

3 Teoria de Placas Metálicas Paralelas

Neste capítulo será apresentado detalhes da conversão de onda plana ao incidir no conjunto de placas metálicas que não foram considerados no capítulo anterior. Serão descritos os detalhes desta conversão e suas consequências no modelamento de estruturas.

3.1 Placas Paralelas

Técnicas para tratamento de onda na faixa de UHF, onde ondas de curto comprimento são utilizadas, têm sido desenvolvidas a partir da propriedade diretiva da propagação de energia no campo eletromagnético. Este comportamento eletromagnético da onda é semelhante ao comportamento da luz, podendo ser abordado de forma similar à utilizada pela ótica, permitindo sua aplicação na construção de refletores e lentes.

Entretanto, foi mostrado no capítulo anterior [3] que, para a faixa de microondas, é possível obter um meio com nova característica refrativa, cujas propriedades não se aplicam para comprimentos de onda na faixa do espectro visível. Este meio é formado por um conjunto de placas metálicas paralelas, em um meio homogêneo, estando as placas distantes umas das outras de uma distância maior que meio comprimento de onda e menor que um comprimento de onda [5]. As condições de contorno nas paredes metálicas das placas, impostas para solução do problema, diferencia o sistema de placas metálicas de outros meios homogêneos utilizados na ótica, como os dielétricos.

O objetivo deste capítulo é apresentar a propagação de ondas eletromagnéticas de um meio homogêneo e isotrópico para um meio composto de placas metálicas, neste caso o plano de separação entre os meios é perpendicular as placas. Este capítulo revisa um método simples, desenvolvido por Feodora Berz [3], que pode ser estendido para outros campos, dando um *insight* físico do comportamento eletromagnético do problema em análise.

Equações gerais são derivadas para todas as possibilidades de campos refletidos e refratados no meio homogêneo e no interior do sistema de placas,

sendo que:

- São satisfeitas as equações de Maxwell;
- Aplica-se uma lei de quase-periodicidade na superfície das placas;
- E, por último, condições de contorno nas placas metálicas.

Destas equações gerais são deduzidos o número, a natureza, e a direção dos feixes refletidos e refratados.

As amplitudes complexa dos campos são determinadas pelas condições de continuidade da componente de campo tangencial no plano de separação entre o meio homogêneo e o sistema de placas metálicas. Este fornece dois conjuntos de equações lineares, onde a amplitude complexa dos campos são as incógnitas, e serão resolvidas por métodos analíticos. Fórmulas e curvas derivadas desta amplitude complexa do campo apresentam o comportamento dos coeficientes de transmissão e reflexão, e o deslocamento de fase ocorrido na transição entre os meios.

Em conclusão, apresenta-se uma rápida avaliação dos resultados mais importantes. Na expressão complexa do campo a variável t expressa o tempo e aparece no termo de fator $e^{j\omega t}$ que será omitido das expressões.

3.2

Natureza e Direção dos Campos Refletidos e Transmitidos

Uma onda plana uniforme propagando-se no meio A homogêneo, isotrópico e não condutor, incide com um ângulo θ_i no conjunto de placas paralelas que compõem o meio B conforme ilustrado na Figura 3.1.

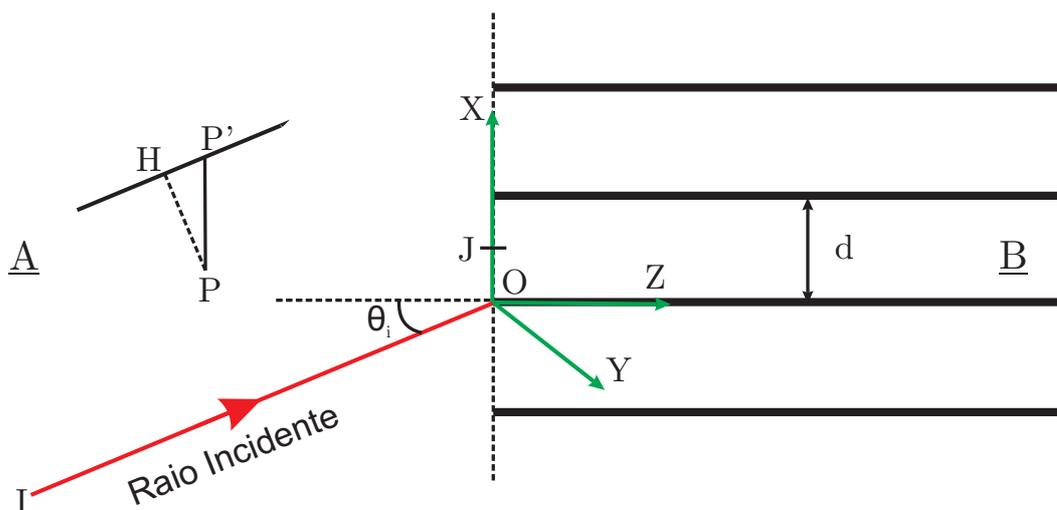


Figura 3.1: Geometria do Conjunto de Placas Paralelas.

São infinitas placas e as mesmas estendem-se ao infinito na direção perpendicular ao plano da Figura 3.1. Assumiu-se, ainda, que as placas estão igualmente espaçadas de uma distância d , são condutoras perfeitas e infinitamente finas. O plano de separação entre o conjunto de placas e o meio homogêneo exterior é perpendicular às placas.

A direção de propagação \vec{IO} da onda incidente esta no plano da figura de forma que o vetor campo elétrico é perpendicular a este plano sendo, portanto, paralelo as placas metálicas.

O sistema de eixos cartesianos utilizado é expresso na Figura 3.1. Assim como a onda incidente, os eixos x e z estão no plano da figura, e a direção \vec{Ox} é escolhida de forma que $\widehat{IOx} > 90^\circ$, significando que a fase do campo incidente decai ao longo de \vec{Ox} . O campo elétrico incidente é paralelo ao eixo y . O ângulo de incidência é considerado como positivo.

3.2.1

Características do Campo Refletido e Transmitido

a Periodicidade

Considerando-se dois pontos P e P' no meio A ou B que formem uma reta paralela ao eixo x e separados por uma distância d igual ao espaçamento entre as placas, de tal forma que a coordenada do ponto P' no eixo x seja maior que a coordenada do ponto P no mesmo eixo. Será demonstrado que:

1. As placas metálicas e a superfície de separação entre os meios, dada pelo plano xy , têm a mesma disposição com respeito a P e P' .
2. Se P e P' estão no meio A , ou no plano xy , a onda incidente em P' esta defasada com relação a onda incidente em P de um ângulo de fase ϕ fixo, ou seja, independe do tempo e da posição.

Para sermos mais precisos temos, pela geometria da Figura 3.1, que:

$$\phi = \frac{2\pi \overline{HP'}}{\lambda} = \beta d \text{sen } \theta_i \quad (3-1)$$

onde

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Portanto, se representarmos qualquer componente de campo em um dos

meios por uma função $f_1(x, z) = f(x, z)e^{-j\frac{\phi}{d}x}$, $f_1(x, z)$ será uma função periódica de x com um período d .

b Tipo

A onda incidente é polarizada com o vetor campo elétrico paralelo ao eixo y , portanto, as únicas componentes de campo refletidas e transmitidas são E_y , H_x e H_z . Estas componentes independem de y e estão relacionadas pelas expressões:

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ H_z &= \frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (3-2)$$

Adicionalmente, a componente de campo elétrico deve obedecer à equação:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0 \quad (3-3)$$

Dessa forma, todo o problema reduz-se a determinação da componente de campo elétrico E_y . Nas considerações seguintes, apenas esta componente de campo será considerada, a menos disposição em contrário.

3.2.2

Forma Geral do Campo Elétrico Transmitido no Meio B

As equações gerais para o campo no espaço compreendido entre $0 < x < d$ e $z > 0$ podem ser obtidas das expressões que relacionam os campos e da aplicação da condição de contorno, que determina que a componente tangencial de campo elétrico deve ser nula nas placas metálicas. Dessa forma obtém-se da formulação clássica para um guia de onda de placas paralelas, correspondendo a propagação de ondas TE_{0n} , com $n = 0, 1, 2, \dots, n$. O campo elétrico resultante é dado por:

$$E_y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{d} e^{-j\beta_n z} \quad (3-4)$$

onde

$$\beta_n^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \quad (3-5)$$

As ondas refratadas propagam-se ao longo da direção z . Portanto, para β_n real, ou seja, $\beta_n^2 > 0$, $\beta_n = |\beta_n|$. Por outro lado, para β_n imaginário, ou seja, $\beta_n^2 < 0$, $\beta_n = -j|\beta_n|$, onde o sinal negativo indica que as amplitudes destas ondas devem decair ao se propagarem na direção z . Os coeficientes B_n são constantes complexas e a fórmula apresentada para o campo só é válida para $0 < x < d$. Mas, como foi visto na Seção (3.2.1), as componentes de campo multiplicadas por um fator $e^{j\frac{\phi}{d}x}$ são funções periódicas de x , com um período d . Então, para toda a gama de valores de x , podemos escrever a função para o campo E_y na forma de uma série de Fourier complexa. Dessa forma:

$$e^{j\frac{\phi}{d}x} E_y = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{-j\frac{2m\pi x}{d}} \quad (3-6)$$

onde

$$C_m = \frac{1}{d} \int_0^d e^{j\frac{(\phi+2m\pi)x}{d}} E_y dx$$

substituindo-se a Equação (3-4) na expressão obtém-se:

$$C_m = \frac{1}{d} \int_0^d e^{j\frac{(\phi+2m\pi)x}{d}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{d} e^{-j\beta_n z} \right] dx$$

Extraindo-se da integral os termos que não apresentam variação com a distância, temos:

$$C_m = \left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-j\beta_n z} \right] \frac{1}{d} \int_0^d e^{j\frac{(\phi+2m\pi)x}{d}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{d} dx \quad (3-7)$$

Mas,

$$\int_0^d e^{j\frac{(\phi+2m\pi)x}{d}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{d} dx = \frac{n\pi}{d} \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 - \left(\frac{\phi+2m\pi}{d}\right)^2}$$

Dessa forma, temos que:

$$C_m = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-j\beta_n z} n\pi \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{(n\pi)^2 - (\phi + 2m\pi)^2} \quad (3-8)$$

Uma vez determinadas as equações (3-6) e (3-8) obtemos uma expressão para o campo elétrico E_y :

$$E_y = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{(\phi+2m\pi)x}{d}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-j\beta_n z} n\pi \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{(n\pi)^2 - (\phi + 2m\pi)^2} \quad (3-9)$$

É interessante observar que para $n = 1$ temos a propagação da onda TE_{01} , quando $\frac{\lambda}{2} < d < \lambda$, sendo a única onda a se propagar sem ter decaimento de amplitude a medida que caminha na direção do eixo z positivo, ou seja, é uma onda não evanescente, desde que β_1 seja real. Esta onda se propaga no interior das placas com uma velocidade de fase v_1 tal que $v_1 = v \frac{k_0}{\beta_1}$, sendo v a velocidade de propagação da onda plana no meio A . O índice de refração equivalente n_B do meio B é definido por:

$$n_B = \frac{v}{v_1} = \frac{\beta_1}{k_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2d}\right)^2} \quad (3-10)$$

Para $\frac{\lambda}{2} < d < \lambda$ temos que:

$$0 < n_B < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Esta onda se propaga na direção z para qualquer valor de ângulo de incidência θ_i , portanto não existe nenhuma equivalência com a lei de Snell da ótica clássica. Para $n > 1$, a onda TE_{0n} , cuja componente de campo elétrico é dada pelo n -ésimo termo, corresponde a β_n imaginário, isto é, $\beta_n = -j|\beta_n|$, sendo tais ondas conhecidas como locais ou evanescentes.

3.2.3

Forma Geral do Campo Elétrico no Meio A

A onda incidente possui uma componente de campo E_y dada por:

$$E_y^i = e^{-j\beta(x \text{ sen } \theta_i + z \text{ cos } \theta_i)} \quad (3-11)$$

onde é assumido que o campo elétrico incidente tem uma amplitude unitária. As ondas que são refletidas no meio A podem ser tratadas como uma superposição de ondas planas. A componente de campo elétrico E_y de uma onda plana refletida, cujo ângulo de reflexão é θ_r é dado por:

$$E_y^r = A_m e^{-j\beta(x \text{ sen } \theta_r - z \text{ cos } \theta_r)} \quad (3-12)$$

onde A_m é uma constante. Em virtude da periodicidade de $E_y e^{j\frac{\phi}{d}x}$, descrita

anteriormente, devemos ter:

$$\beta d \sin \theta_m = \phi + 2m\pi \quad (3-13)$$

Aplicando-se a Equação (3-1) e a Equação (3-10), obtém-se:

$$\begin{aligned} \sin \theta_r &= \sin \theta_i + \frac{2m\pi}{\beta d} \\ &= \sin \theta_i + 2m\sqrt{1 - n_B^2} \end{aligned} \quad (3-14)$$

onde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, definindo um sistema de autovalores para o ângulo de reflexão θ_r . Para cada valor positivo ou negativo do inteiro m corresponde uma onda refletida cuja componente de campo E_y é dada pelas Equações (3-12) e (3-14).

O termo a direita da Equação (3-14) tem um valor absoluto que pode ser maior ou menor que a unidade, correspondendo a dois tipos de onda diferentes a se propagar. Dessa forma, para:

$$\left| \sin \theta_i + 2m\sqrt{1 - n_B^2} \right| > 1$$

temos um valor real para $\sin \theta_r$, mas não um ângulo definido para θ_r , pois:

$$\cos \theta_r = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_r} = -j\sqrt{\sin^2 \theta_r - 1}$$

e como pode ser visto pela Equação (3-12), a onda plana neste caso é evanescente na direção de propagação (sentido negativo do eixo z), com um fator de decaimento $e^{-|\beta z \cos \theta_r|}$.

Considerando-se agora o outro caso, onde a onda é plana e não evanescente temos:

$$\left| \sin \theta_i + 2m\sqrt{1 - n_B^2} \right| < 1$$

Para este caso o ângulo de reflexão θ_r tem uma interpretação física. Considere um plano de mesma fase QQ' da onda plana incidente e um outro plano RR' para a onda refletida conforme a Figura 3.2.

Comparando-se o percurso ótico QPR e $Q'P'R'$ que passa pelos pontos

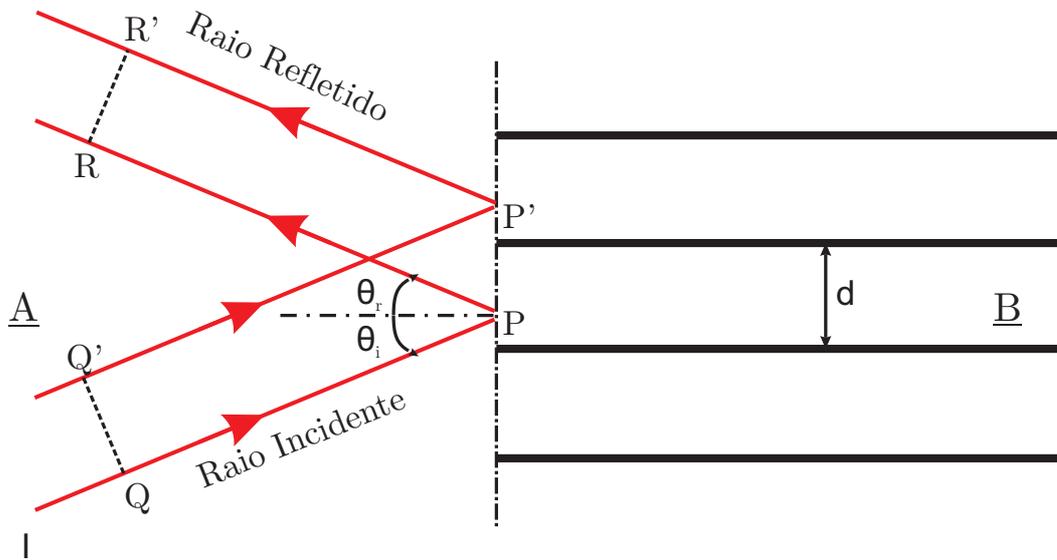


Figura 3.2: Geometria para Reflexão.

P e P' na superfície de separação entre os meios, de forma que o segmento $\overline{PP'} = d$ temos que:

$$QPR - Q'P'R' = m\lambda$$

Para $m = 0$ a onda resultante é plana e não evanescente e segue a clássica lei de reflexão da ótica, neste caso temos:

$$\theta_r = \theta_i \quad \text{para } m = 0$$

Para $m = -1$ e $\frac{\lambda}{2} < d < \lambda$ a onda resultante pode, dentre todas as outras ondas possíveis, ser não evanescente. Este fato ocorre para ângulos de incidência θ_i grandes, ou, para sermos mais precisos, para:

$$\text{sen } \theta_i > 2\sqrt{1 - n_B^2} - 1$$

que para $m = -1$ fornece:

$$\text{sen } \theta_r|_{m=-1} = \text{sen } \theta_i - 2\sqrt{1 - n_B^2}$$

Da relação acima e para ângulos de incidência θ_i sendo considerados para variação positiva, temos:

$$\theta_r|_{m=0} > 0 \quad e \quad \theta_r|_{m=-1} < 0$$

O significado desta variação positiva e negativa de sinal é visto na Figura 3.3.

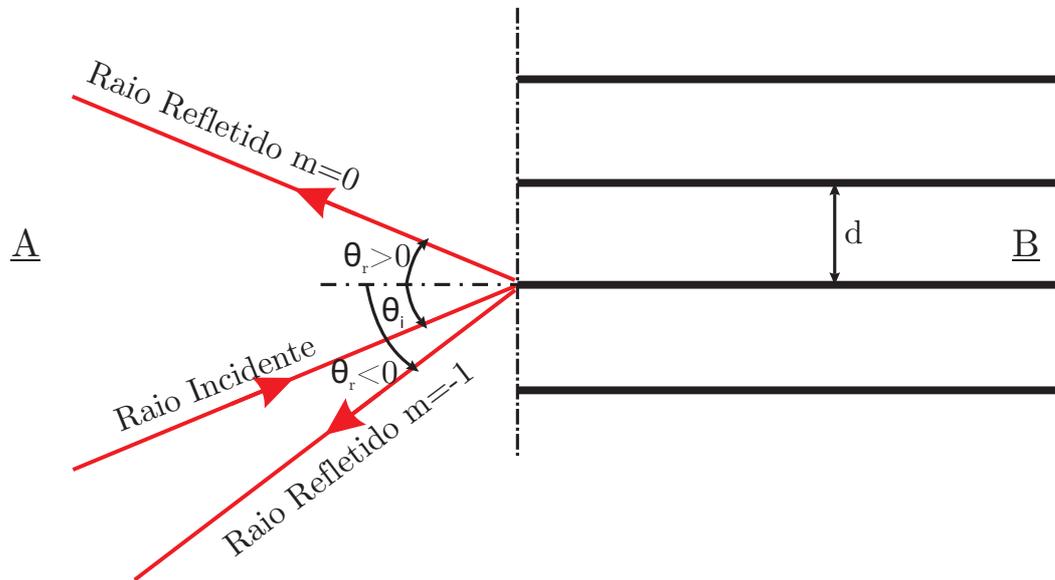


Figura 3.3: Geometria para difração.

A Figura 3.4 fornece os valores do módulo do ângulo de reflexão θ_r para $m = 1$ em função do ângulo de incidência θ_i para $0,3 < n_B < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nesta figura temos indicado o valor correspondente a $\text{sen } \theta_i = 2\sqrt{1 - n_B^2} - 1$, ou seja, surgimento do segundo modo não evanescente. Temos, ainda, o ponto correspondente à $\text{cos } \theta_i = n_B$ onde, neste caso, a direção de propagação das duas ondas refletidas guarda uma simetria com relação as placas metálicas. Estes pontos citados são importantes e serão trabalhados nas seções posteriores.

Deve ser observado que os resultados acima obtidos para as ondas no meio A podem facilmente ser estendidos para o caso em que o ângulo de separação entre as placas e o meio seja diferente de $\pi/2$.

Retornando o foco para a onda resultante, temos que o campo elétrico total no meio homogêneo será a soma das duas contribuições, onda incidente e onda refletida, logo:

$$E_y = e^{-j\beta(x \text{ sen } \theta_i + z \text{ cos } \theta_i)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{-j\beta(x \text{ sen } \theta_r - z \text{ cos } \theta_r)} \quad (3-15)$$

Utilizando-se das equações (3-1) e (3-13), temos:

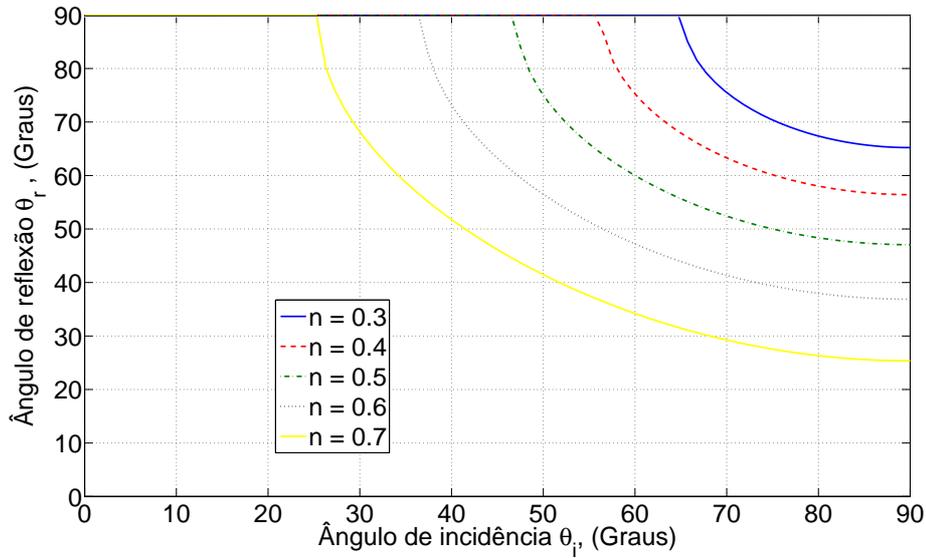


Figura 3.4: Variação do ângulo da onda difratada.

$$E_y = e^{-j\frac{\phi}{d}x - j\alpha_0 z} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{-j\frac{(\phi+2m\pi)}{d}x + j\alpha_m z} \quad (3-16)$$

onde

$$\alpha_m = \beta \cos \theta_r = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\phi + 2m\pi}{d}\right)^2} \quad (3-17)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= |\alpha_m| && \text{para } \alpha_m \text{ real;} \\ \alpha_m &= -j|\alpha_m| && \text{para } \alpha_m \text{ imaginário.} \end{aligned}$$

3.3

Amplitude e Fase do Campo Refletido e Transmitido

Nas seções anteriores uma forma geral da componente de campo E_y para todas as possibilidades de onda resultante no meio A e B compatível com a configuração destes meios e com a direção de propagação da onda incidente foi descrita. Tais expressões estão associadas as constantes A_m e B_n , onde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e $n = 1, 2, \dots$. Afim de determinar estas constantes e solucionar o problema, as condições de contorno no plano xy devem ser consideradas. Esta condição expressa que:

- Na superfície de separação entre dois meios dielétricos quaisquer, as componentes tangenciais de campo elétrico e magnético são contínuas.

Para o caso em questão, as componentes de campo tangencial são E_y e H_x , associadas respectivamente ao campo elétrico e ao campo magnético. Uma vez que a componente de campo magnético tangencial a superfície de separação H_x é proporcional a variação da componente tangencial de campo elétrico na direção de propagação $\frac{\partial E_y}{\partial z}$, por um fator de proporcionalidade de $-\frac{j}{\omega\mu_0}$ que é válido em ambos os meios, apenas a continuidade de E_y e $\frac{\partial E_y}{\partial z}$ precisa ser considerada.

3.3.1

Equação Fundamental de Continuidade na Superfície de Separação

Na região A a componente tangencial de campo elétrico E_y foi obtida pela Equação (3-16), sendo:

$$E_y = e^{-j\frac{\phi}{d}x - j\alpha_0 z} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{-j\frac{(\phi+2m\pi)}{d}x + j\alpha_m z}$$

Dessa forma, na superfície de separação, temos que:

$$E_y|_{z=0} = e^{-j\frac{\phi}{d}x} \left[1 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{-j\frac{(2m\pi)}{d}x} \right] \quad (3-18)$$

A expressão associada a derivada parcial da componente tangencial de campo elétrico com relação a z na fronteira do meio A é dada por:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} \Big|_{z=0} = j e^{-j\frac{\phi}{d}x} \left[-\alpha_0 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m A_m e^{-j\frac{(2m\pi)}{d}x} \right] \quad (3-19)$$

Na região B , a componente de campo obtida pela Equação (3-16) foi:

$$E_y = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{(\phi+2m\pi)x}{d}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-j\beta_n z} n\pi \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{(n\pi)^2 - (\phi + 2m\pi)^2}$$

Dessa forma, na superfície de separação, temos que:

$$E_y|_{z=0} = e^{-j\frac{\phi x}{d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{2m\pi x}{d}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{(n\pi)^2 - (\phi + 2m\pi)^2} n\pi B_n \quad (3-20)$$

A expressão associada a derivada parcial da componente tangencial de campo elétrico com relação a z na fronteira do meio B é dada por:

$$\left. \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{z=0} = -j e^{-j \frac{\phi x}{d}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j \frac{2m\pi x}{d}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{(n\pi)^2 - (\phi + 2m\pi)^2} n\pi \beta_n B_n \quad (3-21)$$

Expressando-se a continuidade das componentes na superfície de separação entre os meios, para $m = 0$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{(n\pi)^2 - (\phi)^2} n\pi B_n = 1 + A_0 \quad (3-22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{(n\pi)^2 - (\phi)^2} n\pi \beta_n B_n = -\alpha_0 + \alpha_0 A_0 \quad (3-23)$$

Expressando-se a continuidade das componentes na superfície de separação entre os meios, para $m \neq 0$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{(n\pi)^2 - (\phi + 2m\pi)^2} n\pi B_n = A_m \quad (3-24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{(n\pi)^2 - (\phi + 2m\pi)^2} n\pi \beta_n B_n = \alpha_m A_m \quad (3-25)$$

Eliminando-se as constantes A_0 e A_m entre estas expressões obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{(n\pi)^2 - \phi^2} \frac{\alpha_0 + \beta_n}{\alpha_0} n\pi B_n = 2 \quad (3-26)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{(n\pi)^2 - (\phi + 2m\pi)^2} \frac{\alpha_m + \beta_n}{\alpha_m} n\pi B_n = 0 \quad (3-27)$$

Utilizando-se das Equações (3-5) e (3-17) temos:

$$(n\pi)^2 - \phi^2 = (\alpha_0^2 - \beta_n^2) d^2 \quad (3-28)$$

$$(n\pi)^2 - (\phi + 2m\pi)^2 = (\alpha_m^2 - \beta_n^2) d^2 \quad (3-29)$$

Dessa forma, podemos escrever para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}]}{\beta_n - \alpha_0} n B_n = -\frac{2\alpha_0 d^2}{\pi} \quad (3-30)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}]}{\beta_n - \alpha_m} n B_n = 0 \quad (3-31)$$

Esta expressão determina a amplitude complexa B_n do campo transmitido. Deve ser observado que, se ambos os membros de cada expressão forem divididos pela distância d , os coeficientes destas, e o valor de B_n podem ser expressos em função apenas do ângulo de incidência θ_i e do índice de refração n_B . Podemos escrever, a partir das equações (3-1), (3-5), (3-10) e (3-17) que:

$$\phi = \beta d \operatorname{sen} \theta_i = \frac{\pi \operatorname{sen} \theta_i}{\sqrt{(1 - n_B^2)}} \quad (3-32)$$

$$\beta_n^2 = \beta^2 - \frac{n^2 \pi^2}{d^2} = \frac{\pi^2}{d^2} \left(\frac{1}{1 - n_B^2} - n^2 \right) \quad (3-33)$$

$$\alpha_m^2 = \beta^2 - \left(\frac{\phi + 2m\pi}{d} \right)^2 = \frac{\pi^2}{d^2} \left[\frac{1}{1 - n_B^2} - \left(\frac{\operatorname{sen} \theta_i}{\sqrt{1 - n_B^2}} + 2m \right)^2 \right] \quad (3-34)$$

A amplitude complexa A_m do campo refletido para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ pode ser deduzida a partir dos valores de B_n , manipulando-se as equações (3-24) e (3-25), sendo dada por:

$$A_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{(n\pi)^2 - \phi^2} \frac{\alpha_0 - \beta_n}{\alpha_0} n\pi B_n \quad (3-35)$$

$$A_m = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{(n\pi)^2 - (\phi + 2m\pi)^2} \frac{\alpha_m - \beta_n}{\alpha_m} n\pi B_n \quad (3-36)$$

Dessa forma, e utilizando as Equações (3-28) e (3-29), temos uma expressão única dada por:

$$A_m = \frac{\pi}{2d^2 \alpha_m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}}{\alpha_m + \beta_n} n B_n \quad (3-37)$$

A solução destas expressões será obtida nas seções posteriores.

3.3.2 Amplitudes Complexas das Ondas Transmitidas

Os valores complexos da amplitude B_n das ondas transmitidas é dado pela solução do sistema de equações obtido em (3-30) para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, descrito novamente abaixo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}]}{\beta_n - \alpha_0} n B_n = -\frac{2\alpha_0 d^2}{\pi}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}]}{\beta_n - \alpha_m} n B_n = 0$$

A forma destas equações sugere um método de solução baseado no teorema dos resíduos, aplicado a uma integral da forma:

$$\int_{C_s} \frac{g(w)}{(w - \alpha_m)} dw$$

onde, os pólos do integrando $\frac{g(w)}{(w - \alpha_m)}$ são os pontos $w = \beta_n$. Para sermos mais precisos, presume-se que a função $g(w)$, onde w é uma variável complexa, deve satisfazer três condições, descritas a seguir:

a A função $g(w)$ tem como zeros os pontos:

$$w = \alpha_m \quad \text{para } m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

e, para pólos simples, temos:

$$w = \beta_n \quad n = 1, 2, \dots$$

sendo estas as únicas singularidades. Em particular, $w = \alpha_0$ é um ponto ordinário de $g(w)$ como será visto no item c.

b Para qualquer valor de m , a integral de linha tende a zero a medida que s tende a infinito, sendo que a sequência de contornos fechados C_s é tal que cada contorno inclui o ponto $w = \alpha_0$ e os pontos $w = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ e não inclui os pontos $w = \beta_n$ para $n > s$.

c No ponto $w = \alpha_0$ temos:

$$g(\alpha_0) = \frac{2\alpha_0 d^2}{\pi}$$

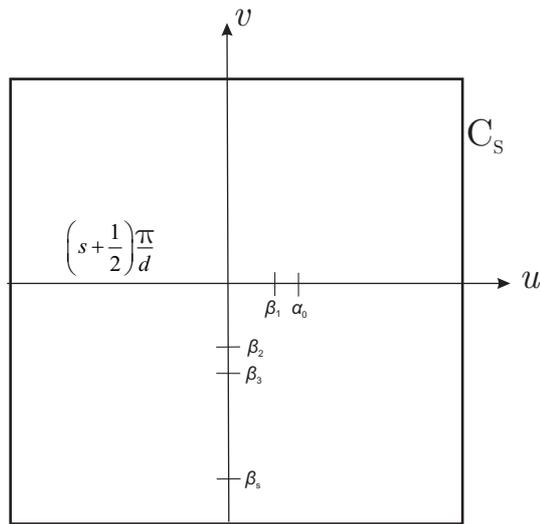


Figura 3.5: Diagrama de pólos e zeros.

A aplicação do teorema dos resíduos a integral fornece:

$$\int_{C_s} \frac{g(w)}{(w - \alpha_0)} dw$$

$$\int_{C_s} \frac{g(w)}{(w - \alpha_m)} dw$$

e da condição descrita no item *a* temos que:

$$\sum_{n=1}^s \frac{r(\beta_n)}{\beta_n - \alpha_0} + g(\alpha_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_s} \frac{g(w)}{w - \alpha_0} dw \tag{3-38}$$

$$\sum_{n=1}^s \frac{r(\beta_n)}{\beta_n - \alpha_m} = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_s} \frac{g(w)}{w - \alpha_m} dw \tag{3-39}$$

onde $r(\beta_n)$ é o resíduo de $g(w)$ em $w = \beta_n$. Temos a Figura 3.5, onde o contorno escolhido é um quadrado, $w = u + jv$, e pólos e zeros são apresentados.

Usando as condições descritas nos item *b* e *c* obtemos, para $s \rightarrow \infty$, que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(\beta_n)}{\beta_n - \alpha_0} = -\frac{2\alpha_0 d^2}{\pi}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(\beta_n)}{\beta_n - \alpha_m} = 0 \tag{3-40}$$

Para atender a condição física do problema, a Equação (3-30) deve ter apenas uma solução possível, e pela comparação desta com a Equação (3-40), temos:

$$[1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}] nB_n = r(\beta_n) \quad (3-41)$$

Portanto, a solução da Equação (3-30) reduz-se a obter uma função $g(w)$ que satisfaça as condições impostas pelos itens a , b e c . Para obtenção de tal função fez-se uso da teoria clássica das funções analíticas. O desenvolvimento desta teoria é um tanto quanto longo e apenas seu resultado será explicitado. A função $g(w)$ é dada por [3]:

$$g(w) = \frac{2d^2\alpha_0}{\pi} \frac{e^{j\frac{dw\log 2}{\pi}} \prod_{m=-\infty}^{\infty} ' - j\frac{d}{|2m\pi|} (w - \alpha_m) e^{j\frac{dw}{|2m\pi|}}}{e^{j\frac{d\alpha_0\log 2}{\pi}} \prod_{m=-\infty}^{\infty} ' - j\frac{d}{|2m\pi|} (\alpha_0 - \alpha_m) e^{j\frac{d\alpha_0}{|2m\pi|}} \prod_{n=1}^{\infty} -j\frac{d}{n\pi} (\alpha_0 - \beta_n) e^{j\frac{d\alpha_0}{n\pi}} \prod_{n=1}^{\infty} -j\frac{d}{n\pi} (w - \beta_n) e^{j\frac{dw}{n\pi}} \quad (3-42)$$

onde as aspas no primeiro produtório é um indicativo de que $m = 0$ deve ser omitido. A convergência desta expressão depende de como w é tratado para satisfazer a condição do item a , do fator $e^{j\frac{dw\log 2}{\pi}}$ para satisfazer a condição b , e do fator constante $j\frac{d^2\alpha_0}{\pi}$ e um produtório infinito independente de como w foi tratado para satisfazer o item c . Os resíduos de $g(w)$ nos pontos $w = \beta_N$ sendo $N = 1, 2, \dots$, obtidos nas equações (3-42) e (3-41), são:

$$[1 + (-1)^{N+1} e^{j\phi}] B_N = j \frac{2d\alpha_0}{e^{j\frac{d\beta_N}{N\pi}} e^{j\frac{d\alpha_0\log 2}{\pi}}} \frac{\prod_{m=-\infty}^{\infty} ' - j\frac{d}{|2m\pi|} (\beta_N - \alpha_m) e^{j\frac{d\beta_N}{|2m\pi|}}}{\prod_{m=-\infty}^{\infty} ' - j\frac{d}{|2m\pi|} (\alpha_0 - \alpha_m) e^{j\frac{d\alpha_0}{|2m\pi|}} \prod_{n=1}^{\infty} -j\frac{d}{n\pi} (\alpha_0 - \beta_n) e^{j\frac{d\alpha_0}{n\pi}} \prod_{n=1}^{N-1} -j\frac{d}{n\pi} (\beta_N - \beta_n) e^{j\frac{d\beta_N}{n\pi}} \prod_{n=N+1}^{\infty} -j\frac{d}{n\pi} (\beta_N - \beta_n) e^{j\frac{d\beta_N}{n\pi}} \quad (3-43)$$

Esta expressão é solução da Equação (3-30).

3.3.3 Amplitudes Complexas das Ondas Refletidas

O valor do somatório associado as amplitudes complexas A_m dos campos refletidos dado na Equação (3-37) podem ser obtidos de um procedimento similar ao utilizado na Seção (3.3.2). Mantendo-se a notação utilizada, consideremos a integral de linha:

$$\int_{C_s} \frac{g(w)}{(w - \alpha_M)} dw$$

onde $M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ é um inteiro qualquer. O integrando tem no interior do seu contorno C_s pólos simples em $w = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, e também, para s muito grande, um pólo simples em $w = -\alpha_M$. Portanto, utilizando-se do teorema dos resíduos, temos que:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_s} \frac{g(w)}{(w - \alpha_M)} dw = \sum_{n=1}^s \frac{r(\beta_n)}{\alpha_M + \beta_n} + g(-\alpha_M)$$

onde, como na Seção (3.3.2), $r(\beta_n)$ é o resíduo de $g(w)$ no ponto $w = \beta_n$. Para $s \rightarrow \infty$ temos:

$$\left| \int_{C_s} \frac{g(w)}{(w - \alpha_M)} dw \right| \rightarrow \infty$$

E dessa forma:

$$g(-\alpha_M) = - \sum_{n=1}^s \frac{r(\beta_n)}{\alpha_M + \beta_n}$$

que pelo uso da Equação (3-41), pode ser reescrito como:

$$g(-\alpha_M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{n+1} e^{j\phi}] n B_n}{\alpha_M + \beta_n} \quad (3-44)$$

Pela comparação da Equação (3-44) com (3-37) obtém-se:

$$A_M = - \frac{\pi}{2d^2 \alpha_M} g(-\alpha_M)$$

onde a função $g(w)$ é dada pela Equação (3-42), e, desta forma, temos que:

$$A_M = -\frac{\alpha_0}{\alpha_M} \frac{e^{-j\frac{d\alpha_M \log 2}{\pi}}}{e^{j\frac{d\alpha_0 \log 2}{\pi}}} \frac{\prod_{m=-\infty}^{\infty} 'j\frac{d}{|2m\pi|} (\alpha_M + \alpha_m) e^{-j\frac{d\alpha_M}{|2m\pi|}}}{\prod_{m=-\infty}^{\infty} ' -j\frac{d}{|2m\pi|} (\alpha_0 - \alpha_m) e^{j\frac{d\alpha_0}{|2m\pi|}}} \frac{\prod_{n=1}^{\infty} -j\frac{d}{n\pi} (\alpha_0 - \beta_n) e^{j\frac{d\alpha_0}{n\pi}}}{\prod_{n=1}^{\infty} j\frac{d}{n\pi} (\alpha_M + \beta_n) e^{j\frac{d\alpha_M}{n\pi}}} \quad (3-45)$$

para $M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

3.3.4

Coeficientes de Reflexão e Transmissão de Potência e Deslocamento de Fase

As formulações obtidas para as amplitudes complexas das ondas refletidas na Equação (3-43) e transmitidas na Equação (3-45) fornecem todas as características físicas de propagação. Em particular, é possível deduzir, a partir destas fórmulas, os deslocamentos de fase e os coeficientes de potência das ondas refletidas e transmitidas, sendo estes últimos deduzidos com o auxílio do teorema de *Poynting*. A dedução é simples e somente o resultado final é dado na Tabela (3.1).

Algumas definições serão declaradas mais formalmente para um completo entendimento. O coeficiente de reflexão R_0 , associado a $m = 0$, é a razão entre o fluxo de energia transportado pela onda refletida através da área S na superfície de separação, e o correspondente fluxo de energia da onda incidente, tomado durante um período de oscilação. A superfície S é um retângulo entre duas placas consecutivas.

Uma definição similar é utilizada para o coeficiente de reflexão R_{-1} , associado a $m = -1$, e para o coeficiente de transmissão T associado com a onda transmitida TE_{01} . O deslocamento de fase da onda refletida ϕ_0 é igual a fase do campo elétrico da onda refletida para $m = 0$ no ponto J na superfície de separação, menos a fase do campo elétrico no mesmo ponto.

Definição similar é aplicada ao deslocamento de fase da onda refletida ϕ_{-1} associada a onda refletida para $m = -1$, e para o deslocamento de fase da onda transmitida ϕ_t associado a onda transmitida TE_{01} , sendo o ponto J tomado na superfície de separação entre as placas e equidistante a duas placas adjacentes. É necessário especificar a posição do ponto J pois as fases das ondas incidentes e refletidas variam a diferentes taxas ao longo da superfície de separação, portanto, o deslocamento de fase será diferente em cada ponto.

As curvas das figuras (3.6) à (3.9) expressam a variação de T , ϕ_t , R_0 , R_{-1} , $|A_{-1}|^2$, θ_i para $m = -1$, ϕ_0 e ϕ_{-1} com o ângulo de incidência θ_i e o índice

Caso a) $\text{sen } \theta_i < 2(1 - n_B^2)^{1/2} - 1$ Uma onda não evanescente sendo refletida	Caso b) $\text{sen } \theta_i > 2(1 - n_B^2)^{1/2} - 1$ Duas ondas não evanescentes sendo refletidas
$T^* = \frac{n_B}{2 \cos \theta_i} B_1 ^2 = \frac{4n_B \cos \theta_i}{(n_B + \cos \theta_i)^2}$	$T = \frac{n_B}{2 \cos \theta_i} B_1 ^2$ $= \frac{4n_B \cos \theta_i}{(n_B + \cos \theta_i)^2} \frac{n_B - \cos \theta_{-1}}{n_B + \cos \theta_{-1}} \frac{\cos \theta_0 + \cos \theta_{-1}}{\cos \theta_0 - \cos \theta_{-1}}$
$R_0 = A_0 ^2 = \left(\frac{\cos \theta_i - n_B}{\cos \theta_i + n_B} \right)^2$ $T + R_0 = 1$	$R_0 = A_0 ^2$ $= \left(\frac{\cos \theta_i - n_B}{\cos \theta_i + n_B} \right)^2 \left(\frac{\cos \theta_0 + \cos \theta_{-1}}{\cos \theta_0 - \cos \theta_{-1}} \right)^2$ $R_{-1} = A_{-1} ^2 \frac{\cos \theta_{-1}}{\cos \theta_i}$ $= \left(\frac{4 \cos \theta_0 \cos \theta_{-1}}{\cos \theta_0 - \cos \theta_{-1}} \right)^2 \frac{\cos \theta_0 - n_B}{\cos \theta_0 + n_B} \frac{n_B - \cos \theta_{-1}}{n_B + \cos \theta_{-1}}$ $T + R_0 + R_{-1} = 1$
$\varphi_t^{**} = \angle B_1 + \frac{\varphi}{2}$ $= \tan^{-1} \frac{\alpha_0}{ \alpha_{-1} } - \tan^{-1} \frac{\beta_1}{ \alpha_{-1} }$ $+ \sigma(\alpha_0) - \sigma(\beta_1)$ $\simeq \tan^{-1} \frac{\alpha_0}{ \alpha_{-1} }$ $- \tan^{-1} \frac{\beta_1}{ \alpha_{-1} } + \sigma_3(\alpha_0)$ $- \sigma_3(\beta_1) + \rho(\alpha_0) - \rho(\beta_1)$	Para este caso aplica-se a mesma expressão omitindo-se os termos trigonométricos. $\varphi_t = \sigma_3(\alpha_0) - \sigma_3(\beta_1) + \rho(\alpha_0) - \rho(\beta_1)$
$\varphi_0 = \angle A_0 = 2 \tan^{-1} \frac{\alpha_0}{ \alpha_{-1} } + 2\sigma(\alpha_0)$ $\simeq 2 \tan^{-1} \frac{\alpha_0}{ \alpha_{(-1)}} + 2\sigma_3(\alpha_0) + 2\rho(\alpha_0)$	$\varphi_0 = \angle A_0 = \pi + 2\sigma(\alpha_0)$ $\simeq \pi + 2\sigma_3(\alpha_0) + 2\rho(\alpha_0)$ $\varphi_{-1} = \angle A_{-1} + \pi$ $= \sigma(\alpha_0) + \sigma(\alpha_{-1})$ $\sigma_3(\alpha_0) + \sigma_3(\alpha_{-1}) + \rho(\alpha_0) + \rho(\alpha_{-1})$

Tabela 3.1: Coeficientes de Reflexão, Transmissão e Deslocamento de Fase.

de refração n para o sistema de placas.

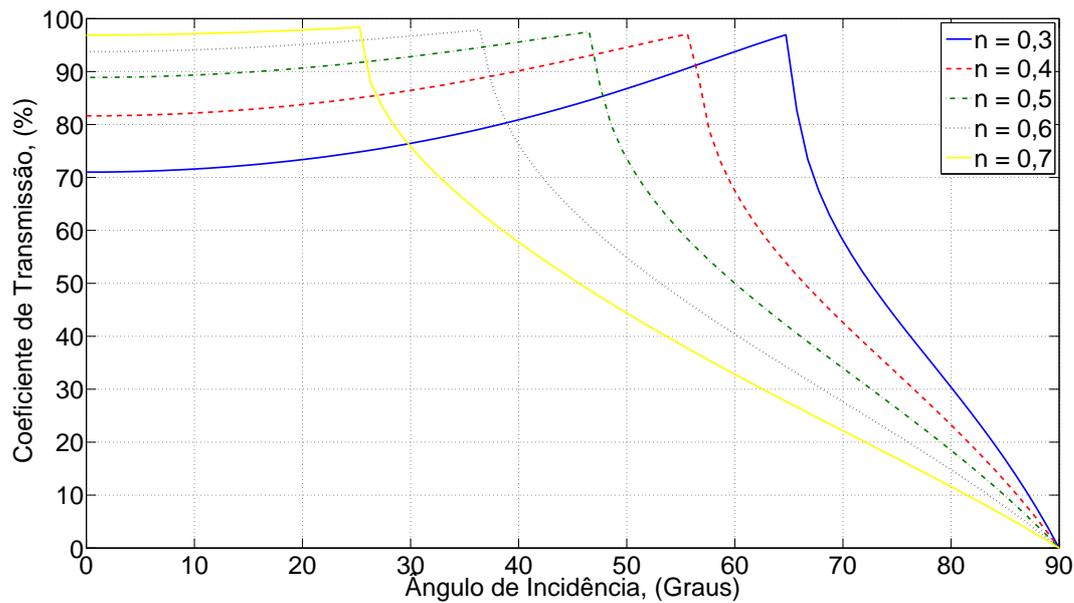


Figura 3.6: Variação do Coeficiente de Transmissão com o Ângulo de Incidência.

Para todos os casos uma descontinuidade repentina ocorre para o ponto correspondente ao surgimento da segunda onda não evanescente. Estes pontos são observados tanto nos gráficos que ilustram o comportamento dos coeficientes de potência quanto no deslocamento de fase. Uma mudança abrupta ocorre quando a segunda onda não evanescente refletida aparece, ou seja, para $m = -1$. Devido ao aumento da potência total refletida, o coeficiente de transmissão decai rapidamente na região em que duas ondas não evanescentes são refletidas, como mostra a Figura (3.6). O sistema de placas metálicas paralelas pode ter propriedades interessantes em certas regiões, atuando como um refletor ou uma lente.

Conclusão

Pelas considerações realizadas temos que o problema de reflexão e refração de microondas em um conjunto de placas metálicas paralelas pode ser resolvido de forma simples para o caso em que as placas são perpendiculares à superfície de separação entre os meios. Entretanto, é necessário resolver um conjunto infinito de equações lineares com infinitas incógnitas, que, pelo método dos resíduos, pode ser resolvido de forma exata.

As deduções físicas obtidas podem ser resumidas da seguinte forma: As ondas refletidas obtidas seguem a lei usual e até o número e direção são

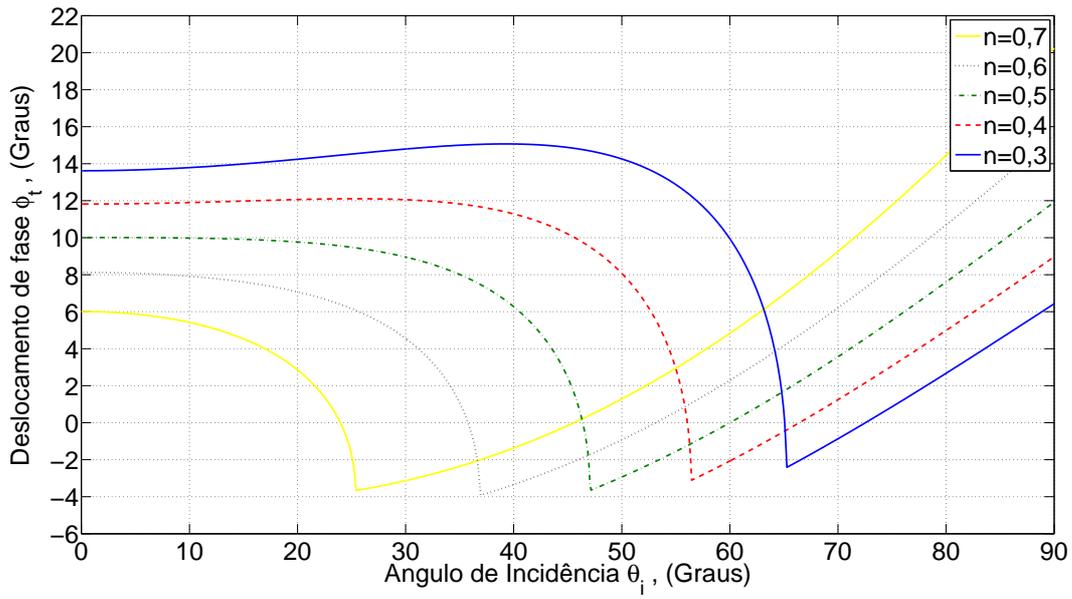


Figura 3.7: Deslocamento de fase na Transmissão.

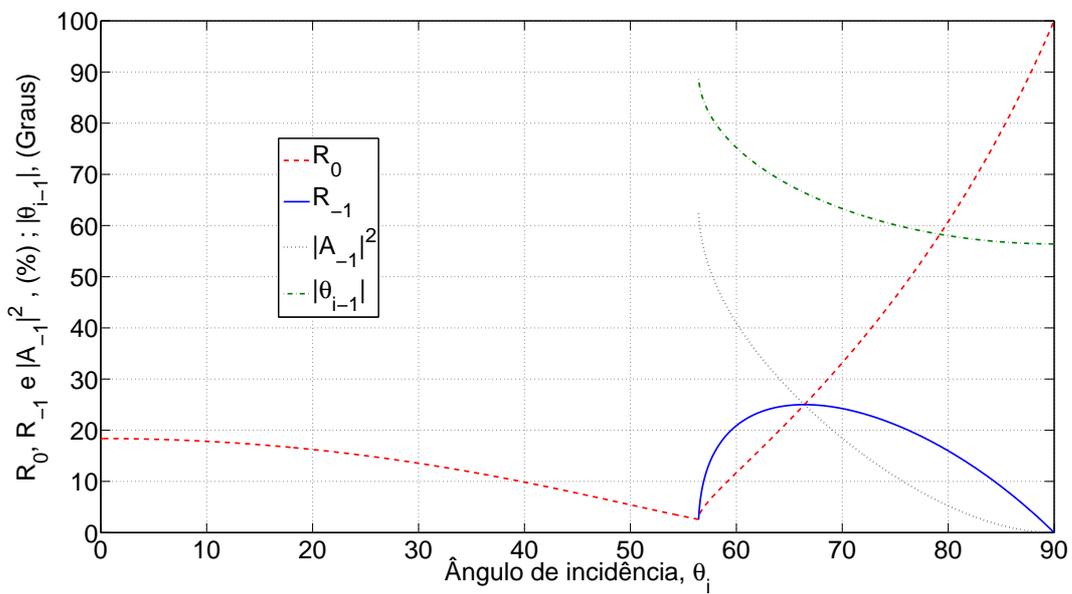


Figura 3.8: Variação da ondas refletidas e ângulo de reflexão para $n = 0, 4$.

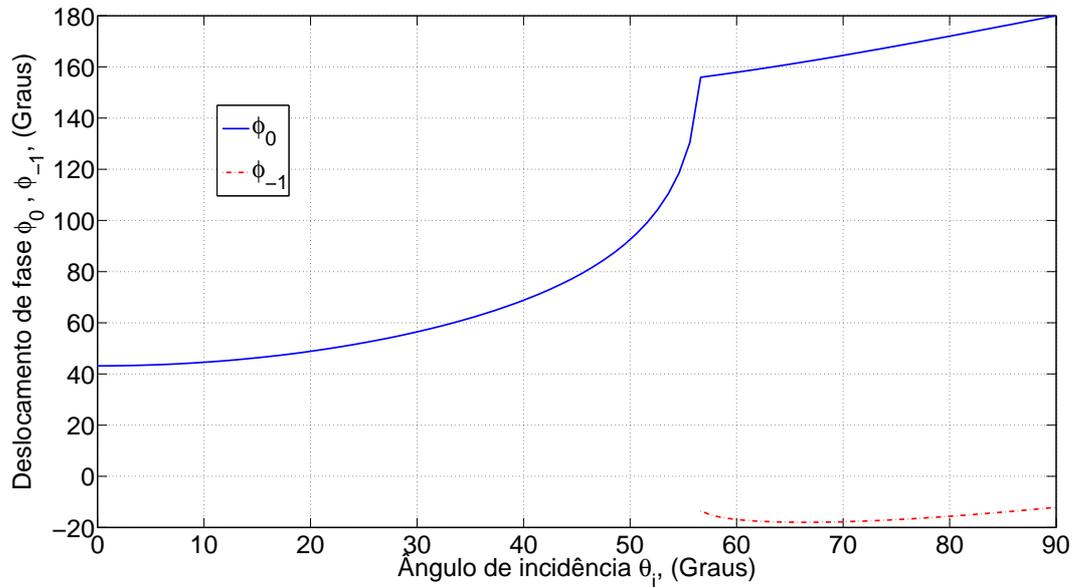


Figura 3.9: Deslocamento de fase das ondas refletidas para $n = 0, 4$.

coerentes. Os coeficientes de potência e deslocamento de fase são dados em forma de tabela e gráficos.

Existe apenas uma onda refletida não evanescente para os diversos ângulos de incidência. Para estes ângulos, o coeficiente de transmissão é elevado, com um máximo de 99,5%, sendo que o deslocamento de fase não excede 12° para $n = 0, 4$, como visto na Figura (3.7). Isto sugere que o sistema de placas paralelas pode ser utilizado como um prisma ou lente, com uma grande abertura e forte ação refrativa.