

## 3

### Modelagem

#### 3.1

##### Considerações Iniciais

A avaliação de um contrato elétrico deve basear-se no conhecimento das variáveis que interferem no resultado futuro deste contrato, sendo aquelas que incorporam incertezas a tais resultados as responsáveis pela presença de risco nos resultados dos contratos, e a mais relevante dessas incertezas é o próprio preço spot da commodity em questão.

Conforme discutido no capítulo anterior, o preço “à vista” praticado no mercado brasileiro está intimamente ligado à oferta de energia através de sua correlação com as afluências às usinas hidrelétricas.

Dado que um dos objetivos deste trabalho é construir um modelo para os preços à vista da energia elétrica que capte as principais características dessa commodity e sirva de base para a análise das flexibilidades existentes nos contratos de eletricidade, é imprescindível ter em mente que os mesmos estarão inseridos em um contexto de mercado. Neste caso, o mercado deve ser entendido como o “local” onde, apesar de não existir fisicamente, são confrontadas as necessidades dos agentes consumidores com os produtos e serviços oferecidos pelos agentes produtores no intuito de suprirem as necessidades um do outro através da troca.

Sob este ponto de vista, o mercado de energia elétrica é o local onde se tem, em uma ponta, agentes geradores – oferecendo o produto eletricidade em troca de remuneração –, e, na outra ponta, agentes distribuidores – oferecendo remuneração aos geradores com a finalidade de saciar a demanda por eletricidade

de seus clientes – e clientes livres – oferecendo remuneração aos geradores de energia com a finalidade de saciar sua própria demanda por eletricidade.

Assim, é de se esperar que as incertezas provenientes da inserção de um contrato de energia elétrica no mercado estejam ligadas diretamente a essas duas variáveis: oferta e demanda de eletricidade. Naturalmente, a incerteza resultante do confronto entre essas duas forças, e o consequente risco a ela associado, deverá estar refletida nos preços praticados no mercado. A afirmação anterior deixa claro que o preço é justamente a variável que incorpora o risco do mercado aos contratos elétricos, sendo fundamental à correta caracterização e à modelagem precisa do comportamento dos mesmos, de modo a proporcionar uma avaliação confiável dos contratos elétricos.

Para se caracterizar o preço que deve servir de referência à análise, faz-se necessário destacar um aspecto intrínseco ao mercado e que afeta as avaliações de todos os agentes, o horizonte de análise. Assim sendo, o mesmo mercado, porém avaliado para diferentes horizontes de análise, pode apresentar comportamentos onde curto, médio e longo prazos relacionam-se de maneiras distintas, algumas vezes diferindo profundamente entre si. Neste trabalho, se utilizará um modelo de curto prazo (preços semanais), por ser o preço utilizado como referência no mercado de curto prazo brasileiro.

O mercado de suprimento de eletricidade, por ser um mercado de commodity, tem no preço à vista um elemento fundamental na busca da eficiência do mercado. Assim, um preço spot que reflita corretamente o equilíbrio entre oferta e procura imediatas por eletricidade é necessário para que o mercado seja eficiente. Devido a este papel desempenhado pelo preço spot, de indicador do equilíbrio instantâneo entre oferta e demanda, a trajetória futura esperada para seu valor é uma referência na definição dos preços de médio e longo prazo, afetando diretamente os valores negociados em contrato.

Dadas a influência do preço à vista da eletricidade na avaliação dos contratos elétricos e sua importância para a eficiência do mercado, pode-se concluir a necessidade de se modelar o comportamento futuro do preço spot, com

o intuito de permitir a avaliação do comportamento do mercado elétrico e melhor avaliar os preços para médio e longo prazos. Dado que no Brasil não existe um preço spot propriamente dito, usa-se o PLD como uma *proxy*, ou seja, como uma aproximação, dos preços de mercado de curto prazo da commodity.

O PLD, cujo comportamento se quer modelar, é aleatório e pode ser visto como uma série temporal. O presente trabalho utilizará os modelos mais utilizados em finanças para descrever séries temporais, os *processos estocásticos*, que são processos regidos por leis probabilísticas e indexados pelo tempo. Entretanto, existem outros modelos de séries de tempo igualmente importantes, como: AR, MA, ARCH, GARCH, etc.

A seção 3.2 apresenta os processos estocásticos elementares usados para a criação do modelo. Na seção 3.3 é apresentada a modelagem dos preços da eletricidade em si, levando em consideração suas principais características e estimação dos parâmetros do modelo. Finalmente, a seção 3.4 faz uma avaliação do modelo para o preço spot da energia elétrica.

## 3.2

### Processos Estocásticos

A definição matemática precisa de um processo estocástico (ou processo aleatório) pode ser dada como:

**Definição:** *Seja  $T$  um conjunto arbitrário. Um processo estocástico é uma família  $Z = \{Z(t), t \in T\}$ , tal que, para cada  $t \in T$ ,  $Z(t)$  é uma variável aleatória (Mills, 2000).*

Ou seja, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias (v.a.) definidas num mesmo espaço de probabilidades  $(\mathbb{P}, \mathcal{A}, \Omega)$ , onde  $\mathbb{P}$  representa uma medida de probabilidade,  $\mathcal{A}$  é uma  $\sigma$ -álgebra e  $\Omega$  representa um espaço amostral. O conjunto  $T$  é normalmente tomado como o conjunto dos números Inteiros (tempo discreto) ou o conjunto dos números Reais (tempo contínuo) e, para cada  $t \in T$ , temos um evento  $\omega \in \Omega$ .

### 3.2.1

#### Processos Markovianos

Um processo de Markov é um processo estocástico em que a probabilidade do sistema estar no estado  $i$  no período  $n + 1$  depende somente do estado em que o sistema está no período  $n$ . Ou seja, para os processos de Markov, só interessa o estado imediato, característica consistente com a Forma Fraca da Eficiência de Mercado, por isso esses processo são largamente utilizados na modelagem do preço de ativos financeiros (como cotações de ações, metais precioso, etc.).

Os principais elementos de um processo de markov são:

- a probabilidade  $\mathbb{P}_n^i$  de ocorrer o estado  $i$  no  $n$ -ésimo período de tempo, ou, alternativamente, a fração da população em questão que está no estado  $i$  no  $n$ -ésimo período de tempo
- as probabilidades de transição  $m_{ij}$ , que representam as probabilidades do processo estar no estado  $i$  no tempo  $n + 1$  dado que está no estado  $j$  no tempo  $n$ . Estas probabilidades de transição são normalmente agrupadas numa matriz, denominada matriz de transição ou matriz de markov.

### 3.2.2

#### Processo de Wiener

Dentre os Processos Markovianos, um dos mais populares em finanças é o Processo de Wiener, também conhecido como Movimento Browniano, tipo específico de processo onde os incrementos são imprevisíveis e ocorrem de forma contínua no tempo.

Antes mesmo de ser utilizado na física por Einstein em 1905, o processo de Wiener já tinha sido utilizado por Bachelier (em 1900), a partir de quando passou a ser a pedra fundamental para a modelagem do comportamento do preço de ativos financeiros.

O Processo de Wiener possui basicamente três importantes propriedades (Dixit e Pindyck, 1994):

- É um Processo Markoviano, o que implica que toda informação necessária para elaboração de previsões futuras está no valor atual da variável e sua distribuição de probabilidade. Dessa forma, considerando que  $w(t)$  seja um Processo de Wiener, temos que a relação entre  $\Delta w$  e  $\Delta t$  é dada por  $\Delta w = \varepsilon_t(\Delta t)^{1/2}$ , onde  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ .
- Os incrementos do processo são independentes, implicando na não correlação serial entre  $\varepsilon_t$  e  $\varepsilon_s$  para  $t \neq s$  e ainda que para dois quaisquer intervalos de tempo os valores de  $\Delta w$  são independentes.
- Normalidade nas variações do processo sobre qualquer intervalo de tempo, com variância crescendo linearmente proporcional ao tamanho do intervalo de tempo:  $dw \sim N(0, \sqrt{dt})$ , ou seja, os incrementos do processo se dão por variações normais e  $w_T \sim N(w_0 = 0, T)$ , que representa a condição inicial do movimento Browniano.

### 3.2.3

#### Movimento Aritmético Browniano (MAB)

O Movimento Aritmético Browniano determina que o processo de uma variável  $x$  pode ser definido em termos de um incremento de Wiener e um termo de tendência, como definido na eq. (10).

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \quad (10)$$

Onde:

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$$

$$\varepsilon_t \sim N(0,1)$$

$\alpha$  – é o parâmetro drift ou tendência; e

$\sigma$  – é o parâmetro de variância;

Sendo ambos,  $\alpha$  e  $\sigma$ , constantes no tempo.

Considerando um intervalo infinitesimal de tempo  $dt$ , a variação em  $x$  ( $dx$ ) terá distribuição normal, sendo os dois primeiros momentos da distribuição:

$$E(dx) = \alpha dt \quad (11)$$

$$Var(dx) = \sigma^2 dt \quad (12)$$

Dessa forma, considerando a data  $t = 0$ , a previsão (valor esperado) para o valor de  $x_T$  (em  $t = T$ ) e a variância correspondente são dados por:

$$E(x_T) = x_0 + \alpha T \quad (13)$$

$$Var(x_T) = \sigma^2 T \quad (14)$$

Caso tenhamos um derivativo escrito sobre um ativo  $x$  que segue um MAB, o seu diferencial estocástico pode ser determinado por intermédio da aplicação do Lema de Itô. Seja  $F(x, t)$  um derivativo escrito sobre  $x(t)$ , temos pelo Lema de Itô que:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 \quad (15)$$

O problema do MAB é que ele possibilita o surgimento de valores negativos, o que seria uma característica indesejável para os preços, dado que, neste caso, apresenta distribuição normal.

### 3.2.4

#### Processos de Itô

O Processo de Itô consiste da generalização do Movimento Browniano, o qual permite que os parâmetros de drift e variância variem no tempo e sejam função da variável aleatória, conforme apresentado na eq. (16).

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (16)$$

Temos que  $dz$  é um incremento de Wiener e  $a(x, t)$  e  $b(x, t)$  funções determinísticas do tempo e estado atuais, correspondentes aos parâmetros drift e variância do processo.

### 3.2.5

#### Movimento Geométrico Browniano (MGB)

Um caso particular do Processo de Itô é o Movimento Geométrico Browniano (*MGB*), processo estocástico contínuo que é muito utilizado na modelagem matemática de alguns fenômenos do mercado financeiro, por exemplo, preço de ativos (como ações e produtos) e outras variáveis econômicas taxas de juros e índices de preço (inflação). Possui também a vantagem de obter valores não-negativos, fundamental para simulação de preços.

Os parâmetros drift e variância do *MGB* são dados pelas fórmulas:

$$a(x, t) = \alpha x \quad (17)$$

$$b(x, t) = \sigma x \quad (18)$$

O que determina a seguinte equação para o modelo:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \quad (19)$$

O grande problema do *MGB* é o fato de que ele pode divergir, fazendo com que os preços tendam para o infinito à medida que o intervalo de tempo seja aumentado, propriedade indesejável quando se está lidando com ativos de longa maturidade.

Quando se assume que o preço de um ativo ( $x$ ) segue um *MGB*, comumente efetua-se o uso do diferencial do logaritmo natural do preço ( $d \ln x$ ), que pode ser facilmente obtido por intermédio do Lema de Itô, conforme demonstrado abaixo:

$$\begin{aligned} d \ln x &= \frac{\partial(\ln x)}{\partial x} dx + \frac{\partial(\ln x)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\ln x)}{\partial x^2} dx^2 \\ d \ln x &= \frac{1}{x} dx + 0 dt + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{x^2} \right) \sigma^2 x^2 dt \\ d \ln x &= (\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dz \end{aligned} \quad (20)$$

É trivial observar que  $\ln x$  segue um *MAB* com o parâmetro de drift  $(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2)$ , que possui como 2 primeiros momentos:

$$E[d\ln x] = (\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2) dt \quad (21)$$

$$Var[d\ln x] = \sigma^2 dt \quad (22)$$

Prova-se que os 2 primeiros momentos de  $x_T$  são:

$$E(x_T) = x_0 e^{\alpha T} \quad (23)$$

$$Var(x_T) = x_0^2 e^{2\alpha T} (e^{\sigma^2 T} - 1) \quad (24)$$

Temos então que:

$$x_T \sim \text{LogNormal}(x_0 e^{\alpha T}, x_0^2 e^{2\alpha T} \{e^{\sigma^2 T} - 1\}) \quad (25)$$

Como facilmente pode ser verificado nas fórmulas do valor esperado e variância do *MGB*, à medida que o tempo cresce,  $E(x(t))$  e  $Var(x(t))$  tendem ao infinito, conforme comentado anteriormente.

O *MGB* Neutro ao Risco pode ser obtido a partir de uma das duas formulações apresentadas abaixo:

$$dx = (r - \delta)xdt + \sigma x dz^* \quad (26)$$

ou

$$dx = (\alpha - \pi)xdt + \sigma x dz^* \quad (27)$$

Onde:

$\alpha$  – é o drift de um processo real;

$\delta$  – é o dividend (ou convenience) yield, ou seja, a taxa de dividendos de uma ação, ou o custo de carregamento de uma commodity;

$\pi$  – é o prêmio pelo risco do ativo;

$r$  – é a taxa livre de risco da economia; e

$dz^*$  – é um processo de Wiener sob a medida equivalente martingale.

Em se trabalhando com  $d\ln x$ , a formulação do *MGB* neutro ao risco será:

$$d\ln x = (\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 - \pi) dt + \sigma dz^* \quad (28)$$

No mercado financeiro, o MGB é modelo padrão. Principalmente por este ser o modelo de apreçamento de derivativos que leva a formula de Black e Scholes (Black e Scholes, 1973). Mas, apesar de sua aceitação, o modelo apresenta pressupostos que desaconselham sua utilização no mercado elétrico, como a estrutura complexa da volatilidade dos ativos energéticos, a não consideração de sazonalidade e picos, observados nos preços da energia elétrica.

### 3.2.6

#### **Movimentos de Reversão à Média**

Comumente em finanças quando se tenta descrever o comportamento de preços de ativos financeiros como ações e metais preciosos, por exemplo, o modelo preferencialmente escolhido é o Movimento Geométrico Browniano. O MGB é o caso base utilizado na maioria dos modelos de opções financeiras e opções reais e tem entre outras características desejáveis uma pequena quantidade de parâmetros a serem estimados. Em algumas situações, porém, esse processo pode não ser considerado uma boa alternativa.

Um dos problemas na utilização do MGB é o fato de que este processo pode divergir levando os preços para o infinito, gerando modelos não muito realistas em caso de ativos de longa duração comuns nas opções reais. Estudos realizados como o de Schwartz (1997), apontam que preços de commodities como o cobre e o petróleo, por exemplo, podem vagar aleatoriamente no curto prazo, mas no longo prazo tendem a convergir para o custo marginal de produção. Nesses casos pode ser considerada mais adequada a utilização de outra classe de Processos de Itô, os Movimentos de Reversão à Média (MRM).

O MRM possui uma diferença em relação ao MGB, que é a convergência de longo prazo. Quando se faz o tempo tender a infinito o MGB tende a infinito ou a zero, dependendo de sua tendência. A característica de tendência exponencial é adequada a alguns ativos como as ações. Por outro lado, o MRM converge para uma média de longo prazo, o que é uma característica que possui embasamento na teoria microeconômica, pois há ativos, como as commodities, cujos preços possuem clara relação com seus custos marginais de produção.

No caso da energia elétrica, por exemplo, através da teoria microeconômica, o preço será dado pelo custo marginal da usina de maior custo, necessária para equilibrar oferta e demanda, conforme comentado na seção 2.5.

Na sequência serão apresentados dois dos modelos mais conhecidos de Processos de Reversão à Média.

### 3.2.7

#### MRM Aritmético de Ornstein-Uhlenbeck (MRA)

O modelo mais básico de reversão a média é o MRA de Ornstein-Uhlenbeck, que comumente é definido pela eq. (29).

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \quad (29)$$

Onde:

$dz$  – é um incremento de Wiener;

$\eta$  – é o parâmetro que indica a velocidade da reversão; e

$\bar{x}$  – é o nível normal ou média de longo prazo de  $x$ .

O MRA de Ornstein-Uhlenbeck é um Processo de Markov, e como todo processo de Itô, possui incrementos independentes. Entretanto, a variação esperada em  $x$  é função da diferença entre a média de longo prazo e a última observação do processo. Por exemplo, se o valor atual do processo for maior que a média de longo prazo, a tendência é de queda.

Prova-se que os dois primeiros momentos de  $x(t)$  são:

$$E(x_t) = \bar{x} - (\bar{x} - x)e^{-\eta(t-t_0)} \quad (30)$$

$$Var(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta(t-t_0)}) \quad (31)$$

Na comparação do MRA com o MGB é interessante observar os efeitos do tempo e da magnitude do parâmetro de reversão ( $\eta$ ), nos dois primeiros

momentos de sua distribuição. Quando  $t \rightarrow \infty$ , o valor esperado e a variância de  $x(t)$  tendem para:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(x_t) = \bar{x} \quad (32)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta} \quad (33)$$

Também se verifica que quando  $\eta \rightarrow \infty$ , serão encontrados:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} E(x_t) = \bar{x} \quad (34)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} Var(x_t) = 0 \quad (35)$$

E quando  $\eta \rightarrow 0$ , serão encontrados:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} E(x_t) = x_0 \quad (36)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} Var(x_t) = \sigma^2 T \quad (37)$$

Com base nas equações apresentadas, pode-se concluir que quando  $t \rightarrow \infty$  o valor esperado do processo MRA de Ornstein-Uhlenbeck irá convergir para  $\bar{x}$  e a variância para um valor constante,  $\sigma^2/2\eta$ , diferente do MGB cujo valor esperado e a variância de  $x(t)$  tendem a crescer indefinidamente. Quando  $\eta \rightarrow \infty$  o valor esperado do MRA de Ornstein-Uhlenbeck também irá convergir para  $\bar{x}$ , sua variância, no entanto, irá convergir para zero. Já quando  $\eta \rightarrow 0$ , o MRA de Ornstein-Uhlenbeck tende para o Movimento Aritmético Browniano sem tendência, ou seja, com  $\alpha = 0$ . Outra maneira de verificar este resultado é substituir  $\eta$  por zero na eq.(27) e com isso será obtida a equação do Movimento Aritmético Browniano.

### 3.2.8

#### MRM Geométrico de Dixit e Pindyck (MRG) (1994)

Este modelo foi apresentado no livro de Dixit e Pindyck (1994) e consiste de uma alternativa ao MRA.

$$dx = \eta(\bar{x} - x)xdt + \sigma xdz \quad (38)$$

Todos os parâmetros do modelo são similares aos apresentados no MRA de Ornstein-Uhlenbeck.

Para obtenção da média e variância do processo é mais conveniente o trabalho com o logaritmo do preço ( $\ln(x)$ ), o que trivialmente pode ser obtido com o uso do Lema de Itô e, por conseguinte, permite a conversão do MRG em um MRA.

Um ponto positivo do modelo é que esse não permitirá o surgimento de valores negativos no processo. No entanto, a parametrização do modelo é problemática, dado que nas fórmulas dos parâmetros de reversão e média de longo prazo do MRA do  $\ln(x)$  teríamos funções com termos em  $x/\ln x$  que não são constantes, condição essencial para estimação, como se pode ver em Dias e Rocha (1998).

### 3.2.9

#### Processos de Poisson

Processos de Poisson são processos Markovianos, mas não Processos de Itô, nos quais temos a ocorrência de saltos discretos e não frequentes no tempo, muito utilizados na modelagem de eventos raros como, por exemplo, a ocorrência de sinistros na indústria de seguros, o efeito de crises gerando salto nos preços do petróleo, etc. Nesse processo a chegada dos saltos segue uma distribuição de Poisson, sendo possível trabalhar com saltos de tamanho fixo ou variável (seguindo uma determinada distribuição). É comum em finanças a combinação de Processos de Poisson com Processos de Itô.

**Definição:** *Seja  $x$  um processo estocástico, no qual toda a aleatoriedade do processo é concentrada na chegada de saltos que possuem tamanho determinado pela função  $g(x,t)$ . O Processo de Poisson pode ser descrito pela equação diferencial:*

$$dx = f(x,t)dt + g(x,t)dq \quad (39)$$

Onde:

$f(x, t)$  e  $g(x, t)$  – funções determinísticas e conhecidas;

$dq$  – um incremento de Poisson.

Os parâmetros típicos do Processo de Poisson são:

$\lambda$  – corresponde à taxa média da ocorrência do salto por período de tempo;

$\lambda dt$  – correspondente a probabilidade de ocorrência do salto em um intervalo de tempo  $dt$ ; e

$1 - \lambda dt$  – probabilidade de não-ocorrência do salto no mesmo intervalo  $dt$ .

Existem diferentes tipos de processos de Poisson. Os processos de Poisson podem ser:

- **Homogêneos** - que consistem de processos de Markov com eventos aleatórios e incrementos independentes e estacionários, que somente dependem da variação do tempo. O número de saltos tem distribuição de Poisson e o tempo de ocorrência de eventos em  $\Delta t$  tem distribuição exponencial com média  $1/\lambda$ .
- **Não-Homogêneos** - nos quais é dispensada a estacionariedade dos incrementos, e a frequência de ocorrência dos saltos é função do tempo.
- **Compostos** - nos quais se verificam, adicionalmente a aleatoriedade na ocorrência dos saltos (seguindo um processo de Poisson), saltos com tamanho estocástico obedecendo a uma determinada distribuição de probabilidade.
- **Compensados** - que são obtidos pela subtração da tendência do processo determinando a sua conversão num martingale, que, por definição, é uma sequência de variáveis aleatórias  $X_0, X_1, \dots$  com média finita, a qual a esperança condicional de  $X_{n+1}$  dados  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$  é igual a  $X_n$ , i.e.,  $\mathbb{E}_{n+1}(X_{n+1} | X_0, \dots, X_n) = X_n$  (Feller, 1971).

### 3.2.10

#### Processos Mistos de Difusão com Saltos

É possível fazer uma combinação de um Processo de Itô e um Processo de Poisson, considerando que  $dx$  comporte-se da maneira:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz + \psi dq \quad (40)$$

Onde:

$a(x, t)$  e  $b(x, t)$  – funções determinísticas e conhecidas;

$dz$ – Processo de Wiener; e

$dq$ – Processo de Poisson independente de  $dz$ .

Os parâmetros típicos do Processo de Poisson são:

$\lambda$  – corresponde à taxa média da ocorrência do salto por período de tempo;

$\lambda dt$  – correspondente a probabilidade de ocorrência do salto em um intervalo de tempo  $dt$ ; e

$1 - \lambda dt$  – probabilidade de não-ocorrência do salto no mesmo intervalo  $dt$ .

$\psi$  – é o termo que modula o tamanho e a volatilidades dos saltos de Poisson.

Merton (1976) justificou esse modelo para ações, considerando que em caso de notícias normais  $x$  segue um MGB e no caso de notícias anormais (raras e com muito impacto) ocorreria um salto de Poisson, encontrando uma solução analítica para opções europeias, considerando uma distribuição lognormal para o tamanho dos saltos. Utilizou-se ainda um Processo de Poisson Compensado para transformar o processo um martingale:

$$dx = [a(x, t) - \lambda k]dt + b(x, t)dz + \psi dq \quad (41)$$

Onde:

$a(x, t)$  e  $b(x, t)$  – funções determinísticas e conhecidas;

$dz$ – Processo de Wiener; e

$dq$  – Processo de Poisson independente de  $dz$ .

Os parâmetros típicos do Processo de Poisson são:

$\lambda$  – corresponde à taxa média da ocorrência do salto por período de tempo;

$\lambda dt$  – correspondente a probabilidade de ocorrência do salto; e

$1 - \lambda dt$  – probabilidade de não-ocorrência do salto.

$\psi$  – é o termo que modula o tamanho e a volatilidades dos saltos de Poisson; e

$k$  – é a esperança de  $\psi$ , ou seja,  $E[\psi]\lambda dt = k\lambda dt$ .

Dias e Rocha (1998) desenvolveram um modelo similar substituindo o MGB por um MRG, de forma:

$$\frac{dx}{x} = [\eta(\bar{x} - x) - \lambda k]dt + \sigma dz + saltos \quad (42)$$

Neste modelo, de forma similar ao modelo de Merton (1976), notícias normais causam ajustes marginais no preço, enquanto notícias anormais causam saltos discretos.

De acordo com Dias (2011c), um dos principais benefícios no uso de processos de difusão com saltos, é que estes parecem descrever melhor a realidade, por explicarem fenômenos empíricos encontrados em séries temporais, tais como assimetria de retornos e distribuição com caudas pesadas. Adicionalmente, evitam o excesso de previsibilidade no caso da combinação com um processo de reversão à média. Como desvantagem, é citado que a existência de saltos teoricamente impossibilita a construção de um portfólio sem risco, a menos que estes sejam descorrelacionados com a economia (sem risco sistemático) como suposto por Merton (1976). Outra desvantagem seria o aumento do número de parâmetros a ser estimado (taxa de ocorrência, tamanho e volatilidade dos saltos), o que no caso de eventos raros, torna-se um problema adicional pela escassez de informações.

### 3.2.11

#### **Processos estocásticos com troca entre estados**

Existe também um método alternativo aos processos destacados anteriormente, com o qual é possível estabelecer um modelo, composto por diferentes estados, ao invés de integrá-los em um único processo de preços.

Dessa forma diversos regimes independentes são determinados. Cada um desses regimes possui seu próprio processo de determinação da dinâmica dos preços e a seleção dentre qual estado estaria vigente a cada momento é dada por um conjunto de regras específicas. O padrão do comportamento dos preços é definido então por uma função de distribuição de probabilidades, responsável pelo sorteio do estado em que o preço se encontra a cada momento.

### 3.3

#### **Modelagem dos Preços da Eletricidade**

Dentre todas as commodities, a eletricidade é a que impõe os maiores desafios para a modelagem do comportamento do seu preço, pois na maioria dos mercados de commodities os efeitos dos problemas na produção ou na cadeia produtiva sobre os preços são minimizados pela utilização de estoques, o que não é possível, para fins práticos, no caso da energia elétrica.

Pode-se argumentar que, se a eletricidade em si não é estocável suas fontes o são, entretanto, o preço da energia elétrica passa a ser influenciado, por incertezas ligadas a essas fontes, como: preços dos combustíveis, disponibilidade de usinas geradoras, hidrologia (principalmente aflúências) e etc.

O modelo escolhido para a evolução dos preços da eletricidade é a pedra angular do apreamento dos derivativos de eletricidade e do gerenciamento de risco. Se o mesmo for muito simplificado pode não capturar as principais características dos preços da commodity e os resultados do seu uso terão pouca confiabilidade. Por outro lado, se o modelo for muito complexo, a sobrecarga computacional inviabilizará sua utilização.

Poderia-se adotar, por exemplo, procedimentos de modelagem distintos para as afliências e para o consumo e correlacionar essas variáveis com o preço, através da decomposição de Cholesky, como em Camposilvan (2003), porém isso complicaria bastante a modelagem e a sua utilização.

Segundo Mayo (2009) existem duas abordagens distintas para a modelagem dos preços da eletricidade, são elas:

- **Abordagem fundamental** – Se baseia na simulação da operação do sistema e do mercado para chegar aos preços. Essa abordagem é similar a utilizada pelos modelos Newave (Maceira et al, 2008)/Decomp (Diniz et al, 2008) para o cálculo do CMO, e consequentemente do PLD, exigindo grande aparato computacional.
- **Abordagem econométrica (ou estatística)** – Se baseia na tradição financeira de modelar diretamente o comportamento estocástico dos preços de mercado a partir de dados históricos.

Este trabalho propõe um modelo mais simples que, mesmo assim, capte as principais influências para a formação do preço de curto prazo da eletricidade, se valendo então da abordagem econométrica.

A modelagem proposta é a de um processo estocástico de reversão à média, com troca de regime, se valendo de um ótica markoviana – onde toda a informação relevante se encontra nos preços históricos, mais precisamente, no último preço de curto prazo disponível – e com sazonalidade determinística capturada por variáveis dummy mensais. É importante frisar que, segundo Gujarati (2006), os coeficientes destas variáveis agregam todas as características sazonais da série.

### 3.3.1

#### **Características dos preços de curto prazo da eletricidade**

O preço de curto prazo da eletricidade é o balizador de quase todos os derivativos de energia elétrica. Sendo assim é de suma importância que se evidenciem suas principais características, que são:

## Picos de preço

Um dos aspectos mais notáveis do mercado spot de eletricidade são as abruptas e imprevisíveis variações no preço, esses saltos (jumps), em que em curtíssimo espaço de tempo o preço sobe bastante e volta ao nível anterior, são conhecidos como *picos (spikes)*, como pode ser visto na Figura 3.1. A intensidade desses picos não é constante e esses são devidos à não-estocabilidade da energia elétrica (como deve ser produzida e consumida no mesmo momento, não há estoques para regular essa interação). Logo, flutuações extremas ou falhas na transmissão, podem ocasionar picos de preço.

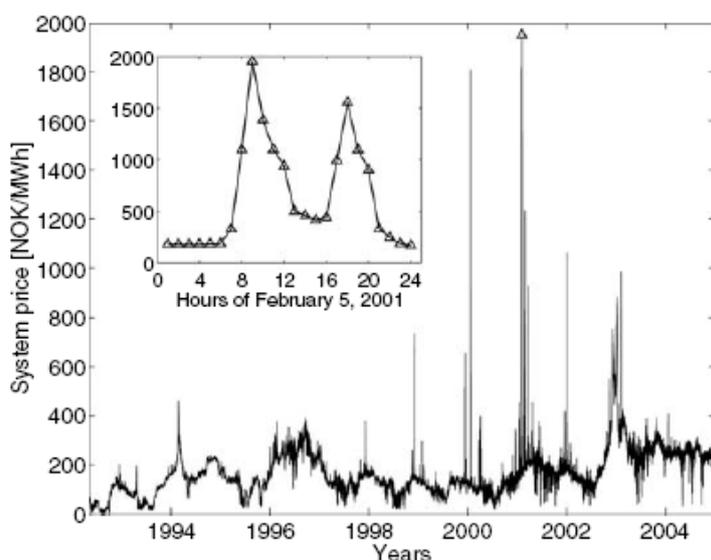


Figura 3.1 - Preços Horários no Mercado de Curto Prazo (Nord Pool)

Fonte: Weron (2006)

No Brasil essa relação não é direta, tome-se como base o seguinte caso: Em uma dada semana ocorre um preço de eletricidade muito elevado, se estivéssemos em um mercado spot propriamente dito, diminuiriam-se os processos indústrias eletro-intensivos, reduzindo assim a pressão de lado da demanda e consequentemente o preço da eletricidade no período seguinte.

Entretanto, no Brasil, isso não ocorre. Dada a grande importância da hidroeletricidade e o fato de o PLD ser definido por um sistema de despacho centralizado, o que ocorre é que o caso o nível dos reservatórios aumente devido ao aumento da afluência, o PLD reverterá a um nível mais baixo, caso isso não ocorra o PLD permanecerá em níveis elevados.

A escala temporal do problema se torna, então, um fator de grande relevância, pois em uma escala mensal, os picos se devem muito mais a fatores estruturais (um estiagem prolongada, por exemplo) e são muito menos frequentes que em uma escala semanal.

Para fins de comparação mostra-se, na Figura 3.2, preços de uma commodity para a qual a estocagem é possível, o petróleo. Nota-se a ocorrência de saltos para cima, e de saltos para baixo, que, entretanto, são desconectados no tempo. No caso da eletricidade esses saltos para cima são, geralmente, seguidos de altos para baixo em um curto espaço de tempo.

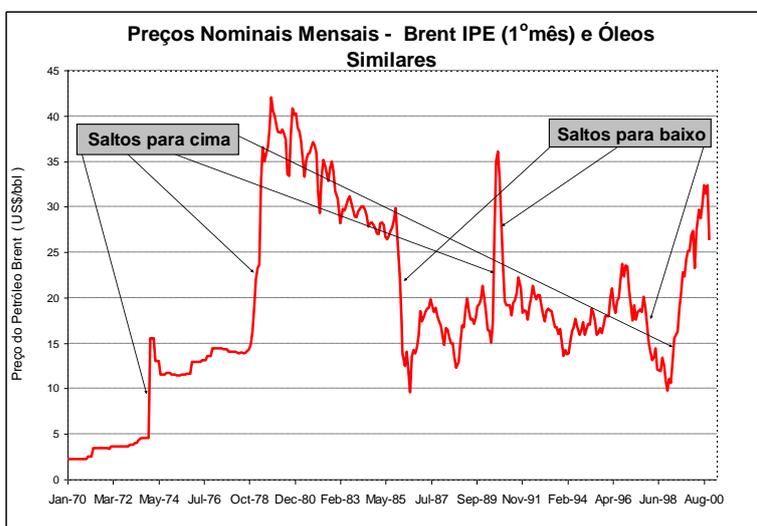


Figura 3.2 - Preço Mensal do Barril de Petróleo 1970-2000

Fonte: Dias e Rocha (1998)

### Reversão à média

Uma das características dos preços de curto prazo da energia elétrica é a reversão à média. Essa reversão se dá a um nível de longo prazo, ditado pelo Custo Marginal de Operação (CMO) e pelo volume da demanda, que no caso deste trabalho será considerado periódico e determinístico.

De uma forma geral, a alta velocidade de reversão que os preços da eletricidade apresentam, se dá pois os combustíveis e, principalmente, a água armazenados podem ser rapidamente utilizados para gerar energia em resposta a uma alta de preços, causando um retorno quase instantâneo a níveis mais baixos.

No Brasil essa elevada taxa de reversão à média não ocorre necessariamente, devida a decisão de despacho centralizada que ocorre apenas semanalmente.

### Sazonalidade

A demanda, os níveis pluviométricos e a Curva de Aversão ao Risco (CAR), são fatores que influenciam fortemente no preço da eletricidade, exibem fortes variações sazonais que se dão graças às mudanças climáticas (tal como temperatura), duração da luz do dia, precipitações pluviométricas e derretimento da neve, entre outros.

Além da sazonalidade anual, existem as sazonalidades intradiárias (diferenças entre consumos na parte da manhã e da noite, por exemplo) e intrassemanal (diferença, em termos de consumo energético, entre dias de semana e fins de semana). No Brasil, essas diferenças são explicitadas pelos patamares de carga (cf. Tabela 2.2).

A Figura 3.3 mostra que os preços da energia elétrica no mercado Nord Pool Spot variaram em torno de uma média sazonal no período destacado. Nota-se que é clara a sazonalidade anual dos preços e que, ao menos na escala apresentada na figura, não é possível perceber sazonalidades intradiárias ou intrassemanais. No caso brasileiro não faz sentido se falar nesses dois últimos tipos de sazonalidade, dado que os PLDs são semanais.

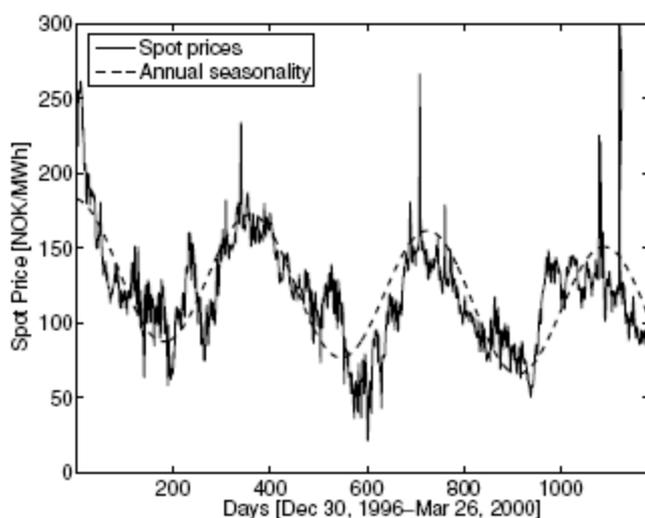


Figura 3.3 - Comportamento Sazonal do Preço de Curto Prazo (Nord Pool)

Fonte: Weron (2006)

Em suma: a sazonalidade é interpretada como um movimento regular de uma série dentro de um ano e pode ser vista como sendo a representação de movimentos sistemáticos causados por fenômenos econômicos e não econômicos, por exemplo, nível de produção industrial (que atua do lado da demanda) e mudanças climáticas e níveis pluviométricos (que atuam do lado da oferta); a componente de reversão à média evidencia o caráter de commodity da energia elétrica; e a componente irregular (saltos) relaciona-se com os movimentos imprevistos, gerados aleatoriamente dentro de uma série, como greves, condições climáticas não sazonais, etc.

### **3.3.2**

#### **Proposta de modelo para preços de curto prazo da energia elétrica**

Os processos estocásticos permitem modelar a possível evolução do preço no tempo, e sinalizam os prováveis valores dos preços futuros em função dos preços correntes de curto prazo e de um conjunto de parâmetros que descrevem a possível variabilidade desses preços no tempo.

Os principais processos estocásticos puros, apresentados na seção 6.2 – MAB, MGB, MRM e de Saltos de Poisson –, sozinhos não conseguem captar as principais características da evolução dos preços dessa commodity.

#### **Filtragem Simplificada**

A técnica de filtragem de Hamilton (Hamilton, 1989) foi usada por Heydari e Siddiqui (2009) para a obtenção de um modelo markoviano de mudança entre dois regimes (um regime estável e um regime de saltos) para a modelagem do logaritmo natural dos preços da energia elétrica. Entretanto, este teve a sua disposição aproximadamente seis anos de preços spot diários de energia elétrica (2105 observações diárias), enquanto o presente trabalho conta com apenas 355 dados de PLDs semanais (aproximadamente 7 anos).

Devido a esse pequeno número de dados, a presente dissertação propõe uma modelagem de filtração simplificada com 3 estados possíveis para o logaritmo natural do PLD baseada na simples contagem do número de semanas em cada estado e de uma modelagem separada para os mesmos.

Seja  $E_t$  a variável aleatória que denota o estado em que encontra o PLD no tempo  $t$ , temos então:

$$E_t = \begin{cases} 1, PLD_t \text{ baixo} \\ 2, PLD_t \text{ mediano} \\ 3, PLD_t \text{ elevado} \end{cases}$$

A transição entre tais estados é governada pelo processo de markov de primeira ordem mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[E_t = 1 | E_{t-1} = 1] &= p_{11} \\ \mathbb{P}[E_t = 2 | E_{t-1} = 1] &= p_{12} \\ \mathbb{P}[E_t = 3 | E_{t-1} = 1] &= p_{13} = 1 - p_{11} - p_{12} \\ \mathbb{P}[E_t = 1 | E_{t-1} = 2] &= p_{21} \\ \mathbb{P}[E_t = 2 | E_{t-1} = 2] &= p_{22} \\ \mathbb{P}[E_t = 3 | E_{t-1} = 2] &= p_{23} = 1 - p_{21} - p_{22} \\ \mathbb{P}[E_t = 1 | E_{t-1} = 3] &= p_{31} \\ \mathbb{P}[E_t = 2 | E_{t-1} = 3] &= p_{32} \\ \mathbb{P}[E_t = 3 | E_{t-1} = 3] &= p_{33} = 1 - p_{31} - p_{32} \end{aligned} \tag{43}$$

Os estados são caracterizados da seguinte forma:

### **Estado $E_t = 1$ ou PLD baixo**

Diz-se que o PLD se encontra no estado  $E_t = 1$ , simplesmente quando temos,  $PLD_t = PLD_t^{min}$ .

Onde  $PLD_t^{min}$  é o PLD mínimo legal definido anualmente pela ANEEL.

### **Estado $E_t = 3$ ou PLD elevado**

Diz-se que o PLD se encontra nesse estado quando seu logaritmo se encontrar entre os 5% maiores da série, ou seja,  $\ln(PLD_t) > \mu + 1,645\sigma$ , onde:

$\mu$  – é a média dos logaritmos naturais dos PLDs, e

$\sigma$  – é o desvio padrão dos logaritmos dos PLDs.

### Estado $E_t = 2$ ou PLD mediano

O PLD se encontra no estado 2 caso se encontre em situação intermediária entre os estados  $E_t = 1$  e  $E_t = 3$ , ou seja:

$$\ln(PLD_t^{min}) < \ln(PLD_t) \leq \mu + 1,645\sigma$$

### Resultados da Filtragem

Utilizando apenas os dados in-sample (313 observações) para a contagem dos valores em cada estado, obteve-se a seguinte divisão:

- 63 observações no estado  $E_t = 1$ , das quais:
  - 51 precedidas pelo estado  $E_{t-1} = 1$ ;
  - 12 precedidas pelo estado  $E_{t-1} = 2$ ;
- 237 observações no estado  $E_t = 2$ , das quais:
  - 11 precedidas pelo estado  $E_{t-1} = 1$ ;
  - 222 precedidas pelo estado  $E_{t-1} = 2$ ;
  - 4 precedidas pelo estado  $E_{t-1} = 3$ ; e
- 13 observações no estado  $E_t = 3$ , das quais:
  - 4 precedidas pelo estado  $E_{t-1} = 2$ ;
  - 9 precedidas pelo estado  $E_{t-1} = 3$ .

Com os dados acima se calcula a matriz de transição entre os estados.

$$\begin{array}{c}
 E_t \\
 \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\
 E_{t-1} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 0,810 & 0,190 & 0 \\ 0,046 & 0,937 & 0,017 \\ 0 & 0,308 & 0,692 \end{array} \right|
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (44)$$

### 3.3.3

#### Preparação de Dados e Estatísticas Descritivas

Para facilitar a identificação das datas neste trabalho, as semanas serão identificadas seguindo o padrão *s.mm.aaaa*, ou seja, semana.mês.ano. Por exemplo, será utilizado 1.02.2010 para a primeira semana do mês de fevereiro de 2010 e 3.12.2009 para a terceira semana do mês de dezembro de 2009.

Para a análise feita neste trabalho são utilizados um total de 355 observações de PLDs semanais oriundos da CCEE, correspondentes a aproximadamente 7 anos. A amostra começa na semana 1.05.2005 (de 29/04/2005 a 05/05/2005) e termina na semana 3.02.2012 (de 10/02/2012 a 16/02/2012). Observa-se que as semanas se iniciam às sextas-feiras e terminam às quintas-feiras. Os valores de PLD da amostra estão apresentados na Figura 3.4 abaixo, estes são relativos ao patamar de carga médio do submercado SE/CO.

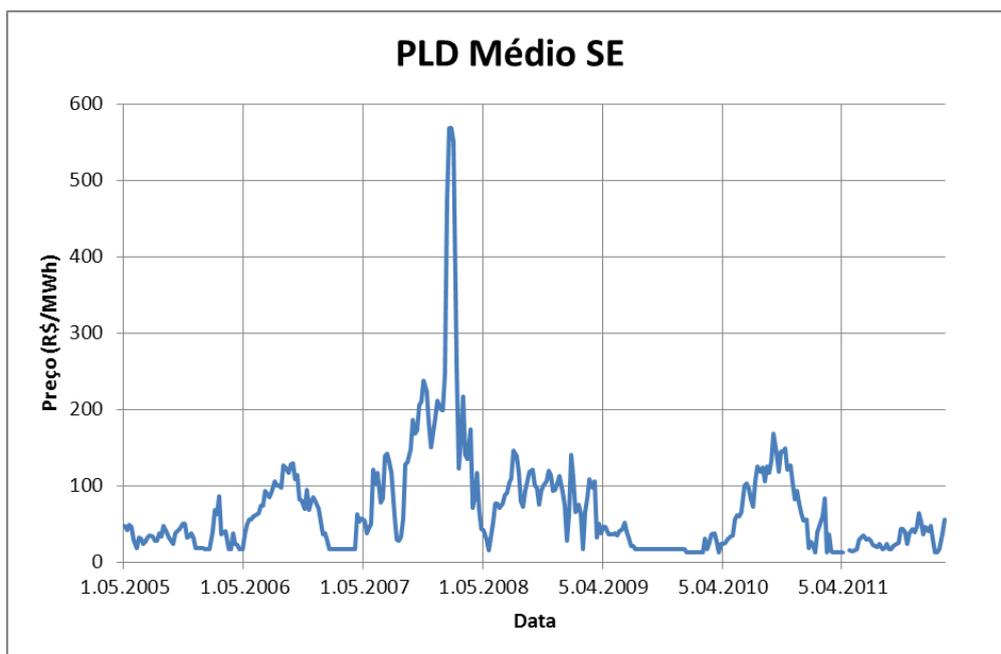


Figura 3.4 - PLDs Semanais, Submercado: SE, Patamar de Carga Médio

Os dados da amostra são divididos em dois períodos:

- Um período in-sample, que se estende de 1.05.2005 a 5.04.2011 (313 observações semanais), o qual será usado para a estimação dos parâmetros dos processos estocásticos; e
- Um período out-of-sample, que vai de 1.05.2011 a 3.02.2012 (42 observações semanais), o qual será usado para o teste do modelo proposto.

Com uma análise da Figura 3.4, pode-se perceber que há picos de preço e períodos em que os mesmos permanecem estáveis em um baixo nível por algum tempo. Este trabalho irá modelar os picos como pertencentes à região

do Estado  $E_t = 3$ , e os valores baixos e constantes do PLD como pertencentes à região do Estado  $E_t = 1$ .

Os valores pertencentes à região do Estado  $E_t = 2$  serão os efetivamente levados em consideração para o cálculo dos parâmetros das componentes de reversão à média e de difusão do modelo, enquanto os valores das outras regiões terão um modelagem simplificada.

Os valores pertencentes à região do Estado  $E_t = 1$ , apresentam valores iguais ao limite mínimo do PLD, definido anualmente pela ANEEL, nos seus respectivos anos, ou seja, o CMO foi, nesses casos, igual ou inferior ao limite mínimo legal do PLD. Deve-se ter em mente que esses dados são uma sinalização de valores baixos do PLD, e caso se estivesse trabalhando para obter um modelo para CMO (e não de PLD) estes valores não seriam corretos para a estimação dos parâmetros, pois se esperaria que as médias dos PLDs para as semanas em questão estejam sobrestimadas.

Na Tabela 3.1 encontramos um resumo das estatísticas descritivas dos PLDs oriundos da CCEE, que serão utilizados na análise. Nesta mesma tabela encontramos também as estatísticas descritivas do logaritmo natural de tais PLDs, pois estes serão efetivamente utilizados para a estimação dos parâmetros. Na Figura 3.5 se encontram os logaritmos dos preços relativos ao patamar de carga médio do submercado SE/CO.

Tabela 3.1 - Resumo das estatística descritivas do PLD e do  $\ln(\text{PLD})$

<i>Estatística</i>	<i>PLD</i>	<i>Ln(PLD)</i>
<b>Média</b>	68,80	3,87
<b>Desvio Padrão</b>	71,09	0,84
<b>Variância</b>	5054,15	0,71
<b>Assimetria</b>	3,72	0,22
<b>Curtose</b>	24,14	2,35
<b>Número de observações</b>	355	355

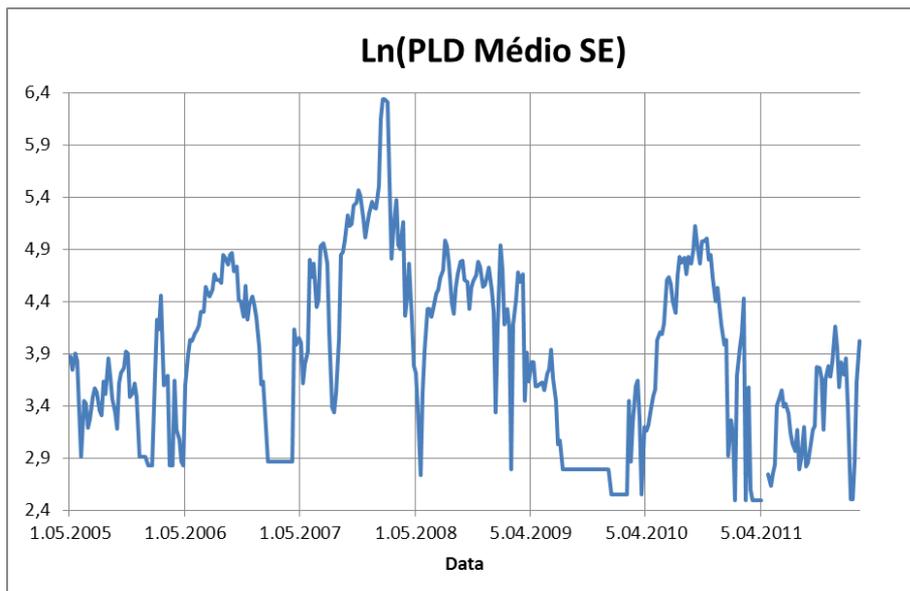


Figura 3.5 - Ln PLDs Semanais, Submercado: SE, Patamar de Carga Médio

### 3.3.4

#### Modelagem

##### Modelagem do Estado 1

A modelagem deste estado é a mais simples possível, dado que ele está ligado diretamente ao valor mínimo legal do PLD, logo temos:

$$PLD_t^1 = PLD_t^{min} \quad (45)$$

O sobrescrito indica o estado em que o PLD se encontra na semana  $t$ .

##### Modelagem do Estado $E_t = 2$

De acordo com a modelagem proposta por Heydari e Siddiqui (2009), o logaritmo natural dos preços spot da energia elétrica devem ser decompostos em dois fatores, como segue:

$$\ln(PLD_t) = X_t + f_t \quad (46)$$

Onde:

$PLD_t$  – é o PLD observado na semana  $t$ ;

$X_t$  – é a parte estocástica do logaritmo natural do PLD, referente à semana  $t$ ; e  
 $f_t$  – é uma função determinística sazonal.

O lado direito da eq. (46) é composto por dois termos, o segundo deles é relacionado à sazonalidade que é observada na série, a qual será modelada usando dummies mensais para se considerar a sazonalidade anual da série de PLDs, enquanto o primeiro termo é a parte estocástica dos logaritmos naturais dos PLDs.

### Ajuste Sazonal da Série

A dessazonalização da série deve ser efetuada antes cálculo dos parâmetros do modelo, e por esse motivo se iniciará a avaliação dos dados pelas componentes que agregam suas características sazonais.

O segundo termo do lado direito da eq. (46) ( $f_t$ ) é um função determinística que agrega todas as componentes sazonais anuais que influenciam no PLD, como: aflúências, demanda, temperatura média, produção industrial e etc.

Segundo Escribano, Penã e Villaplana (2002) a parcela  $f_t$  da eq. (46) pode ser estimada de duas maneiras: por variáveis dummy ou por uma função senoidal. **A abordagem adotada será a dessazonalização por variáveis dummy**, utilizado o conhecido método dos mínimos quadrados para a estimação de  $f_t$ . Segundo Campos (1991), esse método é útil para séries que apresentam sazonalidade determinística sem que os resíduos decorram de períodos prévios.

Para a utilização de variáveis dummy o método de mínimos quadrados corresponde à realização da seguinte regressão:

$$\begin{aligned} \ln(PLD_t) &= f_t + e_t \\ f_t &= I_1Q_1 + I_2Q_2 + \dots + I_{11}Q_{11} + I_{12}Q_{12} \end{aligned} \tag{47}$$

Onde:

$PLD_t$  – é o Preço de Liquidação de Diferenças, na semana  $t$ ;

$I_j$  – é a componente sazonal, em R\$/MWh, referente ao mês  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 12$ ;

$Q_j$  – é a variável (chamada de dummy) que assume o valor 1 para o mês  $j$  e 0 para os demais meses, com  $j = 1, 2, \dots, 12$ ; e

$e_t$  – é o resíduo da regressão da eq. (47); e

A série logarítmica dessazonalizada ( $X_t^d$ ) é o próprio resíduo da regressão da eq. (47) e  $\sigma_e$  é seu desvio padrão.

Segundo Gujarati (2006) a dessazonalização por variáveis dummy apresenta duas importantes características:

- Ao se escolher uma regressão sem intercepto para a estimação das variáveis dummy, induz-se que valor médio do PLD dessazonalizado seja zero, ou seja, temos  $\overline{X_t^d} = 0$ , pois este é composto pelos resíduos de uma regressão linear; e
- As variáveis dummy agregam toda a informação sazonal da série. Conforme o Teorema de Frisch-Waugh, explicado em Gujarati (2006).

### Modelagem da parte estocástica

Schwartz (1997) modela o logaritmo natural dos preços de commodities como o seguinte processo estocástico (de Ornstein-Uhlenbeck):

$$dX_t = \kappa(\bar{x} - X_t)dt + \sigma dz_t \quad (48)$$

Onde:

$X_t$  – é o logaritmo natural dos preços da commodity, no tempo  $t$ ;

$\kappa$  – é a magnitude da velocidade de ajuste, que mede o grau de reversão à média de longo prazo dos logaritmos naturais dos preços, temos  $\kappa > 0$ ;

$\bar{x}$  – é a média de longo prazo dos logaritmos naturais dos preços;

$\sigma$  – é o termo de volatilidade do processo;

$dz_t$  – é o incremento de um processo browniano padrão.

No presente trabalho,  $X_t$  representará o logaritmo natural da parte estocástica do processo, e não simplesmente o logaritmo natural dos preços da energia elétrica.

De acordo com Dixit e Pindyck (1994), a eq. (49) é a versão em tempo contínuo do processo auto-regressivo de primeira ordem em tempo discreto da eq. (48), quando  $\Delta t \rightarrow 0$ .

$$x_t - x_{t-1} = \bar{x}(1 - e^{-\kappa}) + (e^{-\kappa} - 1)x_{t-1} + \epsilon_t \quad (49)$$

onde  $\epsilon_t$  tem distribuição normal com média zero e variância dada pela eq.(50).

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa}) \quad (50)$$

Estima-se os parâmetros da eq. (48) usando informação disponível em tempo discreto para rodar a regressão da eq. (51),

$$x_t - x_{t-1} = a + bx_{t-1} + \epsilon_t \quad (51)$$

E, então, calcular:

$$\bar{x} = -\hat{a}/\hat{b} \quad (52)$$

$$\hat{\kappa} = -\ln(1 + \hat{b}) \quad (53)$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_\epsilon \sqrt{\frac{2 \ln(1 + \hat{b})}{(1 + \hat{b})^2 - 1}} \quad (54)$$

Onde  $\hat{\sigma}_\epsilon$  desvio padrão estimado da regressão da eq. (49).

### Modelagem do Estado $E_t = 3$

Este estado se confunde com o regime de saltos, e, de acordo com Dias (2011a), não há possibilidade da utilização de métodos econométricos para a estimação de seus parâmetros, devido a escassez de dados na série de saltos (no caso deste trabalho existem 13 observações neste estado em um universo de 313 observações, ou seja, apenas 4,2 %). Deve-se então escolher uma distribuição que represente razoavelmente os preços neste estado.

### 3.3.5 Estimação dos Parâmetros

Seção que apresenta a estimação dos parâmetros dos estados propostos.

#### Estimação dos Parâmetros do Estado 1

Conforme dito anteriormente, temos simplesmente:  $E_t^1 = PLD_t^{min}$ .

#### Estimação dos Parâmetros do Estado 2

##### Ajuste Sazonal da Série

A minimização dos erros quadráticos foi efetuada através da ferramenta de regressão do software Microsoft Excel™ 2010 e apresentou os resultados resumidos na Tabela 3.2 e graficamente na Figura 3.6.

Tabela 3.2 - Resultados da Regressão da eq. (47)

<b>Coef</b>	<b>Valor</b>	<b>Desv Pad</b>	<b>Stat t</b>	<b>P valor</b>
$I_1$	3,786	0,154	24,632	1,10E-65
$I_2$	4,228	0,154	27,504	9,33E-74
$I_3$	3,995	0,126	31,829	4,45E-85
$I_4$	3,751	0,122	30,703	3,18E-82
$I_5$	3,712	0,109	34,148	9,34E-91
$I_6$	4,102	0,106	38,517	9,11E-101
$I_7$	4,169	0,102	40,683	1,99E-105
$I_8$	4,232	0,114	37,278	5,14E-98
$I_9$	4,525	0,114	39,859	1,12E-103
$I_{10}$	4,550	0,119	38,218	4,15E-100
$I_{11}$	4,488	0,119	37,692	6,08E-99
$I_{12}$	4,321	0,137	31,428	4,55E-84

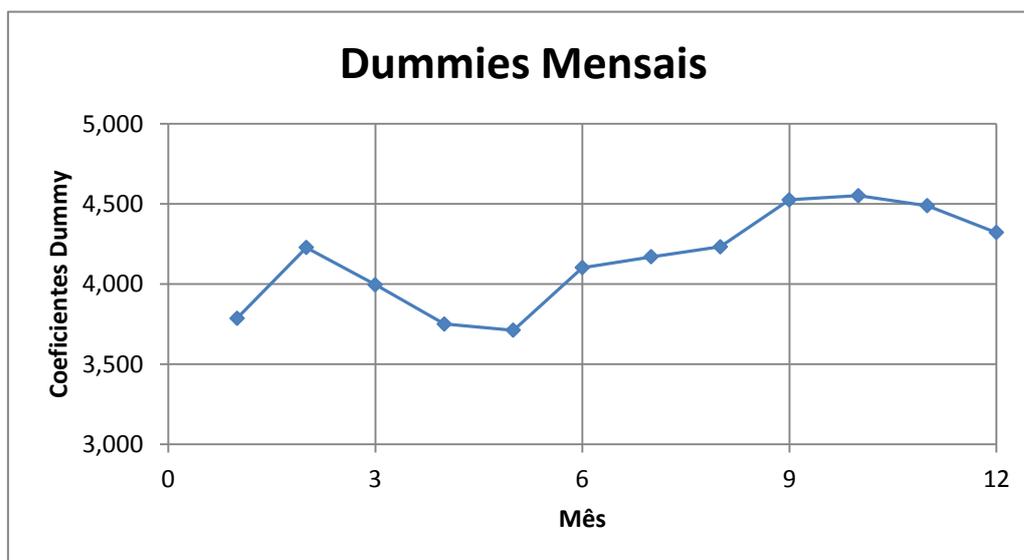


Figura 3.6 - Coeficientes Dummy Mensais para Dessazonalização

Uma análise da Figura 3.6 mostra um comportamento bastante conhecido dos preços de eletricidade: preços mais baixos durante os meses do período mais úmido do ano, elevação progressiva dos preços durante o período seco do ano e queda dos preços no início do período úmido. Os meses de fevereiro e março apresentam, em média, um comportamento de preços um pouco mais elevados em relação a janeiro, esse padrão se explica pelo fato de a Curva de Aversão ao Risco (CAR) aumentar nessa época do ano, para forçar o armazenamento de um volume maior de água para enfrentar o período seco (Ver Figura 2.7).

A Figura 3.7 apresenta a série com sazonalidade retirada pelo uso de variáveis dummy. Como dito anteriormente, os dados dessa série nada mais são do que os resíduos da eq. (47), que são obtidos através da expressão:

$$X_t^d = \ln(PLD_t) - \hat{I}_j Q_j \quad (55)$$

Onde:

$X_t^d$  – é o logaritmo natural do PLD dessazonalizado, na semana  $t$ ;

$\hat{I}_j$  – é a estimativa da componente sazonal, em R\$/MWh, referente ao mês  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 12$ ; e

$Q_j$  – é a variável dummy que assume o valor 1 para o mês  $j$  e 0 para os demais meses, com  $j = 1, 2, \dots, 12$ .

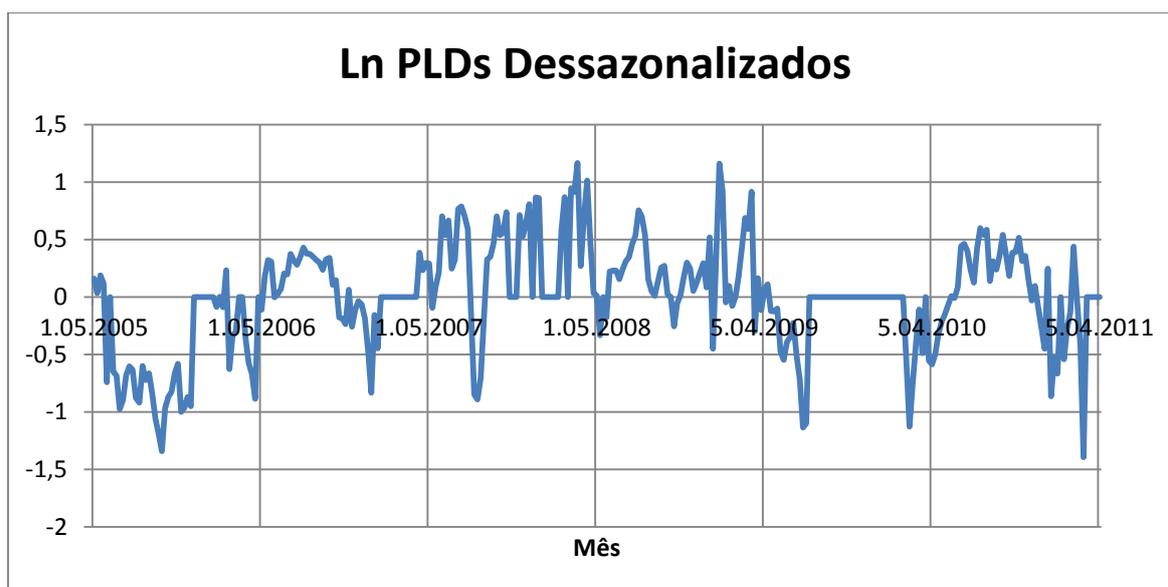


Figura 3.7 - PLDs Semanais Dessazonalizados por Variáveis Dummy

### Estimação dos parâmetros de reversão à média e de difusão

O resultado da regressão da eq. (51) se encontra sumarizado na Tabela 3.3 e na Figura. Enquanto a aplicação de seus resultados nas eqs. (53 e 54) se encontra na Tabela 3.4. Conforme esperado o valor de  $\hat{a}$  não é significativo, devido à escolha do ajuste sazonal sem intercepto, o que implica em  $\hat{x} = 0$ .

Tabela 3.3 - Resultados da Regressão da eq. (51)

Coef	Valor	Desv Pad	Stat t	P valor
$\hat{a}$	-0,006	0,020	-0,282	0,778
$\hat{b}$	-0,174	0,039	-4,494	1,10E-05

Tabela 3.4 - Resultados da aplicação das Eqs. (53 e 54)

$$\hat{\kappa} = 0,185 \text{ semana}^{-1} \quad \hat{\sigma} = 0,318 \sqrt{\text{semana}^{-1}}$$

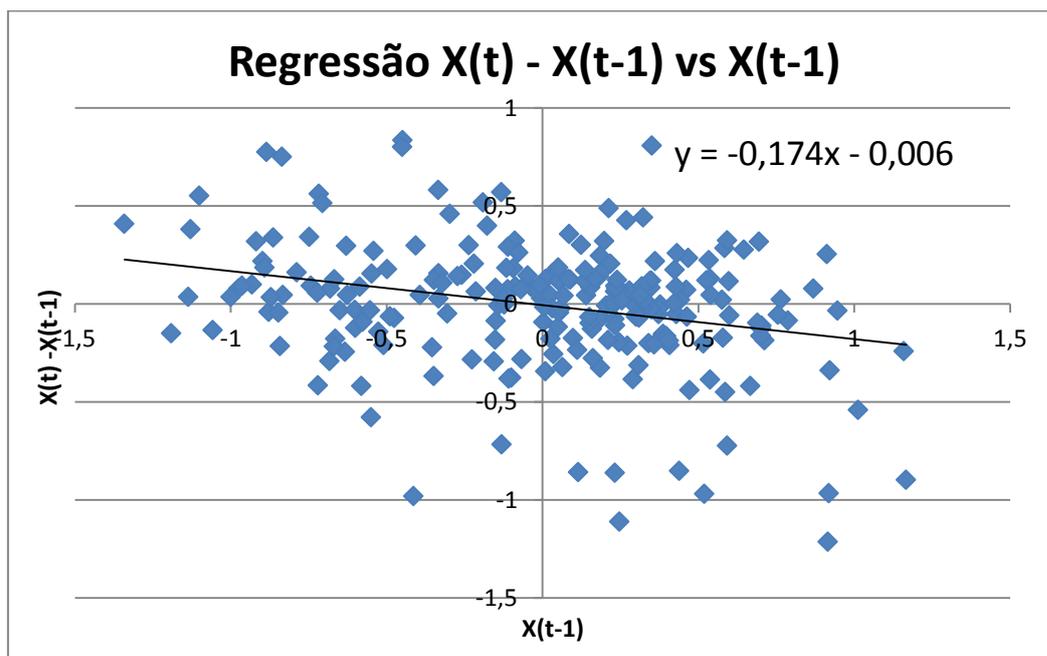


Figura 3.8 - Regressão da eq. (51)

### Estimação dos Parâmetros do Estado 3

Conforme dito anteriormente, deve-se escolher uma distribuição que represente razoavelmente os preços neste estado, devido à escassez de dados no mesmo.

Neste trabalho se utilizará a ferramenta de ajuste de distribuições do software @Risk™ Versão 5.7.1, para a escolha de uma distribuição que aproxime os preços neste estado.

A distribuição eleita é a exponencial, devido ao fato da mesma figurar entre as distribuições melhor ajustadas pelo software @Risk e por apresentar probabilidades mais altas para os valores próximos ao limite mínimo do estado 3, e baixa probabilidade de saltos de valores mais elevados. A melhor distribuição exponencial ajustada têm parâmetro  $\beta$  igual a 132,44 e é deslocada de 197,92 unidades.

A Figura 3.9 mostra a sobreposição da frequência relativa dos dados (barras verticais) e a função de distribuição de probabilidade exponencial eleita (linha). Deve-se ter em mente que este trabalho usa PLDs, e não CMOs, o que implica em um truncamento, causado pelo limite máximo para o PLD.

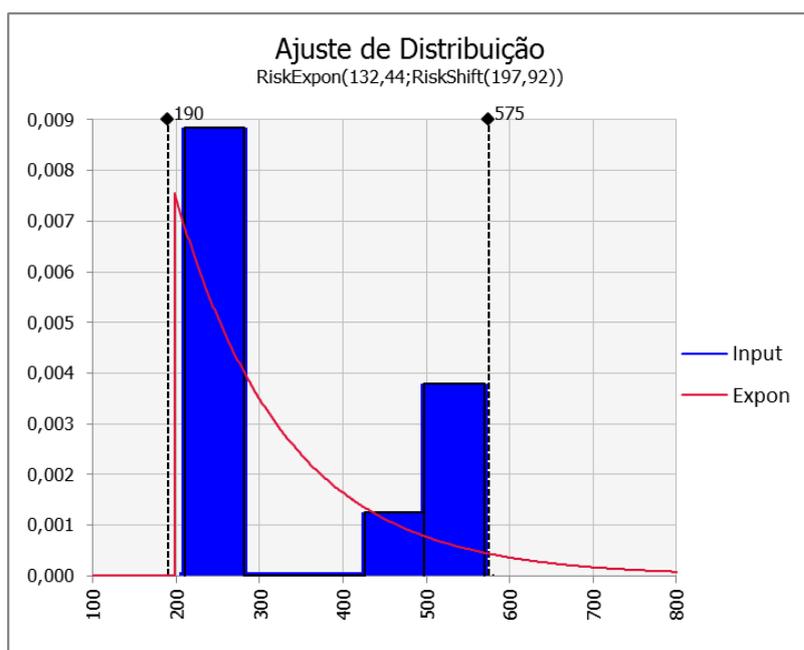


Figura 3.9 - Ajuste de Distribuição Exponencial aos Dados

### 3.4

#### Avaliação do Modelo

Depois de calculados a matriz de transição entre os estados dada pela eq.(44) e os parâmetros dos modelos para cada estado, podemos montar as equações de previsão para os PLD semanais, de acordo com as eqs. (56 a 58).

$$PLD_t^{E_t=1} = PLD_t^{min} \quad (56)$$

$$PLD_t^{E_t=2} = \exp\{X_t^{E_t=2} + \hat{I}_j Q_j\}, \quad (57)$$

$$X_t^{E_t=2} = X_{t-1}^{E_t=2} - \hat{\kappa} X_{t-1}^{E_t=2} \Delta t + \hat{\sigma} \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$$

$$PLD_t^{E_t=3} \sim \text{Exp}(\beta) + \varphi \quad (58)$$

Onde:

$X_t$  – é a parte estocástica do logatítmo natural do PLD na semana  $t$ ;

$\hat{I}_j$  – é a estimativa da componente sazonal, referente ao mês  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 12$ , conforme a Tabela 3.2;

$Q_j$  – é a variável dummy que assume o valor 1 para o mês  $j$  e 0 para os demais meses, com  $j = 1, 2, \dots, 12$ ;

$\hat{\kappa}$  – é a magnitude da velocidade de ajuste, que mede o grau de reversão à média de longo prazo dos logaritmos naturais do preços, temos  $\kappa > 0$ ;

$\hat{\sigma}$  – é o termo de volatilidade do processo;

$\text{Exp}(\beta) + \varphi$  – é uma distribuição exponencial com parâmetro  $\beta$ , deslocada  $\varphi$  unidades para a direita;

$\varepsilon_t$  – é uma variável aleatória normal padrão; e

$\Delta t$  – é um intervalo de tempo entre as previsões/observações, igual a 1 semana.

Vale lembrar que, para 2011, o PLD é limitado inferiormente em 12,08 R\$/MWh e superiormente em 689,18 R\$/MWh, de acordo com a Resolução Homologatória ANEEL nº 1.099, de 14 de Dezembro de 2010.

Com a aplicação numérica das equações acima, obtém-se:

$$PLD_t^{E_t=1} = 12,08 \quad (59)$$

$$PLD_t^{E_t=2} = \exp\{X_t^{E_t=2} + \hat{I}_j Q_j\}, \quad (60)$$

$$X_t^{E_t=2} = X_{t-1}^{E_t=2} - 0,185 X_{t-1}^{E_t=2} + 0,318 \varepsilon_t$$

$$PLD_t^{E_t=3} \sim \text{Exp}(\beta = 132,44) + 197,92 \quad (61)$$

Para uma visualização do comportamento das previsões, calcula-se as distribuições de probabilidades semanais para o PLD, através do modelo proposto nesse capítulo, usando o software @Risk™ da Palisade. A Figura 3.10, apresenta o resultado após 2.000 simulações, em 5 classes para os PLDs previstos, onde as probabilidades de cada classe são estimadas através da frequência de ocorrência de PLDs dentro da cada classe. A análise desta figura mostra que o modelo proposto capta o aspecto sazonal da variação dos PLDs – preços, em média, mais altos no período mais seco e preços mais baixos no período úmido do ano – e também uma baixa, porém não desprezível, probabilidade de preços extremamente elevados.

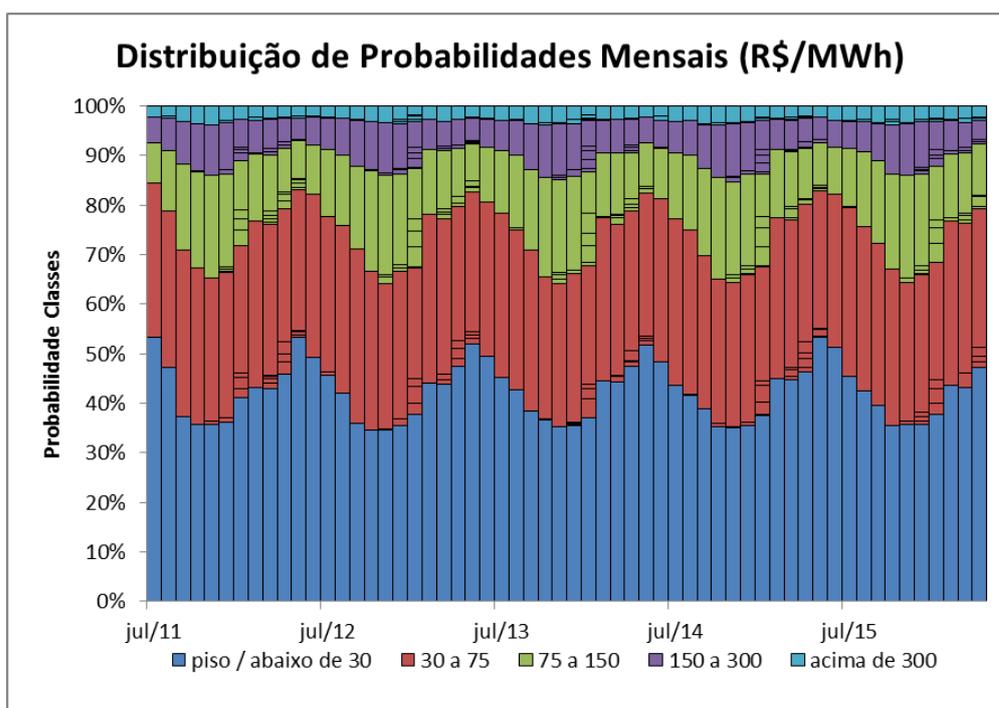


Figura 3.10 - Distribuições de Probabilidade Semanais do PLD

Através da mesma simulação efetuada para o cálculo das distribuições de probabilidade acima, calculou-se a média das previsões para cada semana do período out-of-sample. A Figura 3.11 mostra essas médias (representadas por quadrados), juntamente com os PLDs reais (linha contínua) e os erros de previsão (linha tracejada).

Pode-se perceber uma boa aderência do modelo para as sete primeiras semanas do período out-of-sample. Entretanto, o mesmo não se pode dizer para fora desse período.

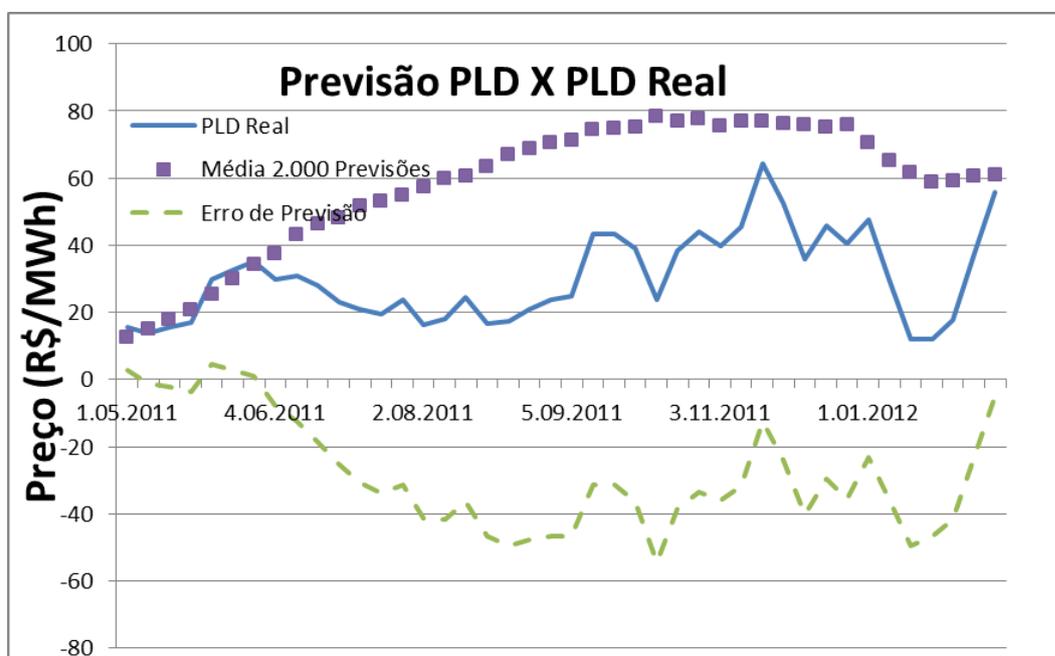


Figura 3.11 - PLD Semanal Realizado, Previsão e Erro de Previsão

Define-se erro de previsão da seguinte maneira:

$$Ep_{t,0} = \widehat{PLD}_{t,0} - PLD_t \quad (62)$$

Onde:

$\widehat{PLD}_{t,0} = \mathbb{E}[PLD_t | \mathcal{F}_0]$  – é a esperança do PLD para a data  $t$ , usando toda a informação disponível até a data  $t = 0$ ; e

$PLD_t$  – é o PLD real na data  $t$ .

A acurácia do modelo é testada utilizando-se algumas medidas agregadas de erro, referentes ao erro de previsão definido acima, como por exemplo:

1. Erro Absoluto Médio – ou Mean Absolute Error (MAE) –, dado por:

$$MAE = \frac{\sum_{t=1}^N |Ep_{t,0}|}{N} \quad (63)$$

2. Erro Percentual Absoluto Médio – ou Mean Absolute Percentage Error(MAPE) –, dado pela expressão:

$$MAPE = \frac{\sum_{t=1}^N \left| \frac{Ep_{t,0}}{PLD_t} \right|}{N} \quad (64)$$

3. Raiz do Erro Quadrático Médio – ou Root Mean Squared Error (RMSE) –, dado pela expressão:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^N Ep_{t,0}^2}{N}} \quad (65)$$

Onde  $N$  é o número de semanas para as quais houve previsão.

Os resultados dessas três medidas agregadas de erro encontram-se na

Tabela 3.5, onde se pode perceber novamente uma boa aderência para as sete primeiras semanas do período out-of-sample. Observa-se também que, para o período analisado, o modelo tende a sobreavaliar o PLD, para o período analisado.

Ainda em relação à

Tabela 3.5, observa-se que o MAPE é elevado mesmo para as semanas em que o erro absoluto é pequeno, isso é devido principalmente ao baixo valor dos PLD nas primeiras semanas de previsão. Observa-se também que as outras métricas (Erro de previsão, MAE, RMSE) parecem controladas para estas primeiras estas mesmas semanas.

Tabela 3.5 - Medidas Agregadas de Erros

Semana	PLD Realizado	Previsão	Erro de Previsão	MAE	MAPE	RMSE
1.05.2011	15,62	12,72	2,90	2,90	19%	2,90
2.05.2011	13,91	14,94	- 1,03	1,96	13%	2,18
3.05.2011	15,64	17,94	- 2,30	2,08	14%	2,22
4.05.2011	17,09	20,61	- 3,52	2,44	15%	2,61
1.06.2011	29,96	25,45	4,51	2,85	15%	3,08
2.06.2011	32,74	29,99	2,75	2,84	14%	3,03
3.06.2011	35,01	34,13	0,88	2,56	12%	2,82
4.06.2011	29,78	37,55	- 7,77	3,21	14%	3,81
5.06.2011	30,73	43,28	- 12,55	4,25	17%	5,51
1.07.2011	27,88	46,34	- 18,46	5,67	22%	7,84
2.07.2011	23,14	48,29	- 25,15	7,44	30%	10,65
3.07.2011	20,92	51,67	- 30,75	9,38	40%	13,52
4.07.2011	19,43	53,14	- 33,71	11,25	50%	16,00
1.08.2011	23,81	55,01	- 31,20	12,68	56%	17,53
2.08.2011	16,35	57,57	- 41,22	14,58	69%	20,00
3.08.2011	18,09	59,93	- 41,84	16,28	79%	22,01
4.08.2011	24,40	60,56	- 36,16	17,45	83%	23,08
1.09.2011	16,77	63,33	- 46,56	19,07	94%	24,97
2.09.2011	17,47	67,02	- 49,55	20,67	104%	26,84
3.09.2011	21,01	68,88	- 47,87	22,03	110%	28,26
4.09.2011	23,80	70,42	- 46,62	23,20	114%	29,40
5.09.2011	24,80	71,41	- 46,61	24,27	118%	30,39
1.10.2011	43,42	74,62	- 31,20	24,57	116%	30,43
2.10.2011	43,29	74,77	- 31,48	24,86	114%	30,47
3.10.2011	38,92	75,23	- 36,31	25,32	113%	30,73
4.10.2011	23,92	78,49	- 54,57	26,44	117%	31,97
1.11.2011	38,44	77,03	- 38,59	26,89	117%	32,24
2.11.2011	44,03	77,68	- 33,65	27,13	115%	32,29
3.11.2011	39,72	75,70	- 35,98	27,44	114%	32,43
4.11.2011	45,45	77,00	- 31,55	27,57	113%	32,40
1.12.2011	64,47	77,07	- 12,60	27,09	110%	31,95
2.12.2011	52,45	76,35	- 23,90	26,99	108%	31,73
3.12.2011	35,72	75,92	- 40,20	27,39	108%	32,02
4.12.2011	45,70	75,28	- 29,58	27,46	107%	31,95
5.12.2011	40,48	75,98	- 35,50	27,69	106%	32,06
1.01.2012	47,47	70,71	- 23,24	27,56	105%	31,85
2.01.2012	29,69	65,34	- 35,65	27,78	105%	31,96
3.01.2012	12,20	61,64	- 49,44	28,35	113%	32,54
4.01.2012	12,20	58,70	- 46,50	28,82	120%	32,97
1.02.2012	17,57	59,23	- 41,66	29,14	123%	33,21
2.02.2012	37,7	60,62	- 22,92	28,99	121%	33,00
3.02.2012	55,85	60,98	- 5,13	28,42	119%	32,62

Com a modelagem efetuada neste capítulo, atingiu-se o objetivo O3 desta dissertação.