

3 Referencial Teórico

3.1 A Teoria de Opções Reais

Avaliações tradicionais, como o valor presente líquido (VPL), taxa interna de retorno (TIR), fluxo de caixa descontado (FCD), normalmente desconsideram a possibilidade de se ter uma opção na vida útil de um projeto. No entanto, a incerteza e o risco presentes em um projeto criam não só a alternativa de exercer uma opção, como também atribuem mais valor a ela. A partir dessas considerações surge a Teoria de Opções Reais (TOR), que é uma metodologia moderna para análise econômica de projetos e decisões de investimento sob incerteza.

Essa metodologia é capaz de fornecer valor às flexibilidades embutidas em investimentos que possuem três importantes características: irreversibilidade, incerteza e o momento ótimo (ou *timing*). Para Dias (1996), a irreversibilidade pode ser parcial ou total, ou seja, depois de feito o investimento, não é possível recuperar todo ou maior parte do capital investido. Já a incerteza quanto ao futuro sobre o investimento é a fonte principal de riscos, e esta está presente na variável estocástica (neste estudo o preço da *commodity*). E, finalmente, o *timing*, que é o momento ótimo para o exercício da opção. Essas características fazem com que a oportunidade de investimento seja análoga a uma opção financeira.

Uma opção financeira é um contrato financeiro que dá ao seu titular o direito, e não a obrigação, de exercer a opção. Ela pode ser de dois tipos: opção de compra (*call option*) e a opção de venda (*put option*). Na opção de compra é concedido o direito de comprar um ativo em uma certa data, por determinado preço, já na opção de venda é dado o direito de vender o ativo em uma certa data, por um determinado preço. O preço do contrato é chamado “preço de exercício”, e ele pode ser exercido basicamente de duas formas: somente na data de vencimento (expiração), neste caso trata-se da opção europeia ou em qualquer data até o vencimento, opção americana.

Pessoa (2011) cria o Quadro 3.1 que é capaz de sintetizar essa relação entre as opções reais e as opções financeiras:

Opção Financeira	Opção Real
Preço da Ação	Valor do Projeto
Preço de Exercício da Opção	Valor do Investimento no Projeto
Taxa de Dividendos da Ação	Fluxo de Caixa gerado pelo Projeto
Taxa Livre de Risco	Taxa Livre de Risco
Volatilidade dos Retornos da Ação	Volatilidade do Valor do Projeto
Tempo de Expiração da Opção	Tempo de Expiração da Oportunidade de Investimento

Quadro 3.1: Analogia entre opções reais e financeiras.

Fonte: Pessoa (2011) adaptado de Rigolon (1999).

Dias (2011), reforça que as diferenças entre os tipos de opções devem ser respeitadas:

1. As opções financeiras são geralmente de curto prazo, enquanto as opções reais podem ter duração até mesmo perpétua.
2. Ativos financeiros, como ações, não podem ter valores negativos, já em um projeto isso pode ocorrer.
3. Opções reais são mais complexas que as financeiras: o preço de exercício pode ser incerto, é comum ter opções reais compostas, presença de incertezas técnicas além da de mercado, e iterações com outras firmas.
4. No exercício de opções reais pode existir o tempo de construção.

Ainda para esse autor, as opções reais podem ser entendidas como um problema de otimização. É um problema de maximização do VPL através do gerenciamento ótimo das opções relevantes (flexibilidades gerenciais). Neste caso, a função objetivo estaria sujeita às incertezas de mercado, incertezas técnicas, restrições físicas, ambientais, legais, éticas, gerenciais, dentre outras.

Quanto aos tipos/classificação das opções reais, elas podem ser dadas por:

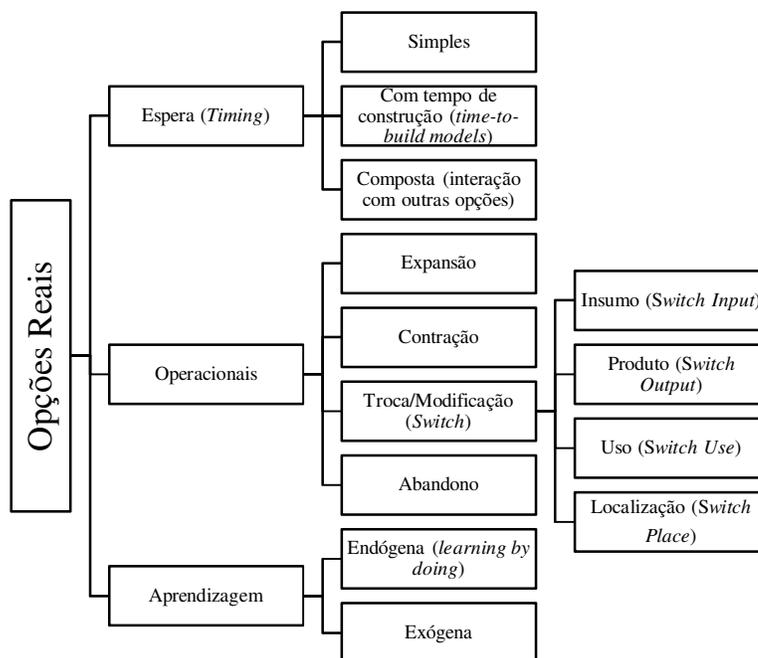


Figura 3.1: Tipos/Classificação de Opções Reais.

Fonte: Dias (2011).

Neste estudo, o tipo de opção a ser utilizada será a de troca de insumos (*Switch Input*), um subgrupo da Opção de troca (*Switch Option*). Para este tipo de opção, as ações gerenciais são tomadas devido à variação de preço de insumos de natureza estocástica, de forma que seja menos custoso e mais lucrativo para o produtor/consumidor de determinado produto. O funcionamento do processo de acordo com o *mix de input* pode ser observado na Figura 3.2 que segue:

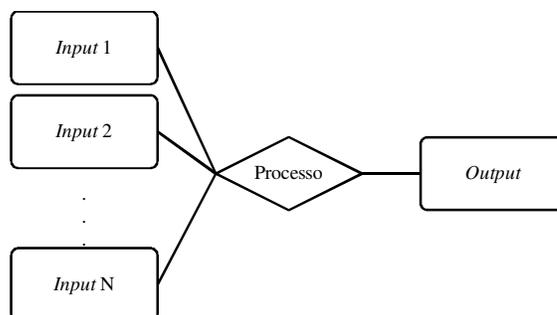


Figura 3.2: Funcionamento do processo para opção de troca de insumo.

Fonte: Pessoa (2011).

Para a opção associada ao carro *Flex*, os *inputs* disponíveis são os dois tipos de combustíveis, etanol hidratado e gasolina C, que são capazes de gerar energia para mover o automóvel (*output*). Esta opção é valiosa por possibilitar alterar o *mix* de produtos de acordo com o comportamento do mercado, e ainda, não há custo de troca de insumos, o que beneficia ainda mais o consumidor.

O cálculo do valor dessa opção depende da definição do processo estocástico capaz de retratar a incerteza do preço futuro do ativo, e para isso deve-se escolher o processo mais adequado para a modelagem da distribuição de probabilidades de ocorrência desses preços. Segundo Bastian-Pinto (2009), a correta modelagem do comportamento de uma variável estocástica é fundamental na avaliação por Opções Reais, pois a negligência desse aspecto pode gerar resultados enganosos, seja super ou sub dimensionando o real valor da opção.

3.2 Processos estocásticos e Lema de Itô

Um processo estocástico descreve o comportamento de uma variável cujas mudanças são incertas ao longo do tempo, ou seja, é um processo aleatório em função do tempo. Segundo Dias (2011), um processo estocástico $X(t)$ pode ser entendido como:

Processo estocástico = Tempo + Aleatoriedade

Em um intervalo de tempo contínuo, dt , a variação de uma variável pode ser interpretada como (Dias, 2011):

$$d(\text{variável}) = \text{Fator} \times d(\text{tempo}) + \text{Fator} \times d(\text{aleatoriedade})$$

Além disso, os processos estocásticos podem ser classificados como de tempo contínuo ou discreto, se contínuo as mudanças podem ocorrer em qualquer tempo, caso contrário, elas só acontecem em pontos fixos do tempo. Já as variáveis associadas a esse processo podem ser contínuas, ou seja, que variam em

um intervalo infinitesimal, ou discretas, que podem ser observadas somente em valores discretos.

Para Dias (1996), os três principais processos estocásticos de aplicações em finanças são: o Movimento Geométrico Browniano (MGB); o Movimento de Reversão à Média (MRM); e o Movimento de Saltos (*jump*) ou Processo de *Poisson*, geralmente associado ao MGB. Mas, para a compreensão desses modelos, é fundamental a introdução de outros processos que servem como base para eles, desta forma será feita apresentação do Processo de Markov, Processo de Wiener, Movimento Browniano com *drift*, Processo de Itô e o Lema de Itô. E, em seguida, os processos estocásticos de MGB e MRM serão detalhados.

3.2.1 Processo de Markov

O Processo de Markov é um processo estocástico em que os estados anteriores da variável são indiferentes para a determinação de estados futuros, somente o estado atual é relevante para definir a evolução futura do processo, isto é, em um processo de Markov a evolução de uma variável independe do seu passado, desde que se saiba o valor corrente.

Formalmente pode ser representado por:

$$\begin{aligned} P[X(t_{k+1}) \leq X(t_{k+1}) | X(t_k) = X_k, X(t_{k-1}) = X_{k-1}, \dots, X(t_1) = X_1, X(t_0) = X_0] \\ = P[X(t_{k+1}) \leq X(t_{k+1}) | X(t_k) = X_k] \end{aligned}$$

$$\text{Para todo } t_0 \leq t_1 \leq \dots t_k \leq t_{k+1} \quad (3.1)$$

Ou seja, a distribuição de probabilidade de uma v.a. $X(t_{k+1})$ depende somente de $X(t_k)$ e não do que ocorreu antes do tempo t_k , como pode ser visto na equação (3.1) acima. Com isso, o valor corrente da variável estocástica será tudo o que se precisa para fazer a previsão de seu futuro. Essa propriedade é importante, pois simplifica a análise de um processo estocástico.

De acordo com Dixit & Pindyck (1994), os preços das ações são frequentemente modelados como um Processo de Markov, com base de que a informação pública é rapidamente incorporada ao preço corrente desse ativo, logo

os preços antigos não possuem nenhum valor de previsão. O processo de Markov é consistente com a forma fraca de eficiência de mercado, ou seja, o preço atual incorpora todas as informações contidas em seu histórico de preços. Na forma franca de eficiência de mercado, não se requer, por exemplo, que esteja contida a análise de informações de balanço ou informações privadas.

3.2.2 *Processo de Wiener*

O processo de Wiener também conhecido como Movimento Browniano é processo estocástico em tempo contínuo com três importantes propriedades:

1. É um processo de Markov, ou seja, o valor da variável corrente independe da trajetória dos preços no passado;
2. Possui incrementos independentes, o que significa que a variação ocorrida num intervalo de tempo é independente da ocorrida em qualquer outro intervalo de tempo;
3. Os incrementos possuem distribuição normal com parâmetros que dependem somente do intervalo de tempo (incrementos estacionários).

Seja $z(t)$ um processo de Wiener no tempo t , então, qualquer variação em z , Δz (correspondente ao intervalo de tempo Δt), deve satisfazer as seguintes condições:

1. A relação entre Δz e Δt deve ser dada por: $\Delta z = \varepsilon(t)\sqrt{\Delta t}$, onde $\varepsilon(t) \sim N(0,1)$;
2. A variável aleatória $\varepsilon(t)$ não possui correlação serial, ou seja, $E[\varepsilon(t)\varepsilon(s)] = 0$ para $t \neq s$. Isso significa que os valores de Δz para dois intervalos de tempo diferentes são independentes, desta forma $z(t)$ segue um processo de Markov.

É comum escrever expressões utilizando o incremento Browniano em tempo contínuo, e este é obtido através da condição (1) acima, quando Δt se torna um número infinitesimalmente pequeno (Dixit & Pindyck, 1994):

$$dz(t) = \varepsilon(t)\sqrt{dt}, \text{ onde } \varepsilon(t) \sim N(0,1) \quad (3.2)$$

Aplicando-se o Teorema do Limite Central¹⁸ à somatória de todos os intervalos de tempo dt , pode-se dizer que dz , também segue uma distribuição normal com média 0 e variância dt . Ou seja, visto que $\varepsilon(t) \sim N(0,1)$, tem-se que:

$$E(dz) = 0$$

$$\text{Var}(dz) = E[(dz)^2] - [E(dz)]^2 = E[(dz)^2] = dt$$

Trata-se, portanto, de uma variável não tendenciosa (média zero) e não diferenciável em relação ao tempo. A importância do desvio padrão dessa distribuição ser \sqrt{dt} pode ser observada em intervalos de tempo pequenos, pois, neste caso, o desvio padrão será muito maior que o movimento do termo de tendência, isto é, para um dt pequeno, \sqrt{dt} será muito maior, o que gerará o movimento serrilhado do processo de Wiener.

3.2.3 Movimento Browniano com drift

O Movimento Browniano com *drift*¹⁹, é mais um processo de Markov, ou seja, independe dos seus preços passados, desde que se saiba o valor corrente. Sua equação estocástica é dada por (Dixit & Pindyck, 1994):

$$dX = \alpha dt + \sigma dz \quad (3.3)$$

¹⁸ Em teoria de probabilidades, o teorema do limite central afirma que a soma de muitas variáveis independentes aleatórias e com a mesma distribuição de probabilidade sempre tende a uma distribuição normal.

¹⁹ Em Dias (2011) este processo é tratado como Movimento Aritmético Browniano (MAB).

Onde α é o *drift*, σ a volatilidade e $dz \sim N(0,1)$.

Ele possui como valor esperado αdt e variância $\sigma^2 dz$. Que podem ser obtidos como segue:

$$\begin{aligned} E(dX) &= E(\alpha dt + \sigma dz) = E(\alpha dt) + E(\sigma dz) \\ &= \alpha E(dt) + \sigma E(dz) = \alpha dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(dX) &= E((dx - E(dx))^2) = E((dx - \alpha dt)^2) \\ &= E((\alpha dt + \sigma dz - \alpha dt)^2) = E((\sigma dz)^2) \\ &= \sigma^2 dz^2 = \sigma^2 dt \end{aligned}$$

3.2.4 Processo de Itô

O Processo de Itô, também chamado de Processo Browniano Generalizado pode ser representado pela seguinte equação em tempo contínuo (Dixit & Pindyck, 1994):

$$dX = a(X, t)dt + b(X, t)dz \quad (3.4)$$

Onde:

X = variável aleatória no instante t ;

a = *drift* ou tendência instantânea do Processo de Itô;

dt = variação instantânea do tempo;

b = volatilidade estimada de dX no instante t ;

dz = incremento de Wiener (incremento aleatório com média zero e variância dt)

Como pode ser visto na equação (3.4), trata-se de um Processo Generalizado de Wiener, pois o seu *drift* e volatilidade, a e b respectivamente, são funções da variável estocástica X e do tempo t .

A variação infinitesimal ocorrida na variável X (dX) durante o intervalo de tempo dt deve-se a uma parcela de valor esperado, também chamada de tendência, e uma parcela de termo aleatório, proporcional ao incremento de Wiener dz . O valor esperado de dX é igual a $a(X,t)dt$ e a sua variância é dada por $b^2(X,t)dt$. Conforme pode se observado a seguir:

$$\begin{aligned} E(dX) &= E(a(X,t)dt + b(X,t)dz) = E(a(X,t)dt) + E(b(X,t)dz) \\ &= a(X,t)E(dt) + b(X,t)E(dz) = a(X,t)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(dX) &= E((dx - E(dx))^2) = E((dx - a(X,t)dt)^2) \\ &= E((a(X,t)dt + b(X,t)dz - a(X,t)dt)^2) = E((b(X,t)dz)^2) \\ &= b^2(X,t)dz^2 = b^2(X,t)dt \end{aligned}$$

3.2.5 Lema de Itô

Tanto os Processos de Itô quanto os Processos de Wiener são processos estocásticos em tempo contínuo, que não possuem derivada convencional em relação ao tempo, o que impossibilita a utilização de regras ordinárias de cálculo. Para resolver isso, o Lema de Itô é utilizado.

O Lema de Itô pode ser entendido como uma versão da Expansão de Taylor para o cálculo estocástico. Para entender sua aplicação, considere a variável X que segue o Processo de Itô dado por (3.4):

$$dX = a(X,t)dt + b(X,t)dz, \text{ onde, } dz = \varepsilon\sqrt{dt}, \varepsilon \sim N(0,1)$$

$$\text{Assim, } dX = a(X,t)dt + b\varepsilon\sqrt{dt}.$$

Através do Lema de Itô, que provém de uma expansão de Taylor, pode-se obter a função, $Y(X, t)$:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial X} dX + \frac{\partial Y}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} dX^2 \quad (3.5)$$

Onde,

$$\begin{aligned} dX^2 &= (a(X, t)dt + b(X, t)dz)^2 \\ &= [a(X, t)]^2 dt^2 + 2a(X, t)b(X, t)dt dz + [b(X, t)]^2 dz^2 . \\ &= b^2(X, t)dz^2 = b^2 dt \end{aligned}$$

Substituindo dX e dX^2 na equação do Lema de Itô (3.5), obtêm-se a diferencial da função Y :

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial Y}{\partial X} (a(X, t)dt + b(X, t)dz) + \frac{\partial Y}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} b^2 dt \\ dY &= \left(a(X, t) \frac{\partial Y}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} b^2(X, t) \right) dt + b(X, t) \frac{\partial Y}{\partial X} dz \quad (3.6) \end{aligned}$$

Quando aplicada a simulação de Monte Carlo (método a ser visto ainda neste capítulo) não é necessária a utilização do Lema de Itô, mas seus efeitos podem ser vistos nos resultados.

3.2.6 Movimento Geométrico Browniano

O Movimento Geométrico Browniano (MGB) é o mais popular na modelagem de ativos financeiros e reais, o que pode ser explicado pela simplicidade de aplicação e principalmente pela sua fácil compreensão. É um ótimo processo estocástico para a modelagem de preços de ações, *commodities* financeiras, índices de mercado e ativos financeiros em geral, bem como para terrenos, demanda de novos produtos, etc.

O MGB é um caso particular do Processo de Itô, sua equação estocástica para uma variável X que varia no tempo é dada por:

$$dX = \alpha X dt + \sigma X dz \quad (3.7)$$

Onde:

X = variável aleatória no instante t ;

α = *drift* (desvio);

dt = variação instantânea do tempo;

σ = volatilidade;

dz = incremento de Wiener (incremento aleatório com média zero e variância dt)

É um processo apropriado para variáveis econômicas que crescem exponencialmente a uma taxa média α e volatilidade proporcional ao nível da variável X .

As propriedades para uma variável X que segue o MGB e possui uma distribuição lognormal são dadas por²⁰:

$$E[X(t)] = X_0 e^{\alpha t} \quad (3.8)$$

$$Var[X(t)] = X_0^2 e^{2\alpha t} (e^{\sigma^2 t} - 1) \quad (3.9)$$

Pessoa (2011) cita em seu trabalho algumas características desse movimento que merecem destaque:

1. Se X começa sendo positivo, ele sempre será positivo, ou seja, ele não varia de positivo a negativo;
2. X tem uma barreira absorvente em zero, ou seja, se X chega a zero (um evento com probabilidade zero), então X permanece nesse valor;
3. A variância da previsão de X_u tende a infinito quando u tende a infinito.

²⁰ No Anexo 7.1.1 as propriedades do MGB são demonstradas.

A. Discretização do MGB

Para realizar a simulação do processo estocástico é preciso a equação de discretização, isto é, ter X_t em função de X_{t-1} . A equação discretizada do MGB real para Δt é dada por (Dias, 2011):

$$X_t = X_{t-1} \exp \left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \mathcal{N}(0;1) \sqrt{\Delta t} \right] \quad (3.10)$$

Onde Δt é o intervalo de tempo entre as observações. Segundo Dias (2011), esta é uma discretização exata, ou seja, uma discretização em que a precisão numérica independe do espaço de tempo.

Para a discretização do MGB neutro ao risco, basta diminuir o prêmio de risco, π , do *drift* α (Dias, 2011):

$$X_t = X_{t-1} \exp \left[\left(\alpha - \pi - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \mathcal{N}(0;1) \sqrt{\Delta t} \right] \quad (3.11)$$

B. Estimação dos parâmetros do MGB

Para determinar os valores dos parâmetros da equação estocástica (3.7), utiliza-se a sua equação discreta dada em (3.10), considerando que $X_t = \ln(x_t)$. Assim, tem-se (adaptado de Dias²¹, 2011):

$$\ln(x_t) - \ln(x_{t-1}) = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \mathcal{N}(0;1) \sqrt{\Delta t}$$

Desta forma volatilidade e o *drift* do modelo podem ser obtidos:

$$\text{Var}[\ln(x_t) - \ln(x_{t-1})] = \text{Var}[\sigma \mathcal{N}(0;1) \sqrt{\Delta t}] = \sigma^2 \Delta t$$

²¹ Em Dias (2011) é considerado N na estimação dos parâmetros, sua relação com Δt é dada por $N = 1/\Delta t$.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{Var}[\ln(x_t) - \ln(x_{t-1})]}{\Delta t}} \quad (3.12)$$

$$E[\ln(x_t) - \ln(x_{t-1})] = E\left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t\right] = \alpha\Delta t - \frac{\sigma^2}{2}\Delta t$$

$$\alpha = \frac{E[\ln(x_t) - \ln(x_{t-1})]}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2} \quad (3.13)$$

Onde Δt é o intervalo de tempo que se deseja considerar.

Apesar de ser mais simples matematicamente, de acordo com Bastian-Pinto, Brandão e Alves (2008), a aplicação desse processo estocástico não é adequada quando os fluxos de caixa de um projeto são subordinados a preços que dependem de uma média de longo prazo, como *commodities* não financeiras. Para este caso, deve-se utilizar o Modelo de Reversão à Média (MRM). De acordo com Hahn (2005) e Bastian-Pinto (2009), no caso de *commodities*, o efeito de modelar usando o Movimento Geométrico Browniano no lugar do processo de Reversão à Média, pode ser a superestimação da incerteza de um fluxo de caixa resultante de um projeto, o que pode resultar em valores de opções acima do realmente válido.

3.2.7 Modelo de Reversão à Média

O MRM é um processo contínuo, caso particular de um Processo de Itô. O seu modelo mais simples, também conhecido por processo de um fator de Ornstein-Uhlenbeck ou Movimento Aritmético de Reversão à Média, foi estudado por Dixit & Pindyck (1994) e é definido pela seguinte equação:

$$dX = \eta(\bar{X} - X)dt + \sigma dz \quad (3.14)$$

Onde:

X = logaritmo neperiano do preço x da *commodity* modelada;

η = velocidade de reversão à média;

\bar{X} = ln da média de longo prazo da variável estocástica;

σ = volatilidade da variável estocástica;

dz = incremento de Wiener (incremento aleatório com média zero e variância dt)

Geralmente, assume-se que os preços das *commodities* (x) são distribuídos segundo uma distribuição lognormal. Desta forma, se $X = \ln(x) \Rightarrow x = e^X$, o que mantém o preço da *commodity* x sempre positivo por mais que o valor de X possa ser negativo, pois não fariam senso, por exemplo, uma série de preços de combustíveis com valores negativos.

No MRM o valor esperado dos incrementos em X depende da diferença entre \bar{X} e X , assim, quanto mais distante estiver X de seu valor esperado \bar{X} , maior será a probabilidade de a variável retornar para o seu equilíbrio. O que indica que seus incrementos não são independentes, apesar de satisfazer as propriedades de Markov.

A distribuição condicional de X no instante T sob medida equivalente de martingale é normal com média e variância dados por (Dixit & Pindyck, 1994)²²:

$$E[X] = \bar{X} + (X_0 - \bar{X})e^{-\eta T} \quad (3.15)$$

$$Var[X] = (1 - e^{-2\eta T}) \sigma^2 / 2\eta \quad (3.16)$$

Através dessas propriedades pode-se observar que para um T muito grande, ou seja, quando $T \rightarrow \infty$, o valor esperado converge para a média de longo prazo, \bar{X} . Já a variância converge para $\sigma^2/2\eta$ quando $T \rightarrow \infty$, ao contrário do que ocorre com um MGB que é ilimitado.

Com relação à velocidade de reversão à média η , se for mantido T constante, pode-se notar que quando $\eta \rightarrow \infty$ então $e^{-\eta T} \rightarrow 0$ e $\frac{\sigma^2}{2\eta} \rightarrow 0$, assim o

²² No Anexo 7.1.2 as propriedades do MRM são demonstradas.

valor esperado da variável X convergirá para a média de longo prazo \bar{X} , e sua variância para zero, $Var(X_T) \rightarrow 0$. Já com η tendendo a zero, a equação (3.14) se transformará em $dX = \sigma dz$, o que equivale a um movimento browniano simples, e, $E(X_T) \rightarrow 0$ e sua variância $Var(X_T) \rightarrow \sigma^2 T$. O que significa que um processo de reversão extremamente lento tende a se transformar em um movimento browniano.

Uma medida gerencial neste processo também pode ser utilizada, o conceito de meia vida da reversão (*half-life*), H , que dá a medida de lentidão do processo. A relação²³ entre a velocidade de reversão, η , e a meia vida, H , para o logaritmo de X é:

$$H = \ln(2) / \eta \quad (3.17)$$

Outros modelos de reversão à média com um fator são conhecidos na literatura, como o Movimento de Reversão à Média Geométrico de Dixit & Pindyck (1994), no qual o valor do incremento de valor da variável (dX) passa a ser proporcional ao nível da variável em si (X): $dX/X = \eta(\bar{X} - X)dt + \sigma dz$. O modelo 1 de Schwartz (1997), dado por: $dX = \eta(\alpha - \ln X)Xdt + \sigma X dz$, em que α geralmente é considerado $\alpha = \ln(\bar{X})$. E a variação do modelo 1 de Schwartz realizada por Dias/Marlim²⁴(1999), que se diferencia do modelo 1 de Schwartz por considerar que $\bar{x} = \exp(\bar{X})$ e $E(x_t) = \exp[E(X_t)]$.

A. Discretização do MRM

Como mencionado no tópico anterior, para evitar que os preços sejam negativos é utilizada a distribuição lognormal para o preço das *commodities* x , mantendo-se a relação:

²³ No Anexo 7.1.3 essa relação é demonstrada.

²⁴ Modelo assim denominado por Bastian-Pinto (2009), o autor compara três modelagens do MRM Geométrico. Em Dias (2005), bem como em seu site, é possível ver esse modelo para o MRM com saltos: < www.puc-rio.br/marco.ind/rev-jump.html>.

$$x \sim \text{lognormal} \Leftrightarrow X = \ln(x) \sim \text{Normal}$$

Desta forma, a equação em tempo discreto para X que segue o MRM é dada por (Dias, 2011):

$$X_t = X_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \bar{X}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}N(0,1) \quad (3.18)$$

Mas, para obter valores simulados para x_t que possui distribuição lognormal e $E(x_t) = \exp[E(X_t)]$, combinam-se (3.18) com a equação $x_t = \exp[X_t - 0,5\text{Var}(X_t)]$ e a variância (3.16) de X_t (Modelo 1 Dias, 2011):

$$x_t = \exp\left\{\ln[x_{t-1}]e^{-\eta\Delta t} + \ln[\bar{x}](1 - e^{-\eta\Delta t}) - \left[(1 - e^{-2\eta\Delta t})\frac{\sigma^2}{4\eta}\right] + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}N(0,1)\right\} \quad (3.19)$$

Essas discretizações, assim como a do MGB, são exatas e independem do tamanho do intervalo de tempo, Δt .

A interpretação para os quatro termos da equação (3.19) anterior é conforme segue (Dias, 2011):

- a) O primeiro e segundo termos demonstram a tendência, ponderados pelo valor inicial e o equilíbrio ao longo prazo respectivamente;
- b) O terceiro termo é o ajuste de convexidade;
- c) Já o quarto é a parcela estocástica devido a Normal padrão (0,1), através dela a aleatoriedade é introduzida pela Simulação de Monte Carlo.

O mesmo tipo de interpretação pode ser realizado para a equação (3.18), onde somente o terceiro termo é suprido se comparado a (3.19).

Tanto a equação (3.18) quanto a equação (3.19) podem ser adaptadas para um ambiente neutro ao risco. Neste caso, é subtraído um “prêmio normalizado”, $\frac{(\mu - r)}{\eta}$, do preço de longo prazo no segundo termo (Dias, 2011):

$$X_t = X_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \left[\bar{X} - \frac{(\mu - r)}{\eta} \right] (1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}} N(0,1) \quad (3.20)$$

$$x_t = \exp \left\{ \ln[x_{t-1}]e^{-\eta\Delta t} + \left[\ln[\bar{x}] - \frac{(\mu - r)}{\eta} \right] (1 - e^{-\eta\Delta t}) - \left[(1 - e^{-2\eta\Delta t}) \frac{\sigma^2}{4\eta} \right] + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}} N(0,1) \right\} \quad (3.21)$$

Onde μ é a taxa ajustada ao risco e r a taxa livre de risco.

B. Estimativa de parâmetros do MRM

Para que seja discretizado o MRM é necessária a estimação dos parâmetros presentes na equação (3.14), ou seja, dos valores da volatilidade, a média de longo prazo da variável estocástica e a velocidade de reversão. Para isso é utilizada a regressão linear²⁵ sobre os dados históricos dos preços que se supõe seguir o MRM, a fim de reduzir o erro quadrático médio.

Os preços que seguem o MRM para um intervalo de tempo discreto Δt podem ser escritos a partir da equação da média (3.15) como (adaptado²⁶ de Bastian-Pinto, 2009):

$$X_t = \bar{X} + (X_{t-1} - \bar{X})e^{-\eta\Delta t} = \bar{X}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + X_{t-1}e^{-\eta\Delta t}$$

Subtraindo X_{t-1} de ambos os lados da equação e considerando o erro da série tem-se:

$$X_t - X_{t-1} = \bar{X}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + X_{t-1}(e^{-\eta\Delta t} - 1) + \varepsilon_t \quad (3.22)$$

²⁵ Outras formas de estimação também podem ser utilizadas.

²⁶ Em Bastian-Pinto (2009), a estimativa dos parâmetros também é realizada para o MRM Aritmético, mas não é considerado que os preços possuem distribuição lognormal. O autor somente considera essa afirmativa para o MRM Geométrico, que não está sendo utilizado neste estudo. No entanto, outros autores, como Dias (2011), consideram a distribuição lognormal para os preços até mesmo para o MRM Aritmético, por isso essa interpretação foi mantida.

A equação (3.18) é a expressão para tempo contínuo do processo AR(1) da equação (3.22), onde o erro é normalmente distribuído com média 0 e variância σ_ε^2 .

Sabendo que $X_t = \ln(x_t)$ e $\bar{X} = \ln(\bar{x})$ e substituindo na equação (3.22) acima:

$$\ln(x_t) - \ln(x_{t-1}) = \ln(\bar{x})(1 - e^{-\eta\Delta t}) + \ln(x_{t-1})(e^{-\eta\Delta t} - 1) + \varepsilon_t \quad (3.23)$$

Reescrevendo essa equação:

$$\ln\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right) = a + (b-1)\ln(x_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (3.24)$$

Através do valor estimado para os coeficientes a e b da regressão (3.24) e utilizando a volatilidade calculada da série de preços das *commodities*, é possível obter os parâmetros estimados do logaritmo dos preços que segue um MRM.

Comparando as equações (3.23) e (3.24), é possível obter os parâmetros para a estimação do modelo. A velocidade de reversão pode ser obtida por:

$$\begin{aligned} b-1 &= e^{-\eta\Delta t} - 1, \text{ então,} \\ \eta &= -\ln(b)/\Delta t \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ainda comparando as equações (3.23) e (3.24):

$$a = \ln(\bar{x})(1 - e^{-\eta\Delta t})$$

E como $1-b = 1 - e^{-\eta\Delta t}$, a média de longo prazo da variável estocástica é dada por:

$$\bar{x} = \exp\left(-\frac{a}{(b-1)}\right) \quad (3.26)$$

A determinação da volatilidade é obtida igualando a variância dos erros da regressão, σ_ε^2 , a equação da variância (3.16):

$$\sigma_\varepsilon^2 = (1 - e^{-2\eta\Delta t}) \frac{\sigma^2}{2\eta}$$

Substituindo na equação anterior o η dado na equação (3.25), e como $b^2 = e^{-2\eta\Delta t}$, então:

$$\sigma_\varepsilon^2 = -(1 - b^2) \left(\frac{\sigma^2 \Delta t}{2 \ln(b)} \right)$$

De onde se tem:

$$\sigma = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{2 \ln(b)}{(b^2 - 1)\Delta t}} \quad (3.27)$$

Esses parâmetros estimados obtidos através da regressão linear simples são resumidos no quadro a seguir :

Parâmetro estimado	Fórmula
Velocidade de reversão	$\eta = -\ln(b)/\Delta t$
Volatilidade	$\sigma = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{2 \ln(b)}{(b^2 - 1)\Delta t}}$
Média de longo prazo	$\bar{x} = \exp\left(-\frac{a}{(b - 1)}\right)$

Quadro 3.2: Quadro resumo para a estimação de parâmetros do MRM.

Em que Δt é o intervalo de tempo que se deseja considerar. Se a série histórica utilizada for anual, todos os parâmetros estimados serão anuais se $\Delta t = 1$, mensais se $\Delta t = 12$, diários se $\Delta t = 365$ e assim sucessivamente.

Informada a velocidade de reversão estimada, é possível calcular a meia vida de uma série x_t , de (3.17) tem-se que $H = \frac{\ln(2)}{\eta}$. Logo a meia vida é dada por (Bastian-Pinto, 2009):

$$H = -\frac{\ln(2)}{\ln(b)} \Delta t \quad (3.28)$$

3.3 Determinação da Validade do Processo Estocástico

Para determinar o processo estocástico que melhor representa uma variável estocástica, Dixit e Pindyck (1994) sugerem que sejam considerados tanto a teoria quanto testes estatísticos.

O teste que mais tem sido utilizado em trabalhos acadêmicos para verificar a validade do MGB é o da raiz unitária (Dickey e Fuller, 1981). Pois o processo gerador da série segue o modelo:

$$x_t = a + bx_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ onde } \varepsilon_t \text{ é um ruído branco}^{27}.$$

Por razões teóricas subtrai-se x_{t-1} de ambos os lados, de forma que essa série possa ser escrita como um modelo AR(1):

$$x_t - x_{t-1} = a + (b-1)x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.29)$$

O teste da raiz unitária para esse modelo consiste, portanto, em testar $H_0: b-1=0$, ou seja, testar $H_0: b=1$, no qual a série terá raiz unitária e seguirá um caminho aleatório, podendo ser modelada segundo o MGB, contra $H_1: b<1$. Uma regressão linear por mínimos quadrados é realizada sobre a equação (3.29), e logo a seguir é aplicado o teste de Dickey-Fuller que gera a estatística τ . Se $\tau < \text{valor crítico} \Rightarrow H_0$ é rejeitada.

²⁷ Normalmente independente, com média 0 e variância σ^2 .

Algumas estatísticas do Teste da raiz unitária de Dickey-Fuller com uma constante podem ser vistas na Tabela 3.2 que segue:

Tamanho da Amostra	Nível de Confiança	
	1%	5%
50	-3,58	-2,93
100	-3,51	-2,89
250	-3,46	-2,88
∞	-3,43	-2,86

Tabela 3.1: Valores críticos assintóticos de teste τ da raiz unitária (Dickey-Fuller) com uma constante e sem tendência temporal.

Fonte: Gujarati (2004), p.975.

Mas, quando a série apresenta evidente tendência temporal, a equação (3.29) é modificada de forma a compreender essa tendência, c_t :

$$x_t - x_{t-1} = a + (b-1)x_{t-1} + c_t + \varepsilon_t \quad (3.30)$$

Trata-se do Teste de Dickey-Fuller com uma constante e tendência, seus valores críticos podem ser visto na Tabela 3.3 a seguir:

Tamanho da Amostra	Nível de Confiança	
	1%	5%
50	-4,15	-3,5
100	-4,04	-3,45
250	-3,99	-3,43
∞	-3,96	-3,41

Tabela 3.2: Valores críticos assintóticos de teste τ da raiz unitária (Dickey-Fuller) com uma constante e tendência temporal.

Fonte: Gujarati (2004), p.975.

Quando realizado este teste sobre o preço de *commodities* não financeiras, a hipótese nula da raiz unitária dificilmente é rejeitada, ou seja, que a série não segue o MGB. Dixit e Pindyck (1994) e Pindyck (1999) só conseguem comprovar que os preços do petróleo não seguem o MGB para uma série de dados de 120 anos (em Pindyck o nível de confiança é de 5%). Em série de dados menores, 30 e 40 anos, os autores não conseguem rejeitar a hipótese nula. No entanto, Bastian-Pinto (2009) e Dias (2011) defendem que mesmo não sendo rejeitada a hipótese nula, quando obtido $0 < b < 1$, há indícios de reversão à média. Além disso, fatores estilizados também devem ser considerados na escolha do modelo.

Pindyck (1999) utiliza o Teste da razão da variância como uma alternativa na investigação do modelo a ser seguido por uma série de dados, MGB ou MRM. Este teste pode ser descrito pela equação que segue:

$$R_k = \frac{1}{k} \frac{\text{Var}(p_{t+k} - p_t)}{\text{Var}(p_{t+1} - p_t)} \quad (3.31)$$

Se o preço (p) segue um caminho aleatório (MGB), ou seja, não é estacionário²⁸, então a variância de k diferentes períodos deve crescer linearmente com k , neste caso, a razão deve se aproximar de 1 com o crescimento de k . Por outro lado, se o preço segue um processo estacionário (MRM), então essa razão tenderá a cair para zero com o crescimento de k , indicando que os preços reverterem para um nível de equilíbrio no longo prazo.

3.4 Simulação de Monte Carlo

Definido o processo estocástico que a variável segue, é necessário estabelecer um método capaz de valorá-la de acordo com suas incertezas. A Simulação de Monte Carlo é um método muito popular na simulação de fenômenos com grau de incerteza, suas áreas de aplicação incluem ciências físicas, engenharia, estatística aplicada, finanças e negócios entre outros.

²⁸ Gujarati (2004), p.798, define uma série de preços como estacionária, se a variância e a auto-covariância (em vários *lags*) mantêm-se as mesmas, independentemente do tempo de medição, isto é, são invariantes com o tempo. Esse tipo de série tenderá a retornar para a sua média (reversão à média) e terá uma amplitude praticamente constante. Por outro lado, se a série de preços é não estacionária, ela terá uma média ou variância variando com o tempo ou ambas.

O primeiro *paper* sobre o Método de Monte Carlo foi escrito em 1949 por Metropolis & Ulam e publicado no *Journal of the American Statistical Association*. Com o desenvolvimento das ferramentas computacionais, a Simulação de Monte Carlo tem se tornado uma importante alternativa na solução de problemas complexos. Essa metodologia resolve problemas simulando diretamente o processo físico (*forward*), e não é preciso escrever as equações diferenciais que descrevem o comportamento do sistema. Assim, ela se torna muito útil em problemas de grande complexidade com várias variáveis e fatores de risco.

A primeira aplicação em opções foi realizada por Boyle em 1977 para opções europeias²⁹. Por possuir a regra clara de exercício ótimo na data da expiração, T , as opções europeias são mais simples de serem resolvidas aplicando a Simulação de Monte Carlo, mas o uso dessa simulação também pode ser estendido para opções americanas³⁰ ou asiáticas³¹, como mostrado nos trabalhos de Longstaff e Schwartz (2001) e Broadie e Glasserman (1996), respectivamente.

Neste método, com a informação da distribuição de probabilidades das variáveis, são realizadas diversas simulações através de um programa computacional dos caminhos que podem ser seguidos até que se encontre uma aproximação que explique a evolução do fenômeno, neste trabalho trata-se do preço dos combustíveis.

Segundo Dias (2011), o método de Monte Carlo aplicado a opções reais segue nas seguintes etapas:

1. Especificação das distribuições de probabilidade das variáveis de entrada, incluindo a distribuição das correlações entre as diferentes variáveis;
2. Geração de uma amostra aleatória (usando um gerador de números aleatórios) das distribuições dos dados de entrada (*inputs*);

²⁹ Opção européia é aquela que só é exercida na data de expiração.

³⁰ Opção americana é aquela em que o exercício da opção pode ser feito em qualquer momento antes da data de expiração, sendo o payoff igual ao valor intrínseco da opção no momento em que é exercida.

³¹ Opção asiática é uma opção exótica onde o payoff é determinado pela média das cotações do subjacente durante um determinado período de tempo.

3. Realização de operações matemáticas com a amostra gerada no passo anterior para calcular o resultado (*output*) dado por essa amostra;
4. Repetição dos passos anteriores N vezes, gerando N *outputs*;
5. Cálculo da média e outras propriedades probabilísticas desejadas da distribuição de *outputs*.

Essas etapas podem ser entendidas com a Figura 3.3 que segue:

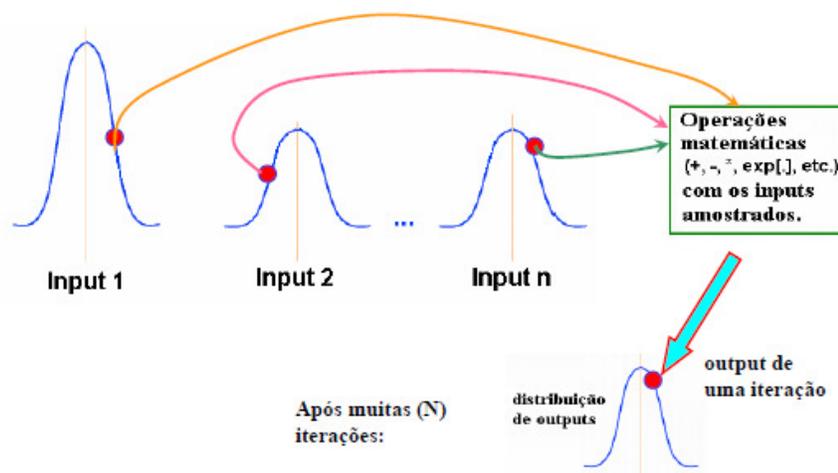


Figura 3.3: Funcionamento da Simulação de Monte Carlo.

Fonte: Dias (2011).

A precisão da Simulação de Monte Carlo é garantida pela lei dos grandes números, que diz que se o número de iterações for grande, a média da distribuição obtida na simulação converge para a média teórica correta, desta forma, o erro diminuirá com o aumento do número de iterações.

Para realizar a simulação é necessário utilizar a equação discreta do processo estocástico. Como já discutido nas seções 3.2.6(A) e 3.2.7(A), cada processo possui sua própria discretização, para o MGB ela é dada pela equação (3.10), já para o MRM a discretização é obtida através processo auto-regressivo de primeira ordem AR (1), visto em (3.18). No caso de eventos neutros ao risco deve-se utilizar a equação (3.11) ou (3.20) para o MGB e MRM, respectivamente.