Referências Bibliográficas

[1] AMBROSETTI, A.; PRODI, G.. **On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces**. Ann. Math. Pura Appli., 93:231–247, 1972.

[2] BERGER, M.. **Nonlinearity and Functional Analysis**. American Mathematical Society, 1977.

[3] BERGER, M. S.; PODOLAK, E.. **On the Solutions of a Nonlinear Dirichlet Problem**. Ann. Math. Pura Appli., 24:837–846, 1974.

[4] DOLPH, C.. **Nonlinear integral equations of the Hammerstein type**. Trans. Amer. Math. Soc., 66:289–307, 1949.

[5] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S.. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Springer, 2001.

[6] HAMMERSTEIN, A.. **Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen**. Acta Math., 54:117–176, 1929.

[7] MANES, A.; MICHELETTI, A.. **Un estensione della teoria variazionale classica degli auto-valori per operatori ellittici del secundo ordine**. Boll. Un. Mat. Ital., 7:285–381, 1973.

[8] NETO, J. T. C.. **Numerical Analysis of Ambrosetti-Prodi type Operators**. Tese de Doutorado, PUC-Rio, 2010.

[9] REED, M.; SIMON, B.. **Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators**. Academic Press, 1978.

A
Lemas

Lema A.0.6 *Se W é um espaço de Hilbert com a norma $\|w\|^2 = \langle w, w\rangle$ que admite base enumerável e $A : W \to W$ é um operador compacto, simétrico $\sigma(A) := \{\alpha_i\}_{i\in L}$, então $\|Aw\| \leq \sup_i |\alpha_i|\ \|w\|$.*

Prova: O Teorema Espectral garante a existência de uma base enumerável, ortonormal de autofunções; seja ela composta pelas autofunções φ_i associadas aos autovalores α_i. Se $w = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_1 \in W$,

$$
\begin{aligned}
\|w\|^2 = \|\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i\|^2 = & \ \|\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\|^2 \\
& = \lim_{n\to\infty}\|\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i^2
\end{aligned}
$$

Pela compacidade de A, $\sup_i |\alpha_i| < \infty$. Argumentando de forma análoga à acima, $\|Aw\| \leq \sup_i |\alpha_i| \|w\|$. ■

Lema A.0.7 *A função Φ abaixo definida é um homeomorfismo bi-Lipschitz:*

$$\Phi : W_Y \oplus V_Y \to W_X \oplus V_Y \ , \quad w + v \mapsto {F_v}^{-1}(w) + v.$$

Além disso, $F \circ \Phi(w + v) = w + \phi(w, v)$.

Prova: Observe que para $v = t\varphi_1$,

$$
\begin{aligned}
F \circ \Phi(w + v) &= P_Y F({F_v}^{-1}(w) + v) + Q_Y F({F_v}^{-1}(w) + v) \\
&= F_v({F_v}^{-1}(w)) + Q_Y F({F_v}^{-1}(w) + v) \\
&= w + \phi(w, t).
\end{aligned}
$$

Afirmamos que Φ é inversível. Com efeito, seja $u + v \in W_X \oplus V_X$. Basta tomar $F_v(u) + v \in W_Y \oplus V_Y$ e está claro que Φ é sobrejetora. Quanto à injetividade, tome $w + v \neq \tilde{w} + \tilde{v}$. Se $v \neq \tilde{v}$, está provado, senão, $w \neq \tilde{w}$

com $\tilde{v} = v$, donde a bijetividade de F_v garante o resultado. Assim, definimos a função $\Phi^{-1}(u + v) = F_v(u) + v$.

Observe que Φ^{-1} é Lipschitz. Com efeito,

$$\begin{aligned}
&\|\Phi^{-1}(u+v) - \Phi^{-1}(\overline{u}+\tilde{v})\|_0 \\
\leq&\|F_v(u) + v - F_{\tilde{v}}(\overline{u}) - \tilde{v}\|_0 \\
\leq&\|v - \tilde{v}\|_0 + \|F_v(u) - F_{\tilde{v}}(\overline{u})\|_0 \\
\leq&\|v - \tilde{v}\|_0 + \| - \Delta u - P_Y f(u+v) + \Delta\overline{u} + P_Y f(\overline{u}+\tilde{v})\|_0 \\
\leq&\|v - \tilde{v}\|_0 + \| - \Delta(u - \overline{u})\|_0 + \|P_Y[f(u+v) - f(\overline{u}+\tilde{v})]\|_0 \\
\leq&\|v - \tilde{v}\|_2 + \|u - \overline{u}\|_2 + \|f(u+v) - f(\overline{u}+\tilde{v})\|_0 \\
\leq&\|u + v - (\overline{u}+\tilde{v})\|_2 + M\|u + v - (\overline{u}+\tilde{v})\|_2 \\
\leq&(M+1)\|u + v - \overline{u} - \tilde{v}\|_2.
\end{aligned}$$

Verificaremos que Φ é Lipschitz. Fixe $w \in W_Y$. Defina a função

$$w : \mathbb{R} \to W_X \ , \quad t \mapsto {F_{t\varphi_1}}^{-1}(w)$$

observe que $\Phi(w + t\varphi_1) = w(t) + v$.

Afirmamos que a propriedade decorre de w ser uma função Lipschitz. Com efeito,

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(w + t\varphi_1) - \Phi(\tilde{w} + \tilde{t}\varphi_1)\|_0 \\
=&\|w(t) + t\varphi_1 - \tilde{w}(\tilde{t}) + \tilde{t}\varphi_1\|_0 \\
\leq&\|w(t) - \tilde{w}(\tilde{t})\|_0 + \|t\varphi_1 + \tilde{t}\varphi_1\|_0 \\
\leq&\|w(t) - w(\tilde{t})\|_0 + \|w(\tilde{t}) - \tilde{w}(\tilde{t})\|_0 + \|t\varphi_1 + \tilde{t}\varphi_1\|_0.
\end{aligned}$$

A segunda componente é Lipschitz, pois $F_{\tilde{t}\varphi_1} : W_X \to W_Y$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz, conforme o teorema 1.0.1. A terceira componente é claramente Lipschitz. Assim, se a função w é Lipschitz,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(w + t\varphi_1) - \Phi(\tilde{w} + \tilde{t}\varphi_1)\|_0 &\leq C_1|t - \tilde{t}| + C_2\|w - \tilde{w}\|_0 + \|t\varphi_1 - \tilde{t}\varphi_1\|_0 \\
&= (C_1 + 1)\|t\varphi_1 - \tilde{t}\varphi_1\|_0 + C_2\|w - \tilde{w}\|_0 \\
&= \max\{C_1 + 1, C_2\}\ \|w + t\varphi_1 - (\tilde{w} + \tilde{t}\varphi_1)\|_0 \\
&\leq d\ \max\{C_1 + 1, C_2\}\ \|w + t\varphi_1 - (\tilde{w} + \tilde{t}\varphi_1)\|_2.
\end{aligned}$$

Demonstrar que a função w é Lipschitz é uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Bannach. Pela demonstração do teorema 1.0.1, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$K_s(w) : W_Y \to W_Y \ , \quad w \to P_Y \tilde{f}(T^{-1}w + s\varphi_1)$$

é contração cuja constante de contração independe de s. Como consequência, $w + K_t$ e $w + K_{\tilde{t}}$ são contrações e, portanto, admitem ponto fixo. Sejam z e $\tilde{z}$ os respectivos. Segue que

$$\begin{aligned}
\|z - \tilde{z}\|_0 &= \|(w + K_t)(z) - (w + K_{\tilde{t}})(\tilde{z})\|_0 \\
&\leq \|K_t(z) - K_{\tilde{t}}(\tilde{z})\|_0 \\
&\leq \|K_t(z) - K_t(\tilde{z})\|_0 + \|K_t(\tilde{z}) - K_{\tilde{t}}(\tilde{z})\|_0 \\
&\leq c\|z - \tilde{z}\|_0 + \|P_Y[\tilde{f}(T^{-1}\tilde{z} - t\varphi_1) - \tilde{f}(T^{-1}\tilde{z} + \tilde{t}\varphi_1)]\|_0 \\
&\leq c\|z - \tilde{z}\|_0 + \|\tilde{f}(T^{-1}\tilde{z} - t\varphi_1) - \tilde{f}(T^{-1}\tilde{z} + \tilde{t}\varphi_1)\|_0 \\
&\leq c\|z - \tilde{z}\|_0 + M\|t\varphi_1 - \tilde{t}\varphi_1\|_0,
\end{aligned}$$

donde, $c < 1$ e a independência de c em relação a de t implicam que

$$\|z - \tilde{z}\|_0 \leq \frac{M}{1-c}\|t\varphi_1 - \tilde{t}\varphi_1\|_0 = \frac{M}{1-c}|t - \tilde{t}|.$$

Agora, $z = (w + K_t)(z) = w + K_t(z)$ implica que

$$w = z - K_t(z) = (I - K_t)(z),$$

donde

$$z = (I - K_t)^{-1}(w) = (F_{t\varphi_1} \circ T^{-1})^{-1}(w) = T{F_{t\varphi_1}}^{-1}(w) = Tw(t),$$

e $T^{-1}z = w(t)$. Analogamente, $T^{-1}\tilde{z} = w(\tilde{t})$. Finalmente,

$$\|w(t) - w(\tilde{t})\|_2 = \|T^{-1}(z - \tilde{z})\|_2 \leq d\|z - \tilde{z}\|_0 \leq d\frac{M}{1-c}|t - \tilde{t}|$$

Lema A.0.8 *Seja f Lipschitz com f' crescente. As hipóteses,*

$$\lim_{t\to-\infty} f'(t) = a < b = \lim_{t\to\infty} f'(t)$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = a < b = \lim_{t\to-\infty} \frac{f(t)}{t}$$

são equivalentes.

Prova: Suponha $\lim\limits_{t\to-\infty} f'(t) = a < b = \lim\limits_{t\to\infty} f'(t)$. Mostraremos que, se $t \to \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{t} = b$.

Fixe $\epsilon > 0$. Existe t_0 tal que, para $t \geq t_0$, $|f'(t) - b| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Tome $N \geq t_0$ tal que, para $t \geq N$, $\dfrac{|f'(t_0) - t_0 b|}{t} < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Agora, para $t \geq N$, temos:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(t)}{t} - b\right| &= \left|\frac{f(t) - tb}{t}\right| = \frac{1}{|t|}|f(t) - tb| \\
&= \frac{1}{|t|}\left|f(t_0) - t_0 b + \int_{t_0}^{t} f'(x) - b \; dx\right| \\
&= \frac{|f'(t_0) - t_0 b|}{|t|} + \frac{\int_{t_0}^{t} |f'(x) - b| dx}{|t|} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\left(1 - \frac{t_0}{|t|}\right) < \epsilon.
\end{aligned}$$

O caso $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{f(t)}{t} = a$ é análogo.

Para verificar a outra implicação basta demonstrar que $\lim\limits_{t\to-\infty} f'(t) = a$ e que $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = b$, pois f' é crescente. Verificaremos apenas que $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = b$, uma vez que o demais é análogo. A demonstração é por absurdo. De duas uma: não existe $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t)$ ou $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) \neq b$. Se tal limite não existe, como f' é crescente, f' é ilimitada. Logo, existe t_0 tal que, para $t > t_0$, $f'(t) \geq f'(t_0) > b$. Segue que

$$\begin{aligned}
\frac{f(t)}{t} &= \int_{t_0}^{t} \frac{f'(x)}{t} \; dx + \frac{f(t_0)}{t} \\
&\geq \int_{t_0}^{t} \frac{f'(t_0)}{t} \; dx + \frac{f(t_0)}{t} \\
&\geq \frac{f'(t_0)(t - t_0)}{t} + \frac{f(t_0)}{t}.
\end{aligned}$$

Assim, $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{t} \geq f'(t_0) > b$.

Se $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) \neq b$, procedimento análogo ao acima proporciona um absurdo, pois existe t_0 tal que, para $t > t_0$, temos $f'(t) \geq f'(t_0) > b$ ou, para todo t, $f'(t) < b - \epsilon < b$. ∎

Lema A.0.9 *Seja $(\mu, \mathfrak{X})$ um espaço de medida. Considere $\Omega \in \mathfrak{X}$, $\mu(\Omega) < \infty$. Seja (f_n), $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $f_n \to f, q.t.p.$ com $f \in L^p(\Omega)$. Considere $(g_n), h \in L^p(\Omega)$ tais que $\|g_n - h\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ e $|f_n| \leq |g_n|$. Então $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$.*

Prova: Fixe $\epsilon > 0$.

Como $f \in L^p(\Omega)$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que, se $E \subset \Omega$ com $\mu(E) < \delta(\epsilon)$, então $\|f\|_{L^p(E)} < \epsilon$.

Pelo Teorema de Convergência de Vitali, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que, se $E \subset \Omega$ com $\mu(E) < \delta(\epsilon)$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|g_n\|_{L^p(E)} < \epsilon$.

Assim, existe δ tal que, para todo $E \subset \Omega$, se $\mu(E) < \delta$, então

$$\|g_n\|_{L^p(E)} + \|f\|_{L^p(E)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $(g_n) \in L^p(\Omega)$ e $|f_n| \leq |g_n|$, então $(f_n) \in L^p(\Omega)$. Assim, $\mu(\Omega) < \infty$ e $f_n \to f$ *q.t.p.* implicam, pelo Teorema de Egoroff, que $f_n \to f$ quase uniformemente.

Desse modo, seja $A \subset \Omega$ tal que $\mu(\Omega - A) < \delta$ com $f_n \to f$ uniformemente em A. Assim, para o ϵ já fixado, existe N tal que, para todo $n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{2\mu(A)}$ para todo $x \in A$. Seja $E = \Omega - A$.

Para $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} &= \|f_n - f\|_{L^p(E)} + \|f_n - f\|_{L^p(A)} \\
&< \|f_n\|_{L^p(E)} + \|f\|_{L^p(E)} + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \|g_n\|_{L^p(E)} + \|f\|_{L^p(E)} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon
\end{aligned}$$

■