

## 2

### Metodologia

#### 2.1

#### Série Temporal

Uma série temporal é um conjunto de observações de uma dada variável, ordenada pelo parâmetro tempo. Estas observações são, em geral, feitas em intervalos de tempo equidistantes. Tome-se, por exemplo,  $X_t$  a representação de uma variável aleatória  $X$  no instante de tempo  $t$ , denotar-se-á então a série temporal por  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , onde  $N$  é o número de observações registradas pela série, comumente referido também como o tamanho da série.

As séries temporais podem ser classificadas em : discretas, contínuas, determinísticas, estocásticas, multivariadas e multidimensionais. Em geral, a periodicidade de registro das séries discretas é feita em dias, semanas, meses e anos (Souza & Camargo, 1996).

Para se denominar um conjunto de dados coletados ao longo do tempo da série temporal é preciso observar a presença de uma dependência serial entre os dados, isto é, faz-se necessário que os dados sejam dependentes do tempo. Apesar disso, nem todo evento registrado no decorrer do tempo consiste em uma série temporal.

Observe-se por exemplo, o caso da mega-sena: saber os números sorteados hoje e também os sorteados no passado não nos permite ajustar um modelo estatístico para prever o resultado do(s) próximo(s) sorteio(s).

##### 2.1.1

#### Processo Estocástico

Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias indexadas por elementos “ $t$ ” pertencentes a determinado intervalo temporal. Intuitivamente, se uma variável aleatória é um número real que varia aleatoriamente, um processo estocástico é uma função temporal que varia aleatoriamente.

De forma simplificada, pode-se afirmar que processos estocásticos são processos aleatórios que dependem do tempo.

De forma mais genérica, qualquer tipo de evolução temporal, determinística ou essencialmente probabilística, que seja analisável em termos de probabilidade, pode ser chamada de processo estocástico.

Segundo esta definição, uma série temporal pode ser interpretada como uma parte da trajetória ou de uma realização parcial de um processo estocástico, ou seja, uma amostra finita de observações em uma linha de tempo.

Um processo estocástico está estatisticamente determinado quando se conhece suas funções de distribuição até a  $n$ -ésima ordem (Souza & Camargo, 1996).

Na prática, ocorrem situações problemáticas pelo fato de não se conhecer todas as funções de distribuição até a  $n$ -ésima ordem e por possuir somente uma realização do processo estocástico, a partir da qual deseja-se inferir características do mecanismo gerador da série. Para superar essas dificuldades assumem-se duas restrições: Estacionariedade e Ergodicidade.

Por **estacionariedade** entende-se que o processo gerador da série de observações é invariante ao longo do tempo. Embora teoricamente seja extremamente conveniente a adoção da hipótese de estacionariedade, no mundo real, nem todas as séries podem ser classificadas como estacionárias. Logo, a estacionariedade é uma condição bastante restritiva quando imposta a uma série temporal. O conceito de processo não estacionário homogêneo surge quando se consegue um processo estacionário através de diferenças sucessivas de um determinado processo não estacionário.

Segundo Papoulis (1965), um processo estacionário pode ser classificado em:

**A. Estritamente estacionário:** quando suas estatísticas não são afetadas por variações devido à escolha da origem dos tempos, ou seja, quando as séries  $X_t$  e  $X_{t+k}$  estão distribuídas de forma idêntica, independente de “ $k$ ”.

**B. Estritamente estacionário de ordem finita:** um processo é estritamente estacionário de ordem “ $i$ ” se a estacionariedade do item anterior não

for válida para todo  $t_j$  com  $j$  pertencente ao conjunto dos números naturais, mas somente para  $j \leq i$ .

**C. Estacionário de segunda ordem:** um processo será denominado estacionário de segunda ordem quando sua função valor médio for constante e sua função de covariância depender somente da diferença, em valor absoluto,  $t_s - t_j$ .

Um processo estocástico é denominado ergódico se apenas uma realização é suficiente para obter todas as suas estatísticas. Logo, todo processo ergódico é obrigatoriamente estacionário, posto que apenas uma realização de um processo que não seja estacionário não poderá conter todas as informações necessárias para a especificação do processo, como, por exemplo, a média.

De forma geral, o objetivo do estudo de uma série temporal consiste em, dada uma realidade, ou seja, dado um processo estocástico, retirar-se uma amostra finita de observações equidistantes no tempo e através do estudo desta amostra identificar um modelo cujo objetivo é inferir sobre o comportamento da realidade. Em outras palavras, a partir de uma série temporal, faz-se sua análise estatística para construir um modelo estocástico.

### 2.1.2

#### **Componente Cíclico, Sazonal e de Tendência**

A análise de séries temporais baseadas em tendência tem como pressuposto o fato de uma série temporal ser entendida como a *composição de comportamento de tendência, fator cíclico, variação sazonal e fator aleatório*.

**Tendência** em uma série temporal é a mudança gradual observada por meio da variação dos valores da série ao longo do tempo, mantida após a remoção dos componentes de ciclos, sazonalidades e fatores aleatórios.

**Ciclos e sazonalidades** são comportamentos estocásticos que acontecem de maneira recorrente ao longo de um período definido.

Morettin e Tolo (2006) conceituam comportamentos sazonais como flutuações ocasionadas na série devido à influência de algum fator externo de sazonalidade.

Os componentes de ciclo apresentam um comportamento similar aos comportamentos sazonais, sendo diferenciados, no entanto, por apresentarem um comprimento maior e não terem duração uniforme.

Com a remoção dos componentes de tendência, ciclo e sazonalidade, da série temporal o que sobra é denominado *componente residual*, o qual representa fatores aleatórios caracterizados como um processo estocástico do tipo “ruído branco”, que será detalhado adiante.

### 2.1.3

#### Tempo x Frequência

Uma série temporal pode ser analisada tanto em relação ao domínio do tempo, quanto em relação ao domínio da frequência. Analisar a série sob o domínio do tempo é observar a evolução temporal do processo.

O objetivo desta análise é mensurar a magnitude do evento que ocorre em determinado instante de tempo. Esta análise é baseada em um modelo paramétrico que utiliza as funções de auto covariância e autocorrelação.

A *auto covariância* é a covariância entre  $X_t$  e seu valor  $X_{t+k}$  separado por  $k$  intervalos de tempo. Esta covariância é definida por:

$$\gamma_k = \text{cov}[X_t, X_{t+k}] = E \{ [X_t - \mu][X_{t+k} - \mu] \}$$

onde:

$\mu$  = média do processo

A função de autocorrelação (FAC) é a auto covariância padronizada (redefinida no intervalo entre -1 e +1) que serve para medir o comprimento e a memória de um processo, ou seja, mede a intensidade da qual o valor tomado no tempo  $t$  depende daquele tomado no tempo  $t-k$ .

A autocorrelação de defasagem  $k$  é definida como:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\text{Cov}[X_t, X_{t+k}]}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(X_{t+k})}}$$

onde:

$\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_{t+k}) = \gamma_0$  = variância do processo

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_k = \rho_{-k} \text{ (função de autocorrelação é simétrica em relação à origem } k=0\text{)}$$

A partir da construção das funções de autocorrelação, constrói-se uma importante ferramenta para auxiliar na estimação do modelo, o correlograma, que nada mais é do que o gráfico dos coeficientes de autocorrelação  $\rho_k$  plotado para cada  $k$ .

A ideia de autocorrelação pode ser estendida se for medida a correlação entre duas observações seriais  $X_t$  e  $X_{t+k}$  e não se considerar os termos intermediários  $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+k-1}$ . Procedendo desta forma, teremos o que se denomina de função de autocorrelação parcial (FACP). A autocorrelação parcial ( $\phi_{kk}$ ) é representada por  $\text{Corr}(X_t, X_{t+k} \mid X_{t+1}, \dots, X_{t+k-1})$ .

Diante destes conceitos é importante destacar um tipo de processo estocástico peculiar muito importante denominado “ruído branco”.

Neste processo, as variáveis aleatórias componentes são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), ou seja, não apresentam dependência serial.

Em termos de autocorrelação têm-se que em uma série do tipo ruído branco teremos:

$$\rho_k = \begin{cases} 1; & k = 0 \\ 0; & k \geq 1 \end{cases}$$

Ao abordar esta análise sob o ponto de vista do domínio da frequência, deve ater-se à frequência em que determinados eventos ocorrem. Esta representação é útil quando os componentes harmônicos da série têm um significado físico ou os efeitos práticos do processo são analisados por suas componentes de frequência. A função associada a esta característica é a chamada densidade espectral.

A análise espectral tem por finalidade estabelecer as propriedades de um processo estatístico em termos de frequência. Logo, a pesquisa de periodicidades que porventura venham a existir em uma série temporal poderá ser realizada através da análise espectral.

Se  $X_t = \{(X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\}$  é um processo estacionário com função de auto covariância finita, define-se o espectro  $X_t$  como:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_{(k)} e^{-i\omega k} \quad -\pi \leq w \leq \pi$$

$$\rho(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega k} f(w) dw \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

A função de densidade espectral normalizada é a transformada de Fourier da função de autocorrelação; já a variância de  $X_t$  é uma medida da potência total do processo; e a função de densidade espectral representa a contribuição para a potência total de todos os componentes de frequência presentes no processo. O estimador mais utilizado é o periodograma com janelas espectrais.

## 2.2

### Modelos Univariados

#### 2.2.1

##### Método de Amortecimento Exponencial

Os métodos de amortecimento exponencial englobam um grande número de modelos de previsão, cuja ideia comum é bastante simples e intuitiva, baseando-se no fato de que as observações mais recentes de uma série temporal contêm mais informações relevantes para fins de previsão do que as observações mais antigas. Embora baseada em uma ideia simples, esta classe de modelos fornece em geral bons resultados e por isso são utilizados frequentemente como referência no desenvolvimento de modelos de previsão.

##### 2.2.1.1

##### Método de Amortecimento Exponencial Simples

Ao aplicar este método toma-se inicialmente uma série temporal  $X(t)$  gerada por um processo estocástico constante,  $X_t = b + \varepsilon_t$ , onde  $b$  é o nível da série (parâmetro constante para um dado segmento de dados) e  $\varepsilon_t$  é um ruído branco com média zero e variância conhecida igual a  $\sigma^2$ .

Para realizar a previsão da série temporal, é necessário que o parâmetro  $b$  seja estimado a partir dos dados. Suponha disponível uma série histórica de tamanho  $t$ . A estimativa do nível  $b$  é, então, dada por:

$$S_t \equiv \hat{b}_t = \alpha X_t + \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 X_{t-2} + \dots + \alpha(1-\alpha)^{t-1} X_0$$

onde  $\alpha$  é denominada constante de amortecimento.

Segundo Montgomery, 1976, para  $t$  suficientemente grande, o método de amortecimento exponencial simples resulta em um estimador não tendencioso de nível real do processo estocástico gerador da série, sendo assim é possível escrever  $S_t = \hat{b}_t$ , portanto, a equação de previsão da série  $\tau$  passos a frente fica:

$$S_t = \hat{X}_{t+\tau}(t)$$

A estatística  $S_t$  é uma média ponderada das observações passadas da série; os pesos decaem geometricamente com a idade das observações. Portanto, para valores de  $\alpha$  próximos de um, o método se comporta reagindo de forma mais rápida às possíveis mudanças do nível do processo gerador da série. Em uma situação limite, com  $\alpha$  exatamente igual a um, ele se iguala ao método *naive*, que consiste em considerar como valor previsto a observação mais recente da série.

A determinação de um valor adequado da constante de amortecimento é fundamental para se obter um ajuste satisfatório do modelo aos dados disponíveis para estimação. Em geral, separa-se um trecho da série para a realização de uma avaliação de desempenho do modelo, considerando diferentes valores de  $\alpha$  e escolhendo o que resulta em menores erros de previsão.

### 2.2.1.2

#### Método de Amortecimento de Holt

Este método possui a mesma formulação que o anterior, sendo que o seu grande diferencial consiste na forma de atualização dos parâmetros. Enquanto o primeiro utilizava o mesmo hiperparâmetro para atualizar cada parâmetro (no caso

anterior, foi usado  $\alpha$  em todos), este método utiliza um hiperparâmetro diferente em cada parâmetro.

Logo abaixo serão apresentados o modelo e as equações de atualização para o caso de uma série com tendência linear, sendo que o mesmo pode ser estendido para o caso de tendência quadrática (para tendência constante, os dois métodos são equivalentes dado que só terá um parâmetro a ser atualizado).

Modelo:

$$X_t = \alpha_1 + \alpha_2 t + \varepsilon_t$$

Equação de previsão, considerando a origem deslocada para T:

$$\hat{X}_T(\tau) = \hat{\alpha}_1(T) + \hat{\alpha}_2(T)\tau$$

Para esse caso, os estimadores de  $\hat{\alpha}_1(T)$  e  $\hat{\alpha}_2(T)$ , calculados via amortecimento exponencial com constantes  $\alpha$  e  $\beta$  são:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1(T) &= \alpha X_T + (1-\alpha)[\hat{\alpha}_1(T-1) + \hat{\alpha}_2(T-1)] \\ \hat{\alpha}_2(T) &= \beta[\hat{\alpha}_1(T) - \hat{\alpha}_1(T-1)] + (1-\beta)\hat{\alpha}_2(T-1)\end{aligned}$$

### 2.2.1.3

#### Método de Amortecimento de Holt-Winters

Este método foi introduzido por Winters para modelar séries que apresentam variação cíclica. Diferentemente dos dois métodos anteriores, que não incorporavam sazonalidade (eles tinham apenas tendência), este método inclui a sazonalidade em seu modelo, sendo que essa pode ser aditiva - que é recomendada para séries homocedásticas - ou multiplicativa - recomendada para séries heterocedásticas.

As séries homocedásticas são aquelas na qual a variância não cresce ao decorrer do tempo, sendo comum em séries físicas. As heterocedásticas possuem variância crescente, ocorrendo geralmente em séries de mercado.

**A. Modelo Aditivo:** Seja a série  $X_t$ , com tendência e um padrão sazonal. Pode-se escrever seu modelo da seguinte forma:

$$X_t = \alpha_1 + \alpha_2 t + c_t + \varepsilon_t$$

onde  $c_t$  é o fator sazonal.

Neste modelo, os fatores sazonais têm que seguir a seguinte restrição:

$$\sum_{i=1}^L c_i(t) = 0$$

Sendo  $L$  o tamanho do fator sazonal.

Denotando  $\hat{\alpha}_1(T)$ ,  $\hat{\alpha}_2(T)$  e  $\hat{c}_i(T)$  as estimativas dos componentes nível, tendência e fatores sazonais, respectivamente, no instante  $T$ , tem-se que para este instante, eles são calculados por:

$$\hat{\alpha}_1(T) = \alpha[X_T - \hat{c}_{m(T)}(T-1)] + (1-\alpha)[\hat{\alpha}_1(T-1) + \hat{\alpha}_2(T-1)]$$

$$\hat{\alpha}_2(T) = \beta[\hat{\alpha}_1(T) + \hat{\alpha}_1(T-1)] + (1-\beta)\hat{\alpha}_2(T-1)$$

$$\hat{c}_{m(T)}(T) = \gamma[X_T - \hat{\alpha}_1(T)] + (1-\gamma)\hat{c}_{m(T)}(T-1)$$

Sendo  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  as constantes de amortecimento.

Assim, a equação de previsão, para  $\tau$  períodos a frente, no instante  $T$ , pode ser escrita por:

$$\hat{X}_T(\tau) = \hat{\alpha}_1(T) + \hat{\alpha}_2(T)\tau + \hat{c}_{m(T+\tau)}(T)$$

Para a utilização deste modelo, é necessário que os parâmetros iniciais  $\hat{\alpha}_1(0)$ ,  $\hat{\alpha}_2(0)$ ,  $\hat{c}_i(0)$ ,  $i=1, \dots, L$ , sejam previamente calculados. A estimativa desses parâmetros iniciais pode ser obtida através dos dados históricos e estão descritos de forma detalhada em Montgomery (1990).

**B. Modelo Multiplicativo:** Esta é a versão do modelo para o caso multiplicativo, o qual tem a premissa de que a amplitude da sazonalidade varia no tempo. Associado a isto, ela continua possuindo a formulação aditiva para a

componente tendência, assim este modelo incorpora a tendência linear com o efeito sazonal multiplicativo.

Então, este modelo pode ser escrito por:

$$X_t = (\alpha_1 + \alpha_2 t)c_t + \varepsilon_t$$

Os fatores sazonais são tais que a sua soma é igual ao comprimento da sazonalidade, isto é:

$$\sum_{i=1}^L c_i(t) = L$$

Então, denotando por  $\hat{\alpha}_1(T)$ ,  $\hat{\alpha}_2(T)$ ,  $\hat{c}_i(T)$ , para  $i=1, \dots, L$ , o nível, a tendência e os fatores sazonais, respectivamente, estimados em  $T$ , estes podem ser atualizados, admitindo o conhecimento de seus resultados em  $T-1$ , por:

$$\hat{\alpha}_1(T) = \alpha \{X_T / [\hat{c}_{m(T)}(T-1)]\} + (1-\alpha)[\hat{\alpha}_1(T-1) + \hat{\alpha}_2(T-1)]$$

$$\hat{\alpha}_2(T) = \beta[\hat{\alpha}_1(T) - \hat{\alpha}_1(T-1)] + (1-\beta)\hat{\alpha}_2(T-1)$$

$$\hat{c}_{m(T)}(T) = \gamma[X_T / \hat{\alpha}_1(T)] + (1-\gamma)\hat{c}_{m(T)}(T-1)$$

Sendo  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  as constantes de amortecimento.

Assim como no modelo aditivo, é necessário estimar os parâmetros iniciais:  $\hat{\alpha}_1(0)$ ,  $\hat{\alpha}_2(0)$ ,  $\hat{c}_i(0)$ ,  $i=1, \dots, L$ , os quais estão detalhados em Montgomery (1990).

## 2.2.2

### Modelos ARIMA

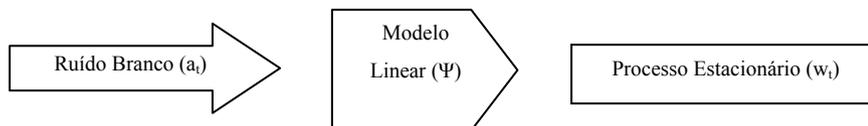
#### 2.2.2.1

#### Teoria Geral dos sistemas lineares

O fundamento teórico do modelo ARIMA, também conhecido como Box & Jenkins, baseia-se na teoria geral dos sistemas lineares, a qual afirma que a

passagem de um ruído branco por um filtro linear de memória infinita gera um processo estacionário de segunda ordem, ou seja, um processo estacionário com média e variância constantes (Souza & Camargo, 1996).

A partir da teoria geral dos sistemas lineares temos que:



Dado  $B^k a_t = a_{t-k}$  onde “B” é definido como operador de atraso (*backward shift operator*) tem-se que:

$$w_t = a_t - \Psi_1 a_t B - \Psi_2 a_t B^2 - \dots$$

$$w_t = a_t(1 - \Psi_1 B - \Psi_2 B^2 - \dots) = a_t \Psi(B)$$

$$w_t = a_t \Psi(B) \leftrightarrow a_t = \Psi(B)^{-1} w_t$$

Sendo que:

$$\Psi(B)^{-1} = \pi(B)$$

onde:

$$\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots$$

O fato de  $\Psi(B)$  possuir infinitos parâmetros pode gerar diversos problemas na definição do modelo, porém, para resolver esta questão, Box & Jenkins, sob determinadas restrições, sugerem transformar este polinômio infinito no quociente de dois polinômios finitos.

Assim:

$$\Psi(B) = \theta(B) / \phi(B)$$

onde:

$$\theta(B) = 1 - \theta_1(B) - \theta_2(B) - \dots - \theta_q(B)^q \rightarrow \text{Polinômio MA}(q)$$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1(B) - \phi_2(B) - \dots - \phi_p(B)^p \rightarrow \text{Polinômio AR}(p)$$

A partir dos polinômios  $\phi(B)$  e  $\theta(B)$  tem-se então os modelos ARMA de ordem  $p$  e  $q$  que assumem a seguinte forma:

$$\phi(B)w_t = \theta(B)a_t$$

Quando se estiver lidando com séries não estacionárias na média, faz-se necessária a produção da estacionariedade através da diferenciação da série original, ou seja, produz-se uma série não estacionária homogênea, a qual exclui os processos de comportamento explosivo. Desta forma obtêm-se uma nova série  $w_t$  através do seguinte processo de diferenciação:

$$w_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1 - B)X_t = \nabla X_t$$

onde:  $\nabla = (1 - B) \rightarrow$  operador de diferença

Para produzir a estacionariedade na média da série, aplicam-se tantas diferenças quantas forem necessárias, porém, na prática são realizadas no máximo duas diferenciações.

Os modelos ARIMA(p,d,q) são obtidos justamente das séries diferenciadas em ordem “d”, onde  $w_t = \nabla^d X_t$ . Logo, estes modelos assumem a seguinte forma:

$$\phi(B) \nabla^d X_t = \theta(B)a_t$$

É importante ressaltar duas ideias fundamentais sobre os modelos Box & Jenkins: o princípio da parcimônia, o qual determina que o melhor modelo é aquele com o menor número possível de parâmetros, e a construção de modelos através de ciclos iterativos, tal qual a alteração dos parâmetros p, d e q, de forma a obter o modelo mais satisfatório.

Portanto, a modelagem através da metodologia Box & Jenkins abrange várias etapas de análise, indo desde a identificação da estrutura do modelo, passando pela estimação paramétrica e, por fim, aplicando testes para mensurar a eficiência dos modelos obtidos.

### 2.2.2.2

#### Metodologia dos modelos ARIMA

A primeira verificação a ser feita para aplicação dos modelos ARIMA refere-se à estacionariedade da série.

O primeiro passo consiste na identificação da ordem de homogeneidade “d” da série, ou seja, trata-se de identificar o número de vezes que a série original deverá ser diferenciada para se tornar uma série estacionária. Este procedimento pode ser feito através da observação do gráfico da série ou da função de autocorrelação, tendo em vista que uma série não estacionária apresenta uma FAC com um decrescimento lento.

Em um segundo momento inicia-se a identificação do modelo, ou seja, da sua ordem. Para isso são utilizados os conceitos de função de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP), isto é, utilizam-se os correlogramas para a identificação das ordens p e q, observando os comportamentos da FAC e FACP. No quadro abaixo foi esquematizado um resumo das características destas funções para os modelos AR(p), MA(q) e ARMA(p,q).

Quadro 2.1: Resumo das características teóricas da FAC e da FACP dos modelos AR(p), MA(q) e ARMA(p,q).

Modelo	FAC ( $\rho_k$ )	FACP ( $\phi_{kk}$ )
AR(p)	Infinita (Exponencial e/ou senóides amortecidas)	Finita (Corte após <i>lag</i> “p”)
MA(q)	Finita (Corte após <i>lag</i> “q”)	Infinita (Exponencial e/ou senóides amortecidas)
ARMA(p,q)	Infinita (Exponencial e/ou senóides amortecidas após <i>lag</i> “q-p”)	Infinita (Exponencial e/ou senóides amortecidas após <i>lag</i> “p-q”)

Fonte: Souza e Camargo (1996)

Para se identificar a ordem p de um modelo AR(p), por exemplo, deve ser observado se a FAC decresce e se a FACP apresenta valores fora do intervalo de significância dos *lags*. Os *lags* cujos valores da autocorrelação ultrapassam este intervalo são ditos significantes (Goodrich & Stellwagen, 1999). Se, por exemplo, a autocorrelação de *lag* 1 se apresenta significativa e, a partir do *lag* 2 (inclusive), as auto correlações estão todas dentro do intervalo, isto indica que a ordem “p” do modelo AR é igual a 1.

Para um modelo MA(q) a FAC e a FACP apresentam comportamento inverso ao de um modelo puramente auto regressivo, isto é, para um modelo MA, a FACP decresce, e a FAC indica através dos *lags* significantes a ordem “q” do modelo MA.

Identificada a ordem do modelo, encaminha-se para a obtenção das estimativas dos parâmetros desse modelo. A técnica utilizada é o processo de máxima verossimilhança (Dudewicz & Mishra, 1988).

Finalmente, após a identificação do modelo e a estimação dos parâmetros, aplicam-se os testes de aderência, tais como testes para os resíduos e testes de sobre fixação, para verificar a adequabilidade final deste modelo.

Os testes aplicados sobre os resíduos têm por finalidade constatar se, depois de elaborado o modelo, o resíduo gerado por este modelo é um ruído branco, ou seja, se o modelo foi capaz de explicar satisfatoriamente o comportamento da série de forma que o erro não apresente nenhuma estrutura de correlação. Já o teste de sobre fixação consiste em gerar modelos de ordem superior ao identificado, de forma a reforçar a pertinência deste.

### 2.2.2.3

#### Modelos SARIMA

Os processos encontrados na prática, além de raramente serem estacionários, apresentam muitas vezes componentes sazonais. Assim Box & Jenkins formularam seus modelos para séries temporais com componentes sazonais dando origem aos modelos SARIMA.

A modelagem segue a equação:

$$\phi(B) \Phi(B^S) \nabla_S^D \nabla^d X_t = \theta(B) \Theta(B^S) a_t$$

onde:

$\phi(B)$ : operador não sazonal auto regressivo

$\Phi(B^S)$ : operador sazonal auto regressivo

$\nabla^d = (1-B)^d$  : operador de diferença sazonal de ordem d

$\nabla_S^D = (1-B^S)^D$  : operador de diferença sazonal de ordem D

$\theta(B)$ : operador não sazonal de médias móveis

$\Theta(B^S)$ : operador sazonal de médias móveis

Um modelo com esta estrutura é denominado SARIMA(p,d,q)x(P,D,Q).

Ressalte-se que o procedimento de obtenção deste modelo segue os mesmos passos empregados para achar o modelo ARIMA não sazonal. Isto quer dizer que, no SARIMA, faz-se também a observância do comportamento da FAC e da FACP (inclusive a observância dos *lags* de “cortes”), entretanto, olha-se para os *lags* sazonais (para uma série mensal, por exemplo, são os *lags* 12, 24, 36, etc.).

## 2.3

### Modelo Multivariado de Regressão Dinâmica

#### 2.3.1

##### Apresentação Teórica

É característica comum entre os modelos de regressão linear a suposição de que os erros extraídos do modelo possuam média zero, variância constante, distribuição Normal e independência, ou seja, ausência de correlação serial. Porém, em algumas séries econômicas os resíduos tendem a apresentar correlações positivas, e os erros positivos tendem a ser seguidos de outros também positivos. O mesmo fenômeno ocorre com os erros negativos.

Ao tentar modelar uma série temporal através de um modelo de regressão, a hipótese de independência dos ruídos não é realista, e os resultados e testes usados nos modelos de regressão não são válidos. (Barros e Souza, 1995).

Como consequências da autocorrelação dos resíduos destacam-se:

- I. Os estimadores usuais por mínimos quadrados são não tendenciosos, porém, não possuem variância mínima.
- II. Os estimadores de variância e dos erros padrões dos coeficientes da regressão são subestimados, o que implica na conclusão de que os estimadores são mais precisos do que na realidade.
- III. Os intervalos de confiança para os parâmetros da regressão e os testes de hipóteses relacionados a estes intervalos perdem a validade.

Estas três consequências implicam na necessidade de procurar procedimentos para tratar o problema da autocorrelação dos erros, pois do

contrário pode-se chegar a inúmeras conclusões erradas. Assim, dado que a hipótese de independência dos erros não é realista no contexto de séries temporais, os modelos de regressão dinâmica estendem os modelos usuais de regressão ao eliminarem esta restrição.

O significado da palavra “dinâmica” refere-se a um modelo de regressão no qual incluímos a estrutura de dependência de uma série temporal, ou seja, um modelo no qual se combinam o efeito de variáveis explicativas e a dinâmica de séries temporais. É importante ressaltar que os parâmetros do modelo não evoluem ao longo do tempo, como no caso dos modelos de espaço de estados que usam filtro de Kalman.

Modelos de regressão dinâmica devem ser usados quando existe uma estrutura de dependência entre a variável de interesse e variáveis causais e, ao mesmo tempo, quando a estrutura de correlação da série dependente (série a ser explicada) indicar que não podem supor a independência dos erros.

A estimação de parâmetros em um modelo de regressão dinâmica é feita através de mínimos quadrados ordinários<sup>1</sup>, de forma similar à estimação dos modelos de regressão usuais. Apesar disso, a estimação em modelos de regressão dinâmica é mais complicada, e envolve um procedimento iterativo com vários estágios.

Nos modelos de regressão dinâmica, a variável dependente é explicada por seus valores defasados e pelos valores atuais e passados de variáveis causais ou exógenas. Vale ressaltar que nos modelos de regressão dinâmica as variáveis exógenas se comportam como valores fixos e não mais como variáveis aleatórias. O mesmo não acontece nos modelos de espaço de estados, onde as variáveis exógenas são tidas como séries temporais, ou seja, realizações de processos estocásticos. Portanto, no contexto da modelagem em espaço de estados, a estrutura de auto covariâncias e auto correlações das séries de variáveis exógenas é uma informação relevante, enquanto que nos modelos de regressão dinâmica este aspecto é propositalmente ignorado.

---

<sup>1</sup>Dudewicz & Mishra (1998)

### 2.3.2

#### Metodologia dos Modelos de Regressão Dinâmica

Sistema de equações do modelo de regressão dinâmica é dado por:

$$\varphi(B)Y_t = \beta x_t + \varepsilon_t \quad (2-1)$$

onde:

$\varphi(B)$  = polinômio auto regressivo de ordem p:  $1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p$

B = operador de atraso

$Y_t$  = variável endógena (dependente) no instante t

$\beta$  = vetor de coeficientes das variáveis exógenas (causais)

$x_t$  = vetor das variáveis exógenas (causais) no instante t

$\varepsilon_t$  = ruído aleatório<sup>2</sup>

A estrutura do modelo de regressão dinâmica permite considerar como elementos  $x_t$  variáveis causais e também suas defasagens.

A presença do polinômio  $\varphi(B)$  no modelo traz uma grande flexibilidade desta classe de modelos, mas, em contrapartida, dificulta a procura por um modelo adequado. Observe-se que quando  $\varphi(B) = 1$ , não existem defasagens da variável endógena, e a interpretação do modelo é muito simples, uma vez que as variáveis causais diretamente a variável dependente. Já no caso em que  $\varphi(B) \neq 1$ , o modelo pode ser usado para representar relações bastante complexas.

Ressalte-se que uma grande diferença entre os modelos de regressão dinâmica e os modelos ARIMA consiste no fato dos modelos de regressão dinâmica incluírem efeitos de variáveis exógenas através dos termos  $\beta x_t$ . Os modelos ARIMA univariados de Box & Jenkins, por sua vez, não incluem tais efeitos, e apenas o passado da série  $Y_t$  e os valores defasados da série de erros são usados na modelagem e previsão da série  $Y_t$ .

Dentro da metodologia definida procura-se evoluir na modelagem, buscando em outras causalidades, que não somente a própria série, um melhor modelo de previsão. Este modelo, como já mencionado, foi o modelo de regressão dinâmica que pode ser considerado como um caso particular do que é conhecido na literatura como modelos de Cochrane e Orcutt generalizados.

<sup>2</sup> É suposto que o ruído aleatório seja i.i.d. com densidade  $N(0, \sigma^2)$

### 2.3.3

#### Modelos de Cochrane-Orcutt generalizados

O modelo de regressão generalizado de Cochrane e Orcutt é dado por:

$$\varphi(B)Y_t = \beta x_t + w_t \quad (2-2)$$

$$R(B)w_t = \varepsilon_t \quad (2-3)$$

onde  $R(B)$  é o polinômio auto regressivo.

Note-se que a equação (2-2) tem a mesma forma da equação (2-1) da regressão dinâmica, porém, os erros  $w_t$  apresentam uma estrutura AR dada por (2-3). Na formulação original de Cochrane e Orcutt é suposto que os ruídos  $w_t$  apresentem apenas uma estrutura AR(1).

Este modelo, dado pelas equações (2-2) e (2-3), pode ser expresso através de uma única equação:

$$R(B)[\varphi(B)Y_t - \beta x_t] = \varepsilon_t \quad (2-4)$$

Posto que  $w_t = \varphi(B)Y_t - \beta x_t$

A partir de (2-4) pode ser observado que o modelo de regressão generalizada de Cochrane e Orcutt introduz defasagens tanto na variável dependente  $Y_t$  quanto nas causais, esta equação indica também que a relação de causalidade entre  $Y_t$  e  $x_t$  não é afetada pela introdução do polinômio auto regressivo  $R(B)$ .

Reescrevendo a equação (2-4) em termos de novas variáveis modificadas  $Y^*_t$  e  $x^*_t$  dadas por:

$$Y^*_t = R(B)Y_t$$

$$x^*_t = R(B)x_t$$

onde  $R(B)$  é denominado “fator comum” e representa a estrutura de correlação presente no erro  $w_t$ , teremos a seguinte equação:

$$\varphi(B)Y^*_t = \beta x^*_t + \varepsilon_t \quad (2-5)$$

Conseqüentemente, o modelo de regressão generalizado de Cochrane e Orcutt fica reduzido ao modelo de regressão dinâmica usual. O modelo original de

Cochrane e Orcutt tem como fator comum  $R(B) = 1 - \alpha B$ . Desta forma (2-5) reduz-se a:

$$\varphi(B)[Y_t - \alpha Y_{t-1}] = \beta[x_t - \alpha x_{t-1}] + \varepsilon_t \quad (2-6)$$

Neste modelo o procedimento é sequencial, sendo a estimativa inicial de  $\alpha$  igual a 0, e a partir dela estimamos  $\beta$  e  $\varphi(B)$  por mínimos quadrados ordinários. A partir destas estimativas encontra-se um estimador de  $R(B)$  através da equação  $R(B)w_t = \varepsilon_t$ . O polinômio estimado  $R(B)$  é então utilizado para transformar  $Y_t$  e  $x_t$  e reestimar  $\beta$  e  $\varphi(B)$ . O processo é repetido até que se alcance a convergência dos parâmetros.

### 2.3.4

#### Construção do modelo de Regressão Dinâmica

Os modelos econométricos, em geral, partem de uma estrutura conhecida baseada em considerações teóricas, conseqüentemente o problema se reduz à estimação dos parâmetros do modelo já conhecido. Porém, ao tratarmos de séries temporais, esse raramente é o caso, e o desafio é construir os modelos diretamente a partir dos dados.

Comumente, a estratégia empregada para se construir um modelo de regressão dinâmica é a estratégia *botton-up*, isto é, a partir de um modelo simples faz-se o refinamento deste com a inclusão de novas variáveis até encontrar um modelo apropriado. A elaboração de um modelo de regressão dinâmica é muitas vezes algo complicado e difícil, pois é necessário escolher não apenas as variáveis a serem incluídas no modelo, mas também os *lags* (defasagens) destas variáveis. É necessário levar em conta na definição do modelo adequado, não só a significância dos parâmetros, mas também certa estrutura lógica do modelo.

Por exemplo: o consumo de um determinado produto é, em geral, afetado inversamente por seu preço de venda, ou seja, preço aumenta, consumo diminui. Portanto, se o modelo de regressão encontrado para explicar o consumo deste produto pelo preço de venda apresentar um coeficiente positivo para a variável preço, é importante verificar o resultado, por mais bem ajustado que esteja o modelo, pois a relação apontada tende a não ser verdadeira.

Uma possível solução é utilizar a variável preço com certa defasagem, o que pode ser explicado pela necessidade de tempo para o aumento do preço implicar em uma redução do consumo.

Resumidamente, na escolha de um modelo de regressão, não é necessário apenas encontrar um ajuste de parâmetros adequado, mas fundamentalmente verificar a coerência dos coeficientes estimados.

As previsões geradas por um modelo de regressão dinâmica dependem não só de valores passados da série, mas também dos valores previstos para as variáveis causais. Logo, para obtermos as previsões da série  $Y_t$  para  $t+1$ ,  $t+2$ ,  $t+3$ , etc., é necessário fornecer ao modelo os valores futuros do vetor de variáveis causais  $x_t$ . Se as previsões destas variáveis exógenas não forem apropriadas, o modelo de regressão dinâmica irá também gerar previsões inadequadas.

Isso caracteriza um aspecto importante dos modelos de regressão dinâmica que consiste na possibilidade de consecução de cenários ao se chegar a um modelo relacional de variáveis dependentes em relação a variáveis explicativas. Isto é, surge a possibilidade de montagem de vários cenários para as variáveis causais.

O fluxograma a seguir apresenta os passos aplicados na construção de um modelo de regressão dinâmica.

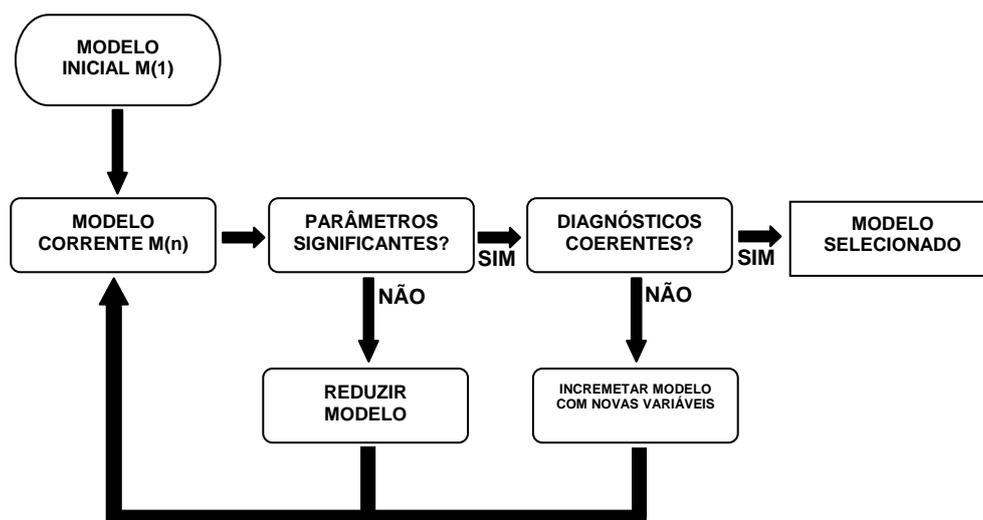


Figura 2.1: Fluxograma para a construção de um modelo de regressão dinâmica

Um recurso presente nos modelos de regressão dinâmica é a utilização de variáveis de intervenção, também conhecidas como variáveis *dummies*.

O objetivo do uso deste procedimento é considerar situações atípicas como, por exemplo, aumento na frequência dos restaurantes nos dias dos namorados e dia das mães. O mesmo procedimento pode ser usado para levar em conta os efeitos de situações incomuns, como mudanças de moedas, quebra de empresas, etc. Variáveis *dummies* são geralmente definidas como 1, no período de ocorrência do fato relevante, e 0 para os demais períodos.

Os modelos de regressão dinâmica incorporam diretamente a sazonalidade da série ao modelo, ao invés de supor que a série será previamente dessazonalizada. Existem duas maneiras de tratar a sazonalidade: via *dummies* sazonais ou diretamente, através de defasagens na variável dependente ou nos erros estruturados.

### 2.3.5

#### Testes para os modelos de regressão dinâmica

Na regressão dinâmica a construção do modelo envolve vários passos até se chegar no “modelo final”. Diversos testes de adequação podem ser mencionados, e estes testes são aplicados em diversos estágios da modelagem da série e pode-se classificá-los da seguinte forma:

##### A. Testes para a definição da especificação do modelo:

O objetivo desta classe de testes é verificar se a inclusão de uma ou mais variáveis, não contempladas no modelo, resulta em uma melhora do ajuste.

###### A.1. Teste das variáveis causais excluídas:

Neste teste verifica-se a necessidade de inclusão de cada uma das variáveis (escolhidas previamente pela análise do problema a ser modelado), mas que ainda não estão presentes no modelo. Se quaisquer destas variáveis for considerada significativa, deve-se incluí-las no modelo e “rodar” a mesma bateria de testes para verificar se a inclusão trouxe melhorias.

###### A.2. Teste de tendência temporal:

Este teste corresponde à inclusão de uma variável do tipo  $x_t = t$  no modelo. Esta variável será útil em casos onde a série dependente não for estacionária.

### **A.3. Teste da defasagem das variáveis causais:**

Na hipótese alternativa inclui-se um *lag* adicional das variáveis causais já presente no modelo atual.

### **A.4. Teste de presença de funções não lineares das variáveis causais:**

Inclui-se de uma só vez o quadrado de todas as variáveis exógenas já presentes no modelo com intuito de buscar quais quadrados são realmente significativos.

### **A.5. Teste do fator comum:**

Este teste é realizado somente quando o modelo inclui erros estruturados. Sob a hipótese alternativa, a auto regressão dos erros é eliminada, e todos os *lags* da variável dependente e das causais são adicionados ao modelo. Se a hipótese nula é rejeitada, existe evidência de que um modelo mais geral deveria ser considerado. O grande problema é descobrir em que direção deve ser generalizado o modelo corrente, e infelizmente não existe uma resposta única para esta questão.

## **B. Testes para inclusão de variáveis defasadas, responsáveis pela dinamicidade do modelo:**

A dinâmica de um modelo acontece através dos *lags* da variável dependente e/ou através da presença de erros estruturados num modelo de Cochrane-Orcutt. A cada momento da elaboração do modelo são realizados testes de hipóteses sobre a “dinâmica” do modelo.

Em todos os casos a seguir, a hipótese nula afirma que a dinâmica do modelo está corretamente especificada, ou seja, a inclusão de outros *lags* da variável dependente ou outros erros estruturados não é necessária. A hipótese alternativa, em cada caso, representa a necessidade de inclusão de novos termos.

### **B.1. Teste de defasagem da variável endógena:**

Suponha que a dependente  $Y_t$  e seus e seus *lags*  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p-1}$  estão presentes no modelo atual. A hipótese alternativa consiste em adicionar a variável defasada  $Y_{t-p}$  ao modelo, isto é, adiciona-se o primeiro *lag* ainda não presente no

modelo atual. Se esta variável for significativa, a hipótese nula é rejeitada e deve-se adicionar a variável  $Y_{t-p}$  ao modelo.

### **B.2. Teste de defasagem sazonal da variável endógena:**

Este teste é semelhante ao anterior. A hipótese alternativa consiste em adicionar ao modelo atual a variável defasada até o primeiro *lag* sazonal  $Y_{t-pS}$  ainda não presente no modelo. Se o coeficiente  $Y_{t-pS}$  for significativo, esta variável deverá ser incluída no modelo, e a hipótese nula deverá ser rejeitada.

### **B.3. Teste da sequência de defasagem da variável endógena:**

A hipótese alternativa consiste em adicionar todos os *lags* da variável dependente que ainda não estão presentes no modelo.

### **B.4. Teste de defasagem dos resíduos:**

A hipótese alternativa consiste em adicionar ao modelo atual o primeiro termo defasado  $\varepsilon_{t-p}$  ainda não presente no modelo.

### **B.5. Teste de defasagem sazonal dos resíduos:**

A hipótese alternativa consiste em adicionar ao modelo atual o primeiro *lag* sazonal  $\varepsilon_{t-pS}$  ainda não presente no modelo.

### **B.6. Teste da sequência de defasagem da variável endógena:**

A hipótese alternativa adiciona-se às variáveis do modelo atual uma sequência de resíduos defasados  $\varepsilon_{t-1}$ ,  $\varepsilon_{t-2}$ ,  $\varepsilon_{t-S}$  onde  $S$  é o período sazonal. É importante ressaltar que na hipótese alternativa inclui-se apenas os resíduos ainda não estão presentes no modelo.

## **C. Testes para verificação do ajuste do modelo:**

O processo de construção de um modelo de regressão dinâmica deve levar em conta diversos diagnósticos, a fim de verificar se o modelo em teste é apropriado. Em particular, deve-se sempre examinar o gráfico das auto correlações dos resíduos. Caso estas sejam significantes para alguns *lags*, alguma característica da variável dependente não foi capturada pelo modelo atual. Por exemplo, no caso de dados mensais, se a autocorrelação dos resíduos é

significante no *lag* 12, a observação situada num período genérico  $t-12$  meses é relevante para explicar a observação no período  $t$ , e sua inclusão no modelo possivelmente resultará em um decréscimo dos erros de previsão do modelo.

A existência de auto correlações significantes nos resíduos pode então indicar que deve-se incluir mais *lags* da variável dependente ou deve-se incluir *lags* adicionais das variáveis exógenas já presentes no modelo, ou por fim, incluir novas variáveis causais.

Importa observar que o fato dos resíduos apresentarem auto correlações significantes indica que algum tipo de estrutura presente na série  $Y_t$  não foi capturada pelo modelo considerado.