3
Não Linearidades Regulares

Nesse capítulo acrescentamos hipóteses de regularidade sobre a não linearidade f e analisamos a função

$$F : X \to Y \ , \quad u \mapsto -\Delta u - f(u).$$

O primeiro resultado demonstrado é que, se $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $\overline{f'(\mathbb{R})} = [a, b]$, então F é de classe C^1. Se, como no caso Dolph-Hammerstein, $[a, b] \cap \sigma(-\Delta) = \emptyset$, provamos que F é um difeomorfismo C^1.

Por último, demonstramos o Teorema de Ambrosetti e Prodi com o uso de iterações de Banach. Os resultados obtidos no capítulo anterior sobre as funções F_v, Φ e h são fundamentais para as nossas intenções.

Nesse capítulo, introduzimos a notação $\|.\|_{k,p}$ para tratar da norma de $W^{k,p}(\Omega)$. Se $p = 2$, usamos $\|.\|_k$.

3.1
Regularidade de F

Proposição 3.1.1 *Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ com $|f'| \leq M$. Então F é uma função de classe C^1 e $DF(u)h = -\Delta h - f'(u)h$.*

Prova: Pela linearidade de $-\Delta : X \to Y$, restringimo-nos a demonstrar que $f : X \to Y$ definida por $u \mapsto f(u)$ é de classe C^1. Como $X \subset H_0^1(\Omega)$ e, para todo $u \in X$, $\|u\|_1 \leq d\|u\|_2$, basta demonstrar que $f : H_0^1(\Omega) \to Y$ é de classe C^1. Por simplicidade, denotamos $H_0^1(\Omega)$ por H.

Como f' é limitada, f é Lipschitz. Assim, para $u, \overline{u} \in H$, e todo $x \in \Omega$,

$$|f(u(x)) - f(\overline{u}(x))| \leq M|u(x) - \overline{u}(x)|.$$

Assim,

$$\|f(u) - f(\overline{u})\|_0{}^2 = \int_\Omega |f(u) - f(\overline{u})|^2 \leq M^2 \int_\Omega |u - \overline{u}|^2 \leq M^2\|u - \overline{u}\|_0{}^2.$$

Quanto à diferenciabilidade, demonstraremos que, se $u, h \in H$, então

$$\lim_{t\to\infty} \|\frac{f(u+th)-f(u)}{t} - f'(u)h\|_0 = 0.$$

Observamos que, para todo $h \in H$, $f'(u)h \in Y$, uma vez que f' é limitada e $h \in Y$. Seja $(t_n) \in \mathbb{R}$, $t_n \neq 0$, $t_n \to 0$. Fixe $u, h \in H$. Defina

$$f_n(x) := \frac{f(u(x)+t_n h(x)) - f(u(x))}{t_n}.$$

Como $f \in C^1(\mathbb{R})$, para todo $x \in \Omega$ $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f'(u(x))h(x)| = 0$. Além disso, para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \Omega$, como f é Lipschitz, $|f_n(x)| \leq M|h(x)|$. Finalmente, o Teorema da Convergência Dominada permite-nos obter o resultado desejado, uma vez que (t_n) é arbitrária.

Para concluir que f é diferenciável resta ver que, para todo $u \in H$, o operador

$$f'(u) : H \to Y \ , \quad h \mapsto f'(u)h$$

pertence a $L(H, Y)$. O operador está bem definido, pois $|f'(u)h| \leq M|h|$. A desigualdade anterior implica na limitação: $\|f'(u)h\|_0 \leq M\|h\|_0 \leq M\bar{d}\|h\|_1$. Assim, f é diferenciável no sentido de Fréchet.

Verificamos a continuidade de Df definida abaixo:

$$Df : H \to L(H^1, Y) \ , \quad u \mapsto f'(u).$$

Para isso, demonstramos que, para toda $(u_n) \in H$ tal que $u_n \to u$, existe uma subsequência (u_k) tal que $Df(u_k) \to Df(u)$. Tome $u_n \to u$. Existe uma subsequência (u_k) que converge *q.t.p.* a u. Defina $g_k := f'(u_k) - f'(u)$. Segue que,

$$\begin{aligned}\|Df(u_k) - Df(u)\| &:= \sup\{\|[Df(u_k) - Df(u)]h\|_0 : \|h\|_1 = 1\} \\ &= \sup\{\|g_k h\|_0 : \|h\|_1 = 1\},\end{aligned}$$

donde basta mostrar que $\sup\{\|g_k h\|_0 : \|h\|_1 = 1\} \to 0$, quando $k \to \infty$.

Se h for essencialmente limitada,

$$\|g_k h\|_0 \leq \|g_k\|_0 \ \|h\|_\infty. \tag{3-1}$$

Um corolário da desigualdade de Hölder para $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ nos dá:

$$\|g_k h\|_0 \leq \|g_k\|_{0,2r} \|h\|_{0,2s}. \tag{3-2}$$

Observamos que é suficiente obter uma cota superior para $\|h\|_{0,2s}, \|h\|_\infty$

dependendo de $\|h\|_1$. Com efeito, $u_k \to u \ \ q.t.p.$, donde $g_k \to 0 \ q.t.p.$, uma vez que f' é contínua. Como f' é limitada, para todo k, $|g_k(x)| \leq 2M$ com $2M \in L^r(\Omega)$ para todo $r \geq 1$, uma vez que Ω é limitado, . Finalmente, pelo Teorema da Convergência Dominada, $\|g_k\|_{0,2r} \to 0$ para todo $r \geq 1$.

Analisamos três casos: $n = 1$, $n = 2$ e $n \geq 3$, lembrando que Ω é um aberto, limitado, conexo de $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^1 por partes.

Se $n = 1$, usamos a desigualdade de Morrey: para $n < p \leq \infty$, $\gamma = 1 - n/p$ e $h \in W^{1,p}(\Omega)$, ,após redefinir h em um conjunto de medida nula,

$$\|h\|_{C^{0,\gamma}(\Omega)} \leq C(p, \Omega)\|h\|_{1,p}.$$

Como, para $h \in H$ temos que $n = 1 < 2 = p$, a desigualdade de Morrey garante que h é essencialmente limitada, pois

$$\|h\|_\infty \leq C\|h\|_1,$$

donde a desigualdade (3-1) garante o resultado.

Quanto aos demais casos, usamos a desigualdade (3-2) e a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev: se $1/p^* = 1/p - 1/n$, então

$$\|h\|_{0,p^*} \leq C(p, \Omega)\|h\|_{1,p}.$$

Para $n = 2$, tome $2s = p^* = 4$, $r = 2$, donde $p = 4/3 < 2$. Assim,

$$\|h\|_{0,2s} = \|h\|_{0,p^*} \leq C\|h\|_{1,p^*} \leq \overline{C}\|h\|_1.$$

Para $n \geq 3$, tome $2s = p^* = \dfrac{2n}{n-2} > 2$, $r = n/2$, donde $p = 2$. Temos

$$\|h\|_{0,2s} = \|h\|_{0,p^*} \leq C\|h\|_1.$$

Por fim, tomando o $\sup\{\|h\|_1 = 1\}$ para a desigualdade em que Ω se enquadra, obtemos a continuidade de Df. ■

Em particular, nas condições do teorema de Dolph-Hammerstein, se $f \in C^1$ então F é um difeomorfismo C^1, já que é um homeomorfismo com derivadas inversíveis em cada ponto do domínio. A invertibilidade é uma conta familiar. Seja $\gamma = (a + b)/2$. Se $u, h \in X$, então

$$\begin{aligned} DF(u)h &= -\Delta h - f'(u)h \\ &= (-\Delta - \gamma)h - (f'(u)h - \gamma h) \\ &= Th - (f'(u) - \gamma)h. \end{aligned}$$

A composição

$$Y \xrightarrow{T^{-1}} X \xrightarrow{DF(u)} Y \ , \quad w \mapsto w - (f'(u) - \gamma)T^{-1}w$$

está bem definida, pois $\gamma \notin \sigma(-\Delta)$ e é linear da forma $I - K$. Conforme já fizemos, basta provar que $Kw = (f'(u) - \gamma)T^{-1}w$ é contração. Como $\max\{f'(x) - \gamma\} = b - \gamma$ e $\|T^{-1}w\|_0 \leq (\lambda_2 - \gamma)^{-1}\|w\|_0$, temos

$$\|(f'(u) - \gamma)T^{-1}w\|_0 \leq (b - \gamma)\|T^{-1}w\|_0 \leq \frac{b - \gamma}{\lambda_2 - \gamma}\|w\|_0 = c\|w\|_0.$$

Finalmente, $\gamma < b < \lambda_2$ implica que $c < 1$. Concluímos que K é contração e $DF(u)$ é inversível para todo $u \in X$.

3.2
O Teorema de Ambrosetti-Prodi

Agora, mostramos o teorema de Ambrosetti-Prodi com propriedades de regularidade um pouco mais fortes do que necessário, usando contrações de Banach.

Teorema 3.2.1 (Ambrosetti-Prodi; Berger-Podolak) *Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$, tal que $\overline{f'(\mathbb{R})} = [a, b]$, $0 < f'' \leq M$, $a < \lambda_1 < b < \lambda_2$. Considere a equação* (1-1)*, com $g = w + t\varphi_1 \in W_Y \oplus V_Y$. Existe $t_c \in \mathbb{R}$, tal que* (1-1) *tem apenas uma solução se $t = t_c$, exatamente duas soluções se $t < t_c$ e nenhuma solução se $t > t_c$.*

Prova: Pelo lema A.0.8, f é tal que

$$\lim_{t \to -\infty} f'(t) = a \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq b = \lim_{t \to \infty} f'(t),$$

Assim, as funções $F_v : W_X \to W_Y$, $u \to P_Y F(u+v)$ ainda são homeomorfismos bi-Lipschitz cujas constantes Lipschitz independem de v. Consequentemente, a troca de variáveis Φ também é um homeomorfismo bi-Lipschitz. Além disso, a função $h(t) := \langle \varphi_1, F \circ \Phi(w, t\varphi_1) \rangle = \langle \varphi_1, F(u(t)) \rangle$ ainda admite a propriedade assintótica demonstrada na proposição 2.3.1.

Demonstramos, no teorema 1.0.1 que, para todo $v \in V_X$, F_v é um homeomorfismo. Certamente F_v é C^1 — vamos ver que $DF_v(u)$ é inversível para todo $u \in X$.

Começamos fixando $v \in \langle \varphi_1 \rangle$. Como $F_v(u) = P_Y F(u + v)$ é composição de funções C^1, F_v também é C^1. Além disso, para $\gamma = (a + b)/2$ e para

$Th = -\Delta h - \gamma h$,

$$\begin{aligned} DF_v(u)h &= DP_Y F(u+v)h \\ &= P_Y DF(u+v)h \\ &= P_Y[-\Delta h - f'(u+v)h] \\ &= P_Y[(-\Delta - \gamma)h - (f'(u+v) - \gamma)h] \\ &= (-\Delta - \gamma)h - P_Y[(f'(u+v) - \gamma)h] \\ &= Th - P_Y[(f'(u+v) - \gamma)h], \end{aligned}$$

que é linear e limitado com relação a $h \in W_X$.

Agora, tome $u \in W_X$. A composição

$$W_Y \xrightarrow{T^{-1}} W_X \xrightarrow{DF_v(u)} W_Y \ , \quad w \mapsto w - P_Y[(f'(u+v) - \gamma)T^{-1}w].$$

está bem definida, pois $\gamma < \lambda_2 = \min\{\sigma(-\Delta_{|W_X})\}$, e é da forma $I - K$ com K linear. Novamente, se demonstrarmos que $Kw = P_Y[\tilde{f}'(u+v)T^{-1}w]$ é uma contração, $DF_v(u)$ será inversível, uma vez que T^{-1} é bijeção.

Pela estimativa abaixo,

$$\begin{aligned} \|P_Y[(f'(u+v) - \gamma)T^{-1}w]\|_0 &\leq \|(f'(u+v) - \gamma)T^{-1}w\|_0 \\ &\leq (b - \gamma)\|T^{-1}w\|_0 \\ &\leq \frac{b - \gamma}{\lambda_2 - \gamma}\|w\|_0 = c\|w\|_0, \end{aligned}$$

como $c < 1$, K é contração, donde, para todo $u \in X$, $DF_v(u)$ é bijetor. Finalmente, uma aplicação do teorema da função inversa garante que F_v é um difeomorfismo C^1.

Assim, não é difícil ver também que a função

$$\Phi : W_Y \oplus V_Y \to W_X \oplus V_X \ , \quad w + v \mapsto {F_v}^{-1}(w) + v$$

é um difeomorfismo C^1.

Vamos provar que cada função altura $h(t) = \langle \varphi_1, F(u(t)) \rangle$ admite um único ponto crítico, o que demonstra o teorema. Para isso, provamos que h é $C^2(\mathbb{R})$ e que, se $h'(t_c) = 0$, então $h''(t_c) > 0$.

Como $F \circ \Phi$ é C^1, a parametrização da fibra $u(t) = w(t) + t\varphi_1$ é C^1. Além disso, F é de classe C^1, donde $h \in C^1(\mathbb{R})$.

Afirmamos que $h'(t) = \lambda_1 - \int_\Omega f'(u(t))u'(t)\varphi_1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} h'(t) &= \langle \varphi_1, -\Delta w'(t) - \Delta\varphi_1 - f'(u(t))u'(t)\rangle \\ &= \lambda_1 + \langle \varphi_1, -f'(u(t))u'(t)\rangle \\ &= \lambda_1 - \int_\Omega f'(u(t))u'(t)\varphi_1. \end{aligned}$$

Afirmamos ainda que, dados $t, t_0 \in \mathbb{R}$,

$$h'(t) - h'(t_0) = -\int_\Omega [f'(u(t)) - f'(u(t_0))]u'(t)u'(t_0).$$

Sabemos que

$$F(u(t)) = w + h(t)\varphi_1$$

donde, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial F \circ u}{\partial t}(t) = -\Delta u'(t) - f'(u(t))u'(t) = h'(t)\varphi_1.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} h'(t)\varphi_1 &= -\Delta w'(t) - \Delta\varphi_1 - f'(u(t))u'(t) \\ &\implies -\Delta w'(t) = h'(t)\varphi_1 + \Delta\varphi_1 + f'(u(t))u'(t) \\ &\implies \langle -\Delta w'(t), w'(t_0)\rangle = \langle f'(u(t))u'(t), w'(t_0)\rangle \end{aligned}$$

Alternando t, t_0, obtemos $\langle -\Delta w'(t_0), w'(t)\rangle = \langle f'(u(t_0))u'(t_0), w'(t)\rangle$. Pela simetria de $-\Delta$, $\langle -\Delta w'(t), w'(t_0)\rangle = \langle -\Delta w'(t_0), w'(t)\rangle$, donde

$$\langle f'(u(t))u'(t), w'(t_0)\rangle = \langle f'(u(t_0))u'(t_0), w'(t)\rangle.$$

Pela igualdade acima

$$\begin{aligned} h'(t) - h'(t_0) &= \lambda_1 - \langle f'(u(t))u'(t), \varphi_1\rangle - \lambda_1 + \langle f'(u(t_0))u'(t_0), \varphi_1\rangle \\ &= -\langle f'(u(t))u'(t), w'(t_c)\rangle - \langle f'(u(t))u'(t), \varphi_1\rangle \\ &\quad + \langle f'(u(t_0))u'(t_0), w'(t)\rangle + \langle f'(u(t_0))u'(t_0), \varphi_1\rangle \\ &= -\langle f'(u(t))u'(t), u'(t_0)\rangle + \langle f'(u(t_0))u'(t_0), u'(t)\rangle \\ &= -\int_\Omega [f'(u(t)) - f'(u(t_0))]u'(t)u'(t_0). \end{aligned}$$

Fixe $t_0 \in \mathbb{R}$. Provamos que

$$\lim_{t \to t_0} \frac{h'(t) - h'(t_0)}{t - t_0} = -\int_\Omega f''(u(t_0))u'(t_0)^3. \tag{3-3}$$

Basta verificar que, para toda sequência $(t_n) \in \mathbb{R}$, $t_n \neq t_0$, $t_n \to t_0$, existe uma subsequência (t_k) tal que

$$\lim_{t_k \to t_0} \frac{h'(t_k) - h'(t_0)}{t_k - t_0} = -\int_\Omega f''(u(t_0))u'(t_0)^3.$$

Por hipótese, $f' \in C^1(\mathbb{R})$ com $0 < f'' \leq M$. Quando vista como função de X para Y, pela proposição 3.1.1, f' é de classe C^1. Considere a composição

$$\mathbb{R} \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f'} Y \ , \quad t \mapsto f'(u(t)).$$

Vimos que u é de classe C^1. Assim, $f' \circ u \in C^1(\mathbb{R}, Y)$. Pela regra da cadeia

$$(f' \circ u)'(t_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(u(t_n)) - f'(u(t_0))}{t_n - t_0} = f''(u(t_0))u'(t_0).$$

Assim, existe uma subsequência (t_m) tal que a convergência acima vale *q.t.p.*.

Para tal (t_m), como u é C^1 $u'(t_m) \to u'(t_0)$ na norma de X. Assim, $(u(t_m))_m$ admite uma subsequência $(u(t_k))_k$ tal que $u'(t_k) \to u'(t_0)$ *q.t.p.*. Pela escolha de (t_k),

$$f_k := \frac{f'(u(t_k)) - f'(u(t_0))}{t_k - t_0} u'(t_k)u'(t_0) \to f''(u(t_0))u'(t_0)^3 \ q.t.p.$$

Além disso, como $0 < f'' \leq M$, então f' é Lipschitz, donde

$$|f_k| \leq M \left| \frac{u(t_k) - u(t_0)}{t_k - t_0} u'(t_k)u'(t_0) \right| =: g_k.$$

Verificamos que $\|g_k - Mu'(t_0)^3\|_{0,1} \to 0$, o que, por uma aplicação do lema A.0.9, nos dá a igualdade (3-3).

Pela afirmação 3.2.2, $u'(t_0)$ é essencialmente limitada, donde $Mu'(t_0)^3 \in L^1(\Omega)$. Defina

$$u_k := \frac{u(t_k) - u(t_0)}{t_k - t_0}.$$

Relembramos três fatos antes de iniciarmos a estimativa:

1. A função $u : \mathbb{R} \to X$ é C^1, donde $u_k \to u'(t_0)$ na norma de X e, consequentemente, na norma de Y.

2. Da continuidade de u' segue que $\|u'(t_k) - u'(t_0)\|_0 \to 0$. Como Ω tem medida finita $\|u'(t_k) - u'(t_0)\|_{0,1} \to 0$.

3. Vimos que $w(t)$ é Lipschitz, donde $\|w'(t_n)\|_2 \leq C$ e $\|w'(t_n)\|_0 \leq C_0$. Uma vez que $u'(t_n) = w'(t_n) + \varphi_1$, temos $\|u'(t_n)\|_0 \leq C_0 + 1 = \overline{C}$.

Fixe $\epsilon > 0$. Seja $s = \|u'(t_0)\|_\infty$. Tome N tal que, se $k \geq N$, então

$$\begin{aligned} \|u'(t_k) - u'(t_0)\|_{0,1} &< \frac{\epsilon}{2Ms^2} \\ \|u_k - u'(t_0)\|_0 &< \frac{\epsilon}{2Ms\overline{C}}. \end{aligned}$$

Para $k \geq N$,

$$\begin{aligned} &\|g_k - Mu'(t_0)^3\|_{0,1} \\ &\leq M\|u_k u'(t_k)u'(t_0) - u'(t_0)^3\|_{0,1} \\ &\leq Ms\|u_k u'(t_k) - u'(t_0)^2\|_{0,1} \\ &\leq Ms(\|u_k u'(t_k) - u'(t_k)u'(t_0)\|_{0,1} + \|u'(t_k)u'(t_0) - u'(t_0)^2\|_{0,1}) \\ &\leq Ms\|u'(t_k)[u_k - u'(t_0)]\ \|_{0,1} + Ms^2\|u'(t_k) - u'(t_0)\|_{0,1} \\ &\leq Ms\|u'(t_k)\|_0\ \|u_k - u'(t_0)\|_0 + \epsilon/2 \\ &\leq Ms\overline{C}\|u_k - u'(t_0)\|_0 + \epsilon/2 < \epsilon. \end{aligned}$$

Afirmação 3.2.2 *As funções $u'(t)$ são essencialmente limitadas. Além disso, se $h'(t_c) = 0$, então $u'(t_c)$ é positiva.*

Prova: Começamos recordando que

$$\frac{\partial F \circ u}{\partial t}(t) = -\Delta u'(t) - f'(u(t))u'(t) = h'(t)\varphi_1.$$

Como $f'(u(t)) \in L^\infty(\Omega)$ e $h'(t)\varphi_1 \in C^\infty(\Omega)$, então $u'(t) \in L^\infty(\Omega)$ (5, Teorema 8.15).

Agora, suponha que $h'(t_c) = 0$ — isto é possível, pela propriedade assintótica e pela diferenciabilidade de h. Mostraremos que $u'(t_c)$ é a autofunção associada ao menor autovalor do seguinte operador elíptico:

$$DF(u(t_c)) : X \to Y\ , \quad v \to -\Delta v - f'(u(t_c))v, \tag{3-4}$$

assim, $u'(t_c)$ é essencialmente limitada (5, Teorema 8.37) e tem sinal (5, Teorema 8.38); a positividade decorre de $\varphi_1 > 0$.

Primeiro,

$$-\Delta u'(t_c) - f'(u(t_c))u'(t_c) = h'(t_c)\varphi_1 = 0,$$

donde $u'(t_c)$ é autofunção associada ao autovalor 0 do operador (3-4).

Agora vemos que 0 é o menor autovalor de tal operador. Para isso, fazemos uma aplicação de Min-Max para operadores auto-adjuntos limitados inferiormente (9, Teorema XIII.2). Considere o operador

$$S := -\Delta - f'(u(t_c)) \ , \quad \sigma(S) := \{\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2 \leq \tilde{\lambda}_3 \leq \dots\}.$$

Verificamos que $\tilde{\lambda}_2 \geq \lambda_2 - b > 0$, donde apenas $\tilde{\lambda}_1$ pode ser igual a zero. Com efeito, dado $\psi \in Y$, defina $\langle\psi\rangle^\perp := \{u \in X : \|u\|_0 = 1, \langle u, \psi\rangle = 0\}$. Por Min-Max, para $n > 2$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_n \geq \tilde{\lambda}_2 &= \sup_{\psi \in Y} \inf_{u \in \langle\psi\rangle^\perp} \langle Su, u\rangle \\
&\geq \inf_{u \in \langle\varphi_1\rangle^\perp} \langle -\Delta u, u\rangle + \langle f'(u(t_c))u, u\rangle \\
&\geq \inf_{u \in \langle\varphi_1\rangle^\perp} \langle -\Delta u, u\rangle + \inf_{u \in \langle\varphi_1\rangle^\perp} \langle -f'(u(t_c))u, u\rangle \\
&\geq \lambda_2 + \inf_{u \in \langle\varphi_1\rangle^\perp} - \int_\Omega f'(u(t_c))u^2 \\
&\geq \lambda_2 - b > 0.
\end{aligned}$$

Como $0 \in \sigma(S)$ e $\tilde{\lambda}_n > 0$ para todo $n \geq 2$, então $\tilde{\lambda}_1 = 0$, donde $u'(t_c)$ tem sinal. Uma vez que $\displaystyle\int_\Omega w'(t_c)\varphi_1 = 0$, existe um subconjunto de medida positiva tal que $w'(t_c) > 0$, donde $u'(t_c) > 0$, o que conclui a demonstração da afirmação.

Finalmente, $h''(t_c) = -\displaystyle\int_\Omega f''(u(t_c))u'(t_c)^3 < 0$, e o teorema está demonstrado. ∎

Encerramos o capítulo apresentando uma caracterização do conjunto onde a equação (1-1) admite uma única solução.

Afirmação 3.2.3 *Seja $C(F)$ o conjunto crítico de F. O subconjunto $U_1 \subset Y$ das $g \in Y$ tais que $F^{-1}(g)$ admite um único elemento é a imagem de $C(F)$ por F.*

Prova: Para evitar ambiguidades, denotaremos por h_w a função *altura* associada a w, definida em (2-4).

Observamos que $F \circ \Phi(w, t) = (w, h_w(t)\varphi_1)$, donde

$$D(F \circ \Phi)(w, t) = \begin{bmatrix} I & D_w(h_w(t)\varphi_1) \\ 0 & {h_w}'(t)I \end{bmatrix}.$$

Concluímos que

$$C(F \circ \Phi) = \{(w,t) \in W_Y \times \mathbb{R} : h'_w(t) = 0\}.$$

Como Φ é um difeomorfismo, $u \in C(F)$ se, e somente se, $\Phi^{-1}(u) \in C(F \circ \Phi)$, donde

$$C(F) = \{u \in X : \Phi^{-1}(u) \in C(F \circ \Phi)\} = \Phi(C(F \circ \Phi)).$$

Por esses fatos, a imagem de $C(F)$ é o conjunto onde o problema tem exatamente uma solução.