1
Introdução

Os cinco grupos de Mathieu $M_{24}, M_{23}, M_{22}, M_{12}$ e M_{11} compõem a primeira geração de grupos esporádicos do teorema de classificação dos grupos simples finitos (veja em (9)). O termo grupo esporádico foi usado inicialmente por Burnside (1) para se referir aos grupos de Mathieu. Em 1861 o matemático frânces Émile Léonard Mathieu construiu os grupos M_{11} e M_{12} (7). Depois, em seu outro paper (8) de 1873 construiu M_{22}, M_{23} e M_{24}. O grupo M_{24} é o maior grupo de Mathieu e contém todos os outros. Porém, o fato de M_{12} ser um subgrupo de M_{24} não era conhecido por Mathieu, e foi descoberto primeiramente por Frobenius. Mathieu inicialmente dava uma construção a M_{12} independente de M_{24}. Os grupos de Mathieu podem ser construídos de diferentes maneiras e têm propriedades muito especiais. O grupo M_{24} pode ser definido como o grupo de permutações de 24 pontos que preseva o código de Golay, o único código (a menos de isomorfismo) que tem a seguinte distribuição de peso (veja a subseção 2.9):

$$0^1 \ 8^{759} \ 12^{2576} \ 16^{759} \ 24^1.$$

Os vetores de peso 8 e 12 são chamados de octads e dodecads, respectivamente. As 759 octads formam um sistema de Steiner $S(5, 8, 24)$. Veremos que é prático arrumar as 24 coordenadas de um vetor do Código de Golay numa matriz 4×6 chamada MOG. A matriz do MOG tem suas linhas rotuladas pelos elementos $0, 1, w, \overline{w}$ de $\mathbb{F}_4$ e suas colunas têm pontuação correspondente a um hexacodeword, como definido na seção 4. Assim, para estudarmos M_{24} precisaremos definir o hexacode $\mathcal{H}_6$, veja a Seção 2.9 e Capítulo 4.

Os outros grupos de Mathieu podem ser definidos como subgrupos estabilizadores de M_{24}. O grupo M_{12} pode ser construído como um subgrupo de M_{24} e também admite uma construção independente e análoga. Mais precisamente M_{12} pode ser definido como grupo de permutações de 12 pontos que preserva o código ternário de Golay. Assim como em $\mathcal{C}_{24}$, os vetores de $\mathcal{C}_{12}$ podem ser arrumados numa matriz 3×4 chamada de MINIMOG, que pode ser inserido no MOG (ver detalhes na seção 5.4.1). As 12 coordenadas de um vetor em $\mathcal{C}_{12}$, arrumadas no MINIMOG, são obtidas através de tetracodewords, que são elementos do tetracode (veja Seções 2.9 e 5.4.1).

Os grupos de Mathieu têm também aspectos combinatórios muito interessantes. A princípio um sistema de Steiner não precisa ter grupo de simetria não trivial. No entanto, algo surpreendente acontece: o sistema de Steiner $S(5,8,24)$ é único a menos de isomorfismo, e o seu grupo de simetria é um grupo esporádico, o M_{24}. Os grupos M_{23} e M_{22} são definidos como os estabilizadores de 1 e 2 pontos em M_{24}, respectivamente. Assim, o grupo M_{23} preserva o sistema de Steiner $S(4,7,23)$ e o M_{12} preserva $S(3,6,22)$. O sistema de Steiner $S(5,6,12)$ também é único a menos de isomorfismo, e seu grupo de simetrias é o M_{12}. O estabilizador de um ponto em M_{12} é o grupo M_{11} que preserva o sistema de Steiner $S(4,5,11)$.

Outra propriedade que torna os grupos de Mathieu interessante é que eles são grupos altamente transitivos. Os grupos M_{12} e M_{24} são os únicos 5-transitivos (a menos dos grupos simétricos, S_n para $n \geq 5$ e os grupos alternados A_n para $n \geq 7$). Os grupos 4-transitivos são somente M_{24}, M_{23}, M_{12}, M_{11}, S_n para $n \geq 4$ e A_n para $n \geq 6$. Segue que M_{22} é um grupo 3-transitivo.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2 introduzimos as principais ferramentas, terminologia e definições. Em seguida, falaremos no Capítulo 3 sobre o sistema de Steiner $S(5,8,24)$, o código de Golay e como estes dois objetos se relacionam. No Capítulo 4 aprendemos como completar hexacodewords e a partir deles obter elementos no código de Golay. Veremos também como verificar se um vetor pertence a este código. Para tanto, descreveremos também como completar as octads e determinar sextets no cocódigo de Golay. Finalmente, estudamos no Capítulo 5 os grupos de Mathieu com ênfase no M_{24} e alguns de seus subgrupos.