

8. Bibliografia

Adland, R., Jia, H. e Lu, J. (2008), **Price dynamics in the market for Liquid Petroleum Gas transport**, Energy Economics, n.30, PP. 818-828.

Aiube, F. A. L. (2005). **Modelagem dos preços futuros de commodities: abordagem pelo filtro de partículas**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Aiube, F. , Baidya T. e Tito, E. (2006). **Processos estocásticos dos preços das commodities: uma abordagem através do filtro de partículas**, Brazilian Journal of Economics, Vol. 60, No. 03, Rio de Janeiro, Brasil.

ANEEL Agência Nacional de Energia Elétrica. Disponível em <http://www.aneel.gov.br>.

ANP (2001). **Indústria Brasileira de Gás Natural: Regulação Atual e Desafios Futuros**. Série ANP, número II, Rio de Janeiro.

Baldvinsdóttir, E. K. e Palmborg, L. (2011). **On Constructing a Market Consistent Economic Scenario Generator**, Seminars Mathematical Statistics KTH, Sweden.

Bastian-Pinto, C. L., Brandão, L. E. T. e Hahn, W. J. (2007). **Modeling Switching Options using Mean Reverting Commodity Price Models**. 11th Annual International Conference on Real Options at University of California, Berkeley 6-9 June.

Black, F. e Scholes, M. (1973). **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**. Journal of Political Economy, no 81, 1973, pp.637-659.

Boyle, P. A. (1988). **A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables**, Journal of Financial and Quantitative Analysis, n.23, n. 1, p.p. 1-12.

Boyle, P. A., Evnine, J. e Gibbs, S. (1989). **Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims**, Review of Financial Studies, 2, 241-250.

Brennan, M.J. e Schwartz, E.S. (1985). **Evaluating Natural Resource Investment**, Journal of Business, vol.58, no 2, 1985, pp.135-157.

Brandão, L. E. T. (2002). **Uma Aplicação da Teoria das Opções Reais em Tempo Discreto para Avaliação de um Projeto de Concessão Rodoviária**. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Dezembro.

Brandão, L. E. T. e Dyer, J. S. (2009). **Projetos de Opções Reais com Incertezas Correlacionadas**. Base-Revista de Administração e Contabilidade da Unisinos, v. 6, n. 1, pp 19-26, Jan/Abr.

Brandão, L. E. T., Hahn, W. J. e Dyer, J. S. (2005). **Using Binomial Decision Trees to solve Real Options Valuation Problems**. Decision Analysis, v.2, n. 2, pp 69-88, June.

Brigo, D. e Mercurio, F. (2010). **Interest Rate Models – Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit**, Springer Finance – Verlag Berlin Heidelberg New York.

Cartea, A. e Williams, T. (2008). **UK Gas Market: the Market Price of Risk and Applications to Multiple Interruptible Supply Contracts**, Energy Economics, doi: 10.1016/j.eneco.2007.03.001.

Clelow, L. e Strickland, C. (1999). **Valuing Energy Options in a One Factor Model Fitted to Forward Prices**. Work Paper, School of Finance and Economics, University of Technology, Sydney, Australia.

Carvalhinho Filho, J. C. L. (2003). **O valor da flexibilidade em cláusulas “take-or-pay” de contratos para fornecimento de gás natural industrial**. Dissertação de mestrado. São Paulo: FEA/USP.

Copeland, T. e Antikarov, V. (2001). **Real Options – A Practitioner’s Guide**. Editora Texere LLC, New York.

Cortazar, G. e Naranjo, L. (2003). **A Multi-factor Stochastic Model for Estimation Procedure for the Valuation and Hedging of Commodity Contingent Claims**. Working paper, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Cox, J. C., Ross, S. A. e Rubinstein, M. (1979). **Option Pricing: a simplified approach**. Journal of Financial Economics, n. 7, p.p. 229-263.

Dias, M.A.G. (1996). **Investimento sob Incerteza em Exploração e Produção de Petróleo**. Rio de Janeiro. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC - Rio.

_____. (2005). **Opções Reais Híbridas com Aplicações em Petróleo**. Rio de Janeiro. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC - Rio.

Dixit, A.K. e Pindyck R.S. (1994). **Investment under Uncertainty**. Princeton University Press.

Figuerola, M. (2006). **Pricing Multiple Interruptible-Swing Contracts**, Birkbeck, University of London, Working Papers in Economics & Finance.

Gás Brasil, a mídia do gás. Disponível em <http://www.gasbrasil.com.br>.

Gás Net, o site do gás natural. Disponível em <http://www.gasnet.com.br>.

Gibson, R. e Schwartz, E. (1990). **Stochastic Convenience Yield and Pricing of Oil Contingent Claims**, The Journal of Finance 45, pp. 959-976.

Guigues, V., Sagatizabal, C. e Zubelli, J. P. (2010). **Robust Management and Pricing of LNG Contracts With Cancellation Options**, IMPA.

Haff, I.H., Lindqvist, O. e Løland, A. (2007). **Risk Premium in the UK Natural Gas Forward Market**, Energy Economics, doi:10.1016/j.eneco.2007.12.002.

Hahn, W.J. (2005). **A Discrete-Time Approach for Valuing Real Options with Underlying Mean-Reverting Stochastic Processes**, PhD Dissertation, The University of Texas, Austin, May.

Hahn, W. J. e Dyer, J. S. (2008). **Discrete Time Modeling of Mean-Reverting Stochastic Processes for Real Option Valuation**, European Journal of Operational Research, v. 183, n. 2, pp. 534-548.

_____. (2011). **A Discrete Time Approach for Modeling Two-Factor Mean-Reverting Stochastic Processes**, Decision Analysis, articles in advance, pp. 1-13, doi: 10.1287/deca.1110.0209.

Hambly, B., Howison, S. e Kluge, T. (2008). **Modelling spikes and pricing swing options in electricity markets**, Quantitative Finance, RQUF-2007-0090.R1.gz.

Hem, O. D., Svendsen, A., Fleten, S. E. e Gunnerud, V. (2011). **The Option to Switch from Oil to Natural Gas in Active Offshore Petroleum Fields**, Real Options Theory Meets Practice, 15th Annual International Conference, June.

Hlouskova, J., Jeckle, M., Kossmeier, S., Obersteiner, M. e Schnabl, A. (2001). **Real Option Models and Electricity Portfolio Optimization**, First Draft, Institute for Advanced Studies, Vienna.

Hull, J. e White, A. (1994a). **Numerical procedures for implementing term structure models I**, Journal of Derivatives, Fall.

Hull, J. e White, A. (1994b). **Numerical procedures for implementing term structure models II**, Journal of Derivatives, Winter.

Hull, J. (2003). **Options, futures and other derivatives**, 5th edition, Prentice Hall.

Jaillet, P., Ronn, E. I. e Tompaidis, S. (2004). **Valuation of Commodity-Based Swing Options**, Management Science, Jul 2004, vol. 50, n. 7, pp. 909-921.

Kamrad, B. e Ritchken, P. (1991). **Multinomial Approximating Models for Options with k State-variables**. Management Science, 37, 1640-1652.

Lucia, J. J. e Schwartz, E. S. (2001). **Electricity Prices and Power Derivatives: evidence from the Nordic Power Exchange**. Review of Derivatives Research, 5(1):5–50.

Manoliu, M. e Tompaidis, S. (2000). **Energy Futures Prices: Term Structure Models with Kalman Filter Estimation**, Applied Mathematical Finance 49, 21.43.

Marotta, L. L. S. (2011). **Calibração do Modelo de Schwartz-Smith com Filtro de Kalman**, Dissertação de Mestrado em Métodos Matemáticos em Finanças, IMPA, fevereiro.

Mathias, M. C. P. P. (2008). **A Formação da Indústria Global de Gás Natural: Definição, Condicionantes e Desafios**. Tese de Doutorado em Ciências em Planejamento Energético do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Rio de Janeiro, março.

McDonald, R. L. (2006). **Derivatives markets**. Addison Wesley/Pearson Educ., Inc., 2nd Ed., 964 pp.

Merton, R.C. (1973). **An Intertemporal Capital Asset Pricing Model**. Econometrica, vol.41, no 5, September 1973, pp.867-887.

Moresco, P. B. (2007). **Opções Exóticas, Novas Soluções para o Gerenciamento de Risco Cambial**. Departamento de Ciências Administrativas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Myers, S.C. (1977). **Determinants of Corporate Borrowing**. Journal of Financial Economics, no 5, November 1977, pp.147-175.

Nelson, D. B. e Ramaswamy, K. (1990). **Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations n Financial Models**, The Review of Financial Studies, v.3, n.3, p.p. 393-430.

Paddock, J.L., Siegel, D. R. e Smith, J. L. (1988). **Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of offshore Petroleum Leases**. Quarterly Journal of Economics, August 1988, pp.479-508.

Park, F. C. (2003). **Scenario Analysis for Bond and Loan Portfolios**, Capital Markets & Portfolio Research, Inc.

Parsons, C. (2007). **Valuing Commodity Storage Contracts: A Two-Factor Tree Approach**, WTM Energy Software, LLC.

Pindyck, R.S. (1993). **The Present Value Model of Rational Commodity Pricing**, Economic Journal n° 103, May 1993, pp.511-530.

_____. (1999). **The Long Run Evolution of Energy Prices**. The Energy Journal, v.20, n. 2, pp. 1-27.

Pinto, A. C. F. (2006). **Introdução aos Derivativos**. 2 ed. rev. ampl., São Paulo, Thomson Learning, 157 pp.

Pinto, C. L. B. (2009). **Modelagem de Opções Reais com Processos de Reversão à Média em Tempo Discreto: Uma Aplicação na Indústria Brasileira de Etanol**. Rio de Janeiro. Tese de Doutorado, Departamento de Administração, PUC - Rio.

RELATÓRIO DE ATIVIDADES 2012 (2012). Petrobras.

RESENHA ENERGÉTICA BRASILEIRA (2011). Ministério de Minas e Energia.

Schwartz, E. (1997). **The stochastic behavior of commodity prices: implications for valuation and hedging**, Journal of Finance 52, 923.973.

Schwartz, E. e Smith, J. (2000), **Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices**, Management Science 46, 893.911.

Silva Neto, L. A. (1996). **Opções: do Tradicional ao Exótico**. 2ª Ed., Editora Atlas, São Paulo, SP.

Simões, M. D. P., Oliveira, D. L., Pinto, A. C. F., Klotzle, M. C. e Gomes, L. L. (2011). **Opções de Swing no Mercado Brasileiro de Energia Elétrica**. Revista de Economia e Administração, v. 10, n.4, 591-610p, out./dez. 2011.

Sørensen, C. (2002). **Modeling Seasonality in Agricultural Commodity Futures**. Journal of Futures Markets, 22(5):393–426.

Trigeorgis, L. (1993). **Real Options and Interactions with Financial Flexibility**, Financial Management, Autumn, pp. 202-224.

_____. (1996). **Real Options - Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation**. MIT Press, Cambridge, MA, 427 pp.

Tseng, C. e Lin, K. (2007). **A Framework Using Two-Factor Price Lattices for Generation Asset Valuation**, Operations Research, v. 55, n. 2, p.p. 234-251.

Zhang, B. e Oosterlee, C. W. (2010). **An Efficient Pricing Algorithm for Swing Options Based on Fourier Cosine Expansions**, Reports of the Department of Applied Mathematical Analysis, Delft University of Technology, The Netherlands.

9. Apêndice A: Modelos Estocásticos de Fator Único

9.1. Movimento Geométrico Browniano

O Movimento Geométrico Browniano (MGB), um caso particular do Processo de Itô, é um processo muito utilizado no mercado para modelar o comportamento de preço de ações, de preço de *commodities* e de outras variáveis financeiras e econômicas. Em muitos casos, o MGB não se apresenta como melhor opção, este é o mais utilizado devido a sua simplicidade de utilização e pela sua fácil compreensão. Existem restrições quanto ao seu uso, estas limitações vêm do fato desse processo pode divergir quando o valor do ativo em função do tempo, $X(t)$, for conduzido ao infinito, conseqüentemente os valores obtidos pelo modelo poderão não ser muito realistas.

A equação para o valor de uma variável X , que segue o MGB é igual ao do Processo de Itô com algumas substituições:

$$dX = a(X,t)dt + b(X,t)dz$$

Onde os parâmetros representados por $a(X,t)$ e por $b(X,t)$ podem ser substituídos por termos em função do valor de X , ou seja,

$$a(X,t) = \alpha X$$

$$b(X,t) = \sigma X$$

Onde α é a taxa de crescimento ou de tendência de X , enquanto que σ é a volatilidade de X . Assim, baseado em Dixit e Pindyck (1994), tem-se a forma mais conhecida da equação do MGB:

$$dX = \alpha X dt + \sigma X dz$$

Com as seguintes características:

$$E[X(t)] = X_0 e^{\alpha t}$$

$$\text{Var}[X(t)] = X_0^2 e^{2\alpha t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

Espera-se que X cresça exponencialmente à taxa α e que tenha uma distribuição lognormal. Já a variância tende a crescer quando o tempo t tende a infinito.

9.2. Movimento de Reversão à Média

A incerteza a ser modelada pode não necessariamente seguir um MGB, o que é frequente em casos de preços que dependem de um nível de equilíbrio de longo prazo, como é o caso de *commodities* não financeiras. Em se tratando de *commodities* não financeiras, os seus preços no longo prazo tendem a estar relacionados ao custo marginal de produção. Assim, enquanto que no curto prazo esses preços podem variar aleatoriamente, num prazo mais longo eles tendem a retornar para o nível próximo ao seu custo marginal, este processo é denominado Movimento de Reversão à Média (MRM).

A lógica por trás do MRM pode ser explicada pela microeconomia, pois se acredita que os preços das *commodities* têm relação no longo prazo que fazem com que eles retornem para um nível médio. Se os preços estão baixos, a demanda tende a aumentar e a oferta a diminuir, levando a um aumento dos preços. Já se os preços estiverem altos, o inverso acontece.

O MRM aritmético é também chamado de *Ornstein-Uhlenbeck* e é representado pela seguinte equação:

$$dX = \kappa(\bar{X} - X)dt + \sigma dz$$

onde, X = variável estocástica;

κ = velocidade da reversão;

\bar{X} = nível de equilíbrio ou média de longo prazo;

σ = volatilidade;

dz = incremento de Wiener.

Uma das limitações envolvendo o MRM é que pode produzir valores negativos para $X(t)$ os quais apesar de serem aceitáveis para algumas variáveis, de

modo geral são um problema quando se consideram variáveis incertas, tais como preços de *commodities*. Por isso, Dias (1996) defende que na equação acima é comum modelar os preços, P , com reversão usando relações como $X = \ln(P)$ para evitar valores negativos para os preços.

O MRM é um processo de Markov, apesar de seus incrementos não serem independentes. Observa-se que o valor esperado dos incrementos em X depende da diferença entre \bar{X} e X . Além disso, quanto mais distante estiver X de seu valor médio \bar{X} , maior será a probabilidade da variável retornar para o seu nível de equilíbrio. Porém, deve-se ressaltar que, como há incerteza no processo, os preços podem caminhar na direção oposta à tendência de reversão.

Outra medida da velocidade de reversão é o conceito de meia-vida da reversão, H (*half-life*), que fornece uma medida de lentidão do processo. Meia vida é o tempo que a variável leva para percorrer a metade do caminho entre o seu valor corrente e a média de longo prazo. A relação entre a velocidade de reversão κ e a meia vida H é $H = \ln(2)/\kappa$

As propriedades estatísticas do processo de reversão à média são¹:

$$E[X_t] = \bar{X} + (X_0 - \bar{X})e^{-\kappa(t-t_0)}$$

$$Var[X_t - \bar{X}] = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(t-t_0)})$$

Analisando as características acima, pode-se observar que para valores altos da velocidade de reversão ($\kappa \rightarrow \infty$) a variância do processo tende a zero, o que significa que X nunca se desviaria de \bar{X} . Contrariamente, se a velocidade de reversão fosse nula ($\kappa = 0$), a expressão para a variância se resumiria a $\sigma^2(t - t_0)$, o que corresponde à variância do MGB. Sendo assim, a variância de um MRM tende a crescer inicialmente e depois se estabilizar.

¹ O método para obter os momentos probabilísticos de processos estocásticos é através da equação diferencial de densidade de probabilidade ou equação de Kolmogorov. No apêndice do capítulo 3 do Dixit e Pindyck (1994) mostra como chegar na média e na variância através da equação diferencial de Kolmogorov.

10. Apêndice B: Árvores de Eventos

10.1. Árvore Binomial de Cox, Ross e Rubinstein

A árvore binomial de Cox *et al.* (1979) é um modelo considerado bastante intuitivo e se baseia no conceito de neutralidade ao risco². Além de ser muito simples e flexível, sendo aplicado tanto para opções europeias como para americanas, que pagam ou não dividendos, e também para as opções exóticas.

Esse método assume que em um intervalo de tempo Δt (o tempo é dividido em períodos discretos) o preço do ativo objeto (S) pode realizar um movimento de alta (u) ou de baixa (d) com probabilidades q e $(1-q)$, respectivamente³. Sob aversão ao risco, qualquer ativo com risco é precificado como uma expectativa do valor futuro descontado ao valor presente:

$$E(S) = \frac{qS_u + (1-q)S_d}{1+k}$$

onde k é o fator ajustado ao risco (o retorno livre de risco mais um prêmio pelo risco associado).

A partir do argumento de ausência de arbitragem, dados os valores de S , u , e d pode-se substituir as probabilidades q e $(1-q)$ por probabilidades p e $(1-p)$ que permitem mudar o fator de desconto, k por uma taxa livre de risco, r . Estas probabilidades são chamadas probabilidades neutras ao risco.

Para justificar a existência de probabilidades neutras ao risco, considera-se um caso possível de arbitragem: $u > d > 1+r$, onde se poderia tomar emprestado a taxa livre de risco, comprar uma ação e no período seguinte ter um retorno maior que a taxa livre de risco. Isto não seria possível, pois todos os investidores teriam esta estratégia. A taxa livre de risco deve ser ajustada de modo que $u > 1+r > d$.

² Neutralidade ao risco significa que a premissa de ausência de arbitragem é assumida ao longo do processo ao invés do conceito de aversão ao risco.

³ As outras premissas do modelo são: que a taxa livre de riscos é constante; os indivíduos podem emprestar e tomar emprestado à mesma taxa; não existem impostos, custos de transação ou exigências de margem; e a venda a descoberto é permitida sem restrições, com total uso dos seus recursos.

Na figura 22, u e d representam os fatores de subida e descida, respectivamente. Sendo que $d = 1/u$ e S é o preço do ativo no instante inicial. A figura 22 mostra os possíveis valores de S ao longo de dois intervalos de tempo.

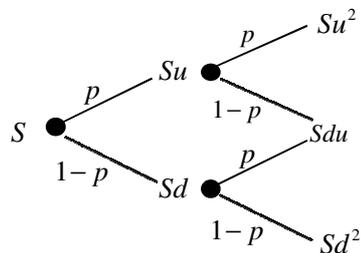


Figura 1 – Árvore Binomial de Cox, Ross e Rubinstein

A medida que se aumenta a discretização do tempo no modelo de Cox *et al.* (1979) converge para a solução dada por Black e Scholes (1973). Eles demonstraram que a equação do MGB poderia ser obtida como um limite contínuo de um caminho aleatório em tempo discreto.

Considerando a equação do MGB:

$$dS = rSdt + \sigma Sdz$$

Que pode ser ligeiramente modificada para levar em consideração os dividendos (δ) pagos. Seja δ uma taxa de dividendos por unidade de tempo, então a equação diferencial estocástica que modela os movimentos nos preços do ativo objeto pode ser rescrita como:

$$dS = (r - \delta)Sdt + \sigma Sdz \therefore v = r - \delta$$

$$\frac{dS}{S} = vdt + \sigma dz$$

Dado que $x = \ln(S)$, deriva-se x em relação a S , $dx/dS = 1/S \therefore dx = dS / S$.

Assim, a equação pode ser rescrita da seguinte forma:

$$dx = vdt + \sigma dz$$

$$\Delta x = v\Delta t + \sigma\Delta z \therefore \Delta t = \frac{T}{n}$$

O valor esperado e a variância são dados por:

$$E(\Delta x) = v\Delta t$$

$$Var(\Delta x) = \sigma^2 \Delta t$$

Lembrando que $E(\Delta z) = 0$ e $Var(\Delta z) = \Delta t$.

Como houve uma troca de variável de estado, a variável x move-se para cima ou para baixo segundo os incrementos $u_x = \ln(u)$ e $d_x = \ln(d)$, respectivamente. As probabilidades neutras ao risco de subida e descida não se modificam.

Analisando a distribuição de probabilidades dos valores futuros de x , através da média e variância de Δx , as expressões abaixo são obtidas:

$$E(\Delta x) = p \ln(u) + (1 - p) \ln(d)$$

$$Var(\Delta x) = p(1 - p)[\ln(u) - \ln(d)]$$

Como a distribuição de probabilidades em cada período da árvore é dada por uma distribuição binomial, quanto maior o número de intervalos de tempo, mais ela se aproxima de uma distribuição normal. Para garantir que ambas as distribuições sejam idênticas, no limite, seus momentos devem ser iguais, ou seja, as médias e as variâncias têm de ser idênticas. Logo,

$$E(\Delta x) = p \ln(u) + (1 - p) \ln(d) = v\Delta t$$

$$Var(\Delta x) = p(1 - p)[\ln(u) - \ln(d)] = \sigma^2 \Delta t$$

De modo a obter uma solução para o sistema acima, Cox *et al.* (1979) acrescentaram uma nova equação $\ln(u) = -\ln(d)$. A seguinte solução foi encontrada para o método binomial de Cox *et al.* (1979):

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{v}{\sigma} \sqrt{\Delta t}$$

10.2. Árvore Binomial de Nelson e Ramaswamy

Nelson e Ramaswamy (1990) propuseram uma metodologia que tem uma ampla utilização. O modelo é uma sequência binomial de n períodos com duração Δt , num horizonte de tempo $T = n \Delta t$. Para um dado processo estocástico, $dX = \mu(X, t)dt + \sigma(X, t)dz$, onde $\mu(X, t)$ e $\sigma(X, t)$ são taxa de crescimento e volatilidade, respectivamente e dz é o incremento do processo padrão de Wiener.

O modelo propõe que:

$$X_t^+ \equiv X + \sqrt{\Delta t} \sigma(X, t) \quad (\text{movimento de subida}),$$

$$X_t^- \equiv X - \sqrt{\Delta t} \sigma(X, t) \quad (\text{movimento de descida}),$$

$$p_t \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu(X, t)}{\sigma(X, t)} \sqrt{\Delta t} \quad (\text{probabilidade de subida}),$$

$$1 - p_t \quad (\text{probabilidade de descida}).$$

A figura 23 pode resumir o modelo.

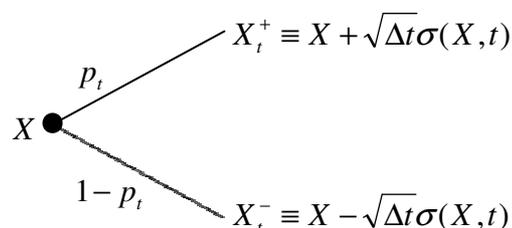


Figura 2 - Árvore Binomial de Nelson e Ramaswamy

O problema é que nesse modelo, a probabilidade P_t pode assumir valores negativos ou superiores a 1, o que não é desejado. Assim, os autores sugerem censurar os valores dessas probabilidades de forma que as probabilidades negativas sejam definidas como zero e as probabilidades maiores que 1, sejam reduzidas para 1. As probabilidades se limitam a faixa de 0 a 1 da seguinte forma:

$$p_t \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu(X,t)}{\sigma(X,t)} \sqrt{\Delta t} & \text{se } 0 \leq p_t \leq 1 \\ 0 & \text{se } p_t < 0 \\ 1 & \text{se } p_t > 1 \end{cases}$$

Reescrevendo em uma única equação,

$$p_t = \max \left[0, \min \left[1, \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu(X,t)}{\sigma(X,t)} \sqrt{\Delta t} \right) \right] \right]$$

Este modelo é bastante abrangente podendo ser utilizado para desenvolver modelos discretos de MRM que tenham as mesmas propriedades desejáveis dos MGB discretos. Sendo assim, para o MRM tem-se que:

$$\mu(X,t) = \kappa(\bar{X} - X_t)$$

$$\sigma(X,t) = \sigma_x$$

Nesse caso, as probabilidades devem ser censuradas da seguinte forma:

$$p_t = \max \left[0, \min \left[1, \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\kappa(\bar{X} - X_t)}{\sigma_x} \sqrt{\Delta t} \right) \right] \right]$$

Segundo Dixit e Pindyck (1994), é preciso levar em consideração o prêmio de risco do processo estocástico x_t (λ_x), assim o MRM neutro ao risco é descrito por:

$$dX_t = \kappa \left[\left(\bar{X} - \frac{\lambda_x}{\kappa} \right) - X_t \right] dt + \sigma_x dz_t$$

Na árvore binomial, o ajuste acontece nas probabilidades,

$$p_t = \max \left[0, \min \left[1, \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\kappa \left[\left(\bar{X} - \frac{\lambda_x}{\kappa} \right) - X_t \right]}{\sigma_x} \sqrt{\Delta t} \right) \right] \right]$$

Nelson e Ramaswamy (1990) demonstram que quando o intervalo de tempo Δt diminui, a precisão do modelo melhora e a árvore binomial converge para uma equação diferencial estocástica.