

2 Referencial Teórico

De acordo com Black e Scholes (1973) o prêmio de uma opção de compra ou venda européia é função do preço do ativo-objeto, do preço de exercício, do tempo até o exercício, da taxa de juros livre de risco e da volatilidade do ativo-objeto até o exercício:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (1)$$

Onde S equivale ao preço do ativo subjacente, μ ao retorno médio esperado, σ a volatilidade, e o W_t representa o processo de *Wiener* com distribuição normal padronizada.

O modelo Black-Scholes (B-S) assume, entre outras premissas, que o ativo básico tem uma distribuição lognormal com uma volatilidade conhecida, ignora os custos de transação, não há possibilidade para arbitragem e que o modelo segue um movimento geométrico browniano. Dentre as variáveis do modelo, a volatilidade é a única que não é observada diretamente no mercado.

O método de apreçamento de opções Black-Scholes é a ferramenta mais utilizada pelos operadores para auxiliar na decisão de compra ou venda de uma opção, entre outras razões, por ser um modelo simples e bem testado pelo mercado, por possuir um menor número de parâmetros para estimação em relação a modelos mais complexos que acabam apresentando defasagem de atualização e por nenhum outro modelo de apreçamento de opções ter conseguido explicar por completo as anomalias apresentadas pela volatilidade.

Dentre todos os modelos propostos após B-S, o modelo de árvore binomial proposto por Cox, Ross e Rubinstein (1979) tornou-se o mais utilizado para calcular o valor das opções, principalmente as americanas, onde o processo

estocástico para o preço da ação objeto em tempo e estado contínuo (movimento geométrico browniano) proposto por Black e Scholes foi aproximado por um processo de tempo e estado discreto (passeio aleatório). O modelo de árvore binomial CRR consiste em um conjunto de nós, representando preços futuros da ação, com um espaço logarítmico constante entre esses nós. Este espaço é a medida de volatilidade de preço futuro da ação, assumindo que a volatilidade na árvore CRR é constante.

O modelo assume que movimentos de preços da ação sejam compostos por um grande número de pequenos movimentos binomiais. Em um mundo de risco-neutro, as probabilidades de transição entre os nós dependem do juro sem risco e da volatilidade local. A idéia central é dividir a vida da opção em pequenos intervalos de tempo Δt . A cada intervalo de tempo, o preço da ação sai de seu valor inicial S , para um entre dois novos valores, S_u e S_d .

Na árvore binomial CRR, cada nó pode ter dois possíveis estados futuros dependendo da probabilidade de transição. A probabilidade de um movimento ascendente é p e de um movimento descendente $1-p$. O preço futuro no nó S , determinado pela taxa de juros contínua (considerando a ação não pagadora de dividendos), é igual a $F = e^{r\Delta t} S$. As opções são avaliadas do fim ao início da árvore. O valor da opção é conhecido no instante T . Para uma opção de compra, seu valor será dado por $\max(S_T - X, 0)$, onde S_T é o preço do ativo objeto em T . Com base na suposição de tratar-se de um mundo neutro ao risco, o valor de cada nó pode ser calculado como o valor esperado no instante T descontado à taxa livre de risco r para um período de tempo Δt . O processo é repetido até que chegue ao instante zero.

Não obstante, é reconhecido e provado por outros pesquisadores que estes dois modelos têm desvios e limitações. Os agentes de que negociam opções baseados em uma análise de volatilidade constante acabam por enfrentar um risco adicional: ter que gerenciar sua exposição baseados em um modelo que não reflete as condições encontradas no mercado, dado que ambos os modelos assumem que a volatilidade é constante, independente do prazo de vencimento e do preço de

exercício do ativo-objeto. Para contornar estes desvios, operadores utilizam matrizes de volatilidade que mostram a relação da volatilidade implícita com o preço de exercício e prazo de vencimento das opções (Hull, 2006).

No que diz respeito aos desvios, o sorriso e a estrutura a termo da volatilidade são os mais reconhecidos como determinantes para a dispersão entre o preço teórico e o de mercado da opção. O comportamento da volatilidade implícita ao longo do tempo até o exercício é conhecido como estrutura a termo da volatilidade e o comportamento através do preço de exercício é chamado de sorriso de volatilidade. (Dupire, 1994; Rubinstein, 1994).

2.1. Volatilidade Implícita

Rubinstein (1994) demonstra que a volatilidade implícita apresenta diferentes valores para diferentes preços de exercício ao longo do tempo. A denominação sorriso de volatilidade deve-se ao formato da curva de volatilidade implícita em função do preço de exercício. O formato do sorriso varia de acordo com o ativo-objeto da opção. Hull (2006) afirma que para opções de ações, a volatilidade diminui quando o preço de exercício aumenta, como pode ser observado na figura 1. Uma das possíveis razões para ocorrer o sorriso da volatilidade seria o grau de alavancagem da empresa que pode torná-la mais arriscada de acordo com sua relação de estrutura de capital e em ocasiões de altíssima volatilidade na bolsa de valores.

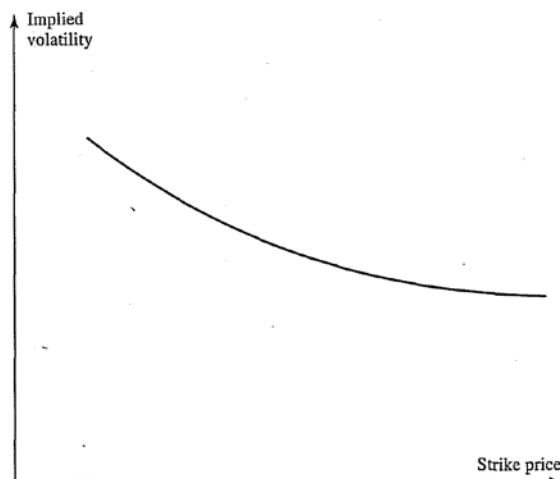


Figura 1: Sorriso da volatilidade em opções de ações. (Hull,2006)

A volatilidade usada para apreçar opções com preço de exercício baixo (opções de venda bastante fora do dinheiro ou opções de compra muito dentro do dinheiro) é consideravelmente mais elevada do que a utilizada para apreçar opções com preço de exercício alto (opções de venda muito dentro do dinheiro ou opção de compra bastante fora do dinheiro), conforme a relação de paridade venda-compra mantida no modelo B-S quando não há oportunidades para arbitragem.

Ao se comparar uma distribuição lognormal com a mesma média e desvio padrão do que a de uma distribuição implícita, observa-se que a implícita tem uma cauda mais pesada para esquerda e menos robusta à direita em relação à distribuição lognormal, como demonstrado na figura 1 (Hull, 2006). Uma opção de compra muito fora do dinheiro, ou sua paridade, com o preço de exercício K_2 tem um preço menor quando a distribuição implícita é utilizada ao invés da distribuição lognormal. Isto ocorre porque a opção só será exercida se o preço da ação-objeto for maior que K_2 . A probabilidade de isso ocorrer é menor na distribuição implícita do que na lognormal, como pode ser observado na figura 2. Logo, a distribuição implícita fornece um preço mais baixo para a opção do que se fosse calculado pela lognormal e este preço mais baixo conduz a uma volatilidade implícita menor.

O inverso ocorre para K_1 . Uma opção de venda bastante fora do dinheiro ou sua paridade, com preço de exercício K_1 , só será executada se o preço da ação-

objeto for menor que K_1 . A probabilidade de isso ocorrer é mais elevada para distribuição implícita do que a da lognormal. Portanto, a distribuição implícita fornece um preço relativamente mais alto para esta opção e, conseqüentemente, uma volatilidade implícita maior para a mesma.

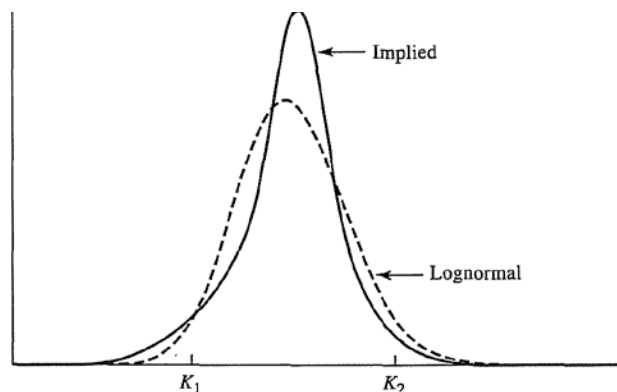


Figura 2: Distribuição lognormal (linha achurada) e distribuição implícita para opções de ação. (Hull,2006)

Hull (2006) argumenta que a volatilidade utilizada para precificar uma opção no dinheiro depende do prazo de vencimento da opção. A curva da volatilidade tende a ser crescente em relação ao vencimento quando a volatilidade de curto prazo é historicamente baixa, uma vez que há então expectativas que a volatilidade aumente. Similarmente, a curva da volatilidade tende a ser negativa em relação ao vencimento quando a volatilidade de curto prazo é historicamente alta, visto que há expectativas que a volatilidade diminua.

Christensen e Prabhala (1998) e Jorion (1995) demonstram que mesmo em cenários mais dinâmicos, o estimador que utiliza a volatilidade implícita é mais eficiente para prever a volatilidade até o vencimento de uma determinada opção. A principal premissa por trás desses estudos é a de que se o mercado é eficiente, a volatilidade implícita deve ser um melhor previsor da volatilidade futura e deve agrupar as informações contidas em todas as outras variáveis e informações no mercado que explicam a volatilidade futura.

Diversas metodologias foram apresentadas para estimar a previsão da volatilidade implícita. Uma vantagem dos modelos de volatilidade implícita é que permitem construir as superfícies de volatilidade. Essas superfícies mudam com o vencimento e o delta¹ da opção. Resultados de Beckers (1981) e Gemmill (1986) demonstram que o estimador da volatilidade implícita deve ser a volatilidade da opção com maior vega², ou seja, a opção mais “no dinheiro”.

Modelos mais complexos assumem que a volatilidade local não é constante, mas sim que varia de acordo com o preço do ativo subjacente e o vencimento da opção $\sigma(S, T)$.

Uma generalização do modelo de Black e Scholes pode ser obtida ao substituir a equação (1) pela seguinte equação:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma(S, T) dW_t, \quad (2)$$

Segundo Yoshino (2001), na prática, os operadores de mercado fazem um truque ao usar a fórmula de Black e Scholes. Eles sabem que a volatilidade não é constante, podendo mudar com a maturidade e o preço de exercício. Os operadores avaliam as opções dentro do dinheiro e fora do dinheiro. Essas opções têm volatilidades diferentes das opções no dinheiro. Dessa forma, eles constroem a superfície de volatilidade, que é representada por uma função que relaciona a volatilidade implícita às seguintes variáveis: a) *moneyness*³; e b) tempo restante até o vencimento t .

¹ Derivada do preço da opção em relação ao preço do ativo-objeto.

² Derivada do preço da opção em relação à volatilidade do ativo-objeto.

³ Preço de exercício da opção dividido pelo preço à vista do ativo-objeto.

2.2. Árvore Binomial Implícita

Derman e Kani (1994) mostram que é possível determinar $\sigma(S,T)$ diretamente dos preços observados das opções no mercado com a curva de sorriso da volatilidade. Essa modelagem permite que em momentos de crise, quando há diminuição nos preços das ações e aumento da sua volatilidade, seja possível suavizar as dispersões entre o preço teórico e o de mercado das opções, dado que a volatilidade implícita representa o risco esperado pelo mercado que é contido nos preços das opções e esse risco de mercado inclui a possibilidade de eventos raros como um momento de crise acentuada na bolsa.

A abordagem desenvolvida por Derman e Kani (1994) move para frente, na árvore binomial, ao introduzir em cada nó um preço observado da opção de modo que possa determinar o caminho para o próximo período. Esse caminho é caracterizado pela probabilidade de transição, isto é, a volatilidade local entre nós consecutivos. Os autores usam essa volatilidade $\sigma(S, t)$ para construir uma árvore binomial implícita (ABI) para opções européias, que é uma representação natural de uma probabilidade de distribuição discreta não lognormal dos preços subjacentes.

Em geral, pode-se utilizar, em vez de uma ABI, qualquer árvore multinomial (de ordem superior) para a discretização do processo. No entanto, como o passo de tempo tende para zero, todas elas convergem para o mesmo processo contínuo (Hull e White, 1990). Deste modo, ABIs estão entre todas as árvores multinomial implícitas, no sentido de que eles têm apenas um grau de liberdade - a escolha arbitrária do nó central em cada nível da árvore.

Embora se acredite que a árvore binomial seja suficiente, árvores de ordem superior poderiam ser mais úteis, porque permitem uma discretização mais flexível no sentido de que as probabilidades de transição e de distribuições podem variar tão bem quanto possível através de uma árvore. Isto é especialmente

importante quando os preços das opções de mercado são imprecisos devido a atritos de mercado ineficientes, e assim por diante.

Yoshino (2001) utilizou o modelo da árvore binomial implícita como um dos métodos para estimar a função densidade de probabilidade na medida risco-neutro do Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA), com intuito de verificar como o processo de difusão difere na prática da volatilidade constante que é assumida no modelo B-S. Sua principal conclusão é que os modelos que consideram a volatilidade implícita melhoram as medidas do risco no mercado acionário juntamente com a estimativa da volatilidade histórica.

A análise temporal foi realizada sobre o período de junho de 1996 a julho de 1997, antes da crise asiática. A metodologia de Derman e Kani (1994) não fornece resultados satisfatórios quando se tenta calibrar curvas de sorriso quadráticas, o que inviabilizou a tentativa do uso do método para obter a função densidade de probabilidade risco-neutro.

Para verificar a validade do método de Derman e Kani (1994), criou-se um índice para medir a percentagem de nós ajustados pela violação de arbitragem para cada nível da árvore. Como o algoritmo de Derman e Kani (1994) não evita uma probabilidade de transição negativa, quando ocorre uma probabilidade negativa, tem-se uma violação de arbitragem. Nesse caso, a probabilidade deve ser rejeitada e o processo de ajustamento deve ser aplicado. Assim, esse índice mede o desempenho do algoritmo para construir a árvore binomial de acordo com a curva de sorriso.

Para curvas de sorriso quadráticas, considerou-se 500 níveis para a árvore. Assim, obtiveram-se índices maiores do que 95. Isso significa que foi possível replicar somente 5% dos nós ao utilizar o algoritmo de Derman e Kani (1994). Quando incrementado o número de níveis para 600, o índice não aumenta necessariamente de mais de uma unidade.

Conclui-se que as curvas de sorriso estimadas, de acordo com o método de Derman e Kani (1994), falham para o mercado acionário brasileiro antes da crise

asiática. Derman, Kani e Chriss (1996) reconhecem esse tipo de problema e propõem a utilização da árvore trinomial recombinante. Cabe lembrar que a inferência da árvore implícita é importante para o apreçamento de derivativos dependentes do caminho (exóticas). O autor sugere como alternativa usar a árvore trinomial que foi desenvolvida por Derman, Kani e Chriss (1996), uma vez que a árvore binomial de Derman e Kani (1994) é insatisfatória para o mercado acionário brasileiro.

2.3. Árvore Trinomial Implícita

De acordo com Derman, Kani e Chriss (1996), em mercados de opções onde há um significativo ou persistente sorriso de volatilidade, modelos de árvore trinomial implícita podem assegurar maior consistência na estimação de preço teórico das opções em relação ao de mercado. Uma vez que tem parâmetros adicionais em comparação à árvore binomial implícita, a árvore trinomial implícita (ATI) fornece maior liberdade para escolher os preços subjacentes de todos os nós da árvore nos espaços de estado e deixa somente a probabilidade de transição ser restrita pelos preços de mercado. Esta liberdade dos espaços de estado fornece uma flexibilidade que algumas vezes são vantajosas para ajustar a árvore ao sorriso da volatilidade.

Uma árvore trinomial com N níveis é um conjunto de nós $s_{n, i}$ (representando o preço do ativo subjacente), onde $n = 1, \dots, N$ é o número de nível e $i = 1, \dots, 2n - 1$ os nós fixados dentro de um nível. Estando em um nó $S_{n, i}$, é possível mudar para um dos três nós: (i) para o nó superior com valor $S_{n+1, i}$ com probabilidade p_i , (ii) para o nó inferior com valor $S_{n+1, i+2}$ com probabilidade q_i , e (iii) para o nó no meio com valor $S_{n+1, i+1}$ com probabilidade $1 - p_i - q_i$, como ilustrado na figura 3.

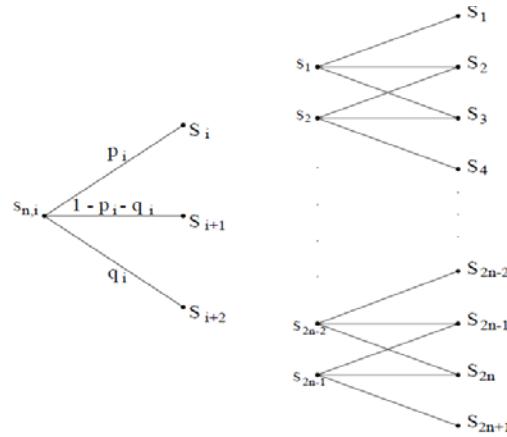


Figura 3: Nós em uma árvore trinomial. Painel esquerdo: um nó simples em seu espaço amostral. Painel direito: árvore com dois níveis $n-1$ e n . (Čížek e Komorád, 2005)

A partir de um nó $S_{n,i}$ no tempo t_n , há cinco parâmetros desconhecidos: duas probabilidades de transição p_i e q_i e os três preços S_i , S_{i+1} e S_{i+2} nos novos nós. Para determiná-los, precisa-se introduzir a notação e os principais requisitos que a árvore deve satisfazer. Os preços de S são derivados da binomial por Čížek e Komorád (2005) para construir uma árvore trinomial padrão:

$$S_i = s_{n+1,i} = s_{n,i} e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}} \quad (3)$$

$$S_{i+1} = s_{n+1,i+1} = s_{n,i} \quad (4)$$

$$S_{i+2} = s_{n+1,i+2} = s_{n,i} e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} \quad (5)$$

Os preços subjacentes são ajustados ao sorriso da volatilidade, adicionando a variável c , que é uma constante, para considerar a volatilidade local. Derman, Kani e Chriss (1996) argumentam que tendo em vista a existência de $2n$ equações para $2n+1$ parâmetros desconhecidos, uma equação adicional é necessária e supõem que o novo nó central é igual ao original: $\tilde{S}_{n+1} = S_{n+1}$:

$$\frac{s_k}{s_{k-1}} = \exp\left\{\frac{c}{\sigma(s_k)} \ln \frac{s_k}{s_{k-1}}\right\}, k = 2, \dots, 2n+1, \quad (6)$$

Enquanto F_i denota o preço futuro conhecido do preço do ativo-objeto $S_{n,i}$, $\lambda_{n,i}$ é o preço Arrow-Debreu conhecido no nó (n, i) . De acordo com Čížek e Komorád (2005), os preços de Arrow-Debreu para uma árvore trinomial podem ser obtidos através da fórmula:

$$\lambda_{1,1} = 1, \quad (7)$$

$$\lambda_{1,1} = e^{-r\Delta t} \lambda_{n,1} p_1, \quad (8)$$

$$\lambda_{n+1,2} = e^{-r\Delta t} \{ \lambda_{n,1} (1 - p_1 - q_1) + \lambda_{n,2} p_2 \}, \quad (9)$$

$$\lambda_{n+1,i+1} = e^{-r\Delta t} \{ \lambda_{n,i-1} q_{i-1} + \lambda_{n,i} (1 - p_1 - q_1) + \lambda_{n,i+1} p_{i+1} \}, \quad (10)$$

$$\lambda_{n+1,2n} = e^{-r\Delta t} \{ \lambda_{n,2n-1} (1 - p_{2n-1} - q_{2n-1}) + \lambda_{n,2n-2} q_{2n-2} \}, \quad (11)$$

$$\lambda_{n+1,2n+1} = e^{-r\Delta t} \lambda_{n,2n-1} q_{2n-1}. \quad (12)$$

O preço Arrow-Debreu é utilizado na derivação do cálculo da árvore trinomial. Seja (n, i) o nó i_{th} (mais alto) no nível de tempo n_{th} de uma árvore. O preço Arrow-Debreu $\lambda_{n,i}$ do nó (n, i) de uma árvore é calculado como a soma do produto das probabilidades de transição de risco-neutro descontadas passando por todos os caminhos desde a raiz da árvore até o nó (n, i) . Assim, o preço de Arrow-Debreu da raiz da árvore é igual a um e os preços Arrow-Debreu do nível final de uma árvore (multinomial) formam uma aproximação discreta da densidade do preço de estado. Deste modo, os preços estão com desconto, e logo, a probabilidade de risco-neutro correspondente a cada nó (no nível final) deve ser calculado como o produto do preço de Arrow-Debreu e do fator de capitalização e^{rT} .

A árvore trinomial implícita se baseia na volatilidade constante da árvore trinomial padrão para construir sua volatilidade implícita. Ela assume que a volatilidade, a princípio constante, varia em pontos percentuais de acordo com o aumento ou queda do preço do exercício em função de mudança do preço do ativo subjacente da opção, ou seja, o modelo ajusta ao sorriso da volatilidade. O cálculo das volatilidades locais implícitas, segundo Čížek e Komorád (2005), é aproximado à equação:

$$\sigma_i^2 \approx \frac{p_i(S_i - F_i)^2 + (1 - p_i - q_i)(S_{i+1} - F_i)^2 + q_i(S_{i+2} - F_i)^2}{F_i^2 \Delta t} \quad (13)$$

Quando a volatilidade implícita varia apenas lentamente com exercício e vencimento, o espaço de estado regular com uma malha uniforme é adequado para a construção de um modelo de ATI. Por outro lado, se a volatilidade varia significativamente com o preço de exercício ou o prazo de vencimento, deve-se escolher um espaço de estado refletindo essas propriedades. Supondo-se que a volatilidade é separável no tempo e no preço das ações, $\sigma(S, t) = \sigma(S) \sigma(t)$, o espaço de estado de uma ATI com a inclinação ajustada ao sorriso e a estrutura a termo adequados pode ser construído em quatro etapas.

Primeiro, constrói-se uma rede regular trinomial com um espaço de tempo Δt constante e um espaço de preços ΔS constante, como observado na figura 4(a). Além disso, assume-se que todas as taxas de juros e dividendos são iguais a zero. A seguir, modifica o Δt em diferentes pontos de tempo e em seguida altera o ΔS em diferentes níveis⁴, assumindo o formado da figura 4(b). Finalmente, verifica a necessidade de ajuste dos preços nos nós para não violar a restrição do preço futuro.

⁴ Ver detalhes do cálculo em Derman, Kani e Chriss (1996).

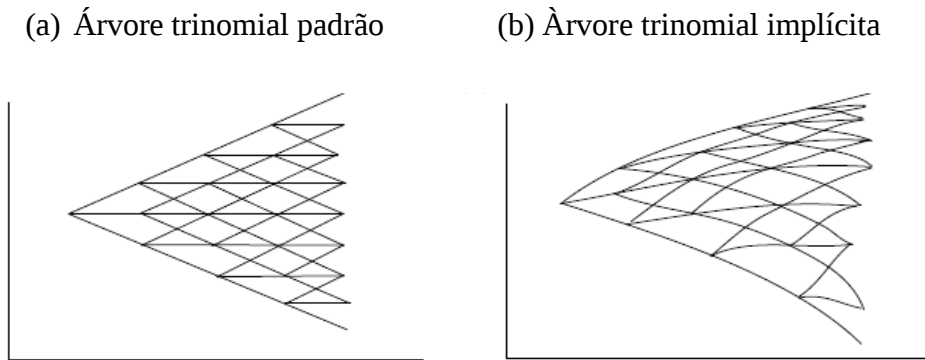


Figura 4: Espaço de estado de uma (a) árvore trinomial padrão e (b) árvore trinomial implícita. (Derman, Kani e Chriss, 1996)

Uma vez que o espaço de estado de uma ATI é fixado, podem-se calcular as probabilidades de transição para todos os nós (n, i) em cada nível da árvore n . Seja $C(K, t_{n+1})$ e $P(K, t_{n+1})$ o preço atual de uma opção padrão europeia de compra e venda, respectivamente, exercida a K e vencimento t_{n+1} . Estes valores podem ser obtidos pela interpolação da superfície do sorriso em vários pontos do preço de exercício e vencimento:

$$C(K, t_{n+1}) = e^{-r\Delta t} \sum_j \{p_j \lambda_{n,j} + (1 - p_{j-1} - q_{j-1}) \lambda_{n,j-1} + q_{j-2} \lambda_{n,j-2}\} (S_j K)^+, \quad (14)$$

$$P(K, t_{n+1}) = e^{-r\Delta t} \sum_j \{p_j \lambda_{n,j} (1 - p_{j-1} q_{j-1}) \lambda_{n,j-1} q_{j-2} \lambda_{n,j-2}\} (K S_j)^+. \quad (15)$$

Os valores dessas opções determinados pela árvore trinomial são as estimativas descontadas das funções de ganho de valor ao exercer a opção: $\max(S_j - K, 0) = (S_j - K)^+$ para a opção de compra e $\max(K - S_j, 0)$ para a opção de venda no nó $(n+1, j)$. A estimativa é tomada em relação às probabilidades de alcançar cada nó, isto é, em relação às probabilidades de transição.

Para definir o preço de exercício K para S_{i+1} é necessário rearranjar os termos da soma da fórmula de C e usar a equação de F_i para calcular as

probabilidades de transição p_i e q_i para todos os nós acima do nó central de uma opção de compra européia:

$$p_i = \frac{e^{r\Delta t} C(S_{i+1}, t_{n+1}) - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{n+1,j} (F_j - S_{i+1})}{\lambda_{n+1,i} (S_i - S_{i+1})}, \quad (16)$$

$$q_i = \frac{F_i - p_i (S_i - S_{i+1}) - S_{i+1}}{S_{i+2} - S_{i+1}}. \quad (17)$$

Similarmente, o cálculo para as probabilidades de transição p_i e q_i para todos os nós abaixo do nó central, válido inclusive para ele, de uma opção de venda européia é:

$$q_i = \frac{e^{r\Delta t} P(S_{i+1}, t_{n+1}) - \sum_{j=i+1}^{2n-1} \lambda_{n+1,j} (S_{i+1} - F_j)}{\lambda_{n+1,i} (S_i - S_{i+1})}, \quad (18)$$

$$p_i = \frac{F_i - q_i (S_{i+2} - S_{i+1}) - S_{i+1}}{S_i - S_{i+1}}. \quad (19)$$

Segundo Čížek e Komorád (2005), uma árvore implícita fornece uma representação discreta do processo de evolução dos preços subjacentes. Para capturar e modelar o preço subjacente corretamente é necessário que uma árvore implícita:

1. Reproduza corretamente o sorriso da volatilidade,
2. Seja neutra ao risco,
3. Tenha probabilidades de transição dentro do intervalo (0, 1).

Para cumprir as condições de neutralidade ao risco, o valor esperado do preço subjacente $S_{n+1,i}$ no período de tempo seguinte t_{n+1} tem que igualar seu preço futuro conhecido pela fórmula:

$$Es_{n+1,i} = p_i S_i + (1 - p_i - q_i) S_{i+1} + q_i S_{i+2} = F_i = e^{r\Delta t} S_{n,1}, \quad (20)$$

Onde r denota a taxa de juros contínua e Δt é o passo do tempo t_n até t_{n+1} . Adicionalmente, pode-se especificar tal condição também para os momentos seguintes de $S_{n,i}$ e F_i . Assim, obtém-se uma segunda restrição sobre os preços nos nós e probabilidades de transição.

$$p_i (S_i - F_i)^2 + (1 - p_i - q_i)(S_{i+1} - F_i)^2 + q_i (S_{i+2} - F_i)^2 = F_i^2 \sigma_i^2 \Delta t + O(\Delta t), \quad (21)$$

Logo, há duas restrições para cinco parâmetros desconhecidos e, portanto, não há nenhuma árvore trinomial implícita única. Por outro lado, todas as árvores que correspondem a essas restrições são equivalentes no sentido de que, como o espaço de tempo Δt tende a zero, todas essas árvores convergem para o mesmo processo contínuo. Um método comum para a construção de uma ATI é escolher primeiro livremente os preços subjacentes e, em seguida, resolver as equações acima para encontrar as probabilidades de transição p_i e q_i . Contudo, tem que se garantir que essas probabilidades não violem a condição de ter probabilidade entre 0 e 1.

A princípio, a utilização de uma ATI em vez de uma ABI fornece graus de liberdade adicionais. Isso permite a possibilidade de melhorar o ajuste do sorriso de volatilidade, especialmente quando os preços de opções praticadas no mercado estiverem inconsistentes ou com arbitragem tornar impossível construir uma árvore consistente. No entanto, mesmo que a árvore construída seja consistente, outras dificuldades podem surgir quando sua volatilidade local e probabilidade de transição são irregulares e implausíveis.

2.3.1.

Possíveis falhas do modelo

O modelo, porém, pode apresentar falhas em relação às probabilidades de transição que não podem ser negativas ou maiores que um, uma vez que isso é inconsistente com os preços racionais de opção e permite arbitragem. Tem-se, porém, duas formas para solucionar o problema. Primeiro, é necessário verificar se nenhum preço futuro $F_{n,i}$, no nó i (n, i) caiu fora do intervalo dos S superior e inferior no nível $n+1$: $F_{n,i} \in (S_{n+1,i+2}, + S_{n+1,i})$, como ilustrado na figura 5(a).

Esta inconsistência não é difícil de superar, uma vez que há liberdade para escolher o espaço de estados. Logo, pode-se aplicar um fator de ajuste para substituir os nós que causam esse problema. Segundo, preços de opções com valores extremamente pequenos ou grandes, que implicariam em um valor extremo de volatilidade local, também podem resultar em probabilidades que são negativas ou maiores que um, conforme ilustrado na figura 5(b). Nesse caso, tem-se que substituir os preços das opções que levaram a probabilidades inaceitáveis.

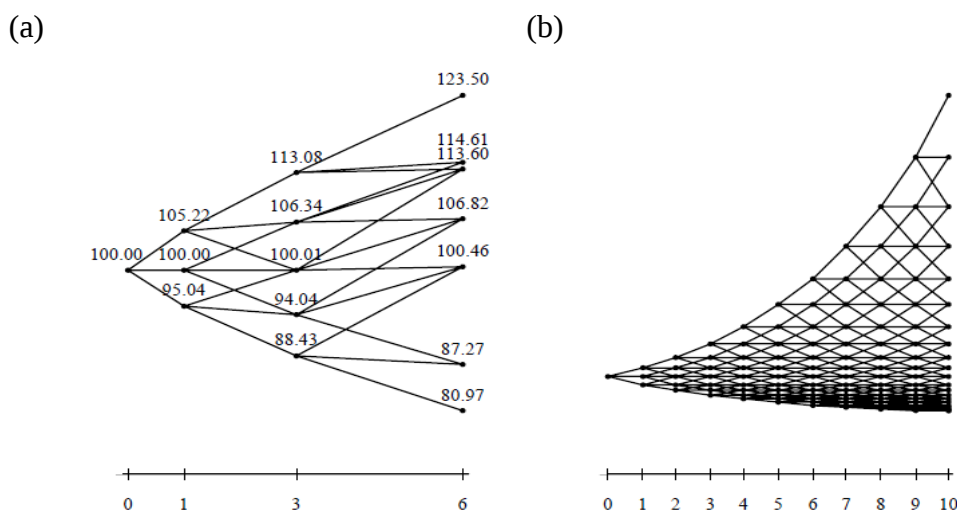


Figura 5: Dois tipos de violação de preço futuro: (a) Preços futuros fora do intervalo dos espaços de estado correspondentes aos seus respectivos nós. (b) Aumento acentuado no preço da opção conduz a uma volatilidade local extrema. (Čížek e Komorád, 2005)

As probabilidades de transição podem ser sempre corrigidas, desde que o espaço de estados correspondente não viole a condição anterior de preço futuro.

Derman, Keni e Chriss (1996) propuseram reduzir os nós problemáticos para binomiais ou usar as equações a seguir para corrigir essas inconsistências. Em ambos os casos, a probabilidade de transição do meio é igual a $1 - p_i - q_i$.

Para $F_i \square (S_{i+1}, S_i)$:

$$p_i = \frac{1}{2} \left(\frac{F_i - S_{i+1}}{S_i - S_{i+1}} + \frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}} \right), \quad q_i = \frac{1}{2} \left(\frac{S_i - F_i}{S_i - S_{i+2}} \right), \quad (22)$$

Para $F_i \square (S_{i+2}, S_{i+1})$:

$$p_i = \frac{1}{2} \left(\frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}} \right), \quad q_i = \frac{1}{2} \left(\frac{S_{i+1} - F_i}{S_{i+1} - S_{i+2}} + \frac{S_i - F_i}{S_i - S_{i+2}} \right), \quad (23)$$

2.3.2. Modelo aplicado ao índice de ações alemão

Čížek e Komorád (2005) utilizaram os preços de exercício das opções do índice de ações alemão - *DAX*, com vencimento a partir de duas semanas e dois meses de 4 de janeiro de 1999 para construir e calibrar a árvore trinomial implícita para ajustá-la ao sorriso da volatilidade, calculando primeiro a volatilidade implícita, ilustrado na figura 6, extraída da equação de B-S (1) com combinações variadas de preço e vencimento para calcular o sorriso da volatilidade. Os autores construíram uma ATI com três níveis de tempo com $\Delta t =$ duas semanas.

(a) Sorriso da volatilidade

(b) estrutura a termo da volatilidade

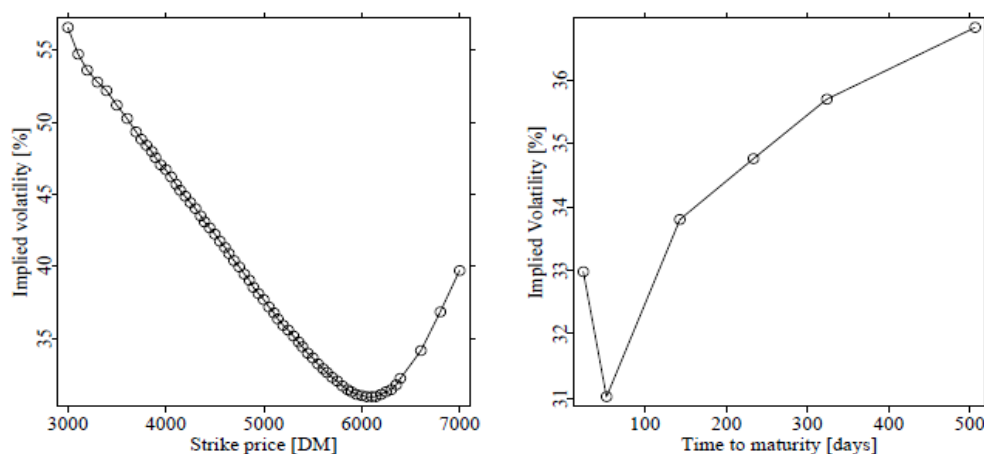


Figura 6: Volatilidade implícita de opções de venda da DAX em 29/01/1999 - (a) sorriso da volatilidade e (b) estrutura a termo da volatilidade. (Čížek e Komorád, 2005)

Construiu-se o espaço amostral a partir do tempo $t=0$ com preço da ação subjacente $S=5.290$ e taxa de juros livre de risco $=4\%$. Para calcular a probabilidade de transição usou-se um procedimento de suavização não-paramétrico para modelar a superfície da volatilidade $\sigma_i(K,t)$, uma vez que os contratos de opção não estão disponíveis por cada combinação de preço e vencimento.

Algumas probabilidades de transição ficaram fora do intervalo $(0,1)$, como destacado pelas linhas tracejadas na figura 7, porém foram corrigidas conforme orientações do modelo. Em relação ao preço futuro, não houve violação à restrição. De fato confirmou-se que as volatilidades implícitas variam de um nó para outro e reflete o sorriso da volatilidade, conforme pode ser observado pela ligeira inclinação dos espaços de estado na figura 8, ilustrada por Čížek e Komorád (2005).

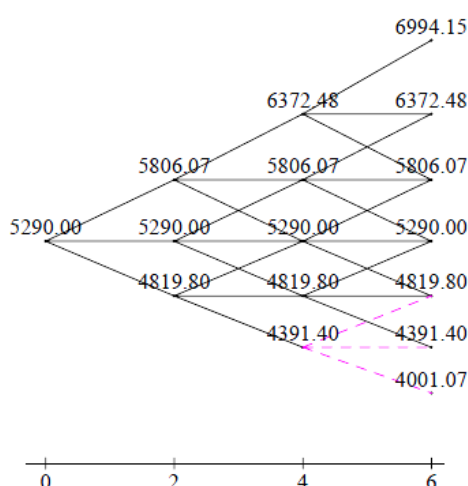


Figura 7: O espaço de estado de uma ATI calculada para opções da DAX em 04/01/1999.

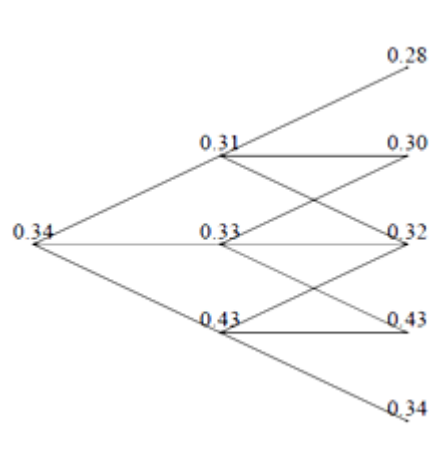


Figura 8: Volatilidade implícita local estimada pela ATI para DAX em 04/01/1999.

Provavelmente, o principal resultado deste modelo ATI pode ser resumido pela densidade dos preços da amostra. Esta densidade descreve a distribuição dos preços dada pela construção da ATI e suavizada pelo estimador *Nadaraya-Watson*. Aparentemente, a densidade estimada é bastante áspera porque se usam apenas três etapas na nossa árvore. Para obter uma estimativa suave da densidade do preço de estado, dobra-se o número de passos, ou seja, utilizam-se seis etapas de uma semana em vez de três etapas de duas semanas.

A densidade do estado de preço estimado pela ATI em relação à projetada pelo modelo de B-S mostrou-se menos enviesada quando calculou a árvore considerando seis níveis (desdobrou os três níveis de duas semanas em seis níveis de uma semana) em vez de três, como demonstrado na figura 9.

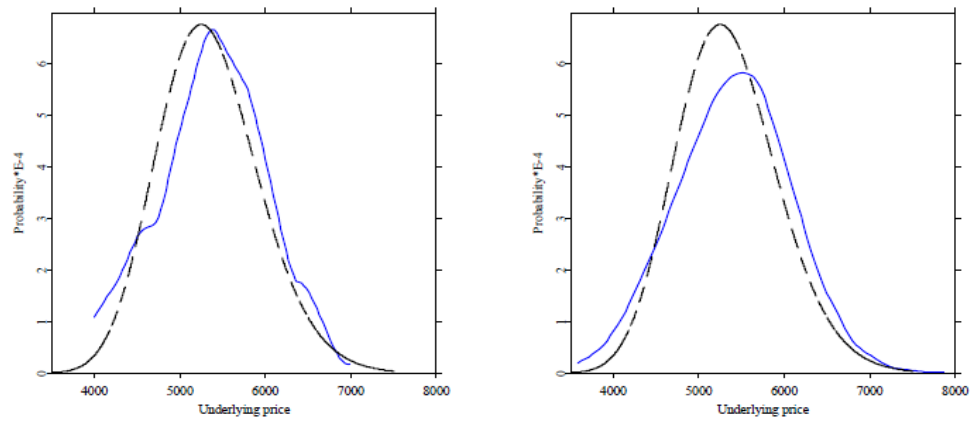


Figura 9: Densidade do preço estimado pela árvore trinomial implícita para DAX em 04/01/1999. A linha tracejada representa a densidade calculada pelo B-S. Painel esquerdo: densidade de preço para uma árvore de três níveis. Painel direito: densidade de preço para uma árvore de seis níveis. (Čížek e Komorád, 2005)