos ou processos de geração automática que têm sido motivo de um intenso trabalho de pesquisa nos últimos 10 anos.

A seguir os principais tipos de processos convencionais serão explicados e seus principais detalhes estabelecidos.

## 2.2.1.1 Modelos normativos

Várias normas propõem modelos de bielas e tirantes baseados em uma série de ensaios experimentais. (Figura 2.4).

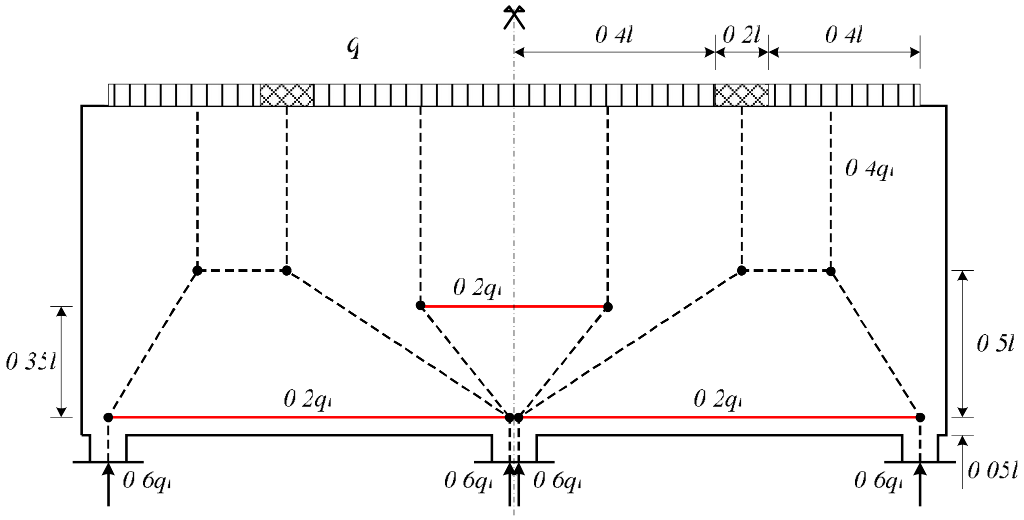
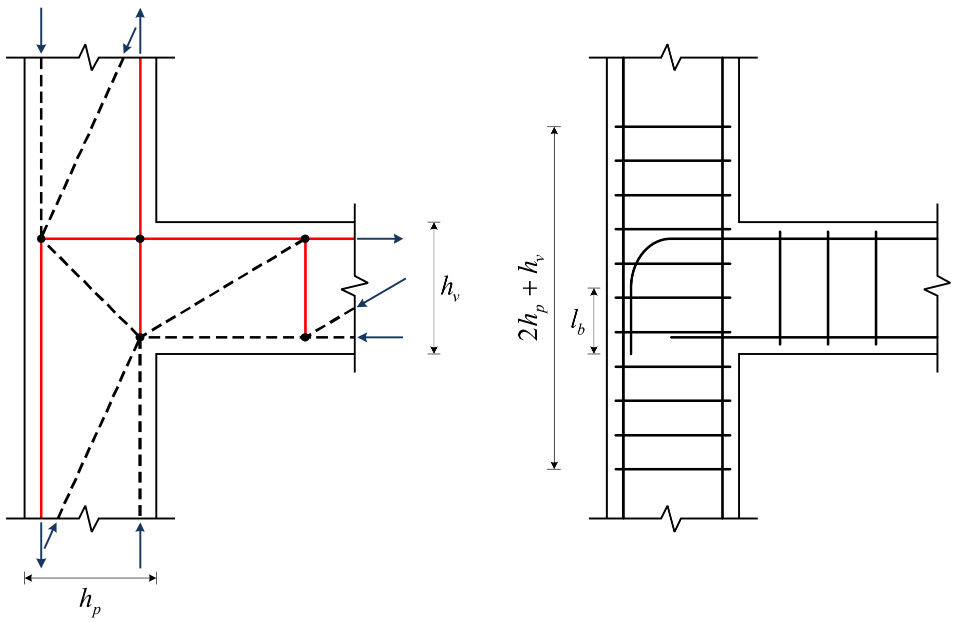


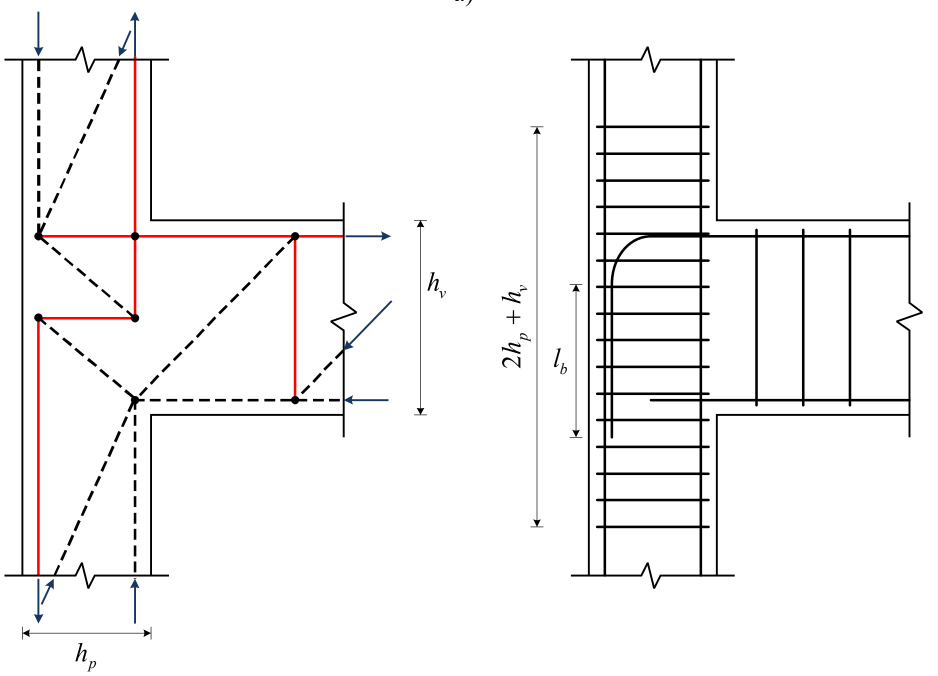

***Figura 2-4: Modelos Normativos para Viga parede com carregamento distribuído (CEB-FIP 2010).***

Modelos normativos são para elementos estruturais do tipo: blocos, consolos curtos, vigas parede, vigas com furos, etc. No entanto, uma vez que esses modelos são amarrados a parâmetros geométricos constantes da estrutura sua limitação para fins práticos é muito grande (Figura 2.4).

Alguns exemplos de modelos padronizados podem ser obtidos e verificados nos trabalhos de CEB-FIP Model Code (2010), Silva (1991), Silva e Giongo (2000), ACI 318-05 (2005), entre outros (Figuras 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8).




a)




b)

***Figura 2-5: Modelos Normativos da ligação de viga intermediária-pilar extremo (Silva, 1991): a) $h_v \cong h_p$ e b) $h_v > h_p$***

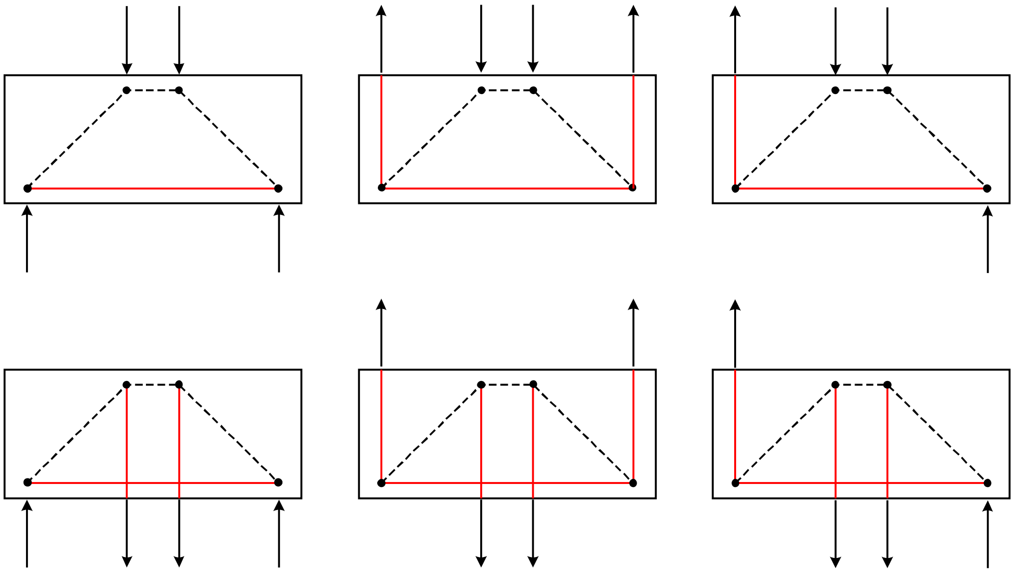


*Figura 2-6: Modelos Normativos para Vigas parede com diversos carregamentos (CEB-FIP 2010).*

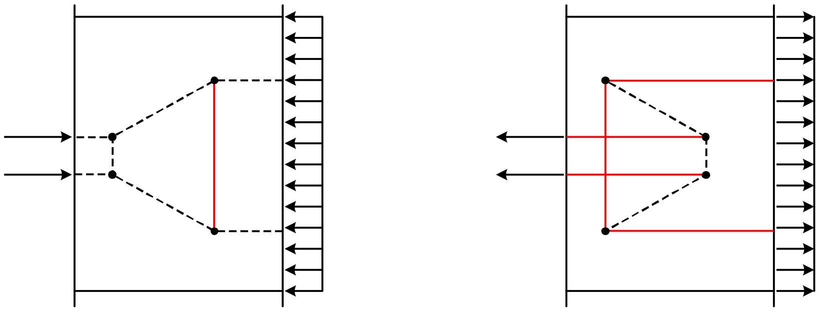


*Figura 2-7: Modelos Normativos para Zonas de ancoragem (CEB-FIP 2010).*

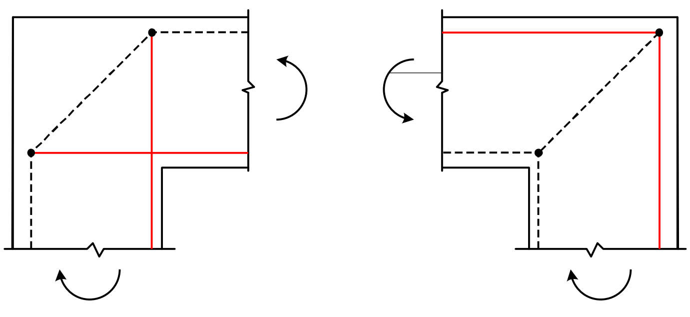


*Figura 2-8: Modelos Normativos para Nós de pórtico submetido à flexão (CEB-FIP 2010).*

## 2.2.1.2
## Análise elástica

Outra abordagem utilizada na obtenção de modelos de bielas e tirantes é através do fluxo de tensões obtido por uma análise linear elástica utilizando algum programa que possua o método dos elementos finitos. Souza (2004) comenta que a grande vantagem desse tipo de abordagem é que o modelo obtido assim cumpre o Estado Limite de Serviço - ELS e os Estados Limites Últimos - ELU conjuntamente. Além disso, o mesmo autor comenta que vários pesquisadores recomendam a disponibilização dos elementos (bielas e tirantes) nas direções das direções principais encontradas na análise linear elástica. Com base nas direções principais, pode-se definir uma treliça idealizada dentro da estrutura e a partir daí verificar os esforços atuantes, posteriormente verificando se as tensões resistentes (bielas, tirantes e regiões nodais) e parâmetros de ancoragem são suficientes para assegurar o equilíbrio da estrutura.

Um exemplo de estrutura com geometria complexa é mostrado na Figura 2.9.

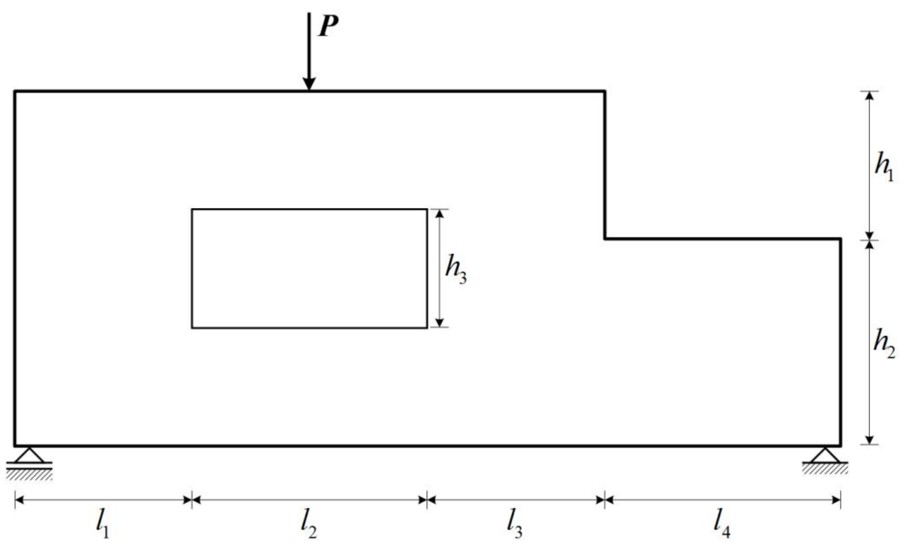



***Figura 2-9: Estrutura com geometria complexa.***

As Figuras 2.10 e 2.11 mostram os resultados de uma análise elástica linear pelo método dos elementos finitos (Finite Element Method - FEM) para deslocamentos e fluxo das tensões principais. O programa ELAST2D (Martha, 2008) desenvolvido pelo grupo de pesquisa da PUC Rio em linguagem matlab foi utilizado. A escala utilizada para os deslocamentos foi exagerada para dar uma ideia clara ao projetista de como a estrutura plana irá se comportar. A estrutura plana foi concebida como um estado de tensão plana com valor de módulo de elasticidade do concreto de 2000 $GPa$ e um coeficiente de Poisson de 0,18. O padrão de cores adotado, para o fluxo de tensões principais é azul para tensões principais de compressão e vermelho para tensões de tração (Figura 2.11). As armaduras e bielas do modelo deverão ser colocadas de modo compatível com essa distribuição de tensões principais.

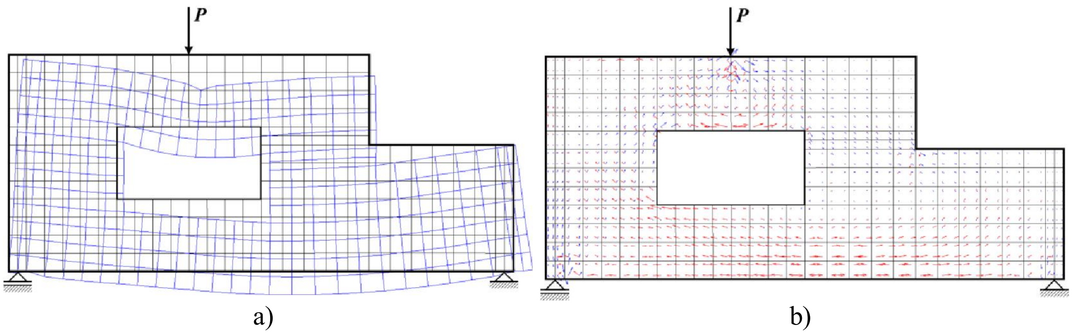
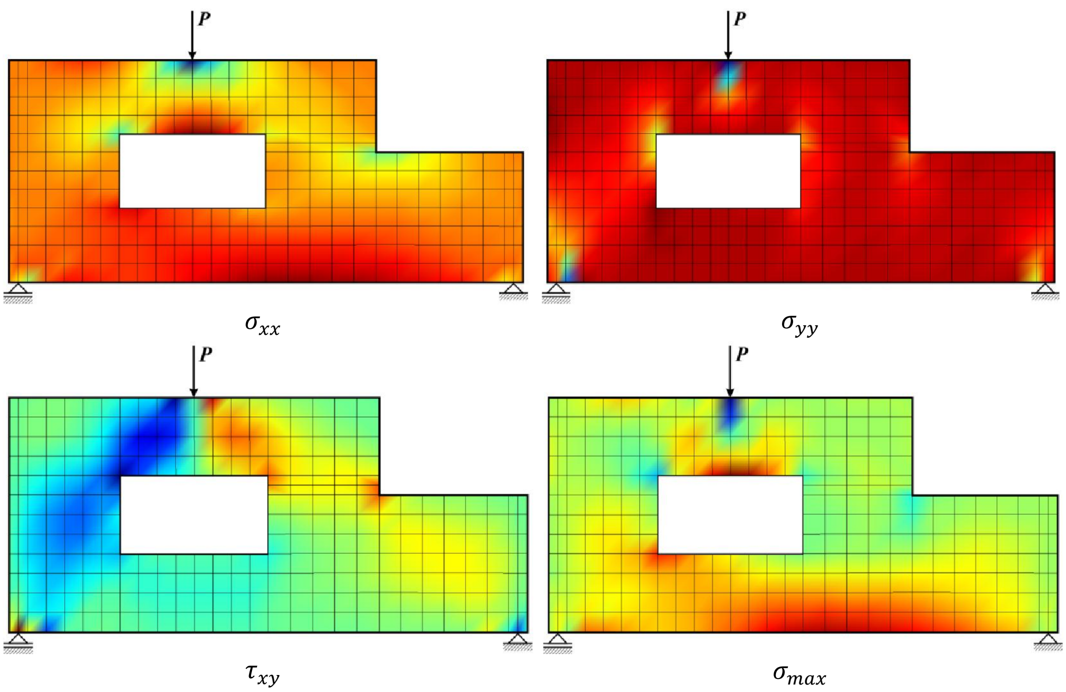



***Figura 2-10: Resultados de uma análise elástica linear pelo FEM: a)Deslocamentos e b) Fluxo de tensões principais.***

São apresentados na Figura 2.11 os mapas coloridos dos campos de tensões do exemplo: tensões normais em x, tensões normais em y, tensões tangenciais xy, tensões principais máximas, mínimas e de cisalhamento máximo.



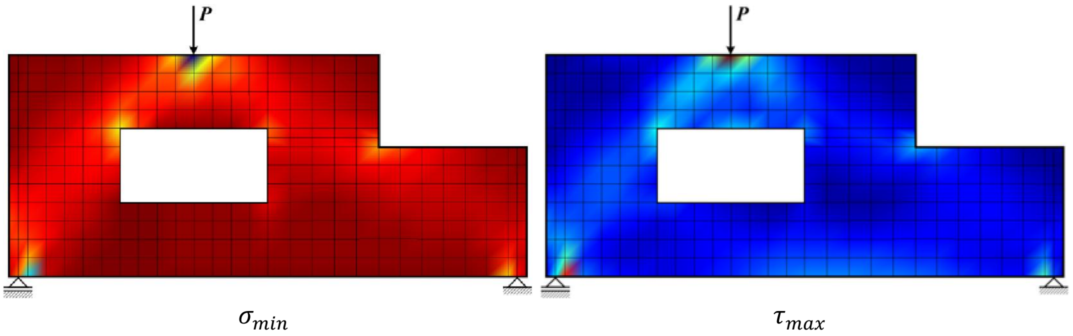



***Figura 2-11: Mapas coloridos dos campos de tensões.***

Conforme proposto em Schlaich et al (1987) o modelo de bielas e tirantes deve ser concebido de forma compatível com o fluxo de desenvolvimento do campo de tensões atuantes via análise elástica. Um exemplo feito dessa maneira é mostrado na Figura 2.12. Conforme mencionado, uma das propostas desse tipo de abordagem é buscar uma garantia de que o modelo possua um bom desempenho com relação aos Estados Limites de Serviço.

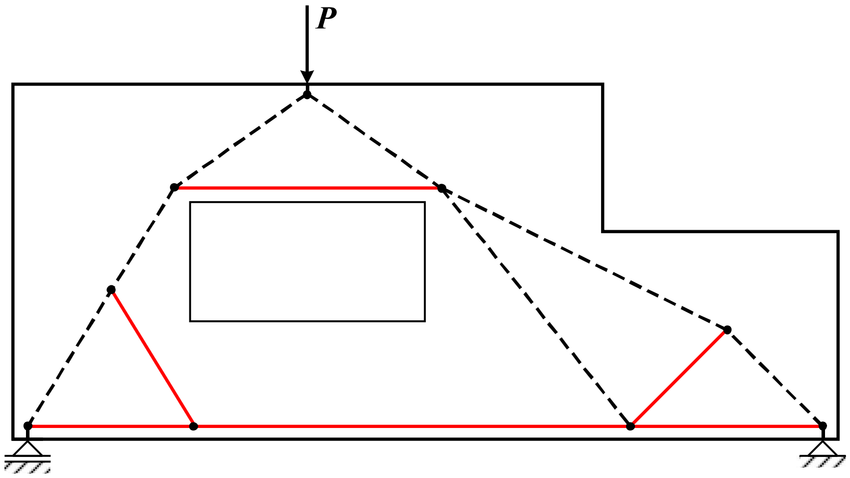



***Figura 2-12: Modelo de bielas e tirantes concebido via análise elástica.***

## 2.2.1.3
## Caminho de cargas

Neste procedimento, assegura-se que o equilíbrio externo da região modelada seja obtido através da satisfação das equações de equilíbrio via carregamento atuante e restrições de apoio existentes. Após essa fase o encaminhamento das cargas no interior da estrutura será obtido via campos de tração e compressão que serão lançados como bielas e tirantes no modelo.

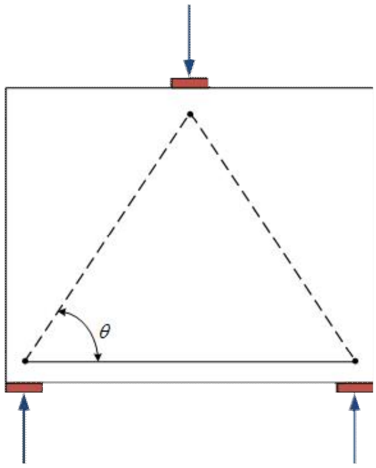



*Figura 2-13: Caminho de carga num modelo simples de viga parede.*

Carregamentos distribuídos deverão ser substituídos por carregamentos concentrados equivalentes, de modo que no interior da estrutura seja definido um determinado caminho de carga que possa conduzir as mesmas a encontrar as forças de reação equilibrantes. Os caminhos de carga devem ser alinhados e não devem se interceptar. Também duas cargas opostas devem ser interligadas por caminhos de carga os mais curtos possíveis. Caso apareçam curvaturas nos caminhos de carga podem significar concentração de tensões.

Uma vez definidos todos os caminhos de carga entre as forças (atuantes e reações), um polígono formado por linhas deverá ser definido dentro da estrutura. Considerando-se os carregamentos essas linhas serão formadas por bielas (linhas interrompidas) e tirantes (linhas contínuas), acrescentando-se então outras linhas necessárias ao equilíbrio de cada nó existente. A Figura 2.13 mostra um exemplo simples onde o processo de encaminhamento de cargas é aplicado.

#### 2.2.1.4
#### Padrão de fissuração dos modelos

A visualização dos padrões de fissuração obtidos via ensaios para posterior lançamento do modelo de bielas e tirantes é outra opção para concepção dos modelos. Através da identificação desses padrões é possível idealizar os possíveis caminhos para colocação dos tirantes e bielas uma vez que as fissuras normalmente têm direções perpendiculares às tensões de tração e são paralelas às tensões principais de compressão (Souza, 2004).

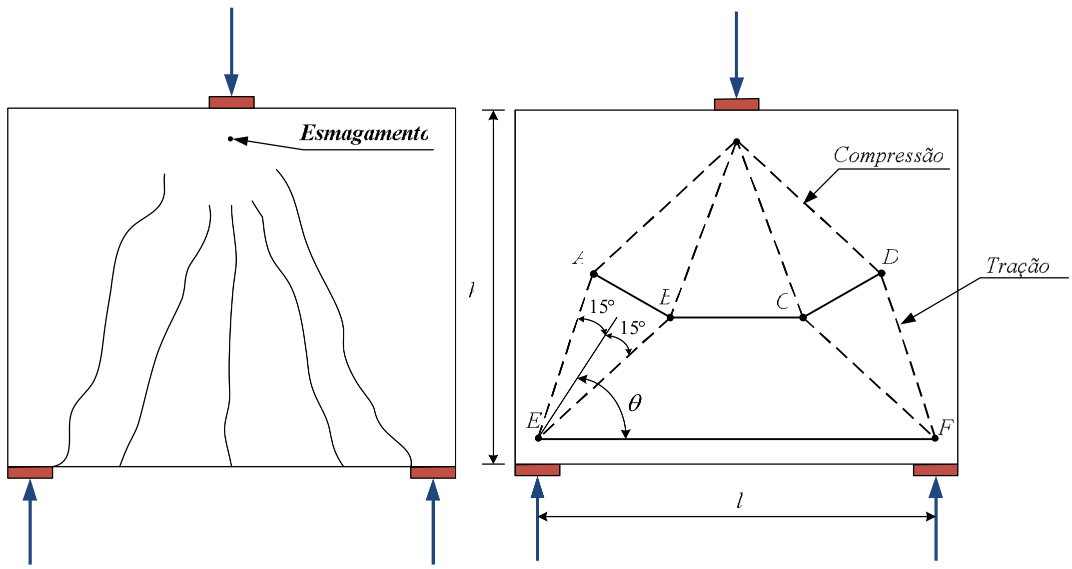



*Figura 2-14: Modelo de bielas e tirantes via padrão de fissuração (Schlaich et al., 1987).*

Um exemplo de uma viga parede com um correspondente padrão de fissuração e um modelo de bielas e tirantes associado pode ser visto na Figura 2.14.

Na prática, no entanto, é difícil ou mesmo impossível a obtenção de uma topologia compatível tanto para modelos simples quanto complexos com esse tipo de metodologia (Yindeesuk, 2009).

### 2.2.2
### Processos automáticos de geração

Ate agora, uma série de trabalhos tem sido feitos no sentido de automatizar a concepção do modelo de bielas e tirantes dentro da estrutura de concreto. Isso se deve à problemática de dispor de forma mais adequada possível os elementos dentro da estrutura, levando a um modelo eficiente. Essa tarefa nem sempre é simples e em alguns casos onde a geometria é complexa, pode ser bastante difícil uma solução coerente. Isso poderia conduzir a modelos com pouca segurança uma vez que não representem o funcionamento correto da estrutura.

Assim a perspectiva de uma metodologia que auxilie o projetista de estruturas nessa tarefa pode ser bastante interessante do ponto de vista da utilização do modelo. Uma explicação bastante completa e que abrange uma série de trabalhos nesta área de pesquisa e suas principais características pode ser encontrada em Souza (2004). Neste trabalho apenas serão mostrados aspectos relativos à utilização da otimização topológica nesse tipo de modelagem por ser, na opinião do autor, uma ferramenta mais completa e eficiente que as demais propostas.

Otimização topológica pode ser entendida como um método computacional capaz de lançar estruturas através da distribuição ótima de material em uma determinada região do espaço. Para isso é utilizada uma combinação do método dos elementos finitos (*Finite Element Method* - FEM), um modelo para o comportamento do material e métodos de otimização. Assim, uma região do espaço é discretizada em elementos finitos de modo que se possa analisar seu comportamento e, então, é distribuído material de forma racionalizada através de algoritmos de otimização.

Uma vantagem da otimização topológica é sua capacidade de fornecer o arranjo topológico ótimo de um componente estrutural ou mesmo da própria estrutura, para uma determinada aplicação. Assim, este método pode ser aplicado durante a fase do projeto conceitual, diferentemente dos métodos tradicionais de otimização, como a otimização paramétrica ou de forma, que só podem ser aplicados após a definição de um arranjo topológico da estrutura. Desse modo, a otimização topológica pode ser definida como um processo de síntese estrutural.

Um problema típico de otimização topológica é a seleção da melhor configuração possível para o projeto de uma estrutura. Na última década, muita atenção tem sido dada para o desenvolvimento dos métodos de otimização topológica do contínuo. Bendsoe e Kirkuchi (1988) propuseram um método de otimização baseado em homogeneização que trata a otimização topológica do contínuo como um problema de redistribuição dos materiais. Atualmente existem uma série de técnicas utilizadas na resolução dos problemas de otimização topológica. A adotada neste trabalho é a formulação SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) que será descrita em detalhes no capítulo 3.

A formulação via método SIMP surgiu como uma opção simples de introduzir o material com propriedades intermediárias similares às que se obtêm com o uso de microestruturas e técnicas de homogeneização. No entanto, no caso da metodologia SIMP, esse material intermediário, normalmente definido na forma de densidade artificial, é usado apenas como artifício matemático, ao passo que na técnica de homogeneização o material intermediário pode corresponder a um material composto ou microestruturado. A função densidade artificial definida pelo SIMP é então utilizada como variável de projeto, definida no domínio de projeto, no intuito de determinar quais regiões devem possuir material e quais devem ser vazias.

Considerando a necessidade de definição de regiões vazias ou não, representa-se o material sólido como uma densidade artificial $\rho = 1$ e o vazio $\rho = 0$, variando $\rho$ entre esses dois limites. No presente contexto, as densidades artificiais intermediárias não têm nenhum interesse prático, logo técnicas que penalizem estes valores devem ser utilizadas no intuito de se evitar a incidência desse tipo de região no domínio analisado.

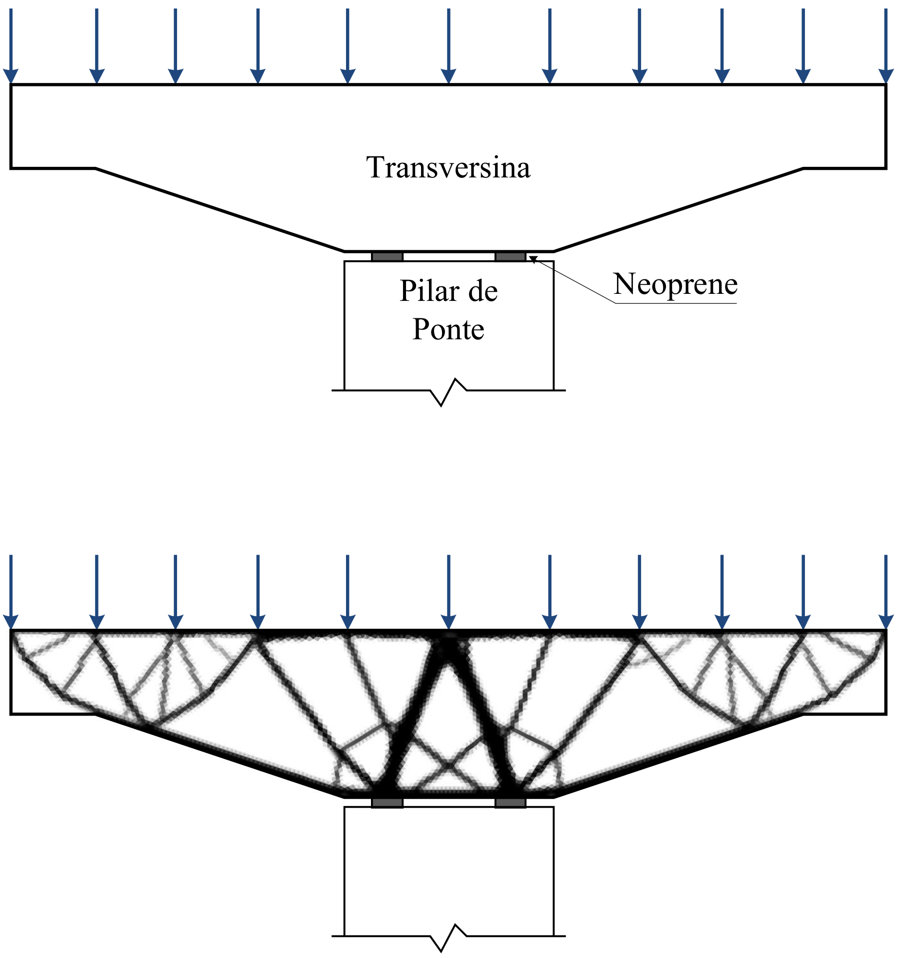



*Figura 2-15: Topologia de uma transversina de ponte via otimização topológica.*

Apesar da utilização da otimização topológica já estar bem difundida nas áreas da engenharia aeronáutica e mecânica, na engenharia civil sua aplicação ainda é muito recente e há uma necessidade muito grande de pesquisas nessa área. Um dos maiores inconvenientes na sua aplicação como observado por Souza (2004), é a disposição aleatória das armaduras, que para fins práticos poderia levar a um detalhamento não usual (Figura 2.15).

Conforme será apresentado posteriormente no capítulo 3, o presente trabalho propõe a técnica dos elementos indutores como uma opção para esse tipo de problema. Os elementos indutores podem ser utilizados, como barras de armaduras pré-fixadas, que entrarão no processo de otimização influenciando o encaminhamento de cargas. Também possibilita ao projetista estrutural a obtenção de novos modelos e de uma interatividade com o processo de otimização bastante interessante.

Vale citar os trabalhos de Liang et al (2000 a,b,c) que utilizam uma técnica semelhante, sem o uso dos elementos indutores, porém com uso de um processo de otimização diferente na obtenção de vários modelos de otimização topológica.

No capítulo 3 uma explicação bastante detalhada sobre a aplicação da otimização topológica, com a presença de elementos indutores ou não na obtenção dos modelos, será feita. No capítulo 3 alguns exemplos serão apresentados e os resultados avaliados para validação da metodologia proposta.

## 2.3
## Detalhamento do Modelo

Um projeto executado com os modelos e bielas e tirantes envolve tipicamente os seguintes passos:

I) Definição das descontinuidades e isolamento das regiões D. Isso pode ser feito através da utilização do princípio de St. Venant.

II) Computar as resultantes de forças em cada contorno da região D. As tensões resultantes calculadas entre as regiões B e D poderão ser consideradas como forças pontuais equivalentes.

III) Idealizar um modelo de treliça que transfira as resultantes de forças através da região D. Os eixos das bielas e tirantes devem ser orientados para coincidirem aproximadamente com os eixos dos campos de tensões principais de compressão e tração, respectivamente. Uma análise elástica ou o método do caminho de cargas poderá ser utilizado para concepção do modelo topológico da treliça no interior do contínuo de concreto.

IV) Calcular as forças nas barras da treliça. Para modelos estaticamente determinados os esforços solicitantes podem ser facilmente obtidos. Para modelos hiperestáticos uma solução de mínima norma Euclidiana a ser detalhada no item 2.4 desse capítulo poderá ser utilizada.

V) Determinar as larguras efetivas das bielas e zonas nodais, considerando as forças atuantes do passo anterior e a resistência efetiva do concreto. Em alguns casos poderá haver necessidade de ajuste da geometria e novamente determinação dos esforços do item anterior.

VI) Calcular as seções de armaduras necessárias para os tirantes considerando a tensão de resistência do aço utilizado. As armaduras devem ser detalhadas de modo apropriado a garantir a ancoragem necessária.

VII) Uma verificação final deverá ser feita no nível tensional das bielas e nós como também uma apropriada definição da armadura de pele mínima a ser utilizada para controle da fissuração do elemento estrutural.

A verificação dos elementos estruturais deve ser feita através do dimensionamento correto que defina as seções necessárias aos esforços atuantes e também para garantir que a transferência de forças aconteça nas regiões nodais.

Uma série de fatores como perturbações devido a fissuras e armaduras, estados de confinamento e multiaxiais podem influenciar nos limites tensionais do material concreto. Assim, limitam-se os valores resistentes para bielas e regiões nodais.

De forma a obter um comportamento dúctil frente ao estado limite último para o modelo de bielas e tirantes, é aconselhável garantir que os elementos de armadura ou tirantes escoem antes que os elementos de concreto representados pelas bielas e regiões nodais entrem em ruína.

Todo o procedimento para o desenvolvimento dos modelos de bielas e tirantes é ilustrado na Figura 2.16:

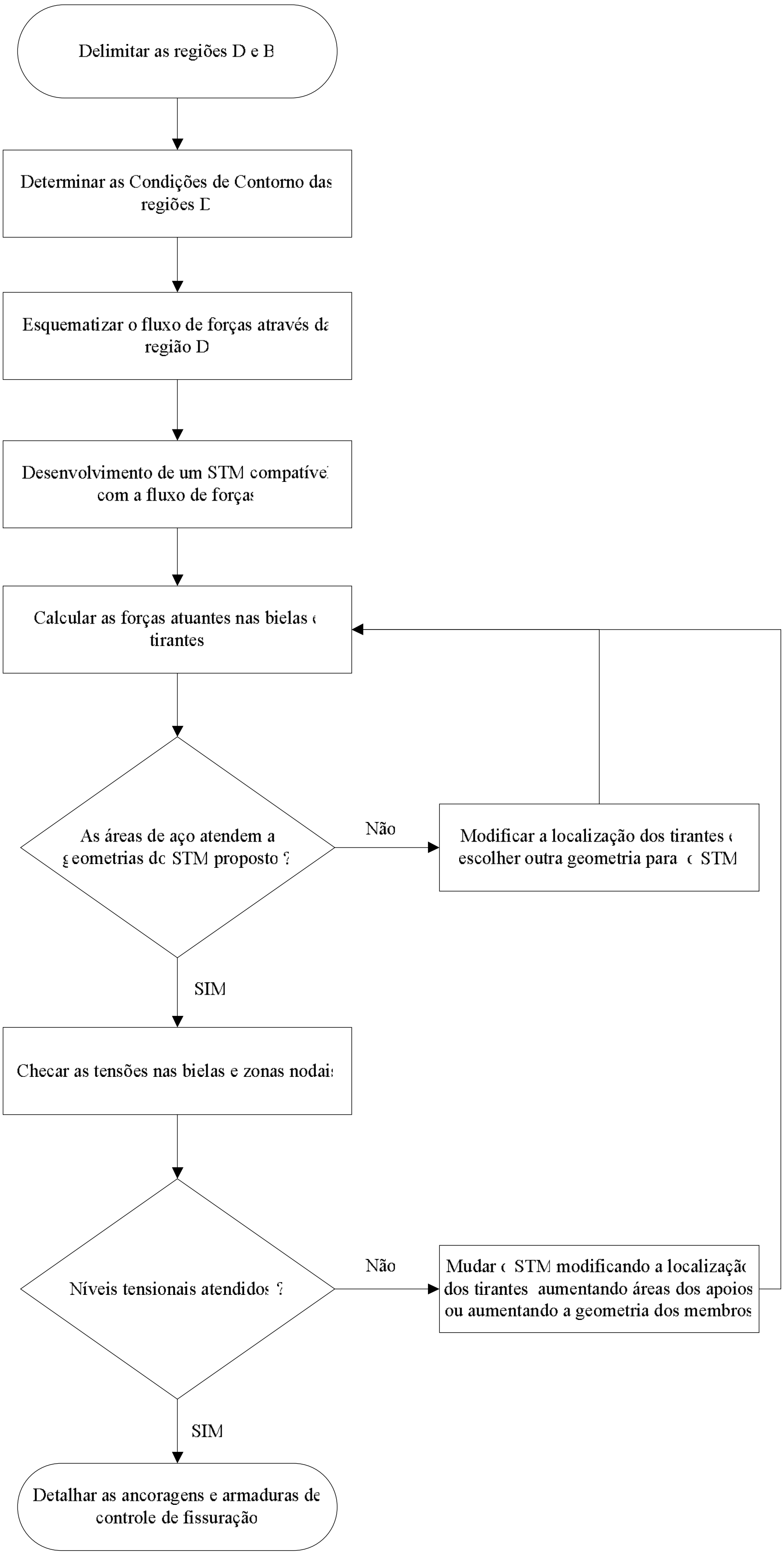



***Figura 2-16: Fluxograma ilustrativo dos STM (Brown e Bayrak, 2006)***

### 2.3.1
### Plasticidade em concreto armado

Em geral, pretende-se que as estruturas tenham um comportamento linear nas situações usuais de serviço. No entanto, quando uma estrutura atinge o colapso, já deixou de apresentar comportamento elástico-linear. Assim sendo, para uma determinada estrutura e um carregamento associado a ela, a carga de colapso depende apenas da capacidade plástica do material e não do seu comportamento antes do colapso. Logo, a verificação da segurança aos Estados Limites Últimos é feita recorrendo a um modelo rígido-plástico.

Num procedimento rígido-plástico ou plástico perfeito do material as deformações elásticas são desprezadas, considerando-se apenas as deformações plásticas admitindo então a existência de um patamar de escoamento. O método de cálculo estrutural que envolve esse tipo de metodologia é denominado de análise plástica limite ou análise limite. Nesse tipo de método de cálculo um procedimento através de tentativas é adotado.

A análise limite de estruturas baseia-se num conjunto de teoremas fundamentais: o teorema estático ou do limite inferior, o teorema cinemático ou do limite superior e o teorema da unicidade. No procedimento adotado nessa pesquisa será apenas utilizado o teorema estático ou teorema do limite inferior uma vez que é formulado pela imposição da verificação das condições de equilíbrio e de escoamento. Isso significa estudar distribuições de esforços estáveis e estaticamente admissíveis para os quais as tensões atuantes são inferiores a tensão de escoamento.

Toda a concepção dos modelos de bielas e tirantes é fundamentada no teorema do limite inferior. Assim sendo, a carga obtida através do modelo estará a favor da segurança conforme será descrito a seguir.

Na verdade, o modelo de bielas e tirantes só faz sentido no estado de colapso plástico, isto é, somente neste estágio é possível conceber um modelo de barras que represente o comportamento da estrutura.

## 2.3.2 Teorema do limite inferior

Os teoremas da análise limite foram formulados primeiramente por Gvozdev (1938) e Drucker et al (1952) de forma independente, para corpos com comportamento rígido-plástico perfeito. Esses teoremas fornecem limites inferiores e superiores para a verdadeira carga de colapso da estrutura. No caso dos modelos de bielas e tirantes envolvidos nesse trabalho de pesquisa apenas o teorema do limite inferior será utilizado uma vez que conduz a modelos cuja aproximação da carga real de colapso seja a favor da segurança.

Podemos enunciar o teorema do limite inferior na forma: "Se a carga atuante tem uma magnitude que permita encontrar um campo de tensões, satisfazendo às condições de equilíbrio no interior e no contorno, e em qualquer ponto do corpo essas tensões estejam satisfazendo um critério de resistência do material, então a carga atuante é menor ou no máximo igual à carga de colapso real da estrutura. ¨ (Santos, 2003).

Assim sendo, se um campo de tensões se enquadra na definição do Teorema do Limite Inferior anteriormente enunciado, esse campo é dito seguro ou estaticamente admissível. Uma vez que a carga de colapso real da estrutura é sempre maior ou igual a uma carga atuante referida a um campo de tensões estaticamente admissível, os limites inferiores são sempre a favor da segurança.

Sendo o carregamento externo aplicado representado por um parâmetro estritamente positivo $\lambda_S$ que guarde uma relação proporcional com as componentes individuais das cargas, tem-se o chamado carregamento proporcional que provoca colapso (colapso estático). O teorema pode então ser utilizado para encontrar valores de carga menores ou iguais à carga de colapso correspondente ao fator de proporcionalidade $\lambda_R$ , denominado fator de colapso.

Dado um fator de carga $\lambda_S$, para o qual existe um campo de tensões estaticamente admissível, então:

$$\lambda_S \leq \lambda_R \qquad (2.1)$$

Conclui-se então que dadas duas soluções de distribuição de tensões estaticamente admissíveis, a que conduz a maior carga de colapso é a mais próxima da verdadeira carga de colapso.

### 2.3.3 Análise limite

Inicialmente, para resolução do problema com base na metodologia proposta, um problema de análise limite relativo ao teorema do limite inferior deverá ser montado para o modelo rígido-plástico relativo ao modelo topológico considerado. Sua principal vantagem está na facilidade de cálculo da carga de ruptura ou colapso pelo fato de utilizar a análise rígido-plástica, o que simplifica sobremaneira as leis constitutivas (Jirásek e Bazant, 2000).

Numa análise limite, as variáveis que caracterizam os campos de tensões, ditas variáveis estáticas, relacionam-se entre si com as cargas aplicadas através de expressões que traduzem o equilíbrio. A condição de resistência representada pela superfície de escoamento constitui, juntamente com as equações de equilíbrio, as principais restrições do problema de programação matemática, correspondente ao problema de análise limite pelo limite inferior. A linearização da superfície de escoamento, quando possível, transforma o problema num caso particular da programação matemática, em que todas as relações são lineares, denominado *programação linear (PL).*

Nesse trabalho o teorema do limite inferior é utilizado para formulação de um problema de análise limite. Como o modelo de bielas e tirantes é usado, as incógnitas, que representam os campos de tensões, serão as forças internas nas barras da treliça e o fator de carga estático $\lambda_S$.

A função objetivo do problema de programação linear é maximizar o fator de carga $\lambda_S$ para um campo de forças estaticamente admissível, onde N é vetor das incógnitas do problema de PL e o vetor das cargas aplicadas F em equilíbrio com N. As forças N devem satisfazer ainda ao critério de resistência. O problema pode então ser formulado na forma:

$$\text{Maximizar: } \lambda_S \qquad (2.2)$$

$$\text{Sujeito a: } LN = \lambda_S F \tag{2.3}$$

$$N_i^l < N_i < N_i^u \tag{2.4}$$

Onde :

L – matriz de equilíbrio estático

N– vetor dos esforços internos das barras

F – vetor das cargas aplicadas

$N_i^u$ e $N_i^l$ - são respectivamente os limites superior e inferior das forças nas barras

Na formulação proposta um problema de programação linear para aplicação do teorema do limite inferior é montado, com o objetivo de maximizar a carga de colapso, utilizando o modelo de bielas e tirantes proposto por Schlaich et al (1987). Posteriormente, no capítulo 4, esse programa de análise limite será utilizado como um subproblema da análise de confiabilidade a ser executada via o método de FORM. Para cada iteração os valores randômicos das variáveis serão gerados e uma função de falha global será verificada para determinação da probabilidade de falha da estrutura.

### 2.3.4 Metodologias semi-probabilísticas de projeto de STM

Atualmente, um número bastante expressivo de códigos normativos permitem a utilização do modelo de bielas e tirantes no dimensionamento de estruturas especiais de concreto armado e protendido. Alguns exemplos são ACI 318-05 (2005), EUROCODE 2 (1999), CEB-FIP Model Code 1990 (1993), entre outros.

As orientações normativas presentes nos códigos são baseadas atualmente, na sua maioria, em metodologias semi-probabilísticas de projeto. Em métodos dessa natureza, a verificação da segurança estrutural é baseada em dois preceitos principais: modelos teóricos para avaliação da capacidade de elementos estruturais baseados em pesquisas recentes e aplicação de fatores de ponderação que considerem as incertezas das variáveis de ação e resistência que devem ser determinados por consenso ou calibração com as normas correspondentes em tensões admissíveis (Nogueira, 2005). Nesse tipo de metodologia conhecida como Estados Limites, a segurança é verificada pela comparação das solicitações atuantes no elemento estrutural com as correspondentes capacidades resistentes minoradas. Essas majorações e minorações são feitas considerando coeficientes parciais de segurança que têm como objetivo cobrir as incertezas presentes nas variáveis de projeto.

Em vista da numerosa literatura sobre a aplicação de modelos de bielas e tirantes em códigos normativos cinco das principais publicações sobre o tema foram selecionadas de acordo com a abrangência e importância. Nesse sentido, as orientações apresentadas por Schlaich et al (1987), a norma americana ACI 318-05 (2005), o EUROCODE 2 (1999), CEB-FIP Model Code 1990 (1993) e a proposta de norma feita por Souza e Bittencourt (2003) foram escolhidas. Na NBR 6118 não há atualmente nenhuma orientação normativa sobre o assunto.

A seguir, os principais elementos estruturais componentes dos modelos de bielas e tirantes e seus respectivos valores de resistência apresentados segundo as orientações normativas vigentes.

#### 2.3.4.1 Bielas

As bielas no modelo de bielas e tirantes são modeladas através de discretizações dos campos de tensão de compressão dentro da estrutura de concreto. Dependendo da forma como as tensões de compressão se distribuem por meio da estrutura podem-se ter campos de tensões de compressão diferentes. Três configurações típicas são normalmente consideradas:

- Distribuição de tensões radial: neste tipo de idealização considera-se um campo de tensões com uma curvatura desprezível. Normalmente são encontradas onde as forças são introduzidas e propagadas de maneira suave. As tensões transversais não se desenvolvem neste tipo de campo (Figura 2-17).

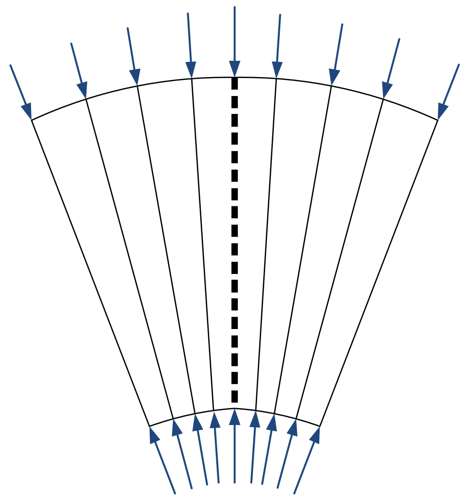


*Figura 2-17: Distribuição de tensões radial.*

- Distribuição de tensões em linhas curvilíneas com afunilamento: A curvatura do campo de tensões é considerada acentuada. A difusão de tensões neste campo provoca compressão biaxial ou triaxial abaixo das forças atuantes. As tensões de tração nesse caso são consideráveis (Figura 2-18).

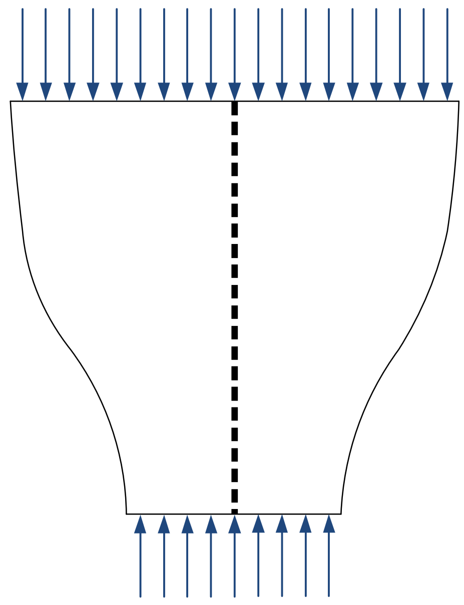


*Figura 2-18: Distribuição de tensões em linha com afunilamento.*

- Distribuição de tensões paralela: Não existe curvatura neste campo de tensões. Sendo assim, as tensões se distribuem uniformemente, sem perturbação. Não há o desenvolvimento de tensões de tração transversais (Figura 2-19).

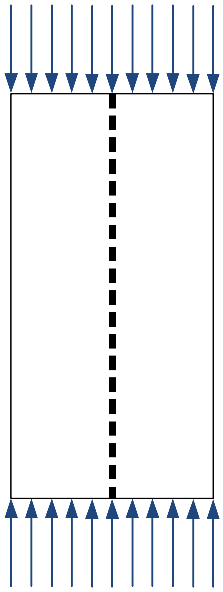


*Figura 2-19: Distribuição de tensões paralelas.*



### 2.3.4.1.1
### Parâmetros de resistência das bielas

A resistência à compressão das bielas é menor que a resistência à compressão de corpos de prova cilíndricos em ensaios de compressão. Isso é explicado devido ao fato dos efeitos de tração da armadura que as atravessa. Existe uma série de valores propostos na literatura que recomendam parâmetros para o cálculo da resistência efetiva nas bielas.

Os trabalhos de Silva e Giongo (2000) e Souza (2004) apresentam valores propostos por diversos autores e normas que ainda não têm um consenso na sua utilização.

Está fora do escopo deste trabalho uma discussão definitiva sobre esse tema. No entanto, serão utilizados alguns valores propostos por algumas normas e autores, de forma a comparar os valores de índice de confiabilidade como parâmetro para avaliação do desempenho do modelo adotado. No capítulo de exercícios um exemplo será feito com essa finalidade.

Os valores a serem observados nesse trabalho serão:

➢ Schaefer e Schlaich (1988,1991)

Para um estado uniaxial de tensões sem perturbação:

$$f_e = 1.0\, f_{cd} \tag{2.5}$$

Para campos de compressão com fissuras paralelas às tensões de compressão:

$$f_e = 0.8\, f_{cd} \tag{2.6}$$

Para um campo de compressão com fissuras inclinadas:

$$f_e = 0.6\, f_{cd} \tag{2.7}$$

Sendo $f_{cd}$ a resistência de cálculo à compressão do concreto.

➢ CEB-FIP Model Code (1993)

Para zonas não fissuradas (MPa):

$$f_e = 0.85 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250}\right] f_{cd} \tag{2.8}$$

Para zonas fissuradas (MPa):

$$f_e = 0.60 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250}\right] f_{cd} \tag{2.9}$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1.5} \tag{2.10}$$

Sendo estes valores validos para uma deformação de compressão máxima no concreto igual a:

$$\varepsilon_{cu} = 0.004 - 0.002 \frac{f_{ck}}{100} \tag{2.11}$$

➢ ACI – 318 (2005)

$$\phi \cdot F_{ns} \geq F_u \tag{2.12}$$

$$F_{ns} = f_{cu} \cdot A_c \tag{2.13}$$

$$f_{cu} = 0.85 \cdot \beta_s \cdot f_c \tag{2.14}$$

$\phi = 0.85$: para regiões D, conforme MacGregor (1997)

$\beta_s = 1.0$: para bielas uniformes de seção constante;

$\beta_s = 0.75$: para bielas tipo garrafa que satisfaçam (I);

$\beta_s = 0.6\lambda$: para bielas tipo garrafa que não satisfaçam (I);

(I) – Taxa de armadura que atravessa a biela(ver ACI item 3.3)

➢ EUROCODE 2 (1999)

Para campos de compressão paralelos ou bielas prismáticas (MPa):

$$f_e = 0.70 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250}\right] f_{cd} \geq 0.50 \cdot f_{cd} \tag{2.15}$$

Para bielas com fissuras paralelas à sua direção e ancorando armadura transversal (MPa):

$$f_e = 0.80 \cdot \alpha \cdot f_{cd} \geq 0.50 \cdot f_{cd} \tag{2.16}$$

Para bielas com transferência de compressão entre fissuras de abertura normal (almas de vigas) (MPa):

$$f_e = 0.70 \cdot \alpha \cdot f_{cd} \tag{2.17}$$

Para bielas com transferência de compressão entre fissuras de grande abertura (elementos tracionados) (MPa):

$$f_e = 0.50 \cdot \alpha \cdot f_{cd} \tag{2.18}$$

Sendo o valor de $\alpha$ igual 0.85 e $f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1.5}$ (Souza , 2004).

➢ Souza e Bittencourt (2003)

Para bielas prismáticas:

$$f_e = 0.63\, f_{ck} \tag{2.19}$$

Para bielas do tipo garrafa atravessadas por tirantes:

$$f_e = 0.48\, f_{ck} \tag{2.20}$$

### 2.3.4.2
### Regiões nodais

Podemos definir um nó como um volume de concreto que envolve as intersecções das bielas comprimidas, em combinação com forças de ancoragem conjuntamente ou não com forças atuantes ou forças devido às restrições de apoio.

Nessas regiões normalmente aparecem mudanças bruscas de direção de forças o que exige para manutenção do equilíbrio na região, o aparecimento de no mínimo três forças no nó.

Segundo Schaefer e Schaich (1988), os nós contínuos são aqueles em que o desvio de forças é feito em comprimentos compatíveis. Os mesmos não serão críticos desde que uma ancoragem adequada para armadura seja providenciada. Os nós singulares serão aqueles em que há forças concentradas aplicadas e cujo desvio de forças é feito localizadamente. Também descontinuidades geométricas podem causar concentrações de tensões responsáveis pelo aparecimento de nós singulares.

Assim, fica clara a necessidade de uma criteriosa análise dos nós singulares com relação a resistência e detalhamento de armadura. Para tanto se deve considerar para o dimensionamento desse tipo de nó sua geometria, o estado de tensões instalado, a resistência do concreto a ser considerada e ancoragem das armaduras existentes.

Outro fator importante a ser considerado na avaliação de um nó é o ângulo formado pelas bielas e tirantes concorrentes nele. Quanto menor este ângulo, menor a resistência à compressão da biela (Santos, 2006).

A tabela 2-1 apresenta os limites permitidos para os ângulos segundo os códigos normativos considerados neste trabalho.

*Tabela 2-1: Valores limites para o ângulo entre bielas e tirantes num nó.*

| Valores permitidos para o angulo $\theta_b$ | |
|---|---|
| **Referência** | **Limites** |
| ACI 318-05 (2003) | $25° \leq \theta_b \leq 65°$ |
| EUROCODE 2 (1999) | $21° \leq \theta_b \leq 45°$ |
| CEB-FIP Model Code (1990) | $18.4° \leq \theta_b \leq 45°$ |
| Schaefer e Schaich (1988,1991) | $25° \leq \theta_b \leq 65°$ |

## 2.3.4.2.1
## Parâmetros de resistência dos nós

Do mesmo modo que no caso das bielas, várias são as normas e autores que propõe valores para os parâmetros de resistência efetiva das regiões nodais. Novamente adotaremos alguns valores específicos para posteriores comparações do desempenho do modelo adotado.

Vale acrescentar que devem ser observados valores mínimos de ângulos de inclinação existente entre bielas chegando a um mesmo nó. Simplificadamente, consideraremos os valores limites dos ângulos variando entre 25 a 65 graus conforme recomendado em Fu (2001).

Os valores a serem observados nesse trabalho serão:

- Schaefer e Schlaich (1988,1991)

  Para nós com estado de tensão biaxial:

$$f_e = 1.0\, f_{cd} \tag{2.21}$$

Para nós onde barras tracionadas são ancoradas e uma parcela da resistência é reservada para a aderência:

$$f_e = 0.8\, f_{cd} \tag{2.22}$$

Sendo $f_{cd}$ a resitência de cálculo à compressão uniaxial.

Abaixo serão descritas uma série de geometrias propostas por Schaefer e Schlaich (1988,1991), que podem ocorrer em nós singulares e cuja verificação poderá ser feita de modo simplificado. Assim:

**Nó 1**: Equilíbrio em $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3 \leq 1{,}1 \cdot f_{cd}$

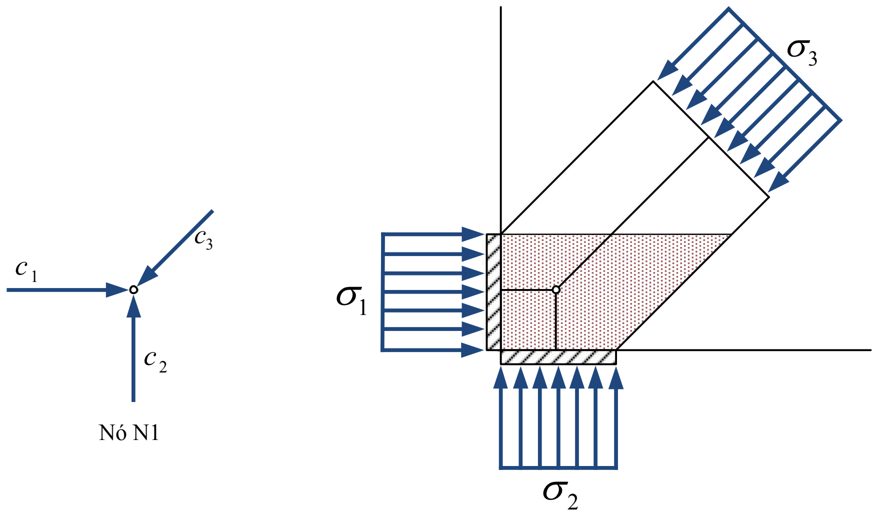



***Figura 2-20: Nó 1 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)***

**Nó 2**: Equilíbrio em $\sigma_1 = 1{,}1.\,f_{cd}$

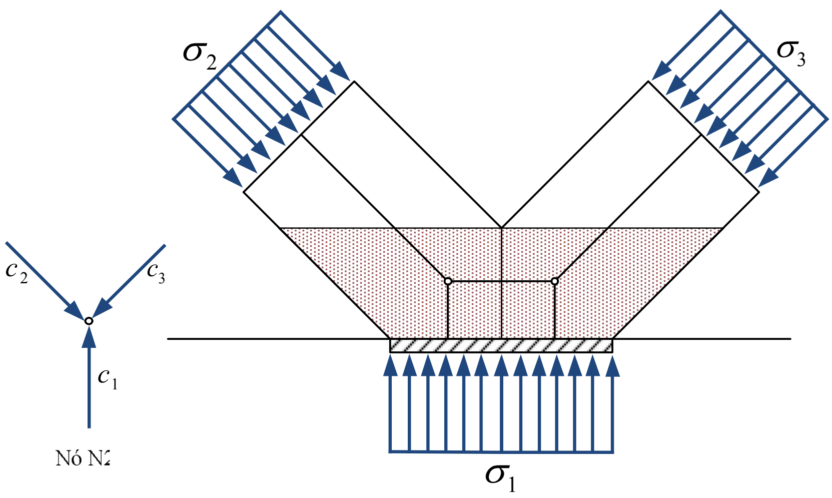



***Figura 2-21: Nó 2 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)***

**Nó 3**: Equilíbrio em $\sigma_1, \sigma_2 \leq 1{,}1.\,f_{cd}$

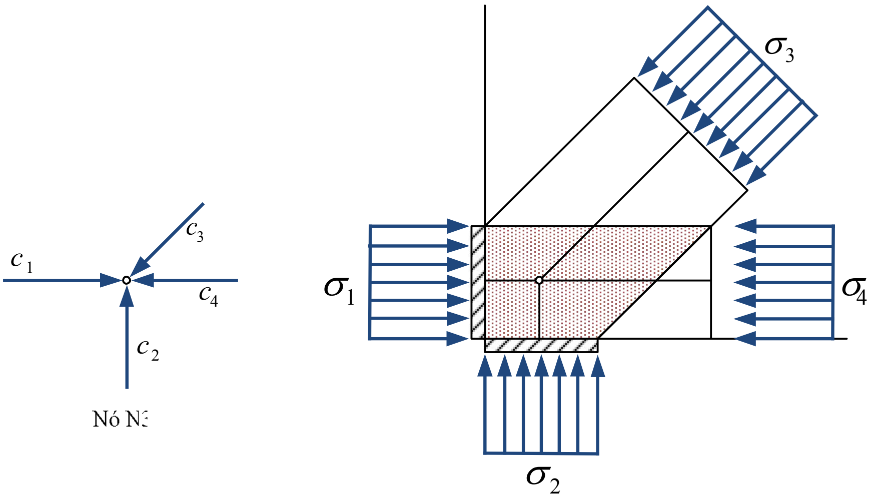



***Figura 2-22: Nó 3 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)***

**Nó 4**: Equilíbrio em $\sigma_1, \sigma_2 \leq 1{,}1. f_{cd}$

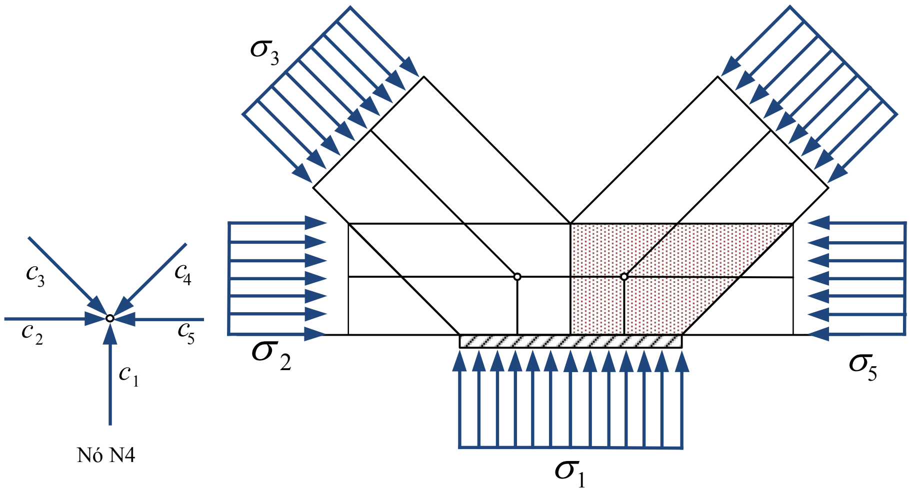



***Figura 2-23: Nó 4 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)***

**Nó 5**: Verificar comprimento de ancoragem

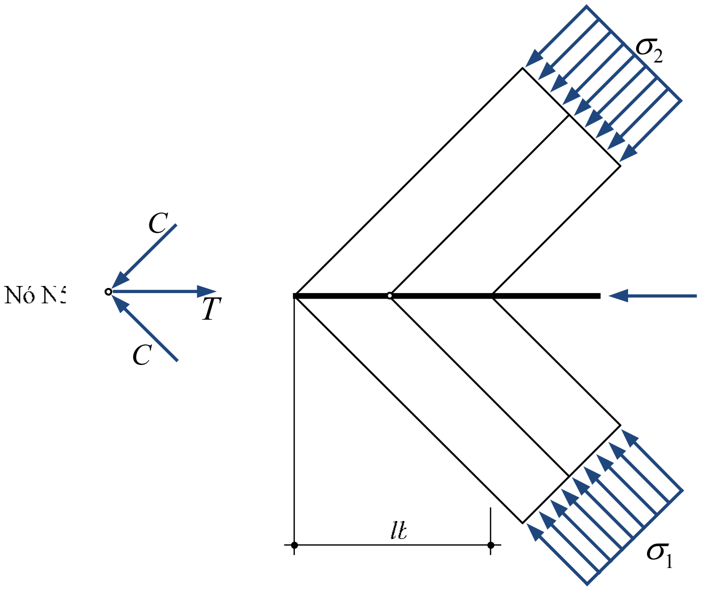



***Figura 2-24: Nó 5 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)***

**Nó 6**: Equilíbrio em $\sigma_1, \sigma_2 \leq 0{,}8.f_{cd}$

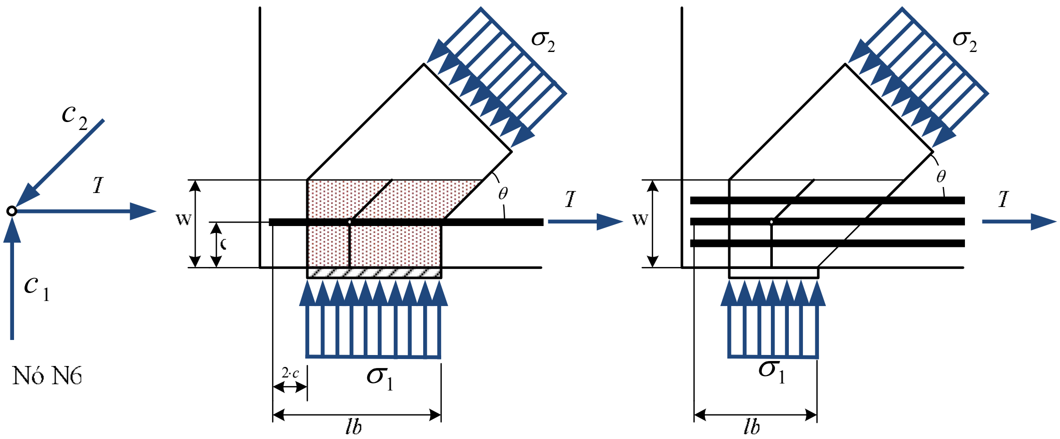



***Figura 2-25: Nó 6 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)***

**Nó 7**: Equilíbrio em $\sigma_1 \leq 0{,}8.f_{cd}$

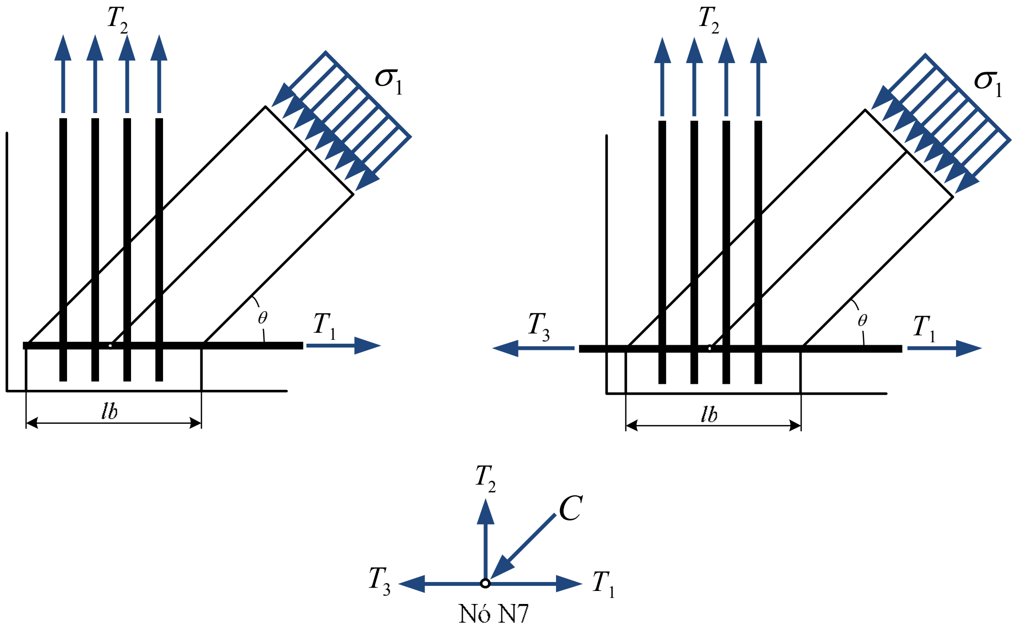



*Figura 2-26: Nó 7 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)*

**Nó 8**: Equilíbrio em $\sigma_1, \sigma_2 \leq f_{cd}$ e aplicar condições do Nó 6.

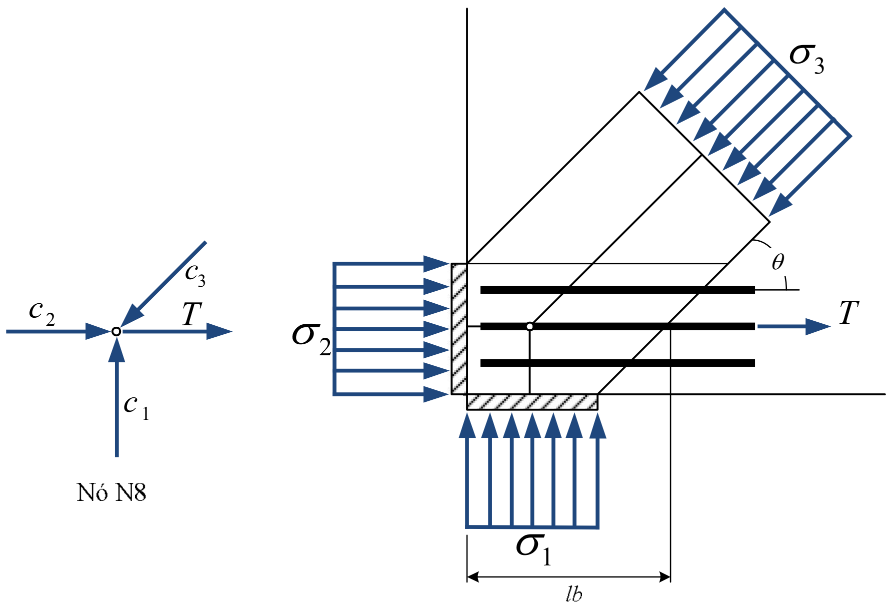



*Figura 2-27: Nó 8 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)*

**Nó 9**: Equilíbrio em $\sigma_1, \sigma_2 \leq f_{cd}$ e aplicar condições do Nó 6.

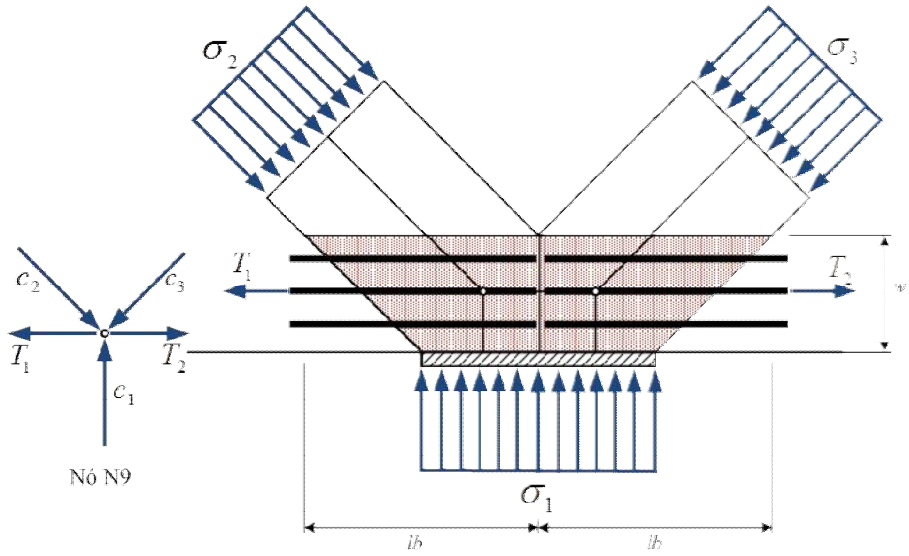



***Figura 2-28: Nó 9 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)***



- CEB-FIP Model Code 1990 (1993)

  Quando só chegam bielas ao nós (MPa):

$$f_e = 0.85\left[1 - \frac{f_{ck}}{250}\right] f_{cd} \tag{2.23}$$

Para nós onde os tirantes principais são ancorados (MPa):

$$f_e = 0.60\left[1 - \frac{f_{ck}}{250}\right] f_{cd} \tag{2.24}$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1.5}$$

- ACI – 318-05 (2005)

$$\phi \cdot F_{ns} \geq F_u \tag{2.25}$$

$$F_{ns} = f_{cu} \cdot A_n \tag{2.26}$$

$$f_{cu} = 0.85 \cdot \beta_n \cdot f_c \tag{2.27}$$

$\phi = 0.85$: para regiões D, conforme MacGregor (1997)

$\beta_s = 1.0$: para zonas nodais circundadas por bielas ou placas de apoio, ou ambas;

$\beta_s = 0.80$: para zonas nodais ancorando um único tirante;

$\beta_s = 0.60$: para zonas nodais ancorando dois ou mais tirantes;

Sendo $A_n$ um dos valores definidos em Souza (2004):

(a). Área da face nodal tomada perpendicularr à linha de ação da força no nó;

(b). Área da seção tomada perpendicular à linha de ação da força resultante na região nodal.

- EUROCODE 2 (1999)

Para nós comprimidos sem ancorar tirantes (MPa):

$$f_e = 1.1 \cdot \alpha \cdot f_{cd} \tag{2.28}$$

Para nós comprimidos ancorando tirantes, onde todos os ângulos entre bielas e tirantes são de pelo menos 45° (MPa):

$$f_e = 0.80 \cdot \alpha \cdot f_{cd} \tag{2.29}$$

Para bielas com transferência de compressão entre fissuras de grande abertura (elementos tracionados) (MPa):

$$f_e = 0.50 \cdot \alpha \cdot f_{cd} \tag{2.30}$$

Sendo o valor de $\alpha$ igual 0.85 e $f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1.5}$ (Souza , 2004).

- Souza & Bittencourt (2003)

Para regiões nodais circundadas por bielas ou placas de apoio(CCC):

$$f_e = 0.58\, f_{ck} \tag{2.31}$$

Para regiões nodais ancorando um único tirante(CCT):

$$f_e = 0.46\, f_{ck} \tag{2.32}$$

Para regiões nodais ancorando vários tirantes(CTT):

$$f_e = 0.40\, f_{ck} \tag{2.33}$$

### 2.3.4.3
### Tirantes

As forças nos tirantes devem ser absorvidas pelas armaduras existentes dentro da estrutura de concreto. Assim sendo, uma condição a ser observada é que o centro de gravidade das armaduras deve coincidir com o do tirante no modelo. A área necessária da armadura então será obtida diretamente via força no tirante e a resistência de escoamento do aço na forma:

$$A_s = \frac{\gamma_f . R_{st}}{f_{yd}} \tag{2.34}$$

Apenas em casos eventuais pode haver necessidade de tirantes de concreto. Isso se dará para garantia do equilíbrio, quando não há possibilidade de colocação da armadura de tração. Nesses casos, a resistência à tração deverá ser utilizada, enfatizando a possibilidade de ocorrência do mesmo no modelo. Exemplos desse tipo podem ocorrer em ancoragens, trechos de barra dobrada, lajes sem estribo e bielas não armadas.

#### 2.3.4.3.1
#### Ancoragem das armaduras

Uma atenção especial deve ser dada à ancoragem das armaduras nas extremidades das regiões nodais. Segundo Silva e Giongo (2000) a utilização de bitolas menores e em maior número e uma ancoragem compatível contribuem na definição da geometria e resistência das bielas e regiões nodais. Uma ancoragem segura pode ser obtida através da determinação de um volume correto de concreto envolvendo as armaduras dos tirantes ou mesmo via ancoragem mecânica através de placas ou outros elementos.

Em Silva e Giongo (2000) e Souza (2007) são mostrados vários exemplos de como é determinada a largura efetiva das bielas, sendo que para estruturas bidimensionais como vigas parede, a espessura a ser adotada poderá ser igual à largura do elemento. Maiores detalhes podem ser obtidos em Schaefer e Schlaich (1988,1991).

### 2.3.4.4
### Armaduras de controle de fissuração

Esse tipo de armadura tem a função de assegurar valores limites para abertura de fissuras e um nível de ductilidade mínima para o elemento estrutural (Figura 2-29). Assim, caso seja necessário, uma pequena redistribuição de tensões internas é possível.

Nesse trabalho uma relação mínima de 0,2% entre a área de armadura e a área de concreto será adotada com espaçamento entre barras não maior que 30 cm.

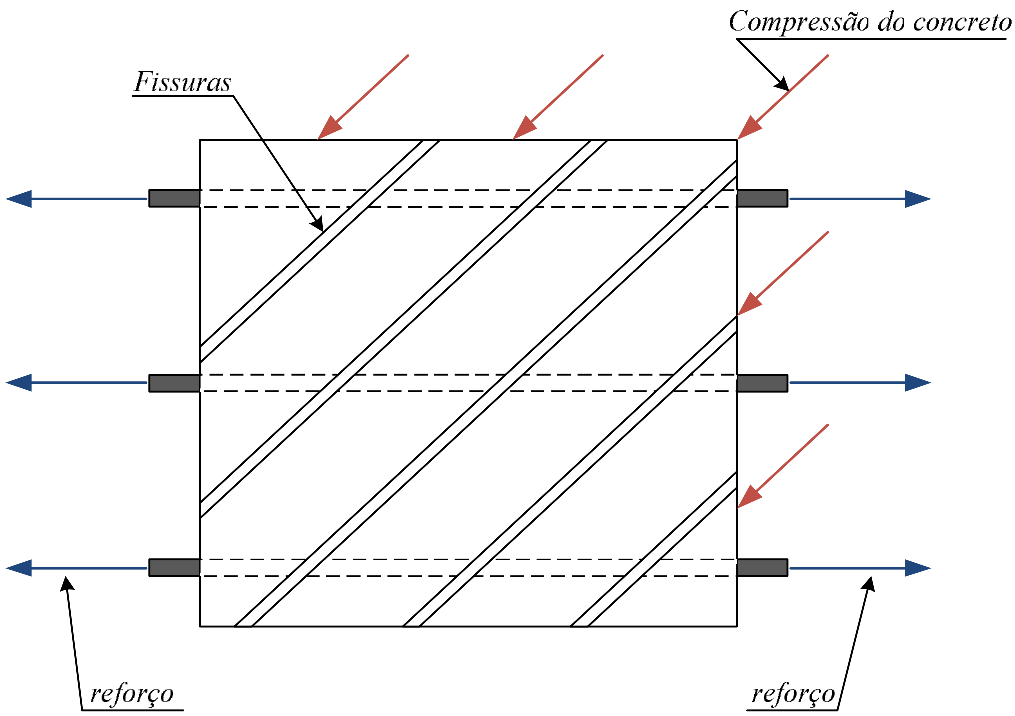



*Figura 2-29: Taxa de armadura*

## 2.4
## Modelos topológicos Hiperestáticos

Uma solução bastante interessante e elegante para aplicação em modelo de bielas e tirantes hiperestáticos é a solução em mínima norma Euclidiana proposta por Mello (1979). Essa formulação utiliza a teoria da inversa generalizada de matrizes para substituir a solução elástica de um elemento desconexo de treliça por uma solução de mínima norma Euclidiana - MNE. Dessa forma é possível obter uma solução única, compatível e equilibrada para o problema proposto.

### 2.4.1 Análise linear pelo método da rigidez

A análise linear elástica de estruturas reticuladas pelo método da rigidez parte das seguintes relações matriciais (Harrison, 1973):

Equilíbrio:

$$LN = F \tag{2.35}$$

Compatibilidade:

$$\theta = L^T \delta \tag{2.36}$$

Relações Constitutivas:

$$N = k_e \theta \tag{2.37}$$

Onde:

$N$ - Vetor dos esforços internos ($n$ x 1);

$\theta$ - Vetor dos alongamentos/encurtamentos ($n$ x 1);

$F$ - Vetor dos carregamentos nodais ($\varrho$ x 1);

$\delta$ - Vetor dos deslocamentos nodais ($n$ x 1);

$L$ - Matriz de equilíbrio estático ($\varrho$ x $n$);

$k_e$ - Matriz de rigidez elástica do elemento desconexo ($n$ x $n$);

$\varrho$ - Grau de indeterminação cinemática da estrutura;

As relações (2.35) e (2.37) constituem transformações duais num espaço vetorial enquanto que (2.36) expressa a linearidade elástica do material estrutural. Substituindo-se (2.37) em (2.35) obtêm-se:

$$Lk_e\theta = F \tag{2.38}$$

E, levando-se (2.36) em (2.38) chega-se a:

$$(Lk_eL^T)\delta = F \tag{2.39}$$

Que substituindo em (2.36) fornece:

$$\theta = L^T (Lk_e L^T)^{-1} F \tag{2.40}$$

Finalmente, substituindo-se (2.40) em (2.37), teremos:

$$N = k_e L^T (Lk_e L^T)^{-1} F \tag{2.41}$$

Onde a expressão (2.41) representa a solução elástica para o elemento desconexo de treliça.

### 2.4.2 Inversa generalizada de mínima norma

Pode-se reescrever a expressão (2.41) de formas mais compacta:

$$N = HF \tag{2.42}$$

Sendo:

$$H = k_e L^T (Lk_e L^T)^{-1} \tag{2.43}$$

A matriz $H$ é uma inversa generalizada da matriz de equilíbrio estático $L$. Comparando-se (2.42) e (2.35) vemos que:

- Para estruturas hiperestáticas a matriz $L$ é retangular de ordem $\varrho\ x\ n$ , com $\varrho < n$. De acordo com a teoria da inversa generalizada de matrizes, a inversa de uma matriz retangular de ordem $\varrho\ x\ n$ é outra matriz de ordem $n\ x\ \varrho$. A ordem da matriz $H$ é $n\ x\ \varrho$, conforme se vê em (2.43). Para estruturas isostáticas a matriz $L$ é quadrada pois $\varrho = n$ , e admite inversa única $L^{-1}$, independente de $k_e$ , pois:

$$H = k_e L^T (L^T)^{-1} (k_e)^{-1} L^{-1} \text{ (Inversa verdadeira)} \tag{2.44}$$

Pré-multiplicando (2.43) por $L$, teremos:

$$LH = Lk_e L^T (Lk_e L^T)^{-1} = I\ (\varrho\ x\ \varrho) \tag{2.45}$$

A matriz $LH$ é uma matriz identidade de ordem $\varrho$. Dessa propriedade, é fácil verificar que a solução (2.42) dada por $H$ está em equilíbrio com $F$, pois multiplicando-se (2.42) por $L$:

$$LN = LHF = IF = F \tag{2.46}$$

Entretanto, substituindo-se (2.35) em (2.42) resulta em:

$$N = H(LN) = (HL)N \tag{2.47}$$

Se a matriz $H$ fosse uma inversa verdadeira de $L$, como ocorre nas estruturas isostáticas, teríamos $HL = I$. No entanto, no caso de estruturas hiperestáticas, a matriz $L$ é uma matriz idempotente, satisfazendo a propriedade $(HL)^2 = HL$, como se pode verificar facilmente. As matrizes idempotentes permitem definir matrizes de projeção num espaço vetorial. Essas propriedades, porém, só podem ser claramente compreendidas com as relações estática e cinemática do método da flexibilidade Martha (2010).

Para identificarmos a norma envolvida na obtenção da solução dada por (2.41), devemos recorrer à Programação Matemática. A solução dada por (2.35), (2.36) e (2.37), via Programação Quadrática (PQ) é:

$$\text{Minimizar: } \frac{1}{2} N^T B_e N \tag{2.48}$$

$$\text{Sujeito a: } LN = F \text{ (Equilíbrio)} \tag{2.49}$$

Onde $B_e$ é a matriz de flexibilidade dos elementos desconexos, sendo a inversa de $k_e$.

A função objetivo (2.48) corresponde à energia de deformação da estrutura, enquanto que as restrições (2.49) são as relações de equilíbrio. As condições de otimalidade de Karush Kuhn-Tucker incluem automaticamente, as condições de compatibilidade (2.36). Os multiplicadores de Lagrange do PQ correspondem aos deslocamentos nodais $\delta$. A solução do PQ fornece exatamente a expressão (2.41).

A teoria das inversas generalizadas de matrizes mostra que a solução do PQ é equivalente a:

$$\text{Resolver: } LN = F \text{ (Equilíbrio)} \tag{2.50}$$

$$\text{Sob a norma: } (N^T B_e N)^{1/2} \tag{2.51}$$

Se substituirmos a matriz $B_e$ pela matriz $I$, a norma acima é reduzida para:

$$(N^T N)^{1/2} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n} N_i^2} \tag{2.52}$$

Sendo a expressão anterior à norma Euclidiana do vetor *N*. Denominaremos a expressão (2.51) de norma elástica onde o vetor *N* é ponderado pela matriz $B_e$. Sendo então a norma onde o vetor *N* é ponderado pela matriz identidade *I* denominada como Euclidiana (Mello, 1979). Como as matrizes $B_e$ e *I* são positivas definidas, as soluções *N* obtidas são únicas, quer se use a norma elástica ou a norma euclidiana. Entretanto, a solução *N* obtida com a norma elástica, denominada $N_e$, é em geral diferente da solução *N* obtida com norma euclidiana, que denominaremos $N_f$. Pode-se demonstrar que (Mello, 1979):

$$\|N_e\| \geq \|N_f\| \tag{2.53}$$

Assim, é possível dizer que de todas as soluções possíveis *N* da relação de equilíbrio (2.35), a que conduz a um vetor de menor comprimento (norma) possível é a solução $N_f$ de mínima norma Euclidiana.

A solução de (2.51) com *I* em lugar de $B_e$ é dada por (2.41), que com $k_e = I$ torna-se:

$$N_f = L^T (LL^T)^{-1} F = H_f F \tag{2.54}$$

Sendo:

$$H_f = L^T (LL^T)^{-1} \tag{2.55}$$

### 2.4.3
### Solução de mínima norma para o elemento de treliça plano desconexo

Utilizando o método da rigidez analítico podemos definir as matrizes de rigidez de membro, a matriz de equilíbrio estático L e a matriz de rotação para cada elemento desconexo R (Livesley, 1975). A matriz de rigidez elástica do elemento pode então será montada na forma:

$$K_{elast} = RLk_e L^T R^T \tag{2.56}$$

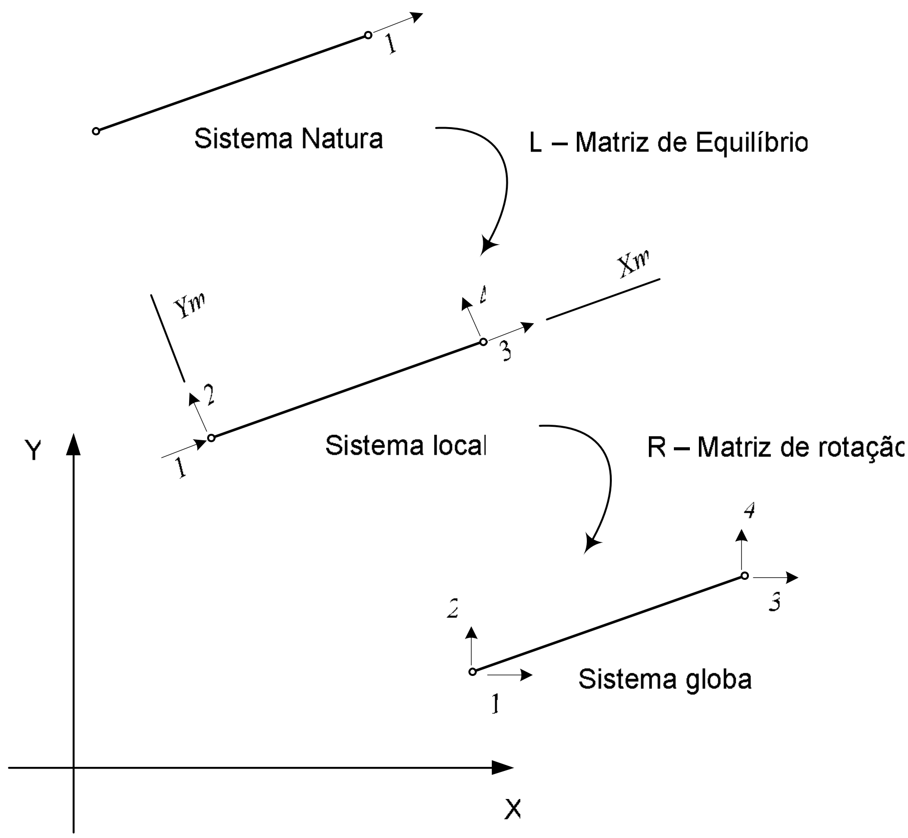



*Figura 2-30: mostra os sistemas referenciais adotados para o elemento de treliça desconexo.*



Onde para o sistema referencial adotado (Figura 2.30) teremos os seguintes valores:

$$L = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.57}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -sen\,\gamma & 0 & 0 \\ sen\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\gamma & -sen\,\gamma \\ 0 & 0 & sen\,\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

$$k_e = \frac{EA}{L} \tag{2.59}$$

Sendo as matrizes, $L$ de equilíbrio e $R$ de rotação, relacionadas com mudanças de base muito comuns em álgebra linear. Logo, a matriz de rigidez elástica de um elemento de treliça desconexo fica na forma (Gere e Weaver, 1965):

$$K_{elast} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \cos^2\gamma & \cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma & -\cos^2\gamma & -\cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma \\ \cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma & \operatorname{sen}^2\gamma & -\cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma & -\operatorname{sen}^2\gamma \\ -\cos^2\gamma & -\cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma & \cos^2\gamma & \cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma \\ -\cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma & -\operatorname{sen}^2\gamma & \cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma & \operatorname{sen}^2\gamma \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Na solução de mínima norma a matriz de rigidez elástica será então alterada na forma $k_e = 1$, ficando então a matriz de rigidez de mínima norma na forma :

$$K_{MN} = RLL^T R^T \quad (2.61)$$

Explicitando a matriz teremos:

$$K_{MN} = \begin{bmatrix} \cos^2\gamma & \cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma & -\cos^2\gamma & -\cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma \\ \cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma & \operatorname{sen}^2\gamma & -\cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma & -\operatorname{sen}^2\gamma \\ -\cos^2\gamma & -\cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma & \cos^2\gamma & \cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma \\ -\cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma & -\operatorname{sen}^2\gamma & \cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\gamma & \operatorname{sen}^2\gamma \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

A grande vantagem da solução de mínima norma Euclidiana - MNE é que a obtenção dos esforços fica independente das propriedades de rigidez da barra. Assim sendo, é possível se ter uma solução equilibrada e compatível que represente o modelo hiperestático considerado. Para mais detalhes ver Távora (1995), Oliveira (1995), Silva (1998) e Vieira et al (2000).

## 2.5
## Principais dificuldades de aplicação

Dentre as principais dificuldades para aplicação do método das bielas e tirantes podemos citar:

- Exigência de que o engenheiro estrutural responsável pelo projeto tenha experiência na concepção do modelo a ser lançado dentro da estrutura de concreto;
- Em geometrias mais complexas a definição de um modelo satisfatório pode não ser uma tarefa muito trivial;
- O lançamento do modelo estrutural pode levar à uma série bastante grande de modelos. A necessidade de escolha entre um deles pode levar a adoção de procedimentos de avaliação dos mesmos;

- Ainda não há um consenso entre as normas e diversos autores sobre valores de resistência a serem utilizados em bielas e regiões nodais;
- Impossibilidade de geração de modelos automáticos via otimização que levem em conta a experiência do projetista.