

## 4

# Modelo Constitutivo de Drucker-Prager para materiais rochosos

Os modelos constitutivos são parte essencial nas análises de distribuição de tensões e deformações em problemas complexos de Engenharia Geotécnica. O presente capítulo aborda os aspectos mais importantes utilizados como base no desenvolvimento de modelos constitutivos para materiais geotécnicos e faz uma especial ênfase no modelo de plasticidade Drucker- Prager que foi escolhido neste trabalho para representar o comportamento do material rochoso submetido ao processo de corte. Gadde & Rusnak (2008) recomendam este modelo como uma boa opção para estimar a resistência das rochas levando em conta o efeito da tensão intermediária e da tensão menor em uma análise de tensões elástico-plástica.

Após uma breve revisão da teoria da plasticidade, será apresentada uma simulação numérica de um ensaio triaxial para validar o comportamento da rocha modelada com o comportamento mecânico de uma rocha real. Isso permitirá comprovar a implementação do modelo constitutivo usado para representar o comportamento da rocha.

### 4.1. Descrição do modelo constitutivo

Os modelos baseados na teoria da plasticidade são mais apropriados para representar o comportamento das rochas, porque permitem considerar as deformações irreversíveis dos geomateriais. Os modelos elastoplásticos são definidos por três conceitos básicos: superfície de plastificação, lei de endurecimento e lei de fluxo.

#### 4.1.1. Superfície de plastificação

A superfície de plastificação é determinada por uma função do estado de tensões que define o limite a partir do qual as deformações plásticas ocorrem, ou seja, define o limite das deformações elásticas. Assim, uma função de

plastificação,  $f$ , para um material isotrópico pode ser expressa em termos das tensões principais, como indicado na Equação (4.1):

$$f = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (4.1)$$

De forma geral, a condição  $f(\sigma) < 0$  corresponde ao regime elástico do material, enquanto que  $f(\sigma) = 0$  corresponde ao aparecimento de deformações irreversíveis.

Para o modelo de Drucker-Prager, a superfície de plastificação linear está definida na Equação (4.2) e representada pela Figura 4.1:

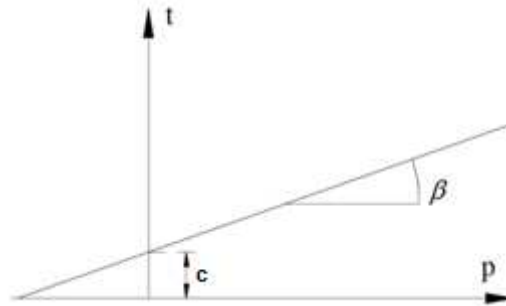


Figura 4.1 – Superfície de plastificação do modelo linear de Drucker-Prager. (ABAQUS, 2010).

$$f = t - c - p \tan \beta = 0 \quad (4.2)$$

Onde,

$t$  : Terceiro invariante da tensão de desvio, definido na Equação (4.3)

$c$  : Coesão do material

$\tan \beta$  : Inclinação da superfície de plastificação

$p$  : Tensão octaédrica, definida na Equação (4.6)

Na Equação (4.2),  $t$  e  $p$  são funções da constante  $K$ , da tensão principal maior ( $\sigma_1$ ), tensão principal intermediária ( $\sigma_2$ ), e tensão principal menor ( $\sigma_3$ ), como é mostrado nas Equações (4.3) e (4.6).  $K$  é uma constante definida como a relação da resistência à tração e a resistência à compressão triaxial, que deve ter valores que oscilem entre 0.788 e 1 para garantir a convexidade da superfície de plastificação. Nas Equações (4.4) e (4.5),  $q$  é a tensão equivalente de *Mises* e  $r$  é o terceiro invariante da tensão de desvio (ABAQUS, 2010).

$$t = \frac{1}{2} q \left[ 1 + \frac{1}{K} + \left( 1 - \frac{1}{K} \right) \left( \frac{r}{q} \right)^3 \right] \quad (4.3)$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \quad (4.4)$$

$$r = \left[ \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)}{2} \right]^{1/3} \quad (4.5)$$

$$p = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} \quad (4.6)$$

#### 4.1.2. Lei de endurecimento

Um material pode ser denominado perfeitamente plástico ou com comportamento de endurecimento/amolecimento conforme a sua função de plastificação. Se esta função for fixa, o material é perfeitamente plástico, enquanto que se a função de plastificação admitir mudanças em função das deformações plásticas, o material terá comportamento de endurecimento ou amolecimento. A Figura 4.2 apresenta uma comparação entre um modelo elástico-perfeitamente plástico e modelos com endurecimento e amolecimento.

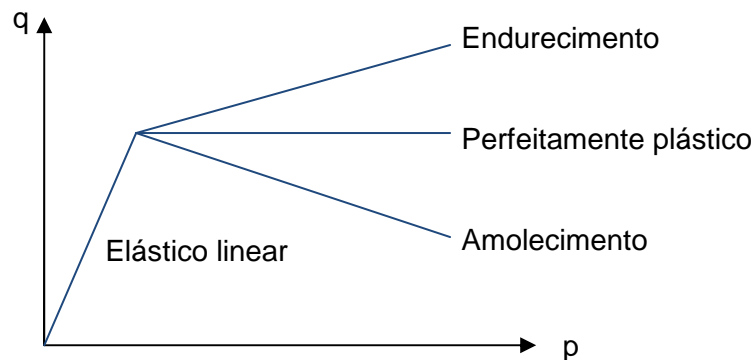


Figura 4.2 – Comparação entre os modelos: perfeitamente plástico, com endurecimento e amolecimento.

Para materiais perfeitamente plásticos, a função de plastificação é postulada como:

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (4.7)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões simétrico. Neste material, a função de plastificação não varia, e a superfície de plastificação é fixa.

Entende-se por endurecimento a mudança da superfície de plastificação com a ocorrência das deformações plásticas. A evolução da superfície de plastificação pode ocorrer de duas formas: uma mantendo sua forma original e

mudando apenas o tamanho (neste caso o endurecimento é dito isotrópico, como é o caso do modelo linear de Drucker-Prager), e na outra forma, a superfície é deslocada no espaço de tensões sem mudar o tamanho, denominando-se endurecimento cinemático. Assim, para definir o efeito do endurecimento por deformação plástica, a função de plastificação pode ser descrita pela Equação (4.8):

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0 \quad (4.8)$$

onde  $\varepsilon_{ij}^p$  são as componentes do tensor de deformações plásticas, as quais representam o parâmetro de endurecimento.

No programa ABAQUS é possível definir o comportamento de endurecimento do material como uma função da tensão de plastificação em compressão uniaxial, para o qual é solicitada uma tabela de dados como os valores de tensão de plastificação versus a deformação plástica.

#### 4.1.3. Lei de fluxo

A função de plastificação define apenas o limiar da ocorrência de deformações plásticas. Para o cálculo da magnitude das deformações deve-se definir também uma Lei de Fluxo. Esta lei é definida por uma função chamada de potencial plástico ( $g$ ). As componentes da deformação plástica incremental são ortogonais a função de potencial plástico. Então, os incrementos da deformação plástica podem ser expressos como mostrado na Equação (4.9):

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.9)$$

onde  $g$  é a função do potencial plástico, e  $\lambda$  é um fator escalar positivo de proporcionalidade. A função de potencial plástico de uma forma geral pode ser expressa como definido na Equação (4.10):

$$g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0 \quad (4.10)$$

Quando a função potencial plástico ( $g$ ) é igual à função de plastificação ( $f$ ), diz-se que o fluxo é associado. Caso contrário, o fluxo não é associado (Figura 4.3). O caso do fluxo não ser associado implica que  $\psi \neq \beta$  e, conseqüentemente, o fluxo não é normal à superfície de plastificação.

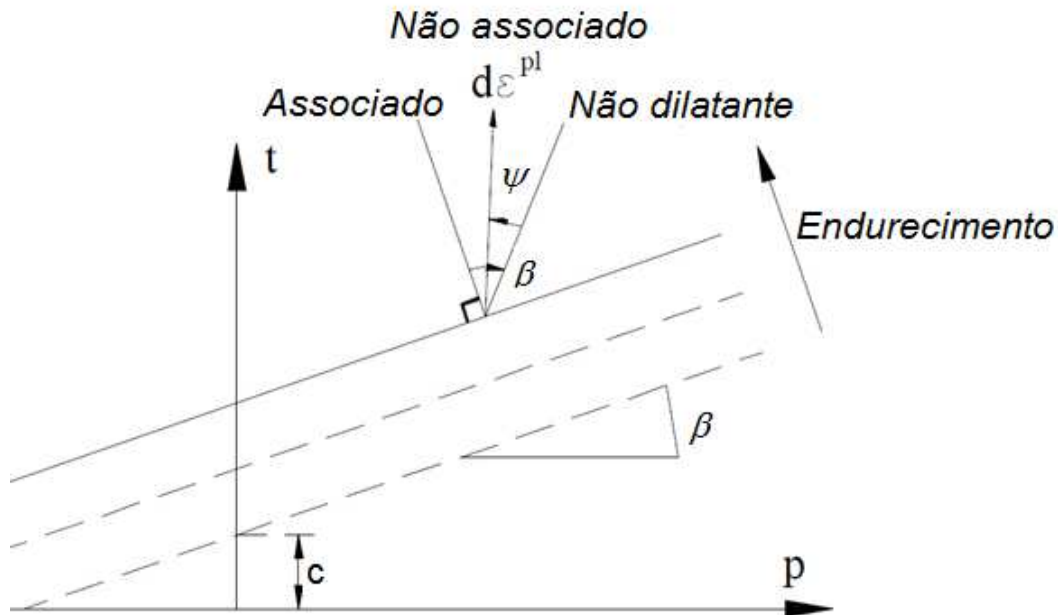


Figura 4.3 – Superfície de plastificação e direção do fluxo plástico no plano p-t.

Para o modelo linear de Drucker- Prager o potencial plástico está definido pelo ângulo de dilatância  $\psi$  no plano p-t, como indicado na Equação (4.11):

$$g = t - p \tan \psi \quad (4.11)$$

#### 4.2. Modelagem de um ensaio triaxial para validação do comportamento mecânico da rocha

Os dados da rocha modelada foram baseados nos ensaios de compressão triaxial realizados para um arenito apresentados no trabalho de Gowd & Rummel (1980) e resumidos na Tabela 4.1 e na Figura 4.4.

Tabela 4.1 – Parâmetros elásticos de arenito. (Gowd & Rummel, 1980).

Módulo de Young	16.6 GPa
Coefficiente de Poisson	0.23

Os parâmetros do modelo de Drucker-Prager foram calculados mediante a aproximação com os parâmetros de Mohr-Coulomb fornecida no manual do ABAQUS (2010). Esta aproximação é descrita pela Equação (4.14):

$$\tan(\beta) = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \quad (4.14)$$

Para o arenito modelado, o ângulo de atrito interno é  $\varphi = 32^\circ$ . Portanto, aplicando a Equação (4.14) é obtido um valor de  $\beta = 52.16^\circ$ . O ângulo de dilatância  $\psi$  no plano p-t para esta rocha é  $\psi = 15.5^\circ$ . O valor da constante (K) que define a relação da resistência à tração e a resistência à compressão triaxial, foi tomada como  $K=0.788$ , valor recomendado pelo Manual de ABAQUS (2010).

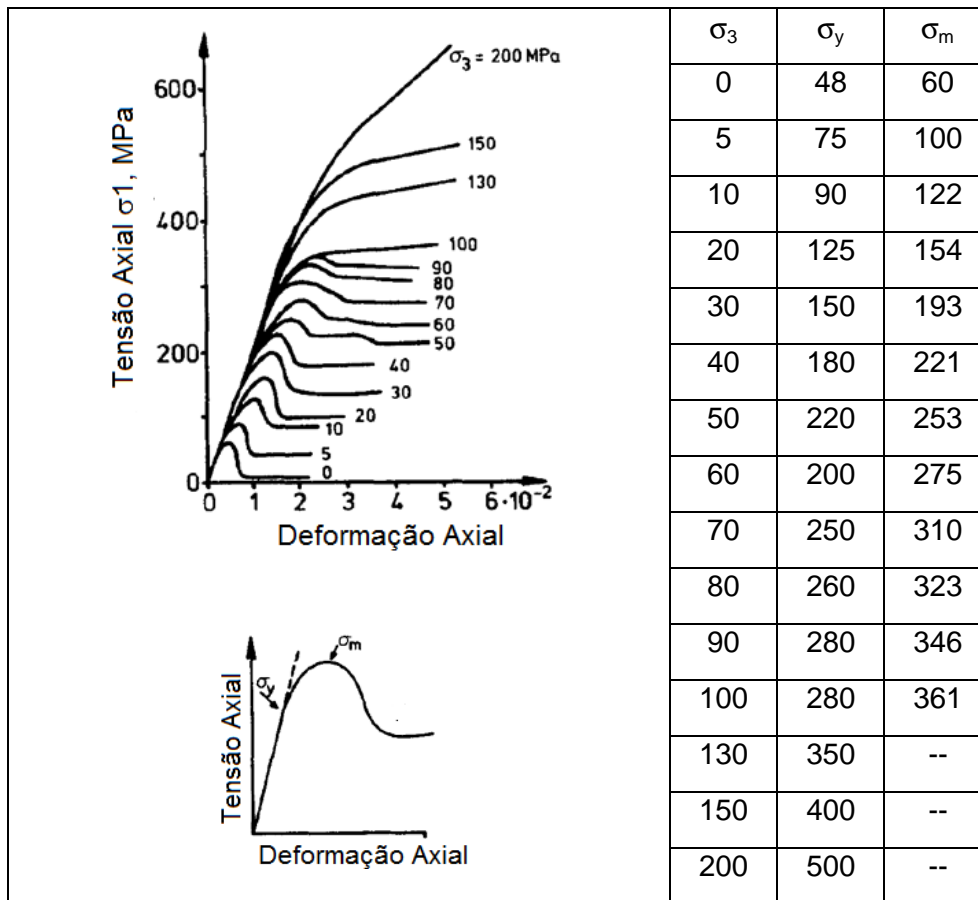


Figura 4.4 – Curvas tensão-deformação do arenito para diferentes pressões de confinamento ( $\sigma_3$ ) e definição da tensão de plastificação ( $\sigma_y$ ) e da tensão máxima ( $\sigma_m$ ). Todos os dados estão em MPa. (Baseado em Gowd & Rummel, 1980).

A geometria da amostra modelada foi criada em 3D com as dimensões e a malha de elementos mostradas na Figura 4.5. A malha usada está composta por 2000 elementos distribuídos em 1400 elementos tipo C3D8 (elemento linear hexaédrico de oito nós) e 600 elementos tipo C3D6 (elemento linear prisma

triangular de seis nós). Os nós da base estão restringidos ao deslocamento e à rotação. Os deslocamentos foram aplicados de forma controlada aos nós do topo da amostra.

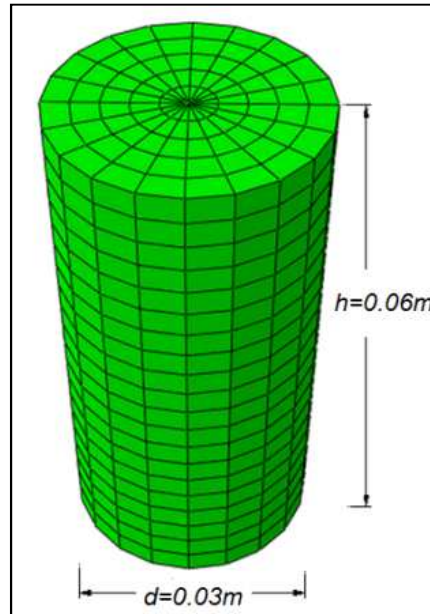


Figura 4.5 – Malha utilizada para simulação de um ensaio triaxial.

A amostra modelada foi testada para as três pressões de confinamento (0, 5 e 10 MPa) que foram usadas na modelagem do processo de corte em rocha. Os resultados apresentados na Figura 4.6 mostram as curvas tensão-deformação obtidas da rocha modelada.

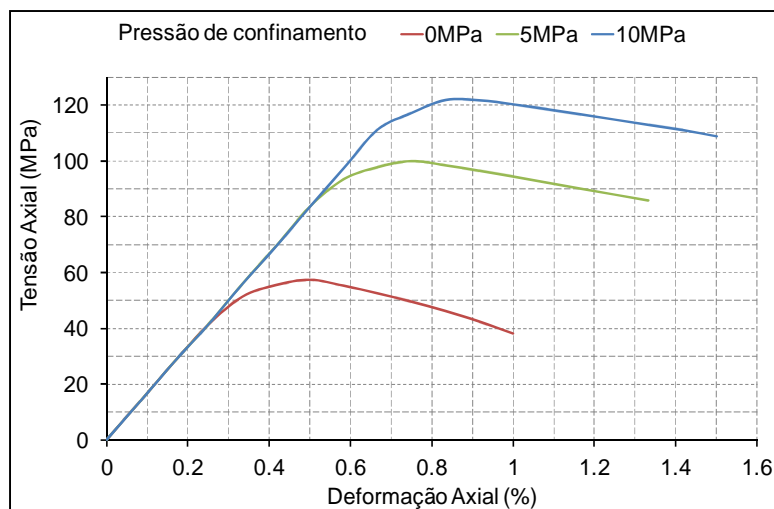


Figura 4.6 – Curvas tensão-deformação para a rocha simulada no programa ABAQUS.

Observa-se que o comportamento mecânico da rocha modelada é similar com o comportamento da rocha real. As tensões de escoamento e as tensões máximas obtidas são muito próximas às mostradas na Figura 4.4. O comportamento correspondente à tensão residual foi negligenciado nesta modelagem.

Portanto, o modelo de plasticidade de Drucker-Prager consegue representar adequadamente o comportamento da rocha submetida a diferentes pressões de confinamento. Assim, depois de validar o comportamento da rocha modelada, os mesmos parâmetros foram usados para definir as propriedades da rocha dos modelos de corte.