6
Referências bibliográficas

AIUBE, F. A. L. **Modelos Quantitativos em Finanças com Enfoque em Commodities**. Petrobras, Rio de Janeiro, 2012 (em pré-impressão).

BASTIAN-PINTO, C. L.; BRANDÃO, L.; HAHN, W. J. **Flexibility as a Source of Value in the Production of Alternative Fuels: The Ethanol Case**. Energy Economics, v. 31(3), p. 411-422, May 2009.

BENEDER R.; VORST T. Options on Dividends Paying Stocks. In: YONG J. (Ed.), **Recent Developments in Mathematical Finance** (Shanghai, 2001), World Scientific Publishing, River Edge, NJ.

BLACK, F. Fact and Fantasy in the use of Options, **Financial Analysts Journal**, p. 36–72. July-August, 1975.

________.; SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **Journal of Political Economy.** v. 81, n. 3, p. 637–654. 1973.

BOS, R.; VANDERMARK, S. Finessing Fixed Dividends, **Risk Magazine**, v. 15, p. 157–158. 2002.

________. et al. Dealing with Discrete Dividends, **Risk Magazine**, v. 16, p. 109–112. 2003.

COX J.; ROSS S.; RUBINSTEIN M. Option Pricing: A Simplified Approach. **Journal of Financial Economics**, v. 7, p.229–263. 1979.

DAI, T. S.; LYUU, Y. D. **Efficient Option Pricing on Stocks Paying Discrete or Path-Dependent Dividends with the Stair Tree**. Quantitative Finance, v. 9, Issue 7, p. 827-83. 2009.

DIAS, M. A. **Análise de Investimentos com Opções Reais: Teoria e Prática**. Manuscrito. 2012.

FRISHLING, V. A Discrete Question, **Risk Magazine**, v. 15, p. 115–116. 2002.

HARRISON, J. M.; KREPS, D. M. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. **Journal of Economic Theory**. v. 20, p. 381-408. 1979.

________.; PLISKA, S. R. **Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading**. Stochastic Processes and their Applications. v. 11, n. 3, p. 215–260. 1981.

HAUG, E. G. Why so Negative about Negative Probabilities? **Wilmott Magazine**. The ideas from this article were presented at the ICBI Global Derivatives Conference, Madrid, Spain. May 26, 2004.
________.; HAUG, J. H. A **New Look at Pricing Options with Time Varying Volatility,** Unpublished working paper. 1998.
________.; ________.; LEWIS A. Back to Basics: A New Approach to Discrete Dividend Problem, **Wilmott Magazine**, v. 9. 2003.

HEATH D.; JARROW, R. Ex-dividend Stock Price Behaviour and Arbitrage Ppportunities, **Journal of Business.** v. 61, p. 95–108. Citado por FRISHLING, V. 2002.

HULL, J. **Options Futures and Other Derivatives** (New Jersey: Prentice Hall). 1989.
________. **Options, Futures, and other Derivatives**. Fourth edition, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall. 2000.
________. **Options, Futures, and Other Derivatives**. Pearson Education/Prentice Hall, 8th ed., London, p. 847. 2012.

JAMES, P. **Option Theory** (livro), Wiley Finance, p. 90. 2003.

KHRENNIKOV, A. **Interpretations of Probability**. Coronet Books. 1999.

LONGSTAFF, F. A.; SCHWARTZ, E. S. **Valuing American Options by Simulation: A Simple Least Squares Method**. Review of Financial Studies, v. 14, p. 113–147. 2001.

MERTON, R. C. Theory of Rational Option Pricing, **Bell Journal of Economics and Management Science**, v. 4, p. 141–183. 1973.

MUSIELA M.; RUTKOWSKI, M. (1997). **Martingale Methods in Financial Modeling**, Springer. Citado por FRISHLING, V. (2002).

NARDON, M.; PIANCA, P. **An Efficient Binomial Approach to the Pricing of Options on Stocks With Cash Dividends**. Working paper, Department of Applied Mathematics, University of Venice. 2008.

NEFTCI, S. N. **An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives**, 2nd edition, Academic Press. (1996).

SCHRODER, M. Adapting the Binomial Model to Value Options on Assets with Fixed-Cash Payouts. **Financial Analysts Journal**, v. 44, n. 6, p.54-62, November-December 1988.

SHOCKLEY, Jr., R. L. **An Applied Course in Real Options Valuation**. Thomson South-Western, Mason (USA), p. 523. 2007.

TRIGEORGIS, L. Evaluating Leases with Complex Operating Options. **European Journal of Operational Research**, v. 91, n. 2, p.315-329. June 1996.

VELLEKOOP, M. H.; NIEUWENHUIS J. W. **Efficient Pricing of Derivatives on Assets with Discrete Dividends**. Applied Mathematical Finance, v. 13, n. 3, p. 265-284. September, 2006.

WILMOTT P, **Derivatives**, John Wiley & Sons. 1998.
________.; DEWYNNE, J.; HOWISON, S. **Option Pricing: Mathematical Models and Computation**. Oxford Financial Press, Oxford, p. 402 1993.

7
Anexos

7.1.
Anexo A: Rotinas do Método da Média Ponderada

A seguir são apresentadas respectivamente as rotinas definidas em VBA para geração da árvore binomial e do cálculo da opção de venda americana através do Método da Média Ponderada.

Sub arvore_media_ponderada()

'parâmetros de entrada do modelo, variáveis definidas no Excel

u = Range("u")

d = 1 / u

pu = Range("pu")

pd = 1 - pu

div = Range("div")

períodos = Range("steps")

'variáveis auxiliares

i = 2

m = 0

s = 2

'procedimento para preenchimento dos nós extremos

For b = i To períodos + 1

'preenchimento dos nós superiores

*Cells(16, b) = Cells(16, b - 1) * u - div*

'preenchimento dos nós inferiores

*If Cells(16 + m, b - 1) * d - div < 0 Then Cells(16 + s, b) = 0 Else Cells(16 + s, b) = Cells(16 + m, b - 1) * d - div*

s = s + 2

m = m + 2

Next

'procedimento para preenchimento dos demais nós

a = 18

'linha inicial

For i = 3 To períodos + 1

For b = i To períodos + 1

*If (Cells(a - 2, b - 1) * d * pd + Cells(a, b - 1) * u * pu) - div < 0 Then Cells(a, b) = 0 Else Cells(a, b) = (Cells(a - 2, b - 1) * d * pd + Cells(a, b - 1) * u * pu) - div*

Next

a = a + 2

Next

End Sub

```
Sub opcao_media_ponderada()

'parâmetros de entrada do modelo, variáveis definidas no Excel
períodos = Range("steps")
pu = Range("pu")
pd = 1 - pu
fator = Range("fator")
'variáveis auxiliares
Final = períodos + 1
cf = períodos + 1
'linha inicial da árvore
li = 17
'preço de exercício. A linha 14 contém os preços de exercício a cada mês
k = Cells(14, cf)

'variáveis auxiliares
Final = períodos + 1
cf = períodos + 1
'linha inicial da árvore
li = 17

'cálculo do valor da opção no último período
For a = 1 To Final
   Cells(li, cf) = Application.WorksheetFunction.Max(k - Cells(li - 1, cf), 0)
   li = li + 2
Next

'redefinição do período de análise
cf = cf - 1
'linha inicial da árvore
li = 17
```

```
'início do cálculo backwards
For rotina = 1 To períodos
   Final = Final - 1
   k = Cells(14, cf)

   For b = 1 To Final
      var1 = k - Cells(li - 1, cf)
      v1 = Cells(li, cf + 1) * pu
      v2 =(Cells(li + 2, cf + 1) * pd
      var2 = (v1 + v2) * fator
      Cells(li, cf) = Application.WorksheetFunction.Max(var1, var2)
      li = li + 2
   Next

'move para a coluna anterior
   cf = cf - 1
   li = 17
Next

End Sub
```

7.2.
Anexo B: Rotinas do Modelo 3 (Árvore Não Recombinante)

A seguir são apresentadas as rotinas em VBA para geração da árvore binomial e cálculo da opção de venda americana pela Árvore Não Recombinante.

```
Sub arvore_não_recombinante()

'parâmetros de entrada do modelo, variáveis definidas no Excel
a = 16
u = Range("u")
d = 1 / u
div = Range("div")
períodos = Range("steps")

'variáveis auxiliares
i = 2
m = 0

'procedimento para preenchimento dos 2 primeiros nós de cada período
For b = i To períodos + 1
    Cells(a, b) = Cells(a - m, b - 1) * u - div
    Cells(a + 2, b) = Cells(a - m, b - 1) * d - div
Next

'redefinição de variáveis
i = i + 1
a = a + 4
m = m + 2
x = 1
Var = (2 ^ (períodos - 2) + 1)
```

```
‘procedimento para preenchimento dos demais nós
While x < Var
    For r = 1 To x
            For b = i To períodos + 1
                    If Cells(a - m, b - 1) * u - div < 0 Then Cells(a, b) = 0 Else
            Cells(a, b) = Cells(a - m, b - 1) * u - div
                    If Cells(a - m, b - 1) * d - div < 0 Then Cells(a + 2, b) = 0
            Else Cells(a + 2, b) = Cells(a - m, b - 1) * d - div
            Next

    a = a + 4
    m = m + 2
    Next

x = 2 * x
i = i + 1
Wend

End Sub
```

```
Sub opcao()

'parâmetros de entrada do modelo, variáveis definidas no Excel
li = 17
pu = Range("pu")
pd = 1 - pu
fator = Range("fator")
períodos = Range("steps")
Final = 2 ^ períodos
cf = períodos + 1

‘preço de exercício
k = Cells(14, cf)

‘cálculo do valor da opção no último período
For a = 1 To Final
    Cells(li, cf) = Application.WorksheetFunction.Max(k - Cells(li - 1, cf), 0)
    li = li + 2
Next

‘redefinição de variáveis
cf = cf - 1
k = Cells(14, cf)
li = 17
m = 0

‘início do cálculo backwards
For rotina = 1 To períodos
    Final = Final / 2
    For b = 1 To Final
            k = Cells(14, cf)
            var1 = k - Cells(li - 1, cf)
            v1 = Cells(li + m, cf + 1) * pu
            v2 = Cells(li + m + 2, cf + 1) * pd
```

```
            var2 = (v1 + v2) * fator
            Cells(li, cf) = Application.WorksheetFunction.Max(var1, var2)
            li = li + 2
            m = m + 2
    Next
cf = cf - 1
li = 17
m = 0
Next

End Sub
```

7.3.
Anexo C: Rotinas do Método das Probabilidades Variáveis

Abaixo são descritas as rotinas definidas em VBA para geração da árvore binomial, cálculo da probabilidade neutra ao risco a cada nó da árvore e do cálculo da opção de venda americana através do Método das Probabilidades Variáveis.

```
Sub arvore_probs_variaveis()

'parâmetros de entrada do modelo, variáveis definidas no Excel
u = Range("u")
d = Range("d")
div = Range("div")
períodos = Range("steps")


'procedimento de preenchimento dos nós
For b = 2 To períodos + 1
'linha inicial da árvore
   a = 17
   For j = 1 To b - 1
'preenchimento dos nós como nós de subida
      Cells(a, b) = Cells(a, b - 1) * u
      a = a + 3
   Next
'preenchimento dos nós extremos inferiores
Cells(a, b) = Cells(a - 3, b - 1) * d
Next

End Sub
```

```
Sub probabilidades()

'parâmetros de entrada do modelo, variáveis definidas no Excel
períodos = Range("steps")
div = Range("div")
fator = Range("fator")

'cálculo da probabilidade dos nós extremos
For b = 2 To períodos + 1
'linha inicial onde é registrada a probabilidade
   a = 19
   For j = 1 To b - 1
'valor do ativo no cenário favorável
      x = Cells(a + 1, b)
'valor do ativo inicial
      y = Cells(a - 2, b - 1)
'valor do ativo no cenário desfavorável
      z = Cells(a - 2, b)
      Cells(a, b) = ((1 / fator) - ((x + div) / y)) / (((z + div) / y) - ((x + div) / y))
      a = a + 3
   Next
Next

End Sub
```

```
Sub opcao_probs_variaveis()

'parâmetros de entrada do modelo, variáveis definidas no Excel
períodos = Range("steps")
fator = Range("fator")
'linha inicial
li = 18
'variável auxiliar
Final = períodos + 1
cf = períodos + 1
'preço de exercício. A linha 15 contém os preços de exercício a cada mês
k = Cells(15, cf)

'cálculo do valor da opção no último período
For a = 1 To Final
   Cells(li, cf) = Application.WorksheetFunction.Max(k - Cells(li - 1, cf), 0)
   li = li + 3
Next

'redefinição das variáveis auxiliares
cf = cf - 1
li = 18

'início do cálculo backwards
For rotina = 1 To períodos
   Final = Final - 1
   k = Cells(15, cf)
   For b = 1 To Final
'valor do exercício imediato
      var1 = k - Cells(li - 1, cf)
      v1 = Cells(li, cf + 1) * Cells(li + 1, cf + 1)
      v2 =(Cells(li + 3, cf + 1) * (1 - Cells(li + 1, cf + 1))
```

```
'valor da espera
        var2 = (v1 + v2) * fator
        Cells(li, cf) = Application.WorksheetFunction.Max(var1, var2)
        li = li + 3
    Next
'redefinição das variáveis auxiliares
cf = cf - 1
li = 18
Next

End Sub
```

7.4. Anexo D: Rotinas do Método do Custo de Oportunidade do Dividendo

Abaixo são descritas as rotinas definidas em VBA para geração da árvore binomial e do cálculo da opção de venda americana através do Método do Custo de Oportunidade do Dividendo.

```
Sub arvore_custo_oportunidade_dividendo()

'parâmetros de entrada do modelo, variáveis definidas no Excel
u = Range("u")
d = Range("d")
períodos = Range("steps")

'procedimento de preenchimento dos nós
For b = 2 To períodos + 1
'linha inicial da árvore
   a = 17
   For j = 1 To b - 1
'preenchimento dos nós como nós de subida
      Cells(a, b) = Cells(a, b - 1) * u
      a = a + 2
   Next
'preenchimento dos nós extremos inferiores
Cells(a, b) = Cells(a - 2, b - 1) * d
Next

End Sub
```

```
Sub opcao__custo_oportunidade_dividendo()

'parâmetros de entrada do modelo, variáveis definidas no Excel
períodos = Range("steps")
fator = Range("fator")
div = Range("div")
Prob = Range("prob")
div_yield = Range("div_yield")
div_yield_d = Range("div_yield_d")
'linha inicial
li = 18
'variável auxiliar
Final = períodos + 1
cf = períodos + 1
'preço de exercício. A linha 15 contém os preços de exercício a cada mês
k = Cells(15, cf)

'cálculo do valor da opção no último período
For a = 1 To Final
   Cells(li, cf) = Application.WorksheetFunction.Max(k - Cells(li - 1, cf), 0)
   li = li + 2
Next

'redefinição das variáveis auxiliares
cf = cf - 1
li = 18

'início do cálculo backwards
For rotina = 1 To períodos
   Final = Final - 1
   k = Cells(15, cf)
   For b = 1 To Final
'valor do exercício imediato
      var1 = k - Cells(li - 1, cf)
```

```
'valor da espera
        v1 = (Cells(li, cf + 1)) * Prob
        v2 = (Cells(li + 2, cf + 1)) * (1 - Prob)
        v3 = Cells(li - 1, cf + 1) * Prob
        v4 = Cells(li + 1, cf + 1) * (1 - Prob)
        var2 = ((v1 + v2) * fator) + (div * fator) - ((v3 + v4) * div_yield_d *
fator)
        Cells(li, cf) = Application.WorksheetFunction.Max(var1, var2)
        li = li + 2
    Next
'redefinição das variáveis auxiliares
cf = cf - 1
li = 18
Next

End Sub
```

7.5.
Anexo E: Demonstração da Equação (27)

Para que a metodologia gere uma árvore binomial livre de arbitragem, o retorno total (incluindo os dividendos) sobre o ativo deve ser igual à taxa livre de risco, quando aplicada a medida neutra ao risco (Q). Com base nisto, o valor de S em (t + Δt) pode ser escrito como

$$E^{Q}[S(t+\Delta t)] = S(t)e^{r\Delta t}$$

Alternativamente, sabendo-se que retorno total é dado pelo retorno do capital e pelo retorno do dividendo, no cenário favorável o valor do ativo com ganho de capital e dividendo é calculado da seguinte forma

$$S(t+\Delta t)^{+} = S(t)ue^{\delta\Delta t}$$

E no cenário desfavorável é definido como

$$S(t+\Delta t)^{-} = S(t)de^{\delta\Delta t}$$

Logo, o seu valor esperado é dado por

$$E[S(t+\Delta t)] = S(t)ue^{\delta\Delta t}q + S(t)de^{\delta\Delta t}(1-q)$$

Sendo assim, as equações podem ser igualadas

$$S(t)e^{r\Delta t} = S(t)ue^{\delta\Delta t}q + S(t)de^{\delta\Delta t}(1-q)$$

Dividindo os dois lados por S(t), tem-se

$$e^{r\Delta t} = ue^{\delta\Delta t}q + de^{\delta\Delta t}(1-q)$$

$$e^{r\Delta t} = ue^{\delta\Delta t}q - de^{\delta\Delta t}q + de^{\delta\Delta t}$$

Isolando q

$$qe^{\delta\Delta t}(u-d) = e^{r\Delta t} - de^{\delta\Delta t}$$

Dividindo ambos os lados pelo fator $e^{\delta\Delta t}$, tem-se

$$q(u-d) = e^{(r-\delta)\Delta t} - d$$

Logo,

$$q = \frac{e^{(r-\delta)\Delta t} - d}{u-d}$$