# 2
# Revisão da literatura

## 2.1.
## Modelos tradicionais

O modelo de apreçamento de opções européias mais conhecido é o modelo de Black-Scholes-Merton (Black-Scholes, 1973 e Merton, 1973). Esse modelo foi inicialmente desenvolvido por Fisher Black e Myron Scholes, com cooperação de Merton que realizava pesquisa em paralelo. Merton (1973) expandiu o modelo inicial através da consideração do pagamento contínuo de dividendos, com valor proporcional ao preço do ativo base. O modelo Black-Scholes-Merton (BSM) tem como premissa que o ativo base segue um movimento geométrico browniano (MGB) e, portanto, os preços futuros[1] deste ativo seguem uma distribuição lognormal.

O método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) é uma aproximação discreta do modelo BSM. Sua representação gráfica é uma árvore binomial, também chamada de árvore binomial CRR. A geração de uma árvore binomial é feita a partir de dois fatores $u$ e $d$. Ao se multiplicar a valor inicial do ativo por $u$, temos o nó superior do período seguinte e, ao se multiplicar por $d$, temos o nó inferior do período seguinte. Para que a árvore binomial seja recombinante, é necessário que a razão $u/d$ se mantenha constante. Os valores de $u$ e $d$ podem sofrer variações, mas a razão entre eles deve ser a mesma para todos os nós da árvore. No caso da árvore binomial CRR, $u$ e $d$ são definidos de forma que, no limite ($\Delta t \rightarrow 0$), os valores do ativo base na maturidade (último período da árvore binomial) formem uma distribuição lognormal.

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (1)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (2)$$

[1] Entende-se pela expressão “preços futuros” o conjunto de cenários de preço do ativo calculados na árvore binomial para um instante de tempo futuro.

Onde $\sigma$ é a volatilidade do valor do ativo e $\Delta t$ é o intervalo entre nós da árvore binomial.

Em suma, a árvore binomial CRR é uma aproximação discreta do processo estocástico MGB e, portanto, o método binomial gera, no limite ($\Delta t \rightarrow 0$), um resultado que converge para o resultado dado pelo modelo BSM. Este método possui o diferencial de poder ser utilizado para cálculo de opções americanas, caracterizadas pela possibilidade de serem exercidas a qualquer momento, até a data de vencimento. Quando da utilização do método binomial, é possível verificar a cada nó se é ótimo exercer a opção ou aguardar.

Conforme citado anteriormente, o modelo BSM possui duas premissas com relação aos seus dividendos. A primeira diz respeito ao pagamento contínuo de dividendos e a segunda ao fato dos dividendos serem calculados como um percentual do valor do ativo base. Para que sejam considerados dividendos, o método binomial precisa sofrer uma modificação. Segundo Shockley (2007), a solução de problemas que envolvem o pagamento de dividendos pode ser de dois tipos. No primeiro caso o processo de difusão gera uma árvore binomial com valores com dividendo e o ajuste é feito na própria árvore, gerando então valores **ex-dividendos**, conforme pode ser visto na Figura 1[2]. Essa é a lógica na qual o modelo 3 (detalhado ainda neste capítulo) se fundamenta. Vale ressaltar que neste caso, observa-se que os valores dos nós centrais decaem a cada período por um fator *(1-δ),* onde $\delta$ é o *dividend yield* em tempo discreto. No segundo tipo de solução, o processo de difusão gera uma árvore com valores **com dividendo** e o ajuste é feito apenas no cálculo da probabilidade neutra ao risco. Nesse último caso, deve ser calculado um segundo fator $u$ e um segundo fator $d$, aqui chamados de $u^c$ e $d^c$. Já os fatores $u$ e $d$ que geram a árvore binomial são calculados da forma descrita nas Equações (1) e (2).

$$u^c = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + \delta\Delta t \qquad (3)$$

$$d^c = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} + \delta\Delta t \qquad (4)$$

---

[2] A Figura 1 apresenta um exemplo em que a taxa de dividendo $\delta$ (*dividend yield*) é definida sobre o valor do ativo no final do período. Entretanto, segundo Dias (2012), também é possível gerar uma árvore binomial recombinante com uma taxa $\delta$ aplicada sobre o valor do ativo com dividendo, ou seja, antes da sua queda. Nesse caso, o valor do ativo deve ser multiplicado por *1/(1+δ).*

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d^c}{u^c - d^c} \qquad (5)$$

Onde $\delta$ é p *dividend yield* em tempo discreto, $\sigma$ é a volatilidade do valor do ativo, considerada constante no intervalo $0 \leq t \leq T$, $r$ é a taxa livre de risco em tempo contínuo (análise neutra ao risco), também considerada constante em $0 \leq t \leq T$ e $\Delta t$ é o intervalo de tempo entre nós da árvore binomial. Segundo o autor, as duas soluções resultam em valores muito próximos, tendendo ao mesmo valor para o caso em tempo contínuo.

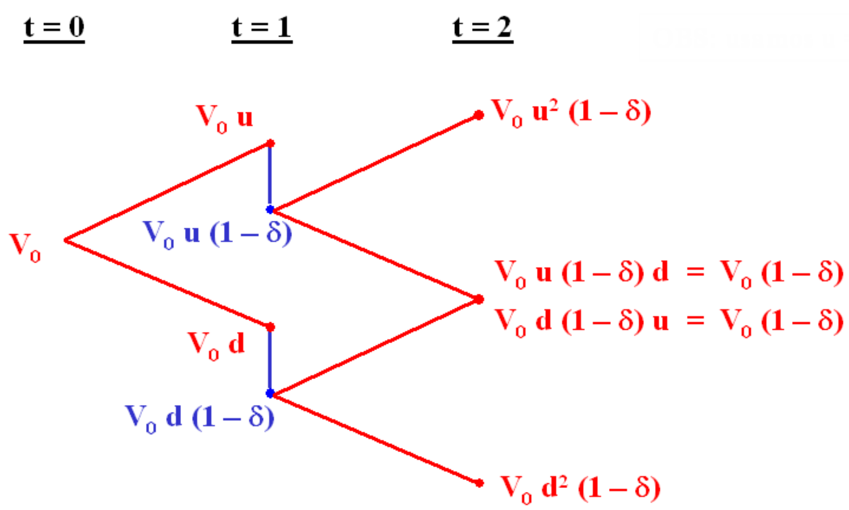


Figura 1: Árvore binomial recombinante com dividendos proporcionais.
Fonte: Dias (2012)

Entretanto, com relação às duas premissas sobre dividendos do modelo BSM, o que se observa na prática no mercado financeiro é o pagamento de dividendos em datas específicas (pagamentos discretos), cujo valor é previamente definido e fixo. Segundo Haug et al. (2003), para opções definidas com base em um portfólio com grande número de ações é razoável assumir que o dividendo pago em tempo discreto é definido como um percentual do valor do portfólio. Porém, quando se trata de um único ativo, a premissa se torna fraca. Nesses casos, o que se observa é que, apenas no longo prazo, os dividendos podem ser quantificados como percentual do preço do ativo base, mas que para o curto prazo essa premissa é inválida. Para ativos reais, o modelo BSM é um pouco mais consistente, uma vez que a maioria dos ativos reais geram fluxos de caixa que podem ser interpretados como dividendos, sendo pagos de forma quase contínua. Entretanto, o caso de opções reais analisado neste trabalho tem como característica um dividendo de valor fixo, por isso o modelo BSM ou o método binomial tradicional não podem ser aplicados diretamente.

Não foi encontrado na literatura qualquer trabalho voltado para ativos e opções reais com pagamento de dividendos fixos, a exceção do trabalho de Dias (2012), por isso esta revisão foi feita com base na literatura que trata o problema relativo ao cálculo de opções financeiras cujo ativo base paga dividendos discretos e de valor fixo.

Segundo Frishling (2002), existem três modelos básicos que consideram o pagamento de dividendos fixos e discretos.

### 2.2.1.
### Escrowed dividend model (modelo 1)

O método foi proposto por Schroder (1988) e nele admite-se que o valor do ativo menos o valor presente de todos os dividendos a serem pagos no futuro até o vencimento segue um MGB, podendo ser aplicado no modelo BSM para o cálculo do valor da opção. O modelo tradicional de BSM, conforme descrito acima, assume que o próprio valor do ativo segue um MGB.

$$C_0 = S_0 - \sum D_{t_i} e^{-r(t_i - t)} \quad (6)$$

$$dC_t = rC_t dt + \sigma C_t dw_t \quad (7)$$

$$S_t = C_t + \sum_{T > t_i > t} D_{t_i} e^{-r(t_i - t)} \quad (8)$$

$$S_T = C_T \quad (9)$$

Onde $C_0$ é o valor inicial do ativo líquido de dividendos, $S_0$ é o valor inicial do ativo (capital mais dividendo), $r$ é a taxa livre de risco em tempo contínuo (análise neutra ao risco) e admitida como constante em $0 \leq t \leq T$, $D_{ti}$ é o valor do dividendo pago no instante $t_i$, $\sigma$ é a volatilidade do capital também constante em $0 \leq t \leq T$, $C_t$ é o processo do valor do ativo líquido de dividendos, $dt$ é o diferencial de tempo, $dw$ é o processo padrão de Wiener, $S_t$ é o valor do ativo em $t$ e $T$ é a data de expiração da opção.

### 2.2.2.
### Forward dividend model (modelo 2)

Heath e Jarrow (1988), seguido por Musiela e Rutkowski (conforme citado por Frishling, 2002), desenvolveram um modelo que admite que o valor do ativo mais o valor atualizado de todos os dividendos já pagos até a data atual, o chamado “accumulation price process” ($A_t$), segue um MGB.

$$dA_t = rA_t dt + \sigma A_t dw_t \qquad (10)$$

$$S_t = A_t + \sum_{0<t_i<t} D_{t_i} e^{r(t-t_i)} \qquad (11)$$

$$S_0 = A_0 \qquad (12)$$

Onde $A_t$ é o processo do “accumulation price”, $r$ é a taxa livre de risco em tempo contínuo (análise neutra ao risco) e admitida como constante em $0 \leq t \leq T$, $dt$ é o diferencial de tempo, $\sigma$ é a volatilidade do capital também constante em $0 \leq t \leq T$, $dw$ é o processo padrão de Wiener, $S_t$ é o valor do ativo em $t$, $D_{ti}$ é o valor do dividendo pago no instante $t_i$, $T$ é a data de expiração da opção e $S_0$ é o valor inicial do ativo.

### 2.2.3.
### Piecewise lognormal model (modelo 3)

Este modelo foi analisado em detalhe por Wilmott (1998). Ele admite que o valor do ativo sofre uma queda de tamanho igual ao valor do dividendo nas datas em que são pagos. Neste modelo, o valor do ativo segue um MGB apenas entre as datas de pagamento de dividendos. Em decorrência disto, não existe fórmula fechada (como BSM) para calcular o valor da opção quando utilizando o modelo 3, sendo necessária a aplicação de algum método numérico (por exemplo, o método binomial).

$$\begin{aligned} &dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dw_t \\ &t_i < t < t_{i+1} \end{aligned} \qquad (13)$$

$$S_{t_i}^{+} = S_{t_i}^{-} - D_{t_i} \qquad (14)$$

Onde $S_t$ é o processo do valor do ativo nos intervalos entre pagamento de dividendos, $r$ é a taxa livre de risco em tempo contínuo (análise neutra ao risco), considerada constante em $0 \leq t \leq T$, $\sigma$ é a volatilidade do ativo também constante em $0 \leq t \leq T, S_{t_i}^{-}$ é o valor do ativo imediatamente antes do pagamento do dividendo e $S_{t_i}^{+}$, o valor imediatamente depois e $D_{ti}$ é o valor do dividendo pago no instante $t_i$.

Os modelos 1 e 2 são os mais populares devido a praticidade de implementação, pois é possível utilizar a equação do modelo de Black-Sholes-Merton e, consequentemente, o método binomial com árvore recombinante, aplicando-se os ajustes mencionados acima. Entretanto, esses modelos apresentam uma série de deficiências. Apesar dos três modelos gerarem valores esperados iguais para o valor terminal (na maturidade), as distribuições desses valores é diferente, levando a uma valoração diferente de prêmios de opções. Em geral, o que se observa são valores inferiores para os prêmio de opções apreçadas através do modelo 1 e valores superiores para o modelo 2, enquanto que o modelo 3 gera valores intermediários entre os dois. É fácil observar ainda que, para casos em que o valor do dividendo é muito alto, é possível que se obtenha um valor líquido do valor presente dos dividendos futuros negativo, inviabilizando a utilização do modelo 1.

Beneder e Vorst (2002) avaliaram os resultados gerados pelo modelo 1 e chegaram a conclusão de que o primeiro apresenta oportunidade de arbitragem em casos de opções americanas, em virtude de uma redução de volatilidade decorrente da forma como se define a variável estocática. Vellekoop e Nieuwenhuis (2006), também apontam que há oportunidade de arbitragem no modelo 1, pois observa-se que o valor de uma opção de compra americana com vencimento imediatamente após o pagamento do primeiro dividendo é inferior ao valor de uma opção de compra americana com vencimento imediatamente anterior a data do pagamento do primeiro dividendo, o que equivale a uma opção de compra européia. Segundo Haug et al. (2003), como o modelo 1 considera a queda do preço do ativo após o pagamento de dividendos, a volatilidade calculada para o preço do ativo antes do pagamento do dividendo é muito pequena, gerando valores subestimados para opções de compra. Esse erro é ainda agravado com o aumento do intervalo de tempo até o instante em que há pagamento de dividendo.

Outro ponto fraco apontado pelos autores é o fato dos modelos permitirem que o ativo assuma preços negativos, o que se daria com o pagamento incondicional de dividendos.

Com vistas a eliminar ou pelo menos mitigar as deficiências dos modelos 1 e 2 citadas acima, Haug e Haug (1998) propuseram o primeiro método de ajuste da volatilidade. Hull (2000), apresenta em seu trabalho uma fórmula simples de ajuste para a volatilidade do modelo 1, de forma que o novo resultado para o modelo seja melhor. Beneder e Vorst (2002) também desenvolveram um ajuste de volatilidade aplicável ao modelo 1 e comparam seus resultados com aqueles gerados por Simulação de Monte Carlo para um exemplo com apenas o pagamento de dois dividendos. Bos and Vandermark (2002), desenvolveram um modelo que é uma combinação dos modelos 1 e 2. Nele, parte dos dividendos é incorporada no valor do ativo modificado e parte no valor do exercício modificado. Este ajuste no modelo leva em conta o momento em que o dividendo é pago. Entretanto, Bos et al (2003) mostram em seu trabalho que os resultados gerados pelo modelo de Bos and Vandermark são ruins, principalmente para opções "in-the-money" e "out-of-the-money" e sugerem um ajuste para a volatilidade do modelo 1 através de uma fórmula complexa. Dai (2009) afirma que o método de Bos et al (2003) não pode ser facilmente aplicado para opções americanas. Segundo Vellekoop e Nieuwenhuis (2006), os modelos desenvolvidos aplicando-se ajustes nos parâmetros de entrada para os modelos 1 e 2 geram resultados próximos aos gerados pelo modelo 3 apenas para casos em que se considera o pagamento de um único dividendo.

Assim como os modelos 1 e 2, o modelo 3 também pode ser resolvido através da construção de uma árvore binomial. Entretanto, conforme descrito anteriormente, no modelo 3, o preço do ativo base segue um MGB apenas nos intervalos entre pagamentos de dividendos, o que implica em só haver recombinância dos nós da árvore binomial nestes intervalos. Nos demais nós a árvore é não recombinante, o que gera enorme complexidade computacional, uma vez que se gera uma nova árvore a partir de cada nó. Esta complexidade se agrava com o aumento do número de dividendos pagos, o que pode ser explicitado através do exemplo descrito a seguir. Considere uma opção de compra americana com vencimento em doze meses de uma ação que pague dividendos fixos. A Tabela 1 apresenta os números de nós das árvores binomiais que representam o processo de difusão do valor de mercado do ativo quando se considera pagamento de dividendos a cada 2 meses e a cada mês, considerando discretização mensal em ambos os casos.

| **Instante de tempo (mês/ nó da árvore binomial)** | **Número de nós (Pagamento a cada 2 meses[3])** | **Número de nós (Pagamento a cada mês)** |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 4 | 4 |
| 3 | 6 | 8 |
| 4 | 12 | 16 |
| 5 | 14 | 32 |
| 6 | 28 | 64 |
| 7 | 30 | 128 |
| 8 | 60 | 256 |
| 9 | 62 | 512 |
| 10 | 128 | 1024 |
| 11 | 130 | 2048 |
| 12 | 260 | 4096 |

Tabela 1: Representação do número de nós de uma árvore binomial gerada pelo modelo 3 quando o ativo paga dividendos a cada dois meses e a cada mês.
Fonte: Própria

## 2.2. Novos modelos

### 2.2.1. Modelo de Haug et al.

Haug et al. (2003) apresentam um modelo analítico para cálculo do valor exato de opções de compra e de venda européias e de opções de compra americana. Conforme comentado anteriormente, os autores criticam outros modelos existentes quando os mesmo permitem que o ativo assuma valores negativos, em cenários que o dividendo (*D*) acordado supera o valor do ativo (*S*). Diante desta problemática, o trabalho dos autores define dois tipos de políticas de dividendos que podem ser consideradas. A política liquidadora define que quando $S<D$, é pago *S* como dividendo e o ativo assume valor nulo a partir de então. Já na política sobrevivente, quando $S<D$ o dividendo não é pago e o ativo mantém o seu valor. Para problemas com um único pagamento de dividendo e com uma política liquidadora de dividendos, o valor da opção de compra européia é calculado pela expressão da Equação (15).

[3] Considerando o primeiro pagamento em t=1.

$$C_E(S_0,0;D,t_D)=e^{-rt_D}\int_D^{\infty}C_E(S-D,t_D)\phi(S_0,S,t_D)dS \qquad (15)$$

Onde, $\Phi(S_0, S, t_D)$ é a densidade lognormal, $S$ é o valor de mercado de um fundo mútuo hipotético que só investe em uma ação ($S_0$ é o seu valor inicial), $D$ é o dividendo fixo, $t_D$ é o instante em que o dividendo é pago e $dS$ é o processo de Wiener. Para opções de compra americanas, a expressão é adaptada.

$$C_A(S_0,0;D,t_D)=e^{-rt_D}\int_0^{\infty}\max\{(S-X)^+,C_E(S-D(S),t_D)\}\phi(S_0,S,t_D)dS \qquad (16)$$

Ao aplicar a solução proposta a problemas de opções de compra com pagamento de múltiplos dividendos em que o preço *cum-dividend* do ativo segue um MGB e considerando-se uma política liquidadora de dividendos, torna-se necessária a solução de mais integrais. Na primeira iteração calcula-se $C_1(\cdot)$ através da expressão inicial.

$$C_1(S,X,t_{n-1},T)=e^{-r(t_n-t_{n-1})}\int_{D_n}^{\infty}C_{BSM}(S_1-D_n,X,t_n,T)\phi(S,S_1,t_n-t_{n-1})dS_1 \qquad (17)$$

Já na segunda iteração, aplica-se o resultado da primeira para encontrar $C_2(\cdot)$ e assim por diante.

$$C_2(S,X,t_{n-2},T)=e^{-r(t_n-t_{n-2})}\int_{D_{n-1}}^{\infty}C_1(S_1-D_{n-1},X,t_{n-1},T)\phi(S,S_1,t_{n-1}-t_{n-2})dS_1 \qquad (18)$$

Pode-se perceber que o aumento do número de dividendos a serem pagos aumenta o número de integrais a serem calculadas. Em virtude disso, os autores desenvolveram uma aproximação. Para um caso de dois dividendos, já seria necessária a resolução de duas integrais, entretanto é possível parametrizar $C_1(\cdot)$ com uma fórmula de BSM, tornando o processo bem mais rápido.

$$C_1(S,X,t_{n-1},T)\approx C_{BSM}(S,X_{adj},\sigma_{adj},t_{n-1},T) \qquad (19)$$

Utiliza-se o mesmo esquema nas iterações sucessivas. Depois de obtida a resposta, ela deve ser aproximada pela fórmula de parametrização do BSM, para a qual se deve escolher uma volatilidade ajustada e um preço de exercício ajustado apropriados, permitindo que se siga para a próxima iteração. A aproximação descrita diminui bastante o tempo computacional demandado para solucionar problemas com múltiplos dividendos, entretanto é válido apenas para opções de compra. Para problemas de opção de venda americana, o modelo se torna muito complexo para ser utilizado. Vale ressaltar que os autores afirmam que este modelo pode ser aplicado para casos de opções reais, porém nenhuma aplicação é apresentada.

### 2.2.2. Modelo de Vellekoop e Nieuwenhuis

Vellekoop e Nieuwenhuis (2006) desenvolveram uma abordagem que se baseia no modelo 3, mas que busca resolver o problema de não recombinância da árvore binomial, após o pagamento de dividendos. O método destes autores é baseado em interpolação e promete ser simples e rápido de implementar. Outra vantagem declarada pelos autores é de que a abordagem pode ser utilizada para cálculo de opções européias e americanas. O método também não permite que o valor do ativo base assuma valores negativos, seguindo a premissa de pagamento condicional utilizada no trabalho de Haug et al. (2003). No trabalho destes autores, os resultados obtidos com o método são comparados com os resultados gerados pelos métodos formulados por outros autores. Para uma opção de compra européia, a comparação foi feita com os modelos de Haug et al. (2003), Bos et al. (2003), Bos e Vandermark (2002) e por Beneder e Vorst (2002), para uma opção de compra européia. Apenas o modelo de Haug et al. supera a performance do modelo de Vellekoop e Nieuwenhuis quando utilizado com apenas 250 passos. Para uma opção de compra americana, a comparação é feita com o método de simulação de Monte Carlo de Longstaff e Schwartz (2001). Resultados muito próximos ao da simulação são obtidos com 1.000 passos. Vale ressaltar que todas as comparações foram feitas considerando-se o pagamento de apenas um dividendo. Entretanto, os autores afirmam que o modelo pode ser aplicado a problemas com múltiplos dividendos. Também é provada a convergência do resultado gerado pelo método.

### 2.2.3. Modelo de Nardon e Pianca

Nardon e Pianca (2008) propõem um método baseado na idéia de interpolação de Vellekoop e Nieuwenhuis (2006) que proporciona a recombinância da árvore binomial. O método pode ser usado para apreçamento de opções de compra e de venda européia e americana. No caso das opções americanas, é gerada uma árvore que desconsidera o pagamento de dividendo e calculado o valor do prêmio da opção *backwards* até a data ex-dividendo. Nesta data, o valor da opção de espera é dado por uma fórmula de interpolação linear. Apesar de ter sido testado para um exemplo com apenas um único dividendo, os autores indicam que tal metodologia pode ser aplicado para casos com múltiplos dividendos.

### 2.2.4. Modelo de Daí

Dai (2009) também desenvolveu uma abordagem que busca solucionar o problema do aumento exponencial do número de nós da árvore binomial com o pagamento de dividendos. Para os nós em que há pagamento de dividendos, árvores trinomiais são construídas para conectar as estruturas de duas árvores recombinantes. A árvore criada é denominada pelo autor de "Stair Tree" e pode ser utilizada para valorar opções européias e americanas. Entretanto, apesar do modelo se mostrar eficiente para problemas com pagamento de um ou dois dividendos, ao se considerar um número maior de pagamentos, o número de nós aumenta bastante, tornando a sua aplicação mais complexa, assim como com a árvore não recombinante.

Vale ressaltar que os modelos apresentados neste tópico são mais recentes, precisando ainda serem avaliados e criticados por outros especialistas da área para que sejam validados.