

**André Zaccur Uchôa Cavalcanti**

**O Teorema de Ambrosetti e Prodi  
para não linearidades Lipschitz**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**Programa de Pós-graduação em Matemática**

Rio de Janeiro  
Março 2012



**André Zaccur Uchôa Cavalcanti**

**O Teorema de Ambrosetti e Prodi para não  
linearidades Lipschitz**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Carlos Tomei

Rio de Janeiro  
Março 2012



**André Zaccur Uchôa Cavalcanti**

## **O Teorema de Ambrosetti e Prodi para não linearidades Lipschitz**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Carlos Tomei**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Nicolau C. Saldanha**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Ricardo Sá Earp**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Hamilton Prado Bueno**

Departamento de Matemática — UFMG

**Prof. José Cal Neto**

Departamento de Matemática e Estatística — UNIRIO

**Prof. Paolo Piccione**

Instituto de Matemática e Estatística — USP

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 16 de março de 2012

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**André Zaccur Uchôa Cavalcanti**

Bacharel em Ciências Econômicas.

Ficha Catalográfica

Zaccur, André

O Teorema de Ambrosetti e Prodi para não linearidades Lipschitz / André Zaccur Uchôa Cavalcanti; orientador: Carlos Tomei. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2012.

v., 42 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Dissertação. 2. Equações Elípticas Semi-Lineares. 3. Teorema de Dolph-Hammerstein. 4. Teorema de Ambrosetti-Prodi. I. Tomei, Carlos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Com amor àqueles que sempre me apoiaram; Marcia, vó Lila, vô Kaki, meu pai e minha madrasta, minha mãe e meu padrasto.

## Agradecimentos

Sem o suporte da CAPES, FAPERJ e da PUC-Rio, essa empreitada seria impossível, portanto, meus sinceros agradecimentos a essas instituições e seus respectivos dirigentes.

Sinto-me muitíssimo agradecido aos professores, funcionários e colegas do DMat da Puc-Rio, em particular aos Profs. Carlos Tomei, Ricardo Sá Earp, Carlos Frederico Palmeira e Jairo Bochi e às queridas Creuza e Katia, pelos apoios emocional e intelectual.

Finalmente, agradeço à causa primária de tudo e de todos, que convençamos chamar Deus, sem cuja permissão nada se realizaria.

## Resumo

Zaccur, André; Tomei, Carlos. **O Teorema de Ambrosetti e Prodi para não linearidades Lipschitz**. Rio de Janeiro, 2012. 42p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O estudo de equações semi-lineares do tipo Ambrosetti-Prodi frequentemente usa regularidade da não linearidade. Nesse texto, consideramos não linearidades Lipschitz. Os argumentos geométricos baseados em teoremas de função implícita são substituídos pelo uso de contrações adequadas.

### Palavras-chave

Equações Elípticas Semi-Lineares; Teorema de Dolph-Hammerstein; Teorema de Ambrosetti-Prodi;

## Abstract

Zaccur, André; Tomei, Carlos (advisor) . **The Ambrosetti-Prodi Theorem for Lipschitz nonlinearities**. Rio de Janeiro, 2012. 42p. M.Sc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The study of semi-linear equations of Ambrosetti-Prodi type frequently makes use of some smoothness of the nonlinearity. In this text, we consider Lipschitz nonlinearities. The geometric arguments based on implicit functions theorems are replaced by appropriate contractive mappings.

## Keywords

Semi-linear Elliptic Equations; Dolph-Hammerstein Theorem; Ambrosetti-Prodi Theorem;



## Sumário

1	Introdução	11
2	O caso de não linearidade Lipschitz	14
2.1	O Teorema de Dolph-Hammerstein	14
2.2	A geometria subjacente a Ambrosetti-Prodi	16
2.3	Comportamento assintótico da função altura	19
3	Não Linearidades Regulares	22
3.1	Regularidade de $F$	22
3.2	O Teorema de Ambrosetti-Prodi	25
4	O Teorema de Ambrosetti-Prodi para não linearidades Lipschitz	32
	Referências Bibliográficas	37
A	Lemas	38

## Lista de Figuras

- |     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Uma função $F_v$ .  | 13 |
| 2.1 | A composição $F \circ \Phi$ preserva a componente horizontal. Além disso, o conjunto $\{w + h(t)\varphi_1\}$ é uma semi-reta, conforme demonstramos na próxima seção. | 18 |

*Pedi e recebereis; buscai e achareis; batei e abrir-se-vos-á. Pois todo aquele que pede recebe; quem procura, acha; e a quem bate, a porta será aberta.*

**Mateus, VII, 7-8.**