1
Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo, limitado, com fronteira C^1 ou suave por partes (como um paralelepípedo em $\mathbb{R}^n$). Considere $-\Delta$ agindo sobre funções satisfazendo a condição de Dirichlet em Ω. Seu espectro $\sigma(-\Delta)$ consiste dos autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

Como é sabido, existem autovetores associados $\{\varphi_i \in L^2(\Omega),\ i = 1, 2, \dots\}$ formando uma base ortonormal.

Em 1929, Hammerstein estudou em (6) a equação diferencial parcial

$$-\Delta u - f(u) = g \ , \quad u_{|\partial\Omega} \equiv 0, \tag{1-1}$$

para uma não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ especial. Hammerstein supôs que f fosse *Lipschitz*. Assim, f é absolutamente contínua (isto é, satisfaz o teorema fundamental do cálculo), f é diferenciável *q.t.p.* e a imagem de sua derivada é limitada, $\overline{f'(\mathbb{R})} \subset [a, b]$. Hammerstein impôs

$$a \ \leq \ b \ < \ \lambda_1.$$

e demonstrou que, para todo $g \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, existe uma única solução $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. De forma mais geométrica, $F : C^{2,\alpha}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega)$ dada por

$$F(u) = -\Delta u - f(u)$$

é um homeomorfismo.

Vinte anos mais tarde, em (4), Dolph demonstrou resultado análogo para quando a não linearidade f, ainda Lipschitz com $\overline{f'(\mathbb{R})} \subset [a, b]$, satisfaz apenas

$$\lambda_i \ < \ a \ \leq \ b \ < \ \lambda_{i+1}.$$

O passo seguinte foi dado por Ambrosetti e Prodi em (1), no início dos 1970's, que consideraram $0 < a < \lambda_1 < b < \lambda_2$ com certa regularidade

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012848/CA

adicional: $f \in C^2(\mathbb{R})$ com $f'' > 0$. Nesse caso, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ é uma união disjunta

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = U_0 \cup_d U_1 \cup_d U_2$$

com a seguinte propriedade: a equação não admite solução se $g \in U_0$, admite uma única solução se $g \in U_1$ e admite exatamente duas soluções se $g \in U_2$. Mais, U_1 é uma variedade C^2 conexa, de codimensão 1. Logo depois, em (7), Manes e Micheletti dispensaram a hipótese $0 < a$. Em confronto à hipótese usada por Dolph, aqui não é possível substituir λ_1 por um outro autovalor — o argumento, como veremos, depende fortemente da positividade da autofunção associada a λ_1.

Em (3), de 1975, Berger e Podolak estudaram o cenário Ambrosetti-Prodi para $g \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, acrescentando a hipótese técnica $f'' \leq M$ e obtiveram resultado similar, à parte que U_1 é uma variedade C^1 e não mais C^2. O mérito do seu trabalho não se resume a estudar a equação em espaços de Sobolev: eles introduziram uma abordagem geométrica ao problema que é descrita no primeiro capítulo. Essa abordagem abriu caminho para a análise numérica da equação por Cal Neto e Tomei, apresentada em (8).

Lembre que $X = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ com o produto interno do Laplaciano e $Y = L^2(\Omega)$ com o produto interno usual são espaços de Hilbert. Certamente, a interação entre a não linearidade e λ_1 indica que não estamos falando da mesma situação do teorema de Dolph-Hammerstein. O que vale, entretanto, é quase isso. Vamos denotar por $r = \langle \varphi_1 \rangle$ a reta em X e Y gerada pelos múltiplos da autofunção positiva φ_1 e, com certo abuso de notação, por $r^\perp$ o complemento ortogonal desta reta tanto em X quanto em Y. Seja P_Z a projeção ortogonal sobre o subespaço Z.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012848/CA

Teorema 1.0.1 *Seja f Lipschitz. Tome $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\overline{f'(\mathbb{R})} \subset [a, b]$ e $a < \lambda_1 < b < \lambda_2$. Seja $v \in r$ e $v + r^\perp \subset X$ o subespaço afim horizontal paralelo a $r^\perp \subset X$ por v. Então a função $F_v : r^\perp \subset X \to r^\perp \subset Y$ dada por $F_v(w) = P_{r^\perp} F(w + v)$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz para cada $v \in r$. As constantes de Lipschitz independem de $v \in r$.*

Com a hipótese de $f \in C^2$, Berger e Podolak mostraram que F_v é um difeomorfismo C^1, usando o teorema da função implícita e um lema que converte invertibilidade local em global atribuído a Hadamard (2, Teorema 5.1.5) em dimensão finita. Quando f é apenas Lipschitz, essas técnicas não estão disponíveis e empregamos apenas o teorema de contração de Banach.

Em particular, as duas perspectivas dão origem eventualmente a análises numéricas diferentes, a primeira centrada no método de Newton, e a segunda

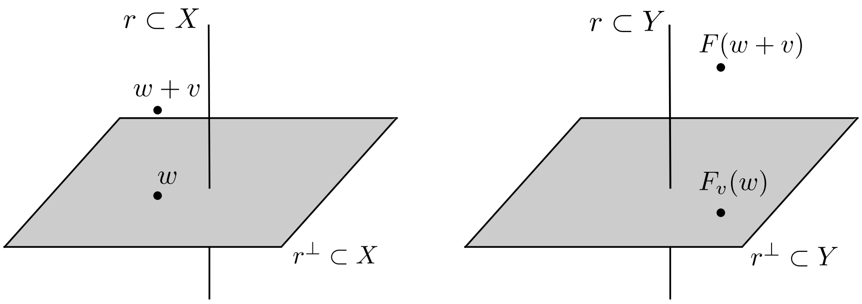

Figura 1.1: Uma função F_v.

diretamente na iteração de Banach. A primeira pode ser mais rápida, a segunda é a única possível em situações em que f comporta-se como um valor absoluto. A nova técnica abre a possibilidade de considerar teoremas do tipo Ambrosetti-Prodi para operadores mais gerais, por exemplo $\min\{-\Delta, -2\Delta\}$, ou mais geralmente, operadores de Hamilton-Bellman-Isaacs, como vêm sendo estudados por Sirakov.

Para descrever a geometria global de F, é necessário ainda entender como esses vários difeomorfismos se justapõem. Para isso, são necessárias hipóteses adicionais sobre f, como sua convexidade estrita.

A apresentação do material é dividida em três partes. Na primeira, demonstramos o resultado de Dolph e Hammerstein para espaços de Sobolev e não linearidades Lipschitz usando apenas contrações de Banach. Apresentamos a seguir a perspectiva geométrica introduzida por Berger e Podolak em sua demonstração do teorema de Ambrosetti e Prodi, e demonstramos o teorema 1.0.1 limitando-nos ao uso de contrações. Na segunda parte, acrescentamos hipóteses de regularidade sobre f e demonstramos o teorema de Ambrosetti e Prodi usando iterações de Banach. Finalmente, obtemos um resultado geral para não linearidades Lipschitz.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012848/CA