2. Processo Estocástico para o Preço do Gás Natural

Visando proporcionar uma base para a compreensão dos fundamentos das metodologias de determinação de preços do GN, é analisado o modelo de dois fatores de Schwartz e Smith (2000) que pode ser utilizado para descrever o comportamento de *commodities*.

2.1. Processos Estocásticos

Um processo estocástico descreve o comportamento de uma variável cujas mudanças são incertas ao longo do tempo, assumindo valores imprevisíveis e envolve tempo e aleatoriedade. Quanto às suas propriedades estatísticas (média e variância, principalmente), pode ser classificado como estacionário, quando mantém as mesmas propriedades ao longo do tempo, ou não estacionário, quando as propriedades mudam ao longo do tempo. Os processos estocásticos podem ser discretos ou contínuos[1], dependendo da variável tempo. Devido à incerteza nos preços futuros, se considera a natureza estocástica da evolução dos preços das *commodities*, através de diferentes modelos estocásticos.

O primeiro trabalho que tratou de modelagem de preços de *commodities* com base em processos estocásticos de preços foi realizado por Brennan e Schwartz (1985). Os autores apresentaram um modelo de fator único para prever o preço futuro do cobre. Valoraram uma mina de cobre considerando a interação entre as opções reais (investimento, parada temporária, reativação e abandono da mina).

Utilizando modelo estocástico de fator único, Dixit e Pindyck (1994) analisaram uma série histórica deflacionada de preços do cobre e argumentaram que o processo de reversão à média[2] é lento e que somente utilizando séries temporais longas, acima de 30 ou 40 anos, é que se poderá observar o comportamento do preço das *commodities*.

---

[1] Processos de tempo contínuo podem ser aproximados através de processos discretos, cuja modelagem é mais simples.

[2] O processo de reversão à média está analisado no apêndice A.

Alguns anos depois Pindyck (1999) apresentou um estudo sobre o comportamento dos preços da energia no mercado norte-americano, utilizando os preços do petróleo, carvão e GN. O objetivo do autor consistiu em obter processos estocásticos compatíveis com o comportamento de longo prazo. Primeiramente, analisou a possibilidade de reversão à média, resultando em uma taxa de reversão lenta e pequena. Além disso, o autor mostrou que é esperado que o nível e a inclinação da linha de tendência flutuem ao longo do tempo. Em função disso, foi proposta uma versão multivariada do modelo de reversão à média incorporando a reversão uma linha de tendência estocasticamente flutuante. Os resultados mostraram que o modelo tem um bom desempenho na previsão dos preços do petróleo, porém menos satisfatórios para o carvão e o GN.

Modelos de um único fator estocástico podem ser considerados limitados, portanto modelos com mais de uma incerteza estocástica devem ser usados em avaliação de opções.

2.2. Modelos de Dois Fatores

Pode-se dizer que trabalhos com modelos de preços à vista de *commodities*, usando mais do que um único fator estocástico, começou com Gibson e Schwartz (1990). Os autores desenvolveram um modelo de dois fatores para análise dos preços de contratos futuros do petróleo da seguinte forma:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma_S dz_s$$
$$d\delta = \kappa(\alpha - \delta)dt + \sigma_\delta dz_\delta$$

Onde os fatores de incerteza são o preço à vista (S) e o retorno de conveniência (δ). O processo estocástico usado para o preço à vista é o Movimento Geométrico Browniano (MGB), com tendência μ e volatilidade σ_S. O retorno de conveniência, um Movimento de Reversão à Média (MRM), com média de longo prazo α, velocidade de reversão κ e volatilidade σ_δ.[3] O retorno de conveniência pode ser considerado como o prêmio (ou benefício) do proprietário

[3] Os modelos de fator único MGB e MRM estão analisados no apêndice A.

do ativo físico, ao contrário daquele que detém apenas um contrato futuro sobre a *commodity*[4]. Esta última variável pode assumir valores negativos, portanto a escolha deste processo é coerente. Gibson e Schwartz (1990) usam a equação que relaciona os preços futuros, *F*, com os preços à vista, *S*:

$$F(S,t) = Se^{(r-\delta)(T-t)}$$

Onde *r* é a taxa livre de risco e (*T-t*) é o tempo entre a maturidade do contrato e o tempo atual.

Posteriormente, Schwartz (1997) analisou o comportamento estocástico dos preços das *commodities*, comparando o desempenho de três modelos. O modelo de um fator considerando que o logaritmo do preço à vista segue um MRM. O segundo modelo com dois fatores estocástico: o preço à vista (*S*) que segue um MGB e o segundo é o retorno de conveniência (δ) que evolui segundo um MRM. Este modelo representa um avanço no modelo de Gibson e Schwartz (1990) e consiste das seguintes equações:

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \delta)dt + \sigma_S dz_s$$
$$d\delta = \kappa(\alpha - \delta)dt + \sigma_\delta dz_\delta$$

Com $dz_S dz_\delta = \rho_{S\delta} dt$, onde $\rho_{S\delta}$ é a correlação entre os processos padrões de Wiener de *S* e δ. O segundo modelo de Schwartz (1997) não usa diretamente a relação entre preço futuro e preço à vista porque modela o preço à vista com a taxa de conveniência dentro da equação do preço. Porém, o autor utiliza os preços futuros para estimar os parâmetros do modelo.

O terceiro modelo agrega ao segundo a taxa de juros como variável estocástica, e esta segue um MRM. Os resultados evidenciaram que o modelo de um fator tem um desempenho fraco. Os modelos de dois e três fatores apresentaram desempenhos equivalentes, porém Schwartz (1997) observa que a taxa de juros como um fator estocástico agrega pouca informação e pouca

---

[4] Para uma maior compreensão do papel do retorno de conveniência, veja o próprio artigo de Gibson e Schwartz (1990).

melhoria frente ao segundo modelo, principalmente em face de maior complexidade e intensidade computacional que o terceiro modelo exige.

Já Schwartz e Smith (2000) propuseram um modelo de dois fatores semelhante ao de Schwartz (1997), porém, neste modelo o logaritmo do preço à vista é decomposto por dois fatores estocásticos, as variações de curto prazo no preço e os preços de equilíbrio. A primeira é modelada por um MRM do tipo Ornstein-Uhlenbeck e a segunda é modelada por um MGB, onde ambas são correlacionadas. Os autores usaram na análise dados de contratos futuros de petróleo, a mesma base de dados de Schwartz (1997). Este modelo é formalmente equivalente ao modelo de Gibson e Schwartz (1990), mas apresenta vantagens como, por exemplo, não faz uso diretamente do conceito de retorno de conveniência que é abstrato. Na próxima seção é detalhado este modelo com todo o equacionamento desenvolvido por Schwartz e Smith (2000).

Posteriormente, Manouli e Tompaidis (2000) usaram o modelo de Schwartz e Smith (2000) para analisar o comportamento dos preços do GN e incluíram uma função determinística para descrever a sazonalidade. Os parâmetros de reversão encontrados foram significantes. Numa comparação entre modelos de um e dois fatores através do erro de previsão um passo à frente, mais uma vez os resultados mostraram que o modelo de dois fatores permite melhor ajuste que o modelo de um fator.

Lucia e Schwartz (2001) apresentaram um caso sobre os derivativos no setor de energia elétrica, usando os modelos de um e de dois fatores. A derivação dos modelos é similar à usada por Schwartz e Smith (2000). No modelo de um fator é usado o MRM, já no modelo de dois fatores são usados os MRM e o MGB. Em ambos foi incluída uma componente sazonal com variáveis *dummies* e funções senoidais. Os resultados mostraram que os parâmetros de sazonalidade são significantes nos preços de energia elétrica. Esta sazonalidade é importante na definição de como os preços dos derivativos de energia são formados. O estudo conclui que outros modelos também poderiam ser especificados tais como um processo de reversão para a volatilidade e a inclusão de saltos no processo.

Sørensen (2002) apresentou um estudo sobre o comportamento estocástico dos preços futuros de *commodities* agrícolas. Usou o modelo de dois fatores de Schwartz e Smith (2000) introduzindo uma componente determinística para modelar a sazonalidade. A sazonalidade foi modelada por uma combinação linear de funções trigonométricas com frequências sazonais. Os resultados da estimação mostraram que as componentes sazonais acarretaram um pico de preços dois a três meses antes do período de colheita, atingindo valores mínimos no fim da safra. Esses padrões se justificam para manter o equilíbrio entre a oferta e a demanda.

Um modelo de multifatores foi proposto por Cortazar e Naranjo (2003) para estimar o preço à vista da *commodity* baseado nas informações dos preços futuros. Basicamente este artigo expande os modelos de dois e três fatores para *N* fatores, ou seja, *N* variáveis estocásticas e não observáveis. O logaritmo do preço à vista é a soma destes *N* fatores mais um termo de tendência. Cada um dos fatores evolui segundo um MRM do tipo Ornstein-Uhlenbeck. Para ilustrar a utilização do modelo, os autores fazem uma aplicação para o caso de quatro fatores usando dados de preços diários de contratos futuros de petróleo. Os resultados evidenciaram que todos os parâmetros de reversão são altamente significantes.

Ainda se baseando no modelo de Schwartz e Smith (2000), Aiube *et al.* (2006) propuseram uma extensão desse modelo, incorporando saltos nas variações de curto prazo para analisar os preços do petróleo. Segundo os autores, a dinâmica proposta com saltos restringe o uso do filtro de Kalman como metodologia de estimação, por isso, aplicou-se o filtro de partículas. Como resultado, a comparação dos dois modelos com e sem saltos mostrou que a inclusão dos saltos explica melhor a estrutura dos preços do petróleo.

O modelo de dois fatores de Schwartz e Smith (2000) foi usado em outros diversos trabalhos mais recentes para o GN, como por exemplo, em Cartea e Williams (2008), Pinto (2009), Guigues *et al.* (2010), Hem *et al.* (2011), Marotta (2011).

2.2.1. O Modelo de Dois Fatores de Schwartz e Smith

Com base no MGB, toda variação é um choque permanente na tendência de longo prazo projetado, enquanto que o MRM puro assume exatamente o oposto, ou seja, cada oscilação é só um desvio temporário do previsível nível de equilíbrio de longo prazo. Segundo Dias (2005), um ponto de vista mais razoável seria um modelo que não fosse nem tão imprevisível quanto o MGB e nem tão previsível quanto o MRM. Em determinados casos seria mais realista combinar um processo de MRM com um MGB ou então adicionar um processo de saltos. Uma das sugestões é o modelo de dois fatores de Schwartz e Smith (2000), um modelo de reversão em direção a um nível estocástico de equilíbrio de longo prazo com variações de curto prazo nos preços. Este é o modelo aplicado para modelar o preço do GN no presente trabalho, adicionando-se uma função determinística de sazonalidade.

No Modelo de dois fatores de Schwartz e Smith (2000), os autores decompõem o logaritmo do preço à vista de uma *commodity* (S_t) em dois fatores não observáveis, denominados de variações de curto prazo dos preços (χ_t) e o preço de equilíbrio (ξ_t). Tais fatores devem ser estimados a partir de observações dos preços nos mercados futuros, para depois se determinar o preço à vista.

O modelo considera que a variável χ_t evolui segundo o MRM de Ornstein-Uhlenbeck, sendo um caso particular onde $\bar{\chi}_t = 0$. Ou seja, são choques transitórios e que revertem à média zero, tais como efeitos de variações temporárias de estoque e demanda e variações climáticas. Já a variável ξ_t segue um MGB e representa choques permanentes como, por exemplo, mudanças estruturais nos custos de produção, expectativas de exaustão de reservas e inovações tecnológicas[5]. Equacionado por:

[5] Os modelos de fator único MGB e MRM estão analisados no apêndice A.

$$\begin{aligned}
&\ln(S_t) = f(t) + \chi_t + \xi_t \\
&d\chi_t = -\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dz_\chi \\
&d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_\xi \\
&dz_\chi dz_\xi = \rho_{\chi\xi} dt
\end{aligned}$$

Onde κ é a velocidade de reversão, σ_χ é a volatilidade do processo de χ_t, dz_χ é o incremento do processo padrão de Wiener, μ_ξ é a tendência (*drift*) do processo de ξ_t; σ_ξ e dz_ξ são a volatilidade do processo de ξ_t e o incremento do processo padrão de Wiener, respectivamente. A correlação entre as duas variáveis estocásticas é representada por $\rho_{\chi\xi}$. E *f(t)* é uma função determinística que descreve a sazonalidade em *t* e pode ser introduzida ao modelo de Schwartz e Smith (2000).

Para encontrar a solução do processo que modela as variações de preços no curto prazo, χ_t, aplica-se o Lema de Itô na função $g(\chi,t) = e^{\kappa t}\chi_t$,

$$d(e^{\kappa t}\chi_t) = \kappa e^{\kappa t}\chi_t dt + e^{\kappa t} d\chi_t = \kappa e^{\kappa t}\chi_t dt + e^{\kappa t}(-\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dz_\chi)$$

Integrando ambos os lados de *t* até *T*, tem-se que:

$$\begin{aligned}
&e^{\kappa T}\chi_T - e^{\kappa t}\chi_t = \sigma_\chi \int_t^T e^{\kappa s} dz_\chi(s) \\
&e^{\kappa T}\chi_T = e^{\kappa t}\chi_t + \sigma_\chi \int_t^T e^{\kappa s} dz_\chi(s)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\chi_T = e^{-\kappa(T-t)}\chi_t + \sigma_\chi e^{-\kappa T}\int_t^T e^{\kappa s} dz_\chi(s)$$

Agora, pode-se calcular a média condicionada a χ_t:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[\chi_T|\chi_t] = \mathrm{E}\left[e^{-\kappa(T-t)}\chi_t + \sigma_\chi e^{-\kappa T}\int_t^T e^{\kappa s} dz_\chi(s)|\chi_t\right] \\
&\mathrm{E}[\chi_T|\chi_t] = e^{-\kappa(T-t)}\chi_t
\end{aligned}$$

Esse é o valor esperado obtido, pois $\int_t^T e^{\kappa s} dz_\chi(s)$ trata-se da integral de Itô cujo valor esperado é zero.

E a variância condicionada a χ_t é calculada da seguinte forma:

$$Var[\chi_T | \chi_t] = Var\left[e^{-\kappa(T-t)} \chi_t + \sigma_\chi e^{-\kappa T} \int_t^T e^{\kappa s} dz_\chi(s) | \chi_t \right]$$
$$Var[\chi_T | \chi_t] = \sigma_\chi^2 e^{-2\kappa T} \int_t^T e^{2\kappa s} ds$$

Portanto,

$$Var[\chi_T | \chi_t] = [1 - e^{-2\kappa(T-t)}] \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa}$$

Seguindo passos semelhantes, calcula-se a solução do processo que modela as variações de preços no longo prazo, ξ_t, integrando o MGB de *t* até *T*.

$$\int_t^T d\xi_s = \int_t^T \mu_\xi ds + \sigma_\xi \int_t^T dz_\xi(s)$$

$$\xi_T = \xi_t + \mu_\xi (T-t) + \sigma_\xi \int_t^T dz_\xi(s)$$

Com base na equação acima, calculam-se a média e a variância condicionadas,

$$E[\xi_T | \xi_t] = \xi_t + \mu_\xi (T-t)$$

$$Var[\xi_T | \xi_t] = \sigma_\xi^2 (T-t)$$

Como o modelo de Schwartz e Smith (2000) assume que há correlação entre as duas variáveis estocásticas, $\rho_{\chi\xi}$, deve-se calcular a covariância desses processos como:

$$
\begin{aligned}
Cov[\chi_T,\xi_T] &= E[(\chi_T - E[\chi_T])(\xi_T - E(\xi_T))] \\
&= E\left[\sigma_\chi e^{-\kappa T}\int_t^T e^{\kappa s} dz_\chi(s)\sigma_\xi \int_t^T dz_\xi(s)\right] \\
&= \sigma_\chi e^{-\kappa T}\sigma_\xi \rho_{\chi\xi}\int_t^T e^{\kappa s} ds \\
&= \left(1-e^{-\kappa(T-t)}\right)\frac{\sigma_\chi \sigma_\xi \rho_{\chi\xi}}{\kappa}
\end{aligned}
$$

Portanto, a matriz variância-covariância é:

$$
Cov[\chi_T,\xi_T] = \begin{bmatrix} \left(1-e^{-2\kappa(T-t)}\right)\dfrac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} & \left(1-e^{-\kappa(T-t)}\right)\dfrac{\sigma_\chi \sigma_\xi \rho_{\chi\xi}}{\kappa} \\ \left(1-e^{-\kappa(T-t)}\right)\dfrac{\sigma_\chi \sigma_\xi \rho_{\chi\xi}}{\kappa} & \sigma_\xi^2 (T-t) \end{bmatrix}
$$

Dado que os processos χ_t e ξ_t têm distribuição normal (veja Schwartz e Smith (2000)),

$$
E[\ln(S_T)|S_t] = e^{-\kappa(T-t)}\chi_t + \xi_t + \mu_\xi (T-t)
$$

$$
\begin{aligned}
Var[\ln(S_T)|S_t] &= Var[\chi_T|\chi_t] + Var[\xi_T|\xi_t] + 2Cov[(\chi_t,\xi_t)] \\
&= \left(1-e^{-2\kappa(T-t)}\right)\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2(T-t) + 2\left(1-e^{-\kappa(T-t)}\right)\frac{\sigma_\chi \sigma_\xi \rho_{\chi\xi}}{\kappa}
\end{aligned}
$$

E pela propriedade de lognormalidade:

$$
\begin{aligned}
E[S_T] &= \exp\left[E[\ln(S_t)] + \frac{1}{2}Var[\ln(S_t)]\right] \\
&= \exp\Bigg[e^{-\kappa(T-t)}\chi_t + \xi_t + \mu_\xi(T-t) + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left[\left(1-e^{-2\kappa(T-t)}\right)\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2(T-t) + 2\left(1-e^{-\kappa(T-t)}\right)\frac{\sigma_\chi \sigma_\xi \rho_{\chi\xi}}{\kappa}\right]\Bigg]
\end{aligned}
$$

Para *commodities* como o GN, é geralmente aceito que o preço à vista não é observável. Sendo assim, um conjunto de contratos futuros pode ser usado para calibrar o modelo, com base na medida neutra ao risco. Formalmente, $F_{t,T} = E[S_T|S_t]$ na medida neutra ao risco, onde $F_{t,T}$ é o preço do contrato futuro no tempo t com maturidade no tempo T ($0 \leq t \leq T$). A fim de valorar os contratos futuros de *commodities*, utiliza-se a versão neutra ao risco do modelo de Schwartz e Smith (2000), introduzindo dois parâmetros constantes analisados como prêmio de risco para cada um dos fatores de incerteza, λ_χ e λ_ξ. A versão neutra ao risco pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} d\chi_t &= (-\kappa\chi_t - \lambda_\chi)dt + \sigma_\chi dz_\chi^* \\ d\xi_t &= (\mu_\xi - \lambda_\xi)dt + \sigma_\xi dz_\xi^* \end{aligned}$$

Onde dz_χ^* e dz_ξ^* são incrementos correlacionados, $dz_\chi^* dz_\xi^* = \rho_{\chi\xi}dt$.

No processo neutro ao risco, o logaritmo do preço à vista, $\ln(S_t) = \chi_t + \xi_t$, possui distribuição normal com as seguintes média e variância:

$$\begin{aligned} &E[\ln(S_T|S_t)] = e^{-\kappa(T-t)}\chi_t - \frac{\lambda_\chi}{\kappa}(1-e^{-\kappa(T-t)}) + \xi_t + (\mu_\xi - \lambda_\xi)(T-t) \\ &Var[\ln(S_T)|S_t] = Var[\ln(S_T)|S_t] = Var[\chi_T|\chi_t] + Var[\xi_T|\xi_t] + 2Cov[(\chi_T, \xi_T)] \end{aligned}$$

Utilizando a relação entre os momentos da distribuição lognormal e da normal, segue a expressão para o valor dos contratos futuros:

$$\begin{aligned} \ln(F_{t,T}) &= \ln(E[S_T|S_t]) \\ &= E[\ln[S_T|S_t]] + \frac{1}{2}Var[\ln[S_T|S_t]] \\ &= e^{-\kappa(T-t)}\chi_t + \xi_t + (\mu_\xi - \lambda_\xi)(T-t) - (1-e^{-\kappa(T-t)})\frac{\lambda_\chi}{\kappa} \\ &+ \frac{1}{2}\left[(1-e^{-2\kappa(T-t)})\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2(T-t) + 2(1-e^{-\kappa(T-t)})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{\kappa}\right] \end{aligned}$$

Esta é a equação deduzida por Schwartz e Smith (2000). Já que o preço à vista das *commodities* não é observável, através da máxima verossimilhança usando o filtro de Kalman podem-se estimar as variáveis não observadas e os parâmetros do modelo, com base num conjunto de contratos futuros.