

3. Árvore de Eventos

A árvore de eventos é uma das metodologias mais usadas no apreçamento de opções, devido a sua facilidade de uso, versatilidade e precisão. Utilizada para modelos de tempo discreto são representados por árvores, com nós de incerteza que descrevem os possíveis comportamentos dos fatores estocásticos, e podem ser representadas de forma simplificada ou por redes com diversas ramificações. A utilização de ramificações é flexível, podendo ser adaptada quando se altera a situação inicial. Essa flexibilidade torna a sua utilização atrativa para aplicações de modelagem de opções. A principal desvantagem surge quando as ramificações atingem grandes dimensões, o que pode dificultar a sua construção e avaliação.

Cox *et al.* (1979) foram os precursores na avaliação de opções através de árvores de eventos, apresentando um modelo que generaliza o resultado de Black e Scholes (1973). Os autores propuseram a modelagem discreta por árvore binomial recombinante para avaliar opções, esse modelo somente se aplica a processos que seguem um MGB. Na abordagem de Cox *et al.* (1979), os nós das ramificações se recombinam, o movimento de subida (u) é o inverso do de descida (d), fazendo com que em cada passo N , obtenham-se $(N+1)$ nós e não $2N$, caso não houvesse recombinação. O desenvolvimento da árvore binomial de Cox *et al.* (1979) se encontra no apêndice B.

Boyle (1988) foi o primeiro a utilizar a abordagem de Cox *et al.* (1979) em um modelo trinomial para avaliação de opções com um ativo objeto e propôs também um modelo pentanomial para avaliar opções com dois ativos objetos. Ao utilizar processos estocásticos de dois fatores, Boyle (1988) introduziu o conceito de árvore bi-variável que foi seguido por Nelson e Ramaswamy (1990) num método de sequência binomial de um modelo abrangente que pode ser utilizado para processos estocásticos que seguem tanto um MGB quanto um MRM discretos. Copeland e Antikarov (2001) apresentaram uma abordagem quadrinomial como uma árvore binária com duas incertezas correlacionadas, ambas seguindo um MGB.

Baseado em árvores quadrimoniais, Hahn (2005) utilizou um modelo com dois fatores de incerteza para modelar o preço do petróleo e calcular uma opção

de abandono de um poço de petróleo. Brandão *et al.* (2005), também usaram árvores binomiais para valorar opções de investimento modelando o preço do petróleo como um MGB. Já Bastian-Pinto *et al.* (2007) desenvolveram uma árvore quadrinomial utilizando uma aproximação para um MRM proposto por Nelson e Ramaswamy (1990), para avaliar uma opção de troca de *input* no setor sucroalcooleiro. Já Brandão e Dyer (2009) modelaram os riscos privado e de mercado de um projeto por dois MGB correlacionados. Mais recentemente Hahn e Dyer (2011) modelaram processos com dois fatores em tempo discreto através de árvores binomiais bi-variáveis, utilizando um formato de árvores bi-dimENSIONAL para os mesmos problemas analisados por Schwartz e Smith (2000).

A primeira generalização para k variáveis de incerteza foi feito por Boyle *et al.* (1989), um caso com três ativos, e não apresentava garantia quanto à positividade do valor das probabilidades. Kamrad e Ritchken (1991) atenderam, de forma mais objetiva e generalizada à demanda por métodos de avaliação de derivativos multidimensionais com a utilização de árvores de eventos.

Um modelo discreto trinomial para um fator como o MRM foi construído por Hull e White (1994a) e usado por Jaillet *et al.* (2004) para a previsão do preço do GN e cálculo de opções de *swing*. Simões *et al.* (2011) também utilizaram um modelo de árvore trinomial para um fator seguindo o MRM a fim de calcular opções de *swing* no mercado brasileiro de energia elétrica. Como extensão do primeiro modelo, Hull e White (1994b), desenvolveram um modelo de árvore trinomial para dois fatores, ambos devem seguir um MRM. Com esse modelo não é possível desenvolver a árvore para o modelo de dois fatores de Schwartz e Smith (2000), onde um fator segue o MGB e outro o MRM.

Árvores trinomiais sugeridas por Hull e White (1994a e 1994b), Clewlow e Strickland (1999) e Tseng e Lin (2007), são de difícil implementação, envolvendo programação complexa e com intensidade computacional. A seção seguinte descreve o modelo discreto de árvores de eventos relevante ao presente trabalho, outras árvores de eventos de interesse estão descritas no apêndice B.

3.1. Árvore Binomial para Dois Fatores – Hahn e Dyer

Como alternativa Hahn e Dyer (2011) desenvolveram um método para a construção de uma árvore binomial usada para o modelo de dois fatores de Schwartz e Smith (2000). Reescrevendo o modelo desenvolvido na seção 2.2.1,

$$\begin{aligned}\ln(S_t) &= Y_t = \chi_t + \xi_t \\ d\chi_t &= -\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dz_\chi \\ d\xi_t &= \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_\xi \\ dz_\chi dz_\xi &= \rho_{\chi\xi} dt\end{aligned}$$

Sendo χ_t as variações de curto prazo dos preços, ξ_t o preço de equilíbrio de longo prazo, os parâmetros κ , μ_ξ , σ_χ e σ_ξ constantes e dz_χ e dz_ξ são processos padrões de Wiener com correlação instantânea $\rho_{\chi\xi}$.

Uma abordagem binomial de duas dimensões pode ser desenvolvida para esse processo, resultando numa árvore com quatro ramificações. Na árvore bi-dimensional, os dois fatores seguem os processos estocásticos independentes e correlacionados. O primeiro passo é construir duas árvores binomiais para os dois processos de ξ_t e χ_t . Na árvore obtida cada nó terá quatro ramificações, devido à combinação dos ramos das árvores de ξ_t e χ_t , como mostra a figura 1.

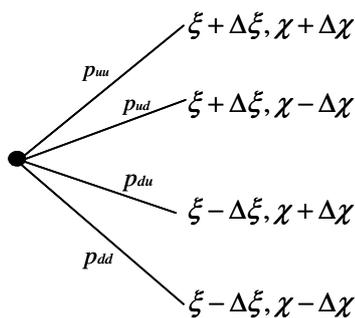


Figura 1 - Ramificações da árvore binomial de dois fatores

Para definir as probabilidades conjuntas para cada um dos nós, Hahn e Dyer (2011) assumem os incrementos ($\Delta\xi$ e $\Delta\chi$) e as tendências (ν_ξ e ν_χ) para cada um dos fatores da seguinte forma:

$$\Delta\xi = \sigma_\xi \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta\chi = \sigma_\chi \sqrt{\Delta t}$$

$$v_\xi = \mu_\xi$$

$$v_\chi = -\kappa\chi_t$$

Essas probabilidades conjuntas das ramificações representam as quatro possíveis combinações de subida e descida dos dois fatores. Usando o mesmo método empregado por Boyle (1988) para uma aproximação lognormal dual, as probabilidades para os quatro nós resultantes podem ser obtidas com a combinação das médias e variâncias dos dois fatores estocásticos, conforme demonstrado por Hahn e Dyer (2008 e 2011). Assim,

$$p_{uu} = \frac{\Delta\xi\Delta\chi + \Delta\chi v_\xi \Delta t + \Delta\xi v_\chi \Delta t + \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t}{4\Delta\xi\Delta\chi}$$

$$p_{ud} = \frac{\Delta\xi\Delta\chi + \Delta\chi v_\xi \Delta t - \Delta\xi v_\chi \Delta t - \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t}{4\Delta\xi\Delta\chi}$$

$$p_{du} = \frac{\Delta\xi\Delta\chi - \Delta\chi v_\xi \Delta t + \Delta\xi v_\chi \Delta t - \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t}{4\Delta\xi\Delta\chi}$$

$$p_{dd} = \frac{\Delta\xi\Delta\chi - \Delta\chi v_\xi \Delta t - \Delta\xi v_\chi \Delta t + \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t}{4\Delta\xi\Delta\chi}$$

Esse modelo é baseado em Nelson e Ramaswamy (1990) para uma aproximação binomial geral. Pode ser necessário induzir um determinado desvio para os resultados de longo prazo nos nós onde as probabilidades sejam maiores que 1 ou menores que zero. Caso a probabilidade calculada, com base nas equações acima, seja maior do que 1, ajusta-se acrescentando um desvio negativo de forma que essa probabilidade passe a adotar o valor de 1. Segundo Hahn e Dyer (2011), a implementação desse modelo discreto é computacionalmente mais eficiente aplicando recombinações bidimensionais. Aplica-se a regra de Bayes para decompor as probabilidades conjuntas no produto das probabilidades marginal e condicional, ou seja, $p(\chi_t, \xi_t) = p(\chi_t | \xi_t) p(\xi_t)$. As probabilidades marginais de subida e descida, em nível de equilíbrio, são respectivamente:

$$p_u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{v_\xi \Delta t}{\Delta \xi}$$

$$p_d = 1 - p_u$$

Portanto, as probabilidades condicionais podem ser calculadas.

$$p_{u|u} = \frac{\Delta \xi (\Delta \chi + \Delta t v_\chi) + \Delta t (\Delta \chi v_\xi + \rho \sigma_\chi \sigma_\xi)}{2 \Delta \chi (\Delta \xi + \Delta t v_\xi)}$$

$$p_{d|u} = \frac{\Delta \xi (\Delta \chi - \Delta t v_\chi) + \Delta t (\Delta \chi v_\xi - \rho \sigma_\chi \sigma_\xi)}{2 \Delta \chi (\Delta \xi + \Delta t v_\xi)}$$

$$p_{u|d} = \frac{\Delta \xi (\Delta \chi - \Delta t v_\chi) + \Delta t (\rho \sigma_\chi \sigma_\xi - \Delta \chi v_\xi)}{2 \Delta \chi (\Delta \xi + \Delta t v_\xi)}$$

$$p_{d|d} = \frac{\Delta \xi (\Delta \chi + \Delta t v_\chi) - \Delta t (\Delta \chi v_\xi + \rho \sigma_\chi \sigma_\xi)}{2 \Delta \chi (\Delta \xi + \Delta t v_\xi)}$$

Esse modelo discreto é uma sequência de dois nós. Um nó binomial para o MGB da variável de curto prazo, ξ , seguido de nós binomiais condicional para o MRM da variável de longo prazo, χ . A solução é representar a árvore como o produto de processo binomial para ξ e um processo binomial condicional para χ , como mostra a figura 2.

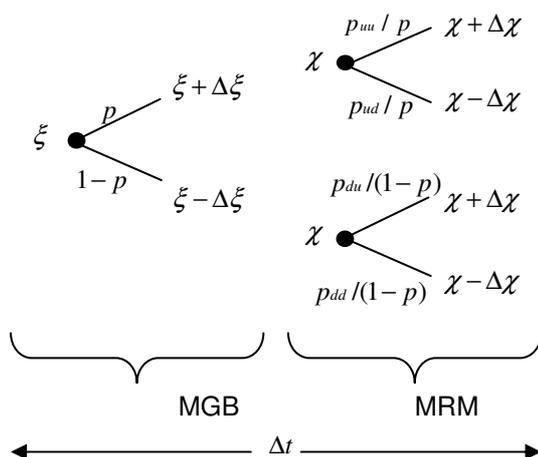


Figura 2 – Ramificações por partes da árvore binomial de dois fatores

Para descontar essa árvore à taxa livre de risco, é necessário considerar os prêmios de risco, λ_χ e λ_ξ . Os prêmios de risco penalizam as tendências dos dois fatores de incerteza da seguinte forma:

$$v_{\chi}^* = -\kappa\chi_t - \lambda_{\chi}$$

$$v_{\xi}^* = \mu_{\xi} - \lambda_{\xi}$$

Sendo assim, de acordo com Pinto (2009), as probabilidades marginais, na forma neutra ao risco, são:

$$p_u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{(\mu_{\xi} - \lambda_{\xi})\sqrt{\Delta t}}{\sigma_{\xi}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{v_{\xi}^* \Delta t}{\Delta \xi}$$

$$p_d = 1 - p_u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{(\mu_{\xi} - \lambda_{\xi})\sqrt{\Delta t}}{\sigma_{\xi}}$$

E as probabilidades condicionais podem ser reescritas da seguinte forma:

$$p_{u|u} = \frac{\Delta \xi (\Delta \chi + \Delta t v_{\chi}^*) + \Delta t (\Delta \chi v_{\xi}^* + \rho \sigma_{\chi} \sigma_{\xi})}{2 \Delta \chi (\Delta \xi + \Delta t v_{\xi}^*)}$$

$$p_{d|u} = \frac{\Delta \xi (\Delta \chi - \Delta t v_{\chi}^*) + \Delta t (\Delta \chi v_{\xi}^* - \rho \sigma_{\chi} \sigma_{\xi})}{2 \Delta \chi (\Delta \xi + \Delta t v_{\xi}^*)}$$

$$p_{u|d} = \frac{\Delta \xi (\Delta \chi - \Delta t v_{\chi}^*) + \Delta t (\rho \sigma_{\chi} \sigma_{\xi} - \Delta \chi v_{\xi}^*)}{2 \Delta \chi (\Delta \xi + \Delta t v_{\xi}^*)}$$

$$p_{d|d} = \frac{\Delta \xi (\Delta \chi + \Delta t v_{\chi}^*) - \Delta t (\Delta \chi v_{\xi}^* + \rho \sigma_{\chi} \sigma_{\xi})}{2 \Delta \chi (\Delta \xi + \Delta t v_{\xi}^*)}$$

Hahn e Dyer (2011) aplicaram esse modelo discreto para o mesmo exemplo discutido por Schwartz e Smith (2000). No presente trabalho será aplicado esse modelo para o preço do GN e avaliação de opções de *swing* em contratos de GN.