3
Descrição das metodologias analisadas

Neste capítulo são apresentadas e descritas as metodologias aplicadas e avaliadas nesta dissertação. Todas elas têm como base o método binomial e foco no apreçamento de opções americanas embutidas em contratos privados de aluguel de ativos reais. Todo o detalhamento é feito considerando opções de venda, mas as metodologias são também aplicáveis a opções de compra, sendo necessários apenas ajustes de fórmula.

3.1.
Método da Média Ponderada

O Método da Média Ponderada tem como base o modelo 3 (*Piecewise lognormal model*), desenvolvido com foco no apreçamento de opções financeiras. Como descrito anteriormente, neste modelo, o valor de mercado do ativo sofre uma queda de intensidade igual ao valor do dividendo pago. Essa definição se faz necessária para que não seja gerada oportunidade de arbitragem. Caso o ativo sofra uma queda de valor inferior ao do dividendo, um investidor poderia obter um empréstimo à taxa livre de risco, compraria o ativo imediatamente antes do pagamento do dividendo, receberia o dividendo, venderia o ativo imediatamente depois do pagamento e pagaria o empréstimo. Caso a queda seja de valor superior, ele venderia o ativo antes do pagamento e o recompraria após o pagamento. Em ambos os casos o investidor auferiria lucro. De fato, no mercado de ações, essa queda do valor de mercado do ativo é observada na data de pagamento de dividendos, mas o mesmo não se pode dizer sobre os ativos reais. O valor de mercado de um navio, por exemplo, não sofre queda sempre que uma taxa de afretamento do mesmo é paga, ou seja, o seu valor de mercado não depende dos pagamentos gerados pelo contrato privado ao qual o ativo está vinculado (Dias, 2012). Entretanto, este não é o primeiro trabalho a considerar que o ativo real sofre uma queda de valor igual ao dividendo fixo pago. O método desenvolvido por Haug et al. (2003), descrito anteriormente, também considera esta subtração no cálculo das integrais e o autor afirma que o seu método pode ser aplicado para solução de problemas de opções reais. Sendo assim, considerou-se relevante a análise dos resultados oriundos da utilização de um método baseado no modelo 3.

Como visto, o modelo 3 sem quaisquer ajustes gera uma árvore binomial não recombinante, acarretando em complexidade computacional quando considerados múltiplos dividendos. Em vista disto, o Método da Média Ponderada, desenvolvido em conjunto com Dias (2012), se utiliza de uma regra de ajuste definida a partir de uma sugestão de Nardon e Pianca (2008) para forçar a recombinância da árvore binomial através de uma média aritmética. De maneira semelhante, Wilmott & Dewynne & Howison (1993, p.402) sugerem que a recombinação da árvore binomial seja feita através de ajustes nos fatores u e d. Acreditando-se na obtenção de resultados mais próximos àqueles gerados através de uma árvore não recombinante, optou-se pela utilização de uma média ponderada pela probabilidade neutra ao risco e o seu valor complementar. A seguir são descritas, através de um exemplo, as adaptações aplicadas à idéia original de média aritmética que formam o Método da Média Ponderada. Algumas considerações sobre o método são ainda apresentadas no Tópico 4.3 quando são apresentados os resultados da aplicação deste método a um caso.

3.1.1. Interpolação por Média Aritmética

Admita um ativo cujo valor no instante atual (S_0) é 100. A volatilidade do valor deste ativo é de 30% a.a. e busca-se montar uma árvore com discretização mensal (Δt = 1/12). Com base nesses dados, sabe-se que u = 1,090 e d = 0,917. A taxa livre de risco em tempo contínuo (r) considerada é de 10% a.a.

No período t = 1 há pagamento de dividendo (D = 5), por isso o valor do ativo sofre uma queda de tamanho igual ao valor desse dividendo. O pagamento de dividendos ocorre em virtude da existência de um contrato privado vinculado ao uso do ativo Os valores do período t = 2 são formados a partir do valor do ativo após o pagamento do dividendo no período t = 1. Seja $S_{i,j}$, o valor do ativo no período i, no cenário j, definido como a ordem do nó em determinado período, temos no exemplo que $S_{2,2}$ é definido como a média dos valores $S_{1,1}d$ e $S_{1,2}u$, conforme pode ser observado na Figura 2.

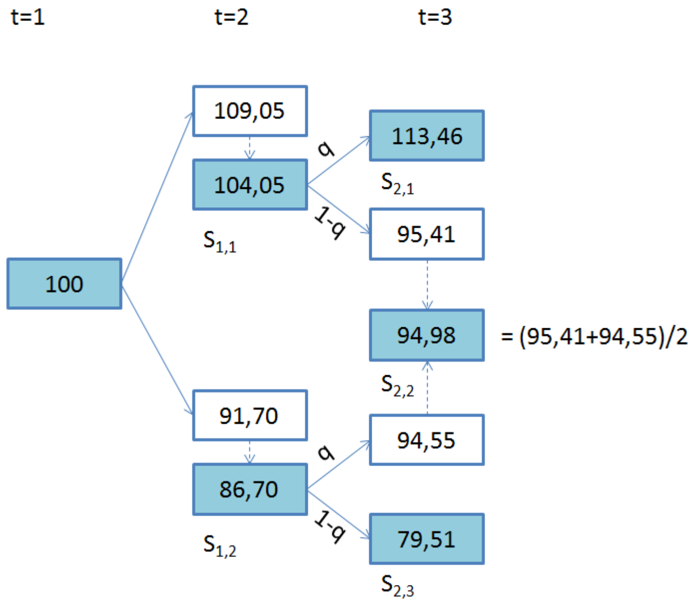


Figura 2: Representação da árvore binomial gerada a partir de média aritmética.
Fonte: Própria

3.1.2.
Interpolação por Média Ponderada

De forma a melhor representar os pesos atribuídos a cada um dos nós não recombinantes, buscou-se a adaptação do modelo anterior através da utilização de uma média ponderada pela probabilidade neutra ao risco (q) e o seu valor complementar (1-q). O nó superior, no exemplo o nó $S_{2,1}$, é ponderado pela probabilidade *(1-q)* e o inferior, $S_{2,3}$, é ponderado por q. No exemplo descrito no tópico anterior, os valores de q e *(1-q)* são 52,66% e 47,34%, respectivamente.

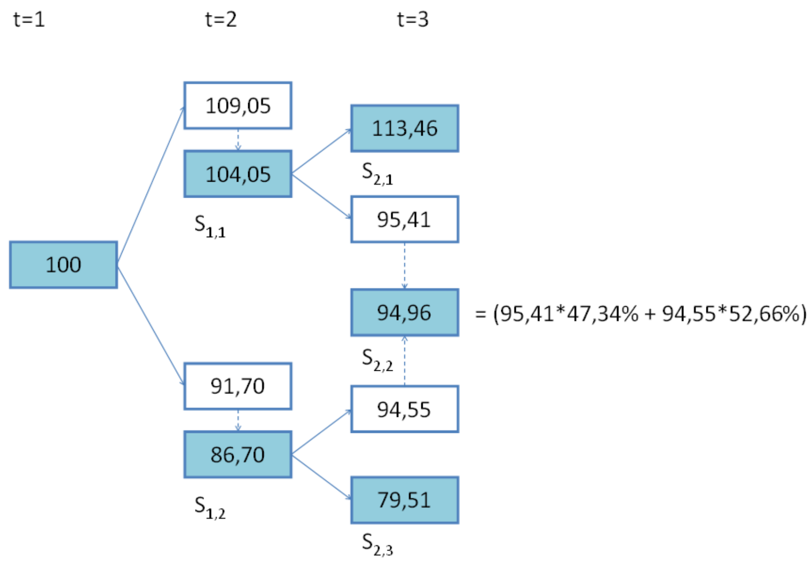


Figura 3: Representação da árvore binomial gerada a partir de média ponderada.
Fonte: Própria

3.1.3. Eliminação de valores negativos

Haug et. al (2003) aborda em seu trabalho uma deficiência bastante grave com relação a alguns modelos existentes para valorar opções cujo ativo paga dividendos fixos. Trata-se da possibilidade do ativo assumir valores negativos, o que ocorre quando o valor do dividendo (*D*) supera o valor do ativo (*S*). No Método da Média Ponderada foi considerada uma condição na geração da árvore binomial que substitui valores negativos por zero, de forma que

$$D(S) = D, \text{ se } S > D$$

$$D(S) = S, \text{ se } S \leq D$$

Apesar de resolver o problema de valores negativos para o ativo, essa condição pode gerar um grande número de cenários na maturidade em que o ativo tem valor nulo, invalidando a premissa de lognormalidade dos valores futuros do ativo, condição necessária para que o processo estocástico seja um MGB.

Gerada a árvore binomial, o valor da opção de venda é calculada *backwards* segundo o modelo de Cox, Ross e Rubinstein (1979).

$$\mathrm{F}_{exercicio_{i,j}} = \mathrm{K}_i - \mathrm{S}_{i,j} \tag{20}$$

$$\mathrm{F}_{espera_{i,j}} = [\mathrm{F}_{i+1,j}\mathrm{q} + \mathrm{F}_{i+1,j+1}(1\text{-q})]\mathrm{e}^{-r\Delta t} \tag{21}$$

$$F_{i,j} = Max\{F_{espera_{i,j}}; F_{exercicio_{i,j}}\} \tag{22}$$

Onde $S_{i,j}$ é o valor de mercado do ativo no período i, no cenário j, definido como a ordem do nó em determinado período, K_i é o preço de exercício no período i, $F_{i,j}$ é o valor do prêmio da opção de venda no período *i*, no cenário *j*, *q* é a probabilidade neutra ao risco, *r* é taxa livre de risco em tempo contínuo (análise neutra ao risco), considerada constante no intervalo $0 \le t \le T$. e Δt é o intervalo de tempo entre nós da árvore binomial.

3.2.
Método das probabilidades variáveis

Dias (2012) sugere um método para cálculo de opções reais que tem como base o trabalho de Trigeorgis (1996). Neste trabalho o autor assume que o custo de reposição ou o custo de oportunidade de um ativo com contrato de leasing, *S*, segue um processo padrão de difusão de Wiener, conforme a expressão da Equação (23).

$$\frac{dS}{S} = -Bdt + \sigma dz \tag{23}$$

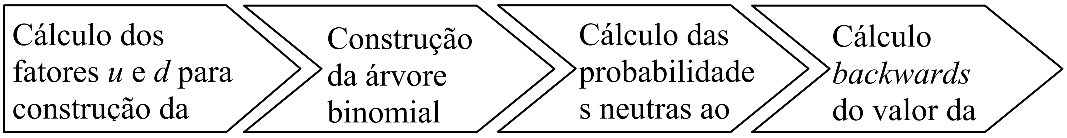
Onde *-B* é o retorno do ativo considerando a sua perda de valor com a depreciação, *dt* é o intervalo de tempo considerado, σ é o desvio padrão do valor do ativo e *dz* é o processo padrão de Wiener.

Outra particularidade do método e que também o diferencia do Método da Média Ponderada é com relação a consideração dos dividendos privados. Conforme abordado anteriormente, Shockley (2007) define que problemas que envolvem o pagamento de dividendos podem ser resolvidos de dois tipos: através da geração de uma árvore binomial com valores com dividendo, seguido de um ajuste na própria árvore, obtendo-se valores ex-dividendos, forma aplicada no

Método da Média Ponderada; ou através da geração de valores com dividendos e aplicando-se um ajuste apenas no cálculo da probabilidade neutra ao risco. Este método se utiliza da segunda forma citada, entretanto, como se considera também que o ativo perde valor com a sua depreciação, os valores aparentes na árvore binomial apresentam um decaimento dado pela depreciação. Dessa forma, no que tange os valores de mercado do ativo considerados, esta metodologia é mais consistente que a anterior para ativos reais.

O Método das Probabilidades Variáveis, inicialmente, pode ser utilizado para apreçamento de opções reais americanas de compra e de venda com dividendos fixos, apesar de não ter sido testado por Dias (2012) para problemas com pagamento de múltiplos.

Com base nas diferenças apresentadas, devem ser seguidos os seguintes passos para a aplicação do Método das Probabilidades Variáveis:



1) Cálculo dos fatores *u’* e *d’* para construção da árvore binomial.

Tais fatores devem incorporar apenas a queda de valor do ativo em decorrência da sua depreciação[1], de forma que sejam gerados cenários centrais na árvore binomial que representem a perda de valor citada. Nessa metodologia considera-se que o ativo tem vida finita e que seu valor será nulo quando a depreciação acumulada atingir 100%.

$$u' = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}(1-\lambda\Delta t) \tag{24}$$

$$d' = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}(1-\lambda\Delta t) \tag{25}$$

Onde λ é a taxa anual de depreciação, σ é a volatilidade do valor do ativo e Δt é o intervalo entre nós da árvore binomial.

Vale ressaltar que, nesse caso, $d' \neq 1/u'$, mas a razão entre os termos é constante, o que mantém a recombinância da árvore binomial. Outra questão importante é que, quando da aplicação desta metodologia, o ativo não assume valores negativos, estando limitados à zero. Portanto, não é necessária a imposição de qualquer condição, como feito no modelo de Método da Média

[1] A taxa de depreciação é aqui definida como λ e se relaciona com o trabalho de Trigeorgis (1996) através da equação $-B=\alpha+\lambda$, onde α é o retorno de capital do ativo.

Ponderada e da árvore não recombinante. Este fato também pode ser visto como um benefício do método em relação ao anterior.

2) Construção da árvore binomial utilizando os fatores *u'* e *d'* calculados.

3) Cálculo, a cada nó da árvore, da probabilidade neutra ao risco $q'_{i,j}$ de subida e, por diferença, as probabilidades complementares $(1- q'_{i,j})$ de descida. Conforme mencionado anteriormente, esta metodologia utiliza-se do artifício de considerar o dividendo no cálculo da probabilidade neutra ao risco, ao invés de realizar um ajuste na árvore binomial. Da mesma forma que para o Método da Média Ponderada, o dividendo considerado é aquele definido para o contrato privado ao qual o ativo está vinculado.

$$q'_{i,j} = \frac{e^{r\Delta t} - \dfrac{S_{i,j} + D}{S_{i-1,j}}}{\dfrac{S_{i,j+1} + D}{S_{i-1,j}} - \dfrac{S_{i,j} + D}{S_{i-1,j}}} \qquad (26)$$

Onde $S_{i,j}$, o valor do ativo no período *i*, no cenário *j*, definido como a ordem do nó em determinado período, *D* é o dividendo fixo pago devido a existência de um contrato privado vinculado ao uso do ativo e *r* é a taxa livre de risco em tempo contínuo (análise neutra ao risco), considerada constante no intervalo $0 \leq t \leq T$. A variável $q'_{i,j}$ também é definida para o período *i*, no cenário *j*.

Percebe-se pela Equação (26) que, sendo o valor de mercado do ativo variável e os dividendos fixos, o *dividend yield* é então variável e, por isso, a probabilidade neutra ao risco é também variável. Essas diferenças são necessárias, pois os retornos reais a cada nó são diferentes, mas na medida neutra ao risco os retornos devem ser constantes e iguais à taxa livre de risco, de forma o derivativo seja livre de arbitragem. Para contratos cujo dividendo do contrato em vigor é marcado a mercado, os dividendos são definidos em termos de valores de mercado, tornando os retornos reais constantes e as probabilidades iguais. Seria então um caso simples de apreçamento de opção que paga dividendos proporcionais (*dividend yield*), podendo ser aplicado o modelo de Trigeorgis (1996) diretamente.

4) Cálculo do valor da opção *backwards* conforme o modelo de Cox, Ross e Rubinstein (1979) e segundo as Equações (20) e (21). As probabilidades aplicadas no cálculo do valor da espera a cada nó devem ser a calculadas no item anterior.

A seguir, o processo de construção da árvore é novamente descrito através de um exemplo. Admita um ativo cujo valor no instante atual (S_0) é 100. A volatilidade do valor deste ativo é de 30% a.a. e a taxa de depreciação econômica é de 1% a.a. Busca-se montar uma árvore com discretização mensal (Δt = 1/12). Com base nesses dados, sabe-se que u'= 1,079 e d'= 0,908. A taxa livre de risco considerada é de 10% a.a, então $e^{r\Delta t} = 1,0084$. O ativo paga dividendos mensais de valor D = 5.

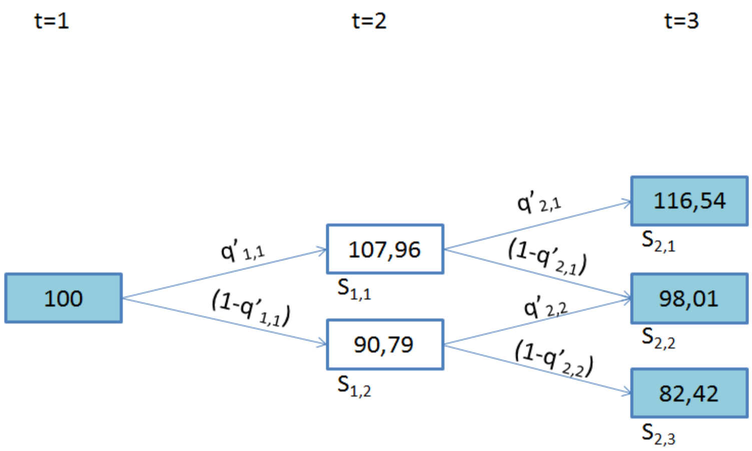


Figura 4: Representação da árvore binomial do Método das Probabilidades Variáveis
Fonte: Própria

$$q'_{2,1} = \frac{1,0084 - \dfrac{98,01+5}{107,96}}{\dfrac{116,54+5}{107,96} - \dfrac{98,01+5}{107,96}} = 31,44\%$$

$$1 - q'_{2,1} = 68,44\%$$

$$q'_{2,2} = \frac{1,0084 - \dfrac{82,42+5}{90,79}}{\dfrac{98,01+5}{90,79} - \dfrac{82,42+5}{90,79}} = 26,46\%$$

$$1 - q'_{2,2} = 73,54\%$$

$$q'_{1,1} = \frac{1,0084 - \dfrac{107,96+5}{100}}{\dfrac{90,79+5}{100} - \dfrac{107,96+5}{100}} = 29,41\%$$

$$1 - q'_{1,1} = 70,59\%$$

Algumas considerações adicionais sobre o Método das Probabilidades Variáveis são ainda apresentadas no Tópico 4.4, no qual os resultados da aplicação do método a um exemplo numérico são apresentados.

3.3.
Método do custo de oportunidade do dividendo

O terceiro método discutido neste trabalho busca contornar os pontos fracos dos métodos anteriormente descritos, no que tange a modelagem do valor de mercado do ativo e a necessidade de que o derivativo seja livre de arbitragem.

Com relação à primeira questão, o Método da Média Ponderada considera a queda do valor do ativo em um montante igual ao valor do dividendo nas datas ex-dividendos, o que seria uma premissa questionável para ativos reais. Já no Método das Probabilidades Variáveis, modela-se o valor de mercado do ativo sem considerar qualquer dividendo, pois deve representar o valor de um ativo sem contrato. Considera-se apenas que o ativo perde valor com o seu envelhecimento, através da consideração do fator de depreciação econômica aplicado no cálculo dos parâmetros u e d (Equações 24 e 25). No Método do Custo de Oportunidade do Dividendo, a mesma premissa do Método das Probabilidades Variáveis é considerada.

Da mesma forma que no Método das Probabilidades Variáveis, no Método do Custo de Oportunidade do Dividendo utiliza o artifício de aplicação de ajuste no cálculo da probabilidade neutra ao risco. Entretanto, no Método das Probabilidades Variáveis os dividendos considerados neste cálculo são os dividendos privados e, para que se garanta que o derivativo seja livre de arbitragem, é necessário que essas probabilidades variem a cada nó. De forma alternativa, no Método do Custo de Oportunidade do Dividendo, considera-se um dividendo de mercado. Essa variável é mais bem definida como um *dividend yield*, pois, em se tratando de um dividendo de mercado não há contrato firmado, então o dividendo a ser pago é definido como um percentual sobre o valor de mercado do ativo quando a contratação for efetuada. Um exemplo que justifica a aplicação de um dividendo percentual pode ser observado no mercado imobiliário: o valor absoluto do aluguel mensal de imóveis oscila com o valor dos imóveis, mas o percentual que ele representa é normalmente constante e em torno de 0,5%

sobre o valor do imóvel. Sendo assim, a probabilidade neutra ao risco é calculada conforme Equação (27), com a qual se garante não haver oportunidade de arbitragem na modelagem do valor de mercado do ativo (ver Anexo E). Além disso, as probabilidades neutras ao risco são iguais para todos os nós da árvore binomial.

$$q = \frac{e^{(r-\delta)\Delta t} - d}{u - d} \tag{27}$$

Onde r é a taxa livre de risco em tempo contínuo (análise neutra ao risco), considerada constante no intervalo $0 \leq t \leq T$, λ é a taxa anual de depreciação, σ é a volatilidade do valor do ativo, δ é o *dividend yield* em tempo contínuo, também considerado constante no intervalo $0 \leq t \leq T$ e Δt é o intervalo entre nós da árvore binomial.

Vale ressaltar que a utilização da Equação (27) equivale ao uso das Equações (3), (4) e (5), apresentadas no Capítulo 2, onde o *dividend yield* é considerado no cálculo de novos parâmetros u^c e d^c, utilizados para calcular a probabilidade neutra ao risco.

Considerando apenas as premissas do método apresentadas até aqui, o Método do Custo de Oportunidade do Dividendo poderia ser visto como equivalente ao método tradicional utilizado para problemas com dividendos proporcionais. Entretanto, sua principal premissa está relacionada ao cálculo da opção de espera, onde os dividendos do contrato em vigor são considerados, diferenciando o método da solução tradicional. A lógica por trás desta premissa é de que, se exercida a opção de venda, o detentor do ativo deixa de receber o dividendo do contrato privado, mas pode adquirir outro ativo semelhante no mercado e estabelecer um novo contrato de aluguel. Nesse novo contrato é definido um novo valor para o dividendo que refletirá as condições correntes do mercado e, por isso, denominado dividendo de mercado. O diferencial entre esses dois dividendos pode ser entendido como um custo de oportunidade dos dividendos. Este valor é considerado neste método no cálculo da opção de espera, pois reflete um ganho ou uma perda originada pela existência da opção.

A aplicação do custo de oportunidade do dividendo no cálculo da opção de espera implica na existência de oportunidade de arbitragem para o derivativo. Entretanto, como discutido anteriormente, sendo o contrato privado, agentes externos não poderiam realizar operações de arbitragem com o mesmo. Apenas a modelagem do valor de mercado (ativo sem contrato) deve ser livre de arbitragem, pois o acesso ao mesmo por agentes do mercado seria irrestrito.

Vale ressaltar que para os métodos da Média Ponderada e das Probabilidades Variáveis anteriormente descritos, considera-se que o dividendo de mercado é o próprio valor do dividendo privado (por isso ele é considerado na modelagem do valor de mercado do ativo ou na probabilidade neutra ao risco). Sendo assim, o custo de oportunidade do dividendo poderia ser visto como nulo.

O valor da opção de venda é definido a cada nó como o maior valor entre exercer a opção imediatamente e esperar para exercer no futuro. O valor do exercício imediato é calculado de forma tradicional: para opções de venda, é obtido através da diferença *(K_i-S_i)*, onde K_i e S_i são respectivamente o preço de exercício é o valor de mercado do ativo ambos no período *i*. Seguindo a lógica apresentada, a opção de espera é valorada através da Equação (28).

$$F_{espera} = [F^{+}q + F^{-}(1-q)]e^{-r\Delta t} + \{D - [S^{+}q + S^{-}(1-q)](e^{\delta\Delta t} - 1)\}e^{-r\Delta t} \qquad (28)$$

Onde F^{+} e S^{+} são, respectivamente, o valor da opção e o valor do ativo no cenário favorável do instante seguinte, F^{-} e S^{-} são, respectivamente, o valor da opção e o valor do ativo no cenário desfavorável do instante seguinte, q é a probabilidade neutra ao risco de subida, r é a taxa livre de risco em tempo contínuo (análise neutra ao risco), considerada constante no intervalo $0 \leq t \leq T$, D é o dividendo fixo pago devido à existência de um contrato privado vinculado ao uso do ativo, δ é o *dividend yield* em tempo contínuo, também considerado constante em $0 \leq t \leq T$ e Δt é o intervalo entre nós da árvore binomial. Sendo o *dividend yield* δ definido em tempo contínuo, é necessário transformá-lo em uma taxa em tempo discreto para a aplicação no método binomial (processo em tempo discreto). A expressão de cálculo da taxa discreta a partir da taxa contínua é apresentada na Equação (29),

$$\delta_{discreta} = e^{\delta_{continua}} - 1 \qquad (29)$$

O que leva a reformulação do termo que representa o dividendo de mercado da seguinte forma: $[S^{+}q + S^{-}(1-q)]\delta_{discreta}$

O custo de oportunidade da espera é dado pelo termo $\{D - [S^{+}q + S^{-}(1-q)](e^{\delta\Delta t} - 1)\}$. Em particular, o termo $[S^{+}q + S^{-}(1-q)](e^{\delta\Delta t} - 1)$ refere-se a valor absoluto do dividendo de mercado. Empiricamente, percebe-se que para os nós superiores da árvore binomial gerada o custo de oportunidade dos dividendos tem valor negativo, pois para valores muito altos de *S*, o termo $[S^{+}q + S^{-}(1-q)](e^{\delta\Delta t} - 1)$ supera o valor de *D*, ou seja, há incentivo para o exercício da opção, pois o dividendo de mercado é maior que o dividendo contratual. Já para os nós inferiores, o custo de oportunidade dos dividendos tem valor positivo, pois o termo $[S^{+}q + S^{-}(1-q)](e^{\delta\Delta t} - 1)$ é muito baixo e não deve superar o valor de *D*. Nesse caso o contrato tem dividendos favoráveis ao dono do ativo em relação ao mercado, incentivando a espera.

Vale ressaltar que para contratos cujo dividendo do contrato privado é marcado a mercado, os dividendos são definidos em termos de valores de mercado, tornando nula a diferença definida como custo de oportunidade do dividendo. Nesse caso, o problema é solucionável pelo o modelo de Trigeorgis (1996) diretamente.

Outras considerações sobre o método são apresentadas no Tópico 4.5, onde são apresentados os resultados obtidos quando da aplicação do método a um caso.

3.4. Resumo das diferenças entre os métodos

As premissas mais relevantes de cada método são apresentadas de forma resumida na Tabela 2.

<table>
<tr><th>Metodologia</th><th>Média Ponderada</th><th>Probabilidades Variáveis</th><th>Custo de Oportunidade do Dividendo</th></tr>
<tr><td>Modelagem do valor de mercado do ativo</td><td>A cada data em que ocorre o pagamento de dividendo, o valor do ativo sofre uma queda de intensidade igual ao valor do dividendo.</td><td colspan="2">A cada nó o ativo sofre uma queda em seu valor que representa a sua depreciação.</td></tr>
<tr><td>Árvore binomial</td><td>Inicialmente não recombinante, porém no método é aplicada uma média ponderada para a definição dos nós intermediários.</td><td>Árvore recombinante. Os dividendos do contrato privado são considerados no cálculo das probabilidades neutras ao risco.</td><td>Árvore recombinante. Considera-se um dividendo de mercado (dividend yield) no cálculo da probabilidade neutra ao risco. O dividendo fixo não é considerado nesta parte.</td></tr>
<tr><td>Valor da espera</td><td colspan="2">O dividendo do contrato não é considerado no cálculo da opção de espera. O custo de oportunidade do dividendo pode ser entendido como nulo.</td><td>Considera-se o custo de oportunidade do dividendo, dado pela diferença entre o dividendo do contrato e o valor absoluto do dividendo de mercado.</td></tr>
<tr><td>Valor do Exercício imediato</td><td colspan="3">Diferença entre o preço de exercício e o valor de mercado do ativo.</td></tr>
</table>

Tabela 2: Comparativo entre premissas das metodologias avaliadas
Fonte: Própria